Иркутский государственный университет
ИМЭИ ИГУ
Кафедра алгебры и геометрии

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ
Методические указания

г. Иркутск

Печатается по решению научно-методического совета
Иркутского государственного университета

Содержит необходимый теоретический материал, подробное решение задач. Варианты семестровых заданий курса «Аналитическая геометрия»

Предназначена для студентов математического факультета. Могут быть использованы для самостоятельного изучения студентами младших курсов факультетов с небольшой программой по математике

Илл.23
Табл.8

Составлен: к.ф.-м.н., доцент Машанов В.И., ст. преп. Шеметова Л.Н.

.

Содержание

1.Примая на плоскости

Простейшим, впервые исследованным было уравнение Ax+By+C=0, определяющая на плоскости (прямую) линию, поэтому исторически возникла традиция уравнения и системы уравнений первой степени называть линейными. В данном пособии будут рассмотрены геометрические образы, определённые такими уравнениями.

Основным аппаратом будут методы векторной алгебры, в основном это следующие предложения:

-два вектора коллинеарны (параллельны) только тогда, когда они линейно зависимы;

-три вектора компланарны (соплоскостны) только тогда, когда они линейно зависимы;

-если векторы линейно зависимы, то в такой же линейной зависимости находятся их соответствующие координаты.

Кроме того необходимо твёрдое знание определений скалярного произведения

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b}),$$

векторного

1) $[\overline{a},\overline{b}]\perp\overline{a},\overline{b}$;

2) тройка $\{\overline{a},\overline{b}[\overline{a},\overline{b}]\}$ ориентированная, как базисная тройка $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$;

3) $[\overline{a},\overline{b}]=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\sin\varphi$,

смешенного произведения и вычисленных формул

$$\left(\overline{ab}\right)=\sum_i a_i b_i\ ,$$

$$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix},$$

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

где векторы даны своими координатами $\overline{a}\,(a_i),\ \overline{b}\,(b_i),\ \overline{c}\,(c_i)$ в декартовой системе координат (д.с.к).

Изложение аналитической геометрии кривых на плоскости подробно, так как имеет целью приучить к векторным методам рассмотрения соответствующих задач.

Основным здесь будет понятие годографа вектора функции $\overline{M}=\overline{M(t)}$ одного аргумента или $\overline{M}=M\overline{(u,v)}$ - вектор функции двух аргументов; в первом случае годографом - геометрическим местом концов радиус-векторов M(t) –будет линия, во втором случае получаем поверхность. Случай линейности соответствующих вектор -функций $\overline{M(t)},\ M\overline{(u,v)}$ относительно аргументов и будет предметом рассмотрения.

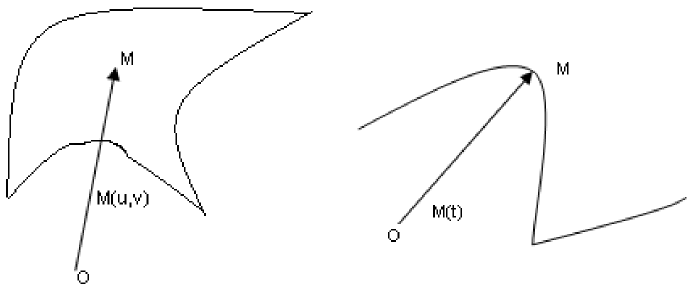


Рис.1

1.1 Уравнение прямой на плоскости по точке и направляющему вектору

Точку M, заданную радиусом- вектором $\overline{M}$, будем записывать так $M(\overline{M})$, тогда произвольная (говорят «текущая») точка прямой будет $M(\overline{M})$. Из условия коллинеарности $\overline{MM'} = \overline{M} - \overline{M'} \parallel \bar{l}$, следует их линейная зависимость

$\overline{M} - \overline{M'} = t \cdot \bar{l}$, где t коэффициент этой зависимости.

Получаем линейную вектор функцию

$$\overline{M} = \overline{M'} - t \cdot \bar{l}, \qquad (1)$$

годографом, которой и является данная прямая. Полученное уравнение будем называть **векторным уравнением прямой.**

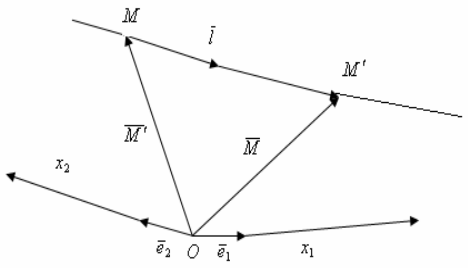


Рис.2

Пусть в аффинной системе координат (а.с.к) $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ точки и вектор $\bar{l}$ заданы координатами:

$M'(x_1', x_2'), M(x_1, x_2), \bar{l}(m, n).$ Так как координаты точки Называются координатами её радиус- вектора, то это эквивалентно заданию векторов

$\overline{M'}(x_1', x_2'), \overline{M}(x_1, x_2)$ и из линейной зависимости (1) векторов следует линейная зависимость координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + t \cdot m, \\ x_2 &= x_2' + t \cdot n \end{aligned} \qquad (2)$$

Эти уравнения называются **параметрическими уравнениями прямой.** Изменяя параметр t в пределах $-\infty < t < \infty$ получим все точки прямой. Иногда желательно избавиться от этого вспомогательного параметра. Для этого находим

$t = \dfrac{(x_1 - x_1')}{m}, t = \dfrac{(x_2 - x_2')}{n}$, что даёт соотношение

$$\frac{(x_1 - x_1')}{m} = \frac{(x_2 - x_2')}{n} \qquad (3)$$

называемоё каноническим уравнением прямой.

В д.с.к. по точке $M_0(x_0, y_0)$ и вектору $\bar{l}(m,n)$ каноническое уравнение записывается в виде

$$\frac{(x-x_0')}{m}=\frac{(y-y_0)}{n} \qquad (3а)$$

Если даны точки $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$, то берём

$$\bar{l}=\overline{M}_1\overline{M}_2=(x_2-x_1, y_2-y_1)$$

Каноническое уравнение принимает вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

(3б)

Если в уравнении (3) освободиться от знаменателей, то получим уравнение первой степени

$n\cdot x_1-m\cdot x_2+(m\cdot x_2-n\cdot x_1)=0,$ то есть уравнение вида

$$a_1x_1+a_2x_2+a_0=0$$

(4)

Из сравнения с предыдущим уравнением получаем важное для решения задач свойство:

$\bar{l}(a_2,-a_1)\parallel$ прямой (4).

(5)

В д.с.к. уравнение прямой записывается обычно в виде

Ax+By+C =0

и называется **общим уравнением прямой.** В этом случае, как это следует из формулы (5), направляющим является вектор $\bar{l}(B,-A)$.

1.2 Уравнение прямой по точке и перпендикулярному вектору

Задачи, связанные с вычислениями расстояний, углов, а значит и с условиями перпендикулярности, называется метрическими и решаются до конца по координатам данных лишь в д.с.к.

Пусть в д.с.к. задана точка $M_0(\overline{M}_0)$ и вектор $\overline{N}$, перпендикулярный прямой. Искомое условие на радиус- вектор $\overline{M}$ текущей точки имеет вид $(\overline{N}, \overline{M} - \overline{M}_0) = 0.$

При координатном задании $M_0(x_0, y_0), M(x, y), \overline{N}(A, B)$, получаем уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

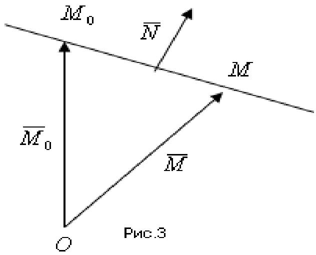


Рис.3

называемое, как и первое, **уравнением прямой по точке и перпендикулярному вектору**. Практически же удобнее пользоваться формой

$$A \cdot x + B \cdot y - (A \cdot x_0 + B \cdot y_0) = 0 .$$

Итак, мы не только получили снова общее уравнение Ax+By+C=0 прямой в д.с.к., но и выяснили геометрический смысл коэффициентов при x и y:

$\overline{N}(A, B) \perp$ прямой.

Пример. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M_0 (2,-3) на прямую 4x-5y+7=0.

Вектор $\overline{N}$ (4,-5) является направляющим для перпендикуляра, поэтому записываем каноническое уравнение

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-5} .$$

Ответ всегда записывается в общем виде: 5x+4y+2=0.

1.3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Из общего уравнения

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0$$

можем получить равносильное

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1} x_2 - \frac{a_0}{a_1}$$

$(a_1 \neq 0)$,

либо

$$x_2 = -\frac{a_1}{a_2} x_1 - \frac{a_0}{a_2}$$

$(a_2 \neq 0)$

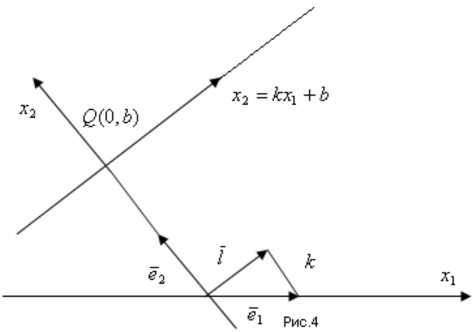


Рис.4

Воспользуемся вторым, переобозначив коэффициенты:

$$x_2 = k \cdot x_1 + b.$$

Геометрический смысл величины b ясен: точка Q(0,b) пересечения прямой с осью Ox_2 определяет величину b, которую потому называют **начальной ординатой прямой**. Следующее предложение характеризует величину k в а.с.к

Теорема. $\bar{l}(1,k) \parallel$ прямой

Действительно

$$\overline{Q}\overline{M} = (x_1 - 0, x_2 - b) = (x, kx_1) = x_1(1,k) \parallel \bar{l}(1,k)$$

В д.с.к. геометрический смысл коэффициента k еще яснее: он равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс $k = tg\alpha$

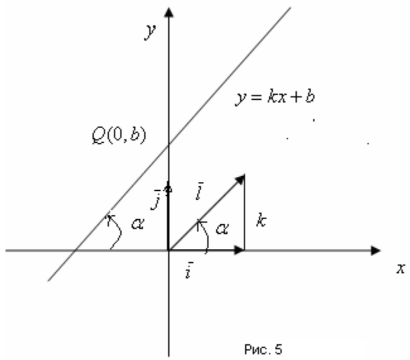


Рис. 5

Пример. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(5,7)$, под углом 30° к прямой $\sqrt{3}x - 7 = 0$

Записывая уравнение в виде

$y=\sqrt{3}x-7,$ получаем $k=tg\alpha=\sqrt{3}$.

Искомые прямые образуют с осью Ox

углы $\alpha\pm30^{\circ}$, следовательно,

$$k_{1,2}=tg(\alpha\pm30^{\circ})=\frac{tg\alpha\pm tg30^{\circ}}{1\mu\cdot tg\alpha\cdot tg30^{\circ}}=\frac{\sqrt{3}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}{1\mu1}$$

Итак, $k_1=\infty, k_2=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Первая прямая, параллельна оси Oy, имеет уравнение x-5=0, вторая $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$. Подставив координаты точки M_0, найдем коэффициент b.

1.4 Угол между двумя прямыми

1. Прямые $\begin{matrix}\overline{M}=\overline{M}_1+t\cdot\bar{l}_1\\ \overline{M}=\overline{M}_2+\tau\cdot\bar{l}_2\end{matrix}$,

Заданные векторным уравнением, определяют ориентированный угол $\varphi=(\widehat{\bar{l}_1,\bar{l}_2})$ вычисляющийся по формуле

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{l}_1,\bar{l}_2)}{\left|\bar{l}_1\right|\cdot\left|\bar{l}_2\right|}$$

Очевидны условия $(\bar{l}_1,\bar{l}_2)=0$ перпендикулярности и $\bar{l}_1=\lambda\cdot\bar{l}_2$ параллельности прямых

2. Прямые заданные уравнениями $\begin{matrix}y=k_1x+b_1\\ y=k_2x+b_2\end{matrix}$,

определяют ориентированный угол φ. Как внешний угол треугольника $\alpha_2=\alpha_1+\varphi$, значит $\varphi=\alpha_2-\alpha_1, tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)$.

вычисляя и подставляя $tg\alpha_1 = k_1, tg\alpha_2 = k_2$, получаем

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_2 k_1}.$$

Запишем условия параллельности: $k_1 = k_2$

и условие перпендикулярности прямых $k_2 = \frac{1}{k_1}$

3. Для прямых заданных общим уравнениями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad \overline{N}_1(A_1, B_1),$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad \overline{N}_2(A_2, B_2)$$

любой из углов между прямыми связан с углом между векторами $\overline{N}_1, \overline{N}_2$ соотношением $\varphi = (\overline{N}_1, \hat{\overline{N}}_2)$, либо $\varphi + (\overline{N}_1, \hat{\overline{N}}_2) = \pi$, согласно известной теореме об углах со взаимно перпендикулярными сторонами, поэтому

$$\cos\varphi = \pm \frac{(\overline{N}_1, \overline{N}_2)}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|}$$

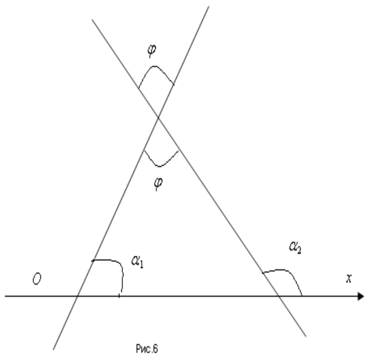


Рис.6

Условие параллельности $\overline{N}_1 = \lambda \cdot \overline{N}_2$ или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ этих векторов есть условие параллельности прямых. Аналогично получаем условие перпендикулярности прямых:

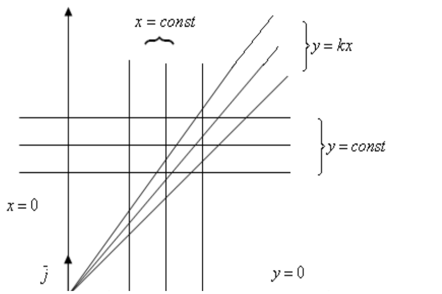
$(\overline{N}_1, \overline{N}_2)$=0 или $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

1.5 Исследование общего уравнения

Задачей является рассмотрение положения прямой при различных значениях коэффициентов её уравнения Ax+By+C=0.

1.А=0. Остается неполное уравнение $y = -\frac{C}{B}$ или y=const. Получаем при различных значениях постоянной линии, параллельные оси Ох. В частном случае, при y=0(C=0) получаем ось Ох.

2.В=0. Аналогично предыдущему получаем семейство параллельных оси Оу линий, определяющихся неполным уравнением Ах+С=0, в частном случае саму ось Оу. Для решения важно запомнить вывод: Если в уравнении отсутствует какая- либо координата, то прямая параллельная соответствующей оси.



Совокупность линий x=const, y=const называется **координатной сетью.** В а.с.к. координатная сеть имеет вид(см.рис.8)

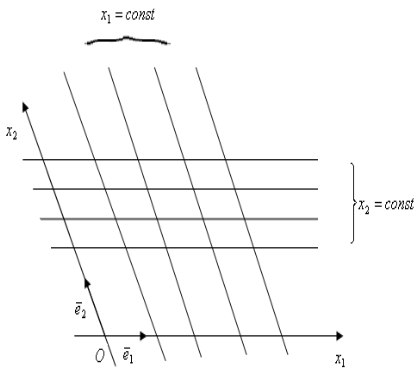


Рис.8

3. С=0. Получаем множество прямых проходящих через начало координат.

3. А=В=0,С≠0. Получаем уравнение С=0 Геометрический смысл которого выясним в следующем разделе.

1.6 Уравнение прямой в отрезках

Уравнение Ax+By+C=0 при A*B*C≠0 можно привести к виду

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1 \text{ или}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$.Из чертежа ясен геометрический смысл значений a,b как взятых с определенным знаком отрезков, отсекаемых на осях координат. Поэтому уравнение называется **уравнением в отрезках.**

Если в общем уравнении A,B→0,C≠0, то a,b→∞. Следовательно, получаем бесконечно удаленную прямую плоскости.

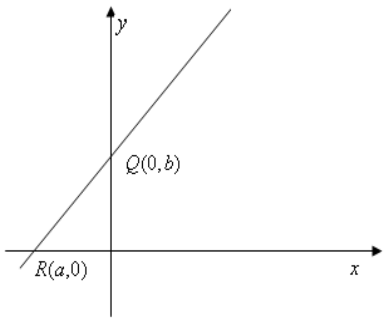


Рис.9

Пример. Построить в д.с.к. прямую 3x-5y-12=0.

Очевидно, точки пересечения с осями координат x=0, $y=-\frac{12}{5}$ и x=4,y=0.

По этим точкам строим прямую. Уравнение в отрезках данной прямой имеет вид

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-\frac{12}{5}}=1$$

Пример. Записать все известные виды уравнений прямой по точке $M_0(2,-1)$ и перпендикулярному вектору $\overline{N}(3,5)$. Как обычно получаем уравнение 3(x-2)-5(x-11)=0,

отсюда общее 3x-5y-11=0,

уравнение в отрезках $\frac{x}{\frac{11}{3}}+\frac{y}{-\frac{11}{5}}=1$, уравнение с угловым коэффициентом $y = \frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$.

Находим направляющий вектор $\bar{l}(1, \frac{3}{5}) \parallel (5,3)$ и записываем каноническое уравнение

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{3},$$

векторное $\overline{M} = \overline{M}_0 + t \cdot \bar{l}$ или $\overline{M} = 2i - j + t(5i + 3j)$. Можно записывать его и в виде $\overline{M} = (2,-1) + t(5,3)$ осталось записать параметрическое: $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$

1.7 Нормальное уравнение прямой

Из рисунка 10 видно, что задание перпендикуляра OP, опущенного из начала д.с.к. на прямую, вполне определяет эту прямую. Для его задания надо знать его направление $\bar{n}$, причем будем считать $|\bar{n}| = 1$, и длину OP=p. Воспользуемся уравнением $(\overline{N}, \overline{M} - \overline{M}_0) = 0$ прямой по точке M_0 возьмем основание P перпендикуляра, тогда $\overline{P} = p\bar{n}$ и уравнение имеет вид

$$(\bar{n}, \overline{M} - p\bar{n}) = 0 \text{ или}$$

$$(\bar{n}, \overline{M}) - p = 0.$$

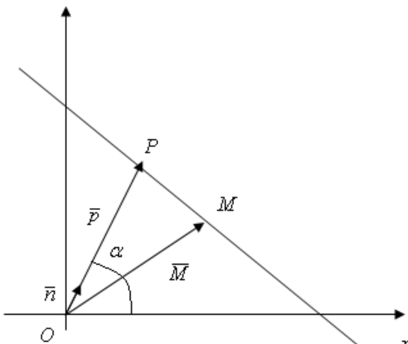


Рис.10

Полученное уравнение называется **нормальным уравнением прямой в векторной форме** . Что бы перейти к координатам, достаточно заметить, что в силу условия

$|\overline{n}|=1$ его координаты (проекции на оси) определяются углом α с осью Ох: $\overline{n}(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Текущая точка М имеет координаты её радиус-вектора $\overline{N}(x,y)$. Получаем **нормальное уравнение прямой**:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0$$

Вторая задача этого параграфа состоит в том, чтобы найти способ из общего уравнения Ax+By+C=0, $\overline{N}(A,B)$, получить нормальное . Запишем уравнение в следующем виде $(\overline{N},\overline{M})+C=0$ и умножим на λ: $(\lambda \cdot \overline{N},\overline{M})+\lambda \cdot C=0$

Что бы это уравнение было нормальным, должны выполняться условия

$$|\lambda \cdot \overline{N}| = |\lambda| \cdot |\overline{N}| = |\overline{n}| = 1,\ \lambda \cdot C = -p < 0$$

Итак $\lambda = \dfrac{1}{\pm|\overline{N}|}, \lambda \cdot C < 0.$

Пример. Записать уравнение 3x-4y+12=0 в нормальной форме.

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{\pm 5}, \lambda \cdot 12 < 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$$

Нормальное уравнение имеет вид:

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5} = 0$$

Удобнее его при решении записывать в виде: $\dfrac{3x-4y-12}{-5}=0$

1.8 Расстояние от точки до прямой

Пусть дана точка $M_0(\overline{M}_0)$, не принадлежащая прямой, определенной гормональным уравнением

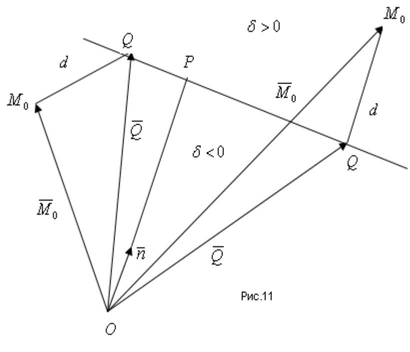


Рис.11

$(\overline{n},\overline{M})-p=0$ и находящейся на расстоянии d от прямой. В зависимости от положения точки M_0 вместе с началом O д.с.к. по одну или разные стороны от данной прямой получаем $\overline{OQ}=\overline{Q}=\overline{M}_0\pm d\cdot\overline{n}$. Так как точка Q лежит на прямой, то

$$(\overline{n}\overline{Q})-p=0.$$

Подставляя значения радиус- вектора $\overline{Q}$, получаем $(\overline{n}\overline{M}_0)\pm d-p=0$, следовательно

$$d=\mp\{(\overline{n}\overline{M}_0)-p\}=\left|(\overline{n}\overline{M}_0)-p\right|.$$

Если уберём компенсирующие знаки $\mp$, то получим величину расстояния со знаком

$$\delta=(\overline{n},\overline{M}_0)-p$$

называемую **отклонением точки от прямой**. Очевидно, что $\delta>0$ для точек M_0 в разных полуплоскостях и $\delta<0$ - в одной полуплоскости с началом O.

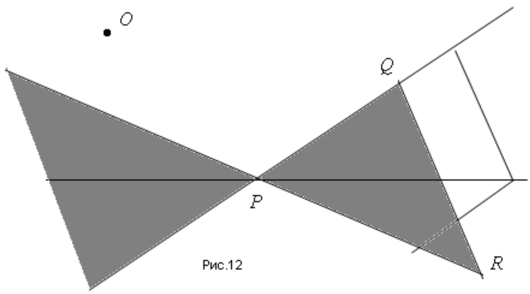


Рис.12

Сравнивая нормальные уравнения и отклонение δ, видим, что отклонение есть значение левой части нормального уравнения, вычисленное для данной точки.

Пример. Найти отклонение точки (1,2) от прямой 5x-12y-20=0.

$$\delta=\frac{5x-12y-16}{\sqrt{5^2+12^2}}\Bigg|_{M_0}=\frac{5-24-20}{13}=-3.$$ Итак, точка (1,2) и O лежат по одну сторону от прямой и d=3.

Пример. Найти уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника с вершинами P(1,1), Q(-3,4),R(7,9).

Находим уравнения прямых PQ 3x+4y-7=0, PR 4x-3y-1=0

Находим

$$\delta_{PR} = \frac{4x-3y-1}{5}\bigg|_{Q} = -5 < 0,$$

$$\delta_{PQ} = \frac{3x+4y-7}{5}\bigg|_{R} = 10 > 0$$

Следовательно, искомый угол (заштрихованный на рис.12), выделяется неравенствами

$\delta_{PR} < 0, \delta_{PQ} > 0.$ Найдем уравнение биссектрисы как геометрического места точек M(x,y) из условия $\delta_{PR} = -\delta_{PQ}$

$\dfrac{4x-3y-1}{5} = -\dfrac{3x+4y-1}{5}$ или 7x+y=0.

1.9 Пучок прямых

Пусть даны две прямые

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Составим уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (2)$$

При всяких значениях α, β получаем множество, строение которого зависит от взаимного положения данных прямых.

1. В случае $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, прямые пересекаются в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$, которая принадлежит прямой (2). Такое множество называется пучком пересекающихся прямых, точка $M_0(x_0, y_0)$ называется центром пучка.
2. Если даны параллельные несовпадающие прямые, то есть выполняются условие.

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то уравнение (2) при изменении α, β определяет множество параллельных прямых, которые будем называть пучком параллельных прямых.

3. В случае $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ пучок вырождается в одну неподвижную прямую.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящий через точку пересечения прямых 3x-2y+1=0, x+y-2=0 параллельную оси Ox.

Запишем уравнение пучка в упрощенном виде ($\lambda = \alpha : b$)

3x-2y+1+λ(x+y-2)=0, исключающим из рассмотрения вторую прямую пучка(так как второе уравнение не может быть получено ни при каких значениях λ). Уравнение искомой прямой, параллельной оси Ox , не должно содержать координаты x, поэтому 3+λ=0. Подставляя λ=-3 в уравнение пучка получаем уравнение -6y+7=0 искомой прямой.

Если задан центр $M_0(x_0, y_0)$ пучка, то уравнение пучка можно записать в виде

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \forall A : B,$ или в виде $(y - y_0) = k(x - x_0), \forall k$.

В последнем случае исключена из рассмотрения прямая $(x - x_0) = 0$ параллельная оси Oy.

2.Уравнение плоскости

2.1 Уравнение плоскости по точке и перпендикулярному вектору.

Искомое уравнение плоскости в векторной форме по точке $M_0(\overline{M}_0)$ вектору $\overline{N}$ имеет вид

$$(\overline{N}, \overline{M} - \overline{M}_0) = 0 \qquad (1)$$

Если заданы координаты $M_0(x_0, y_0, z_0), \overline{N}(A, B, C)$, получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

Раскрывая скобки, получаем общее уравнение

Ax+By+Cz+D=0 (3)

Пример. Найти уравнение плоскости по трём точкам P(2,-1,3),Q(0,1,2),R(4,5,3).

Прямой путь- подставить координаты точек в уравнение (3) и решить систему, получив A,B,C,D. Проще найти перпендикулярный вектор

$$\overline{N} = \left[\overline{PQ}, \overline{PR}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (6, -2, -16) \parallel (3,\text{-}1,\text{-}8)$$ и записать

уравнение (2) в виде

Ax+Dy+Cz-($Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$. Получаем 3x-y-8z+17=0.

2.2 Уравнение плоскости по точке и направляющим векторам

Векторное уравнение имеет вид

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + u\overline{a} + v\overline{b}, \qquad (1)$$

где $\overline{M}_0$- радиус-вектор данной точки,$\overline{a}, \overline{b}$ -векторы, параллельные плоскости. Они называются **направляющими векторами** и должны быть непараллельны. Если даны координаты $M_0(x_0, y_0, z_0), \overline{a}(a_1, a_2, a_3), \overline{b}(b_1, b_2, b_3)$, то

$$\overline{M} = (x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k} + u(a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}) + v(b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + +b_3\overline{k})$$

или, проще,

$$\overline{M} = (x_0, y_0, z_0) + u(a_1, a_2, a_3) + v(b_1, b_2, b_3).$$

Отсюда можно получить и параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v \end{cases}$$

Из условия (1) можно получить уравнение $(\overline{M} - \overline{M}_0, \overline{a}\overline{b}) = 0$

или подробнее , $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$

Раскрыв его, получим общее уравнение плоскости. Однако, это не лучший способ вычисления этого уравнения. Гораздо проще найти $\overline{N}\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ и записать уравнение плоскости по точке и перпендикулярному (нормальному) вектору.

2.3 Исследование уравнений плоскости

Задача состоит в выявлении положения плоскости в зависимости от значений коэффициентов общего уравнения Ax+By+Cz+D=0.

1. A=0. Неполное уравнение By+Cz+D=0 определяет плоскость, параллельную оси Ox(см. рис 13)
2. B=0. Читателю пояснить самостоятельно.
3. C=0. Читателю пояснить самостоятельно.

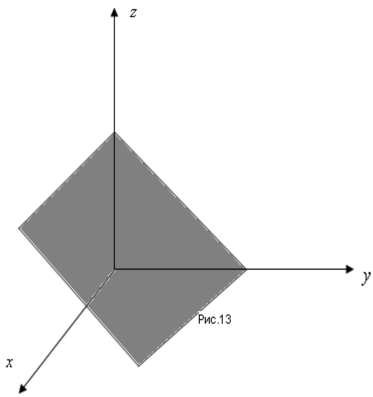


Рис.13

Вывод: если в уравнении плоскости отсутствует какая –либо координата, то плоскость параллельна соответствующей оси координат.

4. D=0. Плоскость проходит через начало координат O(0,0,0), так как имеет однородное уравнение Ax+By+Cz=0(см. рис 14)

5. A= D=0 неполное уравнение By+Cz=0 определяет плоскость проходящую через ось Ox (см.рис.15).
6. B= D=0. Читателю пояснить самостоятельно.
7. C= D=0. Читателю пояснить самостоятельно.
8. A=B=0. Уравнение Cz+D=0 определяет z=const. Получаем плоскость параллельную плоскости xOy (см.рис 16).
9. B=C=0. Читателю пояснить самостоятельно.
10. A=C=0. Читателю пояснить самостоятельно.

Случаи:11. A=B=D=0; 12.B=C=D=0; 13. A=C=D=0;и ему подобные дают координаты плоскости: 11. z=0;12. x=0; 13.y=0 (см.рис.17)

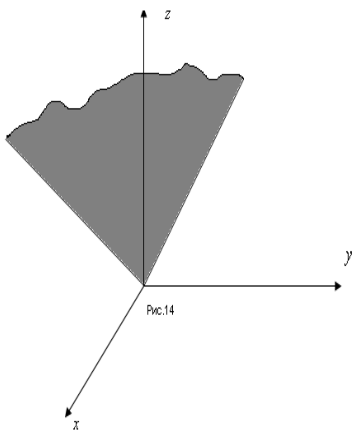


Рис.14

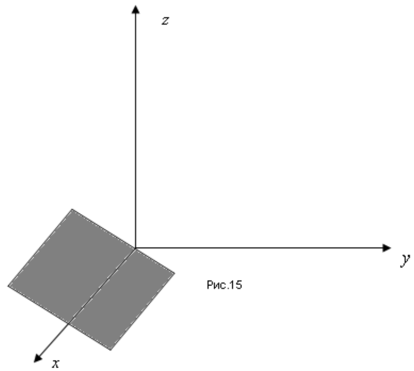


Рис.15

14.A=B=C=0,D≠0 определяет бесконечно удаленную плоскость. Например, точка пересечения с осью Ox P(a,0,0), где $a = -\dfrac{D}{A}$. Если D≠0 .A,B,C→0, то a,b,c→ ∞ и точки уходят в бесконечность.

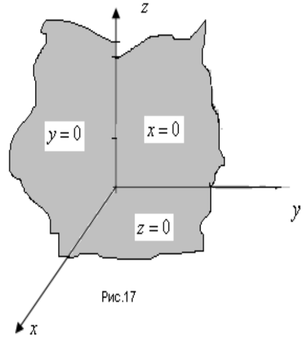
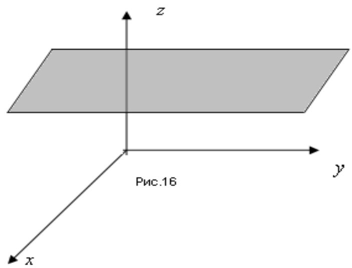
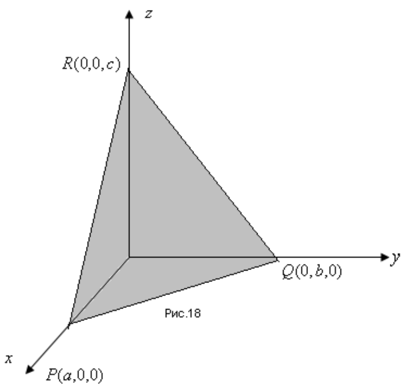


Рис.17

15. A*B*C*D≠0 . Имеем полное уравнение и плоскость



общего положения, не проходящую через начало координат и не параллельную осям (рис.18).



2.4. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Нормальное уравнение в векторной форме имеет вид

$$(\overline{n}, \overline{M}) - p = 0$$

Где $\overline{n}$ - единичный нормальный (перпендикулярный) вектор, p - расстояние от начала координат до плоскости. Так как $|\overline{n}|=1$, то его координаты определяются углами его с осями координат $\overline{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, поэтому в координатной форме нормальное уравнение имеет вид

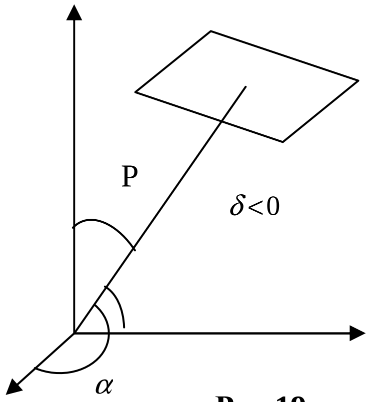


Рис.19

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Общее уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \overline{N}(A, B, C),$$

Приводится к нормальному умножением на

$$\lambda = \frac{1}{\pm\left|\overline{N}\right|} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \lambda \cdot D < 0$$

Если дана точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, не принадлежащая плоскости, то отклонение точки от плоскости равно левой части нормального уравнения, вычисленной для данной точки

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p,$$

а расстояние $d = |\delta|$.

Пример. Найти уравнение биссектральной плоскости того двугранного угла между плоскостями

I: 2x-y+2z-9=0

II: 2x+4y+4z+7=0.

В котором находится точка P(1, -1, 5).

Находим

$$\delta_A = \left.\frac{2x - y + 2z - 9}{3}\right|_P = \frac{1}{3} > 0,$$

$$\delta_B = \frac{2x + 4y + 4z + 7}{-6}\bigg|_P = -\frac{9}{2} < 0.$$

Значит биссектральная плоскость как геометрическое место точек, равноудаленных от сторон двугранного угла определится условием $\delta_A\big|_{M(x,y,z)} = -\delta_B\big|_{M(x,y,z)}$. Получаем уравнение 6x+2y+6z-11=0.

3. Уравнение прямой в пространстве

Векторное уравнение

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + t \cdot \bar{l}$$

В случае задания координат $\overline{M}_0(x_0, y_0, z_0), \bar{l}(m, n, p)$ принимает вид

$$\overline{M} = (x_0, y_0, z_0) + \bar{l}(m, n, p).$$

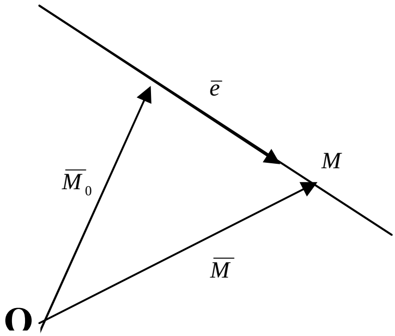


Рис.1

Отсюда получаем параметрические

$$x = x_0 + t \cdot m,$$

$$y = y_0 + t \cdot n,$$

$$z = z_0 + t \cdot p,$$

и каноническое

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

уравнения прямой. Если прямая задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей системой

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, & \overline{N}(A_1, B_1, C_1), \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, & \overline{N}(A_2, B_2, C_2), \end{cases}$$

то в качестве точки можно взять любое частное решение, например, $\overline{M}_0(0, x_0, y_0)$ системы и направляющий вектор $\bar{l} = \left[\overline{N}_1, \overline{N}_2\right]$.

Пример. Найти основание M_2 перпендикуляра, опущенного из точки $M_1(2,-1,3)$ на прямую

$$\begin{cases} x + y - z + 14 = 0, & \overline{N}(1,1,-1), \\ 3x - y - 7 = 0, & \overline{N}(3,-1,0), \end{cases}$$

Можно решить эти уравнения совместно с уравнением

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

плоскости, проходящей через данную точку M_1 перпендикулярно прямой. Можно найти направляющий вектор и частное решение M_0:

$$\bar{l} = \left[\overline{N}_1, \overline{N}_2\right] = (-1,-3,-4) \| (1,3,4), \quad M_0\,(0,-7,-18)$$

и записать параметрическое уравнение прямой: $\overline{M} = (0,-7,-8) + t(1,3,4) = (t,-7+3t,-18+4t)$.

Вектор $\overline{M_1 M_2}(t-2,-6+3t,-21+4t)$ перпендикулярен $\bar{l}$, если $(\overline{M_1 M_2}, \bar{l}) = 0$.

Получающее уравнение дает t=4, следовательно $M_0(4,5,-2)$.

4. Пучок и связка плоскостей

Если даны две плоскости

$$I \quad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \qquad \overline{N}(A_1, B_1, C_1),$$

$$II \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \qquad \overline{N}(A_2, B_2, C_2),$$

то множество плоскостей, определяемых уравнением

$$\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0, \quad \forall \alpha, \beta,$$

называется пучком плоскостей. Если обозначить $\alpha \div \beta = \lambda,$ то уравнение пучка можно записать в виде

$$I + \lambda \cdot II = 0, \quad \forall \lambda,$$

однако в этом случае ни при каких значениях λ мы не получаем вторую плоскость. Если $\overline{N}_1$ не параллелен $\overline{N}_2$ или, что то же самое

$$rang\left\| \overline{N}_1, \overline{N}_2 \right\| = rang\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix} = 2,$$

то данные плоскости пересекаются и их линия пересечения, называемая осью пучка, принадлежит любой плоскости пучка. Если $\overline{N}_1 \| \overline{N}_2, \quad I \cap II$,

или

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

имеем пучок параллельных плоскостей. Если все коэффициенты пропорциональны, то пучок вырождается в неподвижную плоскость.

Если даны три плоскости, то уравнение

$$\alpha I + \beta II + \gamma III = 0, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma,$$

определяет множество, называемое связкой плоскостей. Если

$$rang\left\| \overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3 \right\| = 3,$$

то есть $\det\left| \overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3 \right| \neq 0,$ то система I=0, II=0, III=0 имеет единственное решение и соответствующая точка называется центром связки, а сама связка состоит из всех плоскостей, проходящих через центр. Рассмотрим

$$rang\left\| \begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array} \right\|.$$

Если ранг матрицы равен двум, а расширенный – трем, то система несовместна. Три данные плоскости пересекаются по трем параллельным прямым – ребрам трехгранной призмы, а связка состоит из всех плоскостей, параллельных этим ребрам. При дальнейшем понижении рангов связка вырождается в пучок.

Пример. Через прямую

$$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

провести плоскости: параллельно оси Ox и перпендикулярно оси Oz.

Запишем уравнение пучка

$$2x-y+z-1+\lambda(x+2y-z+2)=0, \quad \overline{N}(2+\lambda,-1+2\lambda,1-\lambda).$$

Плоскость параллельна оси Ox , если x отсутствует $2+\lambda$ =0. Получаем уравнение

-5x+3z-5=0, вторая искомая плоскость выделится условием $\overline{N}\|\overline{K}(0,0,1)$, получаем систему $2+\lambda=0$, $-1+2\lambda=0$. Так как система несовместна, то в пучке нет плоскости, перпендикулярной оси Oz.

5. Угол между прямой и плоскостью

Чтобы найти угол между прямой

$$\overline{M}=\overline{M}_0+t\cdot\bar{l}$$

и плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0$$

с нормальным вектором $\overline{N}(A,B,C)$, вспомним, что искомым является угол φ между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.

Получаем

$$\cos\psi=\pm\frac{(\overline{N}l)}{|\overline{N}||\bar{l}|}=\sin\varphi$$

Частные случаи:

$(\overline{Nl})=0$ - условие параллельности прямой и плоскости.

$\overline{N}=\lambda\bar{l}$ - условие перпендикулярности прямой и плоскости.

6. Взаимное положение прямой и плоскости

1. Пусть даны плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad \overline{N}(A,B,C),$$

и прямая

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & \overline{N}(A_1,B_1,C_1), \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & \overline{N}(A_2,B_2,C_2), \end{cases}$$

Если

$$rang\left\|\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3\right\| = 3, \ (\det\left|\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3\right| \neq 0),$$

то точка пересечения определяется как решение объединенной системы. Обозначим ранг расширенной матрицы r'. При r=2, r'=3 плоскость и прямая параллельны, r=r'=2 прямая принадлежит плоскости.

2. Пусть прямая задана векторным уравнением

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + t \cdot \bar{l} \ ,$$

а плоскость общим

$$(\overline{NM}) + D = 0 \quad (Ax + By + Cz + D = 0)\,.$$

Совместное решение дает параметр

$$t = \frac{(\overline{NM_0} + D)}{(\overline{Nl})}$$

точки пересечения если $(\overline{Nl}) \neq 0.$ При $(\overline{NM}_0) + D = 0$ данная точка прямой является точкой пересечения, при $(\overline{NM}_0) + D \neq 0$, $(\overline{Nl}) = 0$ прямая принадлежит плоскости.

Пример. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{0}$ с плоскостью $4x + 2y - z + 5 = 0$

Приравнивая пропорции к t, получаем параметрические уравнения x=1+2t, y=2+3y, z=-1. Подставив в уравнение плоскости, находим t=-1. Следовательно, точка пересечения (-1,-1,-1).

7. Расстояние от точки до прямой и между скрещивающимися прямыми

Пусть дана точка M_0 и прямая заданная векторным уравнением

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + t \cdot \bar{l}$$

Найдем расстояние от точки до прямой как высоту параллелограмма, построенного на векторах $\overline{M_1 M_0}$ и $\bar{l}$ (см. рис.21)

$$h = \frac{S}{|\bar{l}|} = \frac{\left|\left[\overline{M_1 M_0}, \bar{l}\right]\right|}{\bar{l}}.$$

Построив параллелепипед на векторах $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \overline{M_1 M_2}$, получаем, что прямые являются ребрами, лежащими в противоположных гранях, поэтому искомое расстояние найдем как высоту параллелепипеда:

$$H = \pm \frac{(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \overline{M_1 M_2})}{\left|\left[\overline{l_1 l_2}\right]\right|}.$$

В случае

прямые пересекаются. В случае параллельности прямых H не определенна. В этом случае расстояние можно найти по формуле h, взяв любую точку второй прямой за M_0.

8. Общий перпендикуляр двух прямых

Две скрещивающиеся прямые

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{M}_1 + t \cdot \bar{l}_1 \\ \bar{Q} &= \bar{M}_2 + t \cdot \bar{l}_2 \end{aligned}$$

имеют единственный общий перпендикуляр. Чтобы его найти, возьмем вектор

$$\overline{PQ} = \bar{M}_2 - \bar{M}_1 + r\bar{l}_2 - t \cdot \bar{l}_1.$$

Потребовав выполнение условий $(\overline{PQ}, \bar{l}_1) = 0, \quad (\overline{PQ}, \bar{l}_2) = 0$, получим на t и r систему линейных уравнений. Пусть t_0 и r_0 - решения этой системы. Тогда $P_0(\bar{M}_1 + t_0 \cdot \bar{l}_1)$ и $Q_0(\bar{M}_2 + r_0 \cdot \bar{l}_1)$ - основания общего перпендикуляра, уравнение которого можно записать по точкам.

Пример. Найти уравнения общего перпендикуляра прямых

$$\overline{P} = (2,0,1) - t(1,1,2),$$

$$\overline{Q} = (3,3,9) + r(2,-1,-4).$$

Записывая $\overline{P} = (2,0,1) - t(1,1,2) + r(2,-1,-4)$ и условия $(\overline{PQ},\bar{l}_1) = 0$ и $(\overline{PQ},\bar{l}_2) = 0$, получаем систему

$$6t - 9r = -12$$

$$9t - 21r = -33$$

дающую $t_0=1$ и $r_0=2$. По точкам $P_0(3,1,-1)$, $Q_0(7,1,1)$ записываем канонические уравнения общего перпендикуляра

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$$

Пример даны прямые P=(1,1,0)+t(2,-1,3), $\begin{cases} 3x + y - z - 8 = 0 \\ x + 2y + z - 9 = 0 \end{cases}$. Найти уравнение общего перпендикуляра.

Проверим, пересекаются ли данные прямые. Подставляя в систему координаты точки $P(1+2t,1-t,3t)$, получаем одно и тоже значение t=2, следовательно, система совместна и дает точку пересечения $P_0(5,-1,6)$. Находим направляющий вектор $\bar{l}_1 = \left[\overline{N}_1\overline{N}_2\right] = (3,-4,5)$.

Направляющий вектор общего перпендикуляра $i = \left[\bar{l}_1\bar{l}_2\right] = (7,-1,-5)$ и уравнение его

$$\overline{M} = (5,-1,6) + v(7,-1,-5).$$

Задания

Задание 1

По двум данным элементам; точкам M_1, M_2, нормальному вектору $\overline{N}$ и направляющему вектору $\bar{l}$ записать уравнения прямой: обще, с угловым коэффициентом, нормальное, в отрезках, параметрические, каноническое.

№	Дано	№	Дано
1	$M_1(2,-3)$ $\overline{N}(3,4)$	14	$M_1(3,-1)$ $M_2(2,3)$
2	$M_1(2,-3)$ $M_2(0,5)$	15	$M_1(5,0)$ $\bar{l}(3,-4)$
3	$M_1(3,-4)$ $\bar{l}(2,-1)$	16	$M_1(4,-1)$ $\overline{N}(2,-3)$
4	$M_1(4,-1)$ $\overline{N}(4,-2)$	17	$M_1(4,5)$ $M_2(3,-1)$
5	$M_1(1,3)$ $M_2(2,-4)$	18	$M_1(3,5)$ $\bar{l}(-1,3)$
6	$M_1(2,-3)$ $\bar{l}(1,3)$	19	$M_1(1,2)$ $\overline{N}(-3,5)$
7	$M_1(5,-4)$ $\overline{N}(-4,5)$	20	$M_1(2,0)$ $M_2(3,5)$
8	$M_1(3,-1)$ $M_2(4,2)$	21	$M_1(4,-5)$ $\bar{l}(2,3)$
9	$M_1(2,3)$ $\bar{l}(1,-2)$	22	$M_1(3,2)$ $\overline{N}(-3,5)$
10	$M_1(2,3)$ $\overline{N}(3,-5)$	23	$M_1(2,1)$ $M_2(3,-2)$
11	$M_1(5,2)$ $M_2(-2,3)$	24	$M_1(1,-5)$ $\bar{l}(4,-3)$
12	$M_1(-1,5)$ $\bar{l}(3,-4)$	25	$M_1(2,1)$ $\overline{N}(-2,5)$
13	$M_1(4,-3)$ $\overline{N}(-2,3)$	26	$M_1(2,-3)$ $M_2(1,3)$

Задача 2

По данным вершинам A, B, C, уравнениями сторон a, b, c или основанию высоты BK найти: координаты вершин; уравнения сторон; угол A; высоту BK; уравнение высоты BK; уравнение медианы CL; биссектрисы внутреннего угла A; уравнение прямой BS||b.

№ вар.	Дано
1	A(2,3), B(6,0), C(-3,-9)
2	a:19x+5y-101=0, b: 15x+8y-23=0, c: 4x-3y-1=0
3	a:7x-y+25=0, c: 4x+3y=0, K(0,0)
4	A(1,1), B(-23,-6), C(-7,-14)
5	a: x-6=0, b: 3x-4y-2=0, c: 3x+4y-6=0
6	a: x+6y+9=0, c: 5x+12y-27=0, K(3,-4)
7	A(2,1), B(0,-1), C(3,0)
8	a: x-y+2=0, b:x-5=0, c:3x-4y-15=0
9	a: 6x-y-17=0, c: 12x-5y+5=0, K(5,1)
10	A(1,1), B(4,5), C(-11,-4)
11	a: 5x-19y-63=0, b: 3x+4y-7=0, c: 8x-15y+7=0
12	a: x+4y-14=0, c: 3x+4y-10=0, K(2,4)
13	A(1,-1), B(-3,2), C(-11,-4)
14	a: x+y+7=0, b: 12x+5y-7=0, c: 15x+8y-7=0
15	a: 17x-6y-98=0, c: 4x+3-1=0, K(1,-5)
16	A(-1,1), B(-3,2), C(14,-7)
17	a: 3x-y+7=0, b: 15x-8y-7=0, c: 3x-4y+1
18	a: 4x+y-11=0, b: 4x+3y-1=0, c: 12x+5y-7=0
19	A(1,-1), B(-11,4), C(-3,2)
20	a: 2x-7y+27=0, b: 4x-3y-1=0, c: 5x-12y+7=0
21	a: 3x+2y-23=0, c: 3x-4y+1=0, K(5,1)
22	A(-1,1), B(14,-7), C(3,2)
23	a: 4x-y-5=0, b: 12x-5y+7=0, c: 4x-3y+1=0
24	a: 2x-3y-23, c: 4x+3y-1, K(1,-5)
25	A(1,-1), B(-7,14), C(-2,3)
26	a: 11x-5y-19=0, b: 15x-8y-7=0, c: 4x-3y-1=0

Задача 3

Найти уравнение прямых, проходящих через точку A_1 под углом φ к прямой a_1. Найти уравнения прямых a_2, a_3 образующего треугольника, его площадь, уравнения прямых γ: $A_2 \in \varphi_2$, $A_3 \in \gamma_3$.

№ вар.	A_1	a_1	φ	Прямая γ
1	$A_1(2,-1)$	2x-3y-1=0	45°	$O(0,0)\in\gamma$
2	$A_1(0,0)$	2x-y+1=0	60°	$\gamma \parallel OX$
3	$A_1(3,-1)$	x-y+5=0	30°	$\gamma \parallel OY$
4	$A_1(3,2)$	4x-5y+1=0	45°	$O(0,0)\in\gamma$
5	$A_1(3,-2)$	3x-y+1=0	60°	$\gamma \parallel OX$
6	$A_1(-2,0)$	3x-y-2=0	30°	$\gamma \parallel OY$
7	$A_1(1,2)$	3x+5y-7=0	45°	$O(0,0)\in\gamma$
8	$A_1(2,0)$	3x-y+1=0	60°	$\gamma \parallel OX$
9	$A_1(0,-2)$	x+y-2=0	30°	$\gamma \parallel OY$
10	$A_1(2,3)$	4x+3y-7=0	45°	$O(0,0)\in\gamma$
11	$A_1(2,3)$	$\sqrt{3}-y+5=0$	60°	$\gamma \parallel OX$
12	$A_1(4,1)$	x-y=0	30°	$\gamma \parallel OY$
13	$A_1(2,4)$	3x+5y+8=0	45°	$O(0,0)\in\gamma$
14	$A_1(2,0)$	x-$\sqrt{3}$ y+1=0	60°	$\gamma \parallel OX$
15	$A_1(3,2)$	2x-y-1=0	30°	$\gamma \parallel OY$
16	$A_1(4,-5)$	3x-4y+1=0	45°	$O(0,0)\in\gamma$
17	$A_1(1,0)$	x-$\sqrt{3}$ y+2=0	60°	$\gamma \parallel OX$
18	$A_1(0,2)$	x-$\sqrt{3}$ y+2=0	30°	$\gamma \parallel OY$
19	$A_1(2,-5)$	2x+3y+5=0	45°	$O(0,0)\in\gamma$
20	$A_1(3,0)$	x-$\sqrt{3}$ y=0	60°	$\gamma \parallel OX$
21	$A_1(2,3)$	x-$\sqrt{3}$ y+1=0	30°	$\gamma \parallel OY$
22	$A_1(2,-3)$	3x-5y+2=0	45°	$O(0,0)\in\gamma$
23	$A_1(2,0)$	x-$\sqrt{3}$ y+1=0	60°	$\gamma \parallel OX$
24	$A_1(2,0)$	x-y+1=0	30°	$\gamma \parallel OY$
25	$A_1(2,-5)$	2x-4y+1=0	45°	$O(0,0)\in\gamma$

26	A_1(-1,2)	x-$\sqrt{3}$ y-2=0	60°	$\gamma \parallel OX$

Задача 4

По данным найти уравнения плоскости: общее, нормальное, в отрезках, векторное, параметрическое. Найти уравнение параллельной плоскости, проходящей через M_0 и расстояние между параллельными плоскостями:

№ вар.	Точки плоскости	Направляющие векторы	M_0
1	$M_1(3,-1,2)$, $M_2(0,3,4)$	$\bar{a}$ (4,0,1)	(3,4,7)
2	$M_1(2,1,0)$, $M_2(3,-2,1)$, $M_3(4,0,-1)$		(7,2,3)
3	$M_1(3,1\text{-}2)$	$\bar{a}$ (1,0,4), $\bar{b}$ (2,1,0)	(5,0,0)
4	$M_1(4,0,-1)$, $M_2(2,3,0)$	$\bar{a}$ (3,5,-1)	(4,1,0)
5	$M_1(3,0,-1)$, $M_2(1,0,-2)$, $M_3(5,1,3)$		(4,1,0)
6	$M_1(4,0,-1)$	$\bar{a}$ (2,0,-1), $\bar{b}$ (0,2,1)	(-3,1,5)
7	$M_1(4,0,2)$, $M_2(3,1,4)$	$\bar{a}$ (2,3,-4)	(4,-5,1)
8	$M_1(2,4,0)$, $M_2(0,-3,1)$, $M_3(5,1,3)$		(2,1,3)
9	$M_1(5,0,1)$	$\bar{a}$ (1,0,2), $\bar{b}$ (5,3,1)	(6,0,2)
10	$M_1(3,5,1)$, $M_2(0,-2,3)$	$\bar{a}$ (4,5,0)	(7,0,-2)
11	$M_1(3,4,-5)$, $M_2(4,4,-7)$, $M_3(5,6,-6)$		(4,-6,7)
12	$M_1(2,2,0)$	$\bar{a}$ (-2,1,3), $\bar{b}$ (3,2,0)	(-1,2,5)
13	$M_1(3,-2,1)$, $M_2(2,0,4)$	$\bar{a}$ (2,0,1)	(1,-7,2)
14	$M_1(2,-1,3)$, $M_2(0,1,3)$, $M_3(0,3,1)$		(2,1,5)
15	$M_1(3,2,4)$	$\bar{a}$ (2,1,0), $\bar{b}$ (1,2,-3)	(4,1,-5)

16	$M_1(3,-2,0)$, $M_2(4,0,-3)$	$\bar{a}$ (0,1,3)	(5,0,-2)
17	$M_1(6,0,0)$, $M_2(1,-2,3)$, $M_3(2,3,3)$		(4,1,-5)
18	$M_1(2,3,-4)$	$\bar{a}$ (0,1,2), $\bar{b}$ (3,1,2)	(2,0,5)
19	$M_1(-2,-3,1)$, $M_2(-4,0,2)$	$\bar{a}$ (1,2,0)	(2,3,-5)
20	$M_1(3,1,2)$, $M_2(0,-2,1)$, $M_3(4,1,4)$		(4,5,0)
21	$M_1(3,-2,2)$	$\bar{a}$ (2,-1,0), $\bar{b}$ (3,2.4)	(4,5,0)
22	$M_1(2,3,-5)$, $M_2(0,3,1)$	$\bar{a}$ (1,3,2)	(1,1,5)
23	$M_1(2,3,-1)$, $M_2(0,1,3)$, $M_3(3,-1,0)$		(2,3,5)
24	$M_1(2,-4,1)$	$\bar{a}$ (1,2,-1), $\bar{b}$ (4,01)	(5,-1,6)
25	$M_1(3,-1,0)$, $M_2(2,4,1)$	$\bar{a}$ (2,0,1)	(-2,3,6)
26	$M_1(2,0,-1)$, $M_2(1,3,5)$, $M_3(3,1,-2)$		(3,-5,1)

Задача 5

Доказать, что прямые параллельны, найти уравнение проходящей через них плоскости, расстояние между прямыми. Доказать, что данная плоскость перпендикулярна прямым и найти уравнение общего перпендикуляра прямых, лежащего в плоскости.

№ вар.	Первая прямая	Вторая прямая	Плоскость
1	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{0}$	$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+4y-3z+1=0 \end{cases}$	4x-2y-1=0
2	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{0}=\frac{z-3}{2}$	$\begin{cases} 2x+2y-z-6=0 \\ 4x+y-2z=0 \end{cases}$	2x+4z-2=0

3	$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+3}{2}$	$\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$	4x+6y+2z-1=0
4	$\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3}$	$\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$	2x-4y-6z+1=0
5	$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$	$\begin{cases} x-y+z=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}$	6x+4y-2z=0
6	$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z+4}{-2}$	$\begin{cases} 2x+3y+z-4=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$	2x-4z-2=0
7	$\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$	$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x+y+2z-2=0 \end{cases}$	6y-3z-1=0
8	$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z}{3}$	$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases}$	2x-4y+6z=0
9	$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{0}$	$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ 2x+3y-2z+2=0 \end{cases}$	9x+6y-1=0
10	$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$	$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$	4x+2y-6z-5=0
11	$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z+1}{-2}$	$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 4x-y+2z+3=0 \end{cases}$	3x-6z+1=0
12	$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{2}$	$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 5x+y-z+4=0 \end{cases}$	2x-6y+4z-3=0
13	$\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$	$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y-3z-1=0 \end{cases}$	2x-3y-z-2=0
14	$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$	$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-3z-2=0 \end{cases}$	3x-6y+9z-1=0
15	$\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}$	$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x+z-1=0 \end{cases}$	x-2y-3z-11=0

16	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{0}$	$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ 2x+4y-z=0 \end{cases}$	4x-2y-3=0
17	$\frac{x}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2}$	$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y+z-3=0 \end{cases}$	6x-2y+4z-1=0
18	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{0}$	$\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 4x-2y-z+3=0 \end{cases}$	2x+4y-5=0
19	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$	$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y+z-1=0 \end{cases}$	6x-2y+4z-1=0
20	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$	$\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$	2x-4y+6z-3=0
21	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-2}$	$\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ 2x+3y-3z-3=0 \end{cases}$	3x+2z-7=0
22	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-2}$	$\begin{cases} x-y-5=0 \\ 3x+y+2z+21=0 \end{cases}$	x+y-2z-5=0
23	$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{3}$	$\begin{cases} x+5y+z-8=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$	2x-y+3z+11=0
24	$\frac{x-4}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-15}{5}$	$\begin{cases} 5x-z=0 \\ x-2y-z+2=0 \end{cases}$	x-2y+3z+2=0
25	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1}$	$\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$	3x-2y-z-6+0
26	$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+5}{-1}$	$\begin{cases} x+y+3z-9=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$	x+2y-z+3=0

Задание 6

Найти точку пересечения прямой с плоскостью и угол между ними. Найти уравнение ортогональной проекции прямой на плоскости.

№ вар.	Плоскость	Прямая
1	x-2y+z=0	$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$
2	5x-3y-5=0	$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$
3	5x-y+3z-1=0	$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z - 4 = 0 \end{cases}$
4	4x-5y+1=0	$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$
5	3x-z-2=0	$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$
6	y-z=0	$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$
7	2x-z-1=0	$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$
8	3x+y-z-2=0	$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 4y - z - 1 = 0 \end{cases}$
9	x+z-3=0	$\begin{cases} x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z - 3 = 0 \end{cases}$
10	x-y-1=0	$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$
11	2x+y=0	$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$

12	3x+z+1=0	$\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ 3x+y-z+1=0 \end{cases}$
13	x-2y-z+6=0	$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+2y+z-6=0 \end{cases}$
14	x-z=0	$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+4z+4=0 \end{cases}$
15	x-2=0	$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+4y-2z+6=0 \end{cases}$
16	3x+y+2z+5=0	$\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 2x+2y+z+4=0 \end{cases}$
17	x-y-z=0	$\begin{cases} x-y+3z=0 \\ 2x+y+2z-6=0 \end{cases}$
18	x+z=0	$\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ -x+2y-z-7=0 \end{cases}$
19	x+2y-z=0	$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x+y-2z+3=0 \end{cases}$
20	x+y-2z=0	$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+2y-z-4=0 \end{cases}$
21	y+2z-5=0	$\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+y-3z+3=0 \end{cases}$
22	x-2y-z+1=0	$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y-2z-3=0 \end{cases}$
23	2x+y-z-1=0	$\begin{cases} x+y+2z-1=0 \\ 2x+3y+z-3=0 \end{cases}$
24	3x-y-1=0	$\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

25	3x+2y-z-1=0	$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$
26	x-y+2z+1=0	$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ x+y+z-5=0 \end{cases}$

Задание 7

Найти угол между биссектральной плоскостью двугранного угла между данными плоскостями, содержащего точку M_0, и плоскостью, проходящей через ось двугранного угла параллельно указанной оси.

№ вар.	Плоскость	Плоскость	M_0	Ось
1	x+2y-2z+1=0	2x-y+2z-5=0	(1,3,0)	OX
2	2x-3y+6z-13=0	3x+6y-z+9=0	(2,0,1)	OY
3	x-4y+8z-9=0	8x+y-4z+18=0	(4,0,3)	OZ
4	2x-6y+9z-7=0	6x+9y-2z+11=0	(1,2,1)	OX
5	4x-4y+7z-1=0	7x+4y-4z+5=0	(3,0,0)	OY
6	2x+y-3z-2=0	3x-2y+z+6=0	(2,2,1)	OZ
7	2x-y+2z-3=0	x+2y+2z+7=0	(0,4,0)	OX
8	3x-2y+6z-7=0	2x+6y-3z+2=0	(3,0,1)	OY
9	8x-y+4z-5=0	4x+8y-z+2=0	(0,5,0)	OZ
10	6x-2y+9z-7=0	2x+9y-6z+11=0	(3,0,0)	OX
11	7x+4y-4z-10=0	4x-4y+7z+3=0	(0,0,5)	OY
12	x+y-2z-3=0	2x-y+z+5=0	(2,0,1)	OZ
13	2x-2y+z-3=0	x+2y+2z+7=0	(2,2,1)	OX
14	3x-6y+2z-1=0	6x+2y-3z+5=0	(3,2,0)	OY
15	4x-8y+z-3=0	8x+y+4z+7=0	(1,0,1)	OZ
16	6x-9y+2z-3=0	2x+6y-9z+1=0	(2,2,0)	OX
17	4x-4y+7z-2=0	7x+4y-4z+5=0	(0,1,0)	OY
18	X+2y-3z-1=0	2x-3y-z+3=0	(3,1,2)	OZ
19	x-2y+2z-2=0	2x-y+2z+4=0	(5,0,0)	OX
20	3x+6y-2z-3=0	2x-3y+6z+1=0	(5,1,1)	OY
21	6x+2y-3z-1=0	2x+6y-3z+7=0	(6,0,0)	OZ
22	3x+2y-6z-11=0	3x+6y-2z+10=0	(0,1,0)	OX
23	x-8y+4z-2=0	4x+8y-z+5=0	(2,5,0)	OY

24	4x+8y-4z-5=0	8x-4y-4z+7=0	(1,0,0)	OZ
25	3x-4y-7=0	4x+3z+1=0	(2,0,1)	OX
26	2x+2y+z-5=0	2x-y+2z+3=0	(1,0,1)	OY

Задача 8

Найти расстояния d_{ij} и угол φ_{ij} между прямыми a_i, a_j, уравнения общих перпендикуляров P_{12}, P_{23}, пар прямых a_1a_2, a_2a_3, уравнения плоскостей π_{12}, π_{13}, проходящих через пары прямых a_1a_2, a_1a_3.

№ вар	Прямая a_2	Прямая a_1	Прямая a_3
1	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+7}{1}=\frac{z}{-2}$	$\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ 2x+z-4=0 \end{cases}$	$x=1+\theta;$ $y=-6-5\theta;$ $z=-3-2\theta$
2	$\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$	$\begin{cases} 2x+y-z-1=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$	$x=2+2\theta;$ $y=-1-5\theta;$ $z=-4-\theta$
3	$\frac{x-1}{3}=\frac{y+13}{1}=\frac{z}{-2}$	$\begin{cases} 3x+y-2z-4=0 \\ 2x+3z-2=0 \end{cases}$	$x=8+3\theta;$ $y=-10-13\theta;$ $z=-9-2\theta$
4	$\frac{x-3}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$	$\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+z-3=0 \end{cases}$	$x=5+\theta;$ $y=-3+2\theta;$ $z=-4-\theta$
5	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+10}{1}=\frac{z}{2}$	$\begin{cases} 2x+y+2z-1=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$	$x=11+\theta;$ $y=-15-4\theta;$ $z=6+\theta$
6	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z}{2}$	$\begin{cases} x+y+2z-3=0 \\ 2x-z-4=0 \end{cases}$	$x=8+\theta;$ $y=-13-5\theta;$ $z=7+2\theta$

7	$\frac{x+1}{3}=\frac{y+10}{1}=\frac{z}{1}$	$\begin{cases}3x+y+z+2=0\\ x-3z+1=0\end{cases}$	$x=13+3\theta;$ $y=-6-10\theta;$ $z=1+\theta$
8	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z}{1}$	$\begin{cases}2x+y+z-4=0\\ x-2z-1=0\end{cases}$	$x=2\theta;$ $y=-5-5\theta;$ $z=-3+\theta$
9	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+7}{-5}=\frac{z}{-2}$	$\begin{cases}x+y-2z-1=0\\ 2x+z-4=0\end{cases}$	$x=-1+\theta;$ $y=10-5\theta;$ $z=1-2\theta$
10	$\frac{x-1}{3}=\frac{y+10}{1}=\frac{z}{1}$	$\begin{cases}3x+y+z-4=0\\ x-3z-1=0\end{cases}$	$x=-10+3\theta;$ $y=13-10\theta;$ $z=-7+\theta$
11	$\frac{x+3}{1}=\frac{y+4}{1}=\frac{z}{-1}$	$\begin{cases}x+y-z+4=0\\ x+z+3=0\end{cases}$	$x=-1+\theta;$ $y=-7-2\theta;$ $z=-4-\theta$
12	$\frac{x-2}{2}=\frac{y+7}{1}=\frac{z}{2}$	$\begin{cases}2x+y+2z-6=0\\ x-z-2=0\end{cases}$	$x=8+2\theta;$ $y=-25-8\theta;$ $z=2-2\theta$
13	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{2}$	$\begin{cases}x+y+2z-4=0\\ 2x-z-2=0\end{cases}$	$x=6+\theta;$ $y=-14-5\theta;$ $z=1+2\theta$
14	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+9}{1}=\frac{z}{-2}$	$\begin{cases}x+y-2z+1=0\\ 2x+z-4=0\end{cases}$	$x=\theta;$ $y=-21-5\theta;$ $z=-1-2\theta$
15	$\frac{x-2}{2}=\frac{y+8}{1}=\frac{z}{-1}$	$\begin{cases}2x+y-z-2=0\\ x+2z-2=0\end{cases}$	$x=-5+2\theta;$ $y=13-5\theta;$ $z=1-\theta$

16	$? = \frac{y+7}{1} = ?$	$\begin{cases} 3x + y - z - 1 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$	$x = -8 + 3\theta;$ $y = 35 - 10\theta;$ $z = -1 - \theta$
17	$\frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{1} = \frac{z}{-1}$	$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$	$x = -1 + \theta;$ $y = 4 - 2\theta;$ $z = -\theta$
18	$\frac{x-1}{1} = \frac{y+8}{1} = \frac{z}{1}$	$\begin{cases} x + y + z + 4 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$	$x = 2 + \theta;$ $y = 4 - 2\theta;$ $z = -1 + \theta$
19	$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$	$\begin{cases} 2x + y + z - 5 = 0 \\ x - 2z - 1 = 0 \end{cases}$	$x = 8 + 2\theta;$ $y = -6 - 5\theta;$ $z = 1 + \theta$
20	$\frac{x-2}{3} = \frac{y+8}{1} = \frac{z}{1}$	$\begin{cases} 3x + y + z - 9 = 0 \\ x - 3z - 2 = 0 \end{cases}$	$x = 15 + 3\theta;$ $y = -15 - 10\theta;$ $z = 1 + \theta$
21	$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$	$\begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$	$x = 8 + \theta;$ $y = -3 - 5\theta;$ $z = 9 + 2\theta$
22	$\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-2}$	$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x + z + 4 = 0 \end{cases}$	$x = -3 + \theta;$ $y = -14 - 5\theta;$ $z = -2\theta$
23	$\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$	$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$	$x = 2 + \theta;$ $y = 1 - 2\theta;$ $z = 1 + \theta$
24	$\frac{x-2}{3} = \frac{y+10}{1} = \frac{z}{1}$	$\begin{cases} 3x + y + z - 7 = 0 \\ x - 3z - 2 = 0 \end{cases}$	$x = 6 + 3\theta;$ $y = -20 - 10\theta;$ $z = -2 + \theta$
25	$\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z}{1}$	$\begin{cases} 2x + y + z - 4 = 0 \\ x - 2z - 1 = 0 \end{cases}$	$x = 2 + 2\theta;$ $y = -10 - 5\theta;$ $z = 2 + \theta$

26	$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$	$\begin{cases} x+y-z-4=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$	$x=\theta;$ $y=-2-2\theta;$ $z=-\theta$