Иркутский государственный университет
ИМЭИ ИГУ
Кафедра алгебры и геометрии

Векторная алгебра

Методическое пособие

г. Иркутск

Содержит необходимый теоретический материал, подробное решение задач. Варианты семестровых заданий.

Предназначена для студентов математического факультета. Моргут быть использованы для спмостоятельного изучения студентами младших курсов факультетов с небоьшой программой по математике

Илл.26

Составален: к.ф.-м.н., доцент Машанов В.И., ст. преп. Шеметова Л.Н.

Рецензент к.ф.-м.н. Осипенко Л.А.

1.Понятие вектора.

В математике и ее приложениях важную роль играет понятие числа. Но давно появились в технике такие величины, для определения которых надо задавать не только их численные значения, но и указывать их направления. Например, для характеристики поступательного передвижения тела недостаточно знать пройденное расстояние, нужно знать еще направление движения. Тот же характер носят такие величины, как сила, скорость, ускорение и т.п. Направленные величины называются векторными (от латинского слова “veho”- “смещаю”).

Для изучения общих свойств векторных величин надо дать формальное определение их и действий над ними.

Вектором называется направленный отрезок прямой. Обозначается $\overrightarrow{AB}$, где первая точка называется началом, а вторая- концом вектора. Иногда обозначают и одной буквой: например, $\vec{a}$.

Длина $\overrightarrow{AB}$ соответствующего отрезка называется ***модулем вектора***, обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$. Вектор нулевого модуля называется нуль- вектором: $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Поступательное перемещение можно задать любыми равными по длине и параллельными векторами. В отличие от этого, сила, приложенная к телу в точке, не совпадающей с центром массы тела, производит вращающий момент, причем момент силы зависит от точки приложения. Это свойство определяет необходимость разделения свободных и связных векторов.

Свободными называются векторы, начальные точки которых произвольны; векторы с фиксированными начальными точками называются ***связанными***.

В курсе аналитической геометрии будут рассматриваться только свободные векторы. Единственным связанным вектором будет только радиус- вектор точки относительно начала системы координат.

Параллельные векторы называются ***коллинеарными.***

В переводе это означает “солинейные”, так как такие (свободные) векторы можно расположить на одной прямой. Если к тому же отложить их от одной точки, то они расположатся на одном луче и будут называться ***сонаправленными*** ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), или на разных лучах- в этом случае они называются ***противоположно направленными*** ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$).

Два вектора называются ***равными***, если выполняются три условия:

1) векторы параллельны (коллинеарны);
2) сонаправлены;
3) равны их модули.

Это определение (definition) запишем в математических символах:

$$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\vec{a}\parallel\vec{b}; \\ 2)\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}; \\ 3)|\vec{a}|=|\vec{b}|. \end{cases}$$

Векторы, параллельные одной и той же плоскости, называют ***компланарными***. В переводе этот термин означает “соплоскостные”. Очевидно, что два вектора всегда компланарны

2. Линейные операции над векторами.

В математике те действия над величинами, в которых они участвуют в первой степени, принято называть линейными.

Суммой векторов, расположенных так, что каждый последующий исходит из конца предыдущего, называется вектор с началом в начале первого слагаемого и концом- в конце последнего.

Например,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

Это правило называется правилом редукции промежуточных букв.

Свойства суммы:

1.Сумма векторов коммутативна:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

2.Сумма векторов ассоциативна:

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

4. Для любого $\vec{a}$ существует $\vec{a'}$ такой, что $\vec{a}+\vec{a'}=\vec{0}$. Вектор $\vec{a'}$ называется ***противоположным*** вектору $\vec{a}$.

Разностью векторов $\vec{a}$-$\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который в сумме с вычитаемым дает уменьшаемый:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{b}+\vec{c}.$$

Отсюда следует ***правило***: для построения разности откладываем векторы из одной точки, соединяем концы и направляем к концу уменьшаемого (см. рис.1).

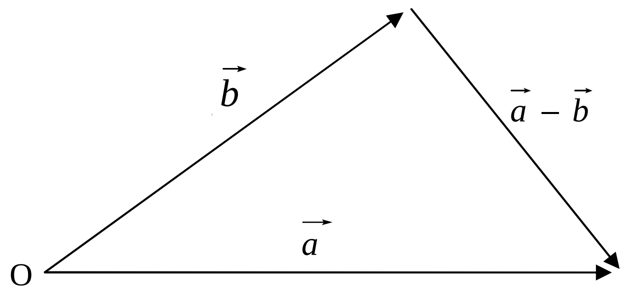

Рис.1

Итак, сложение векторов обладает теми же самыми свойствами, что и операция сложения чисел. Чтобы подчеркнуть различную природу этих двух объектов, в дальнейшем числа будем называть ***скалярами***.

Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр λ называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий трем условиям:

1) $\vec{a}\|\vec{b}$;
2) $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$ при $\lambda>0$; $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ при $\lambda<0$;
3) $|\vec{b}|=|\lambda||\vec{a}|$.

Свойства произведения вектора на скаляр:

1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (дистрибутивность скалярного множителя);
2) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (дистрибутивность векторного множителя);
3) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (ассоциативность скалярных множителей).

Пример 1. Отложить от точки О вектор $2\vec{a}+3\vec{b}$, $3\vec{a}-4\vec{b}$, если $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=45°$.

Отложим от выбранной точки О вектор $\vec{a}$ (например горизонтально) и построим угол (ориентированный) 45°; построим векторы $\vec{b}$, $2\vec{a}$, $3\vec{b}$ и по правилу параллелограмма строим вектор $2\vec{a}+3\vec{b}$. Чтобы вектор $3\vec{a}-4\vec{b}$ исходил из точки O, строим его как сумму векторов $3\vec{a}$ и $-4\vec{b}$ (см. рис.2а).

Пример 2. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$. Найти вектор $\overrightarrow{AM}$, совпадающий с биссектрисой угла A.

Вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{n}-\vec{m}$ (см. рис. 2б) разбивается точкой M на части, пропорциональные сторонам, поэтому $\overrightarrow{BM}=x(\vec{n}-\vec{m})$, $\overrightarrow{MC}=(1-x)(\vec{n}-\vec{m})$, причем $x:(1-x)=|\vec{m}|:|\vec{n}|$. Найдя отсюда x, получим вектор $\overrightarrow{BM}$ и вектор

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{m}\,|\vec{n}|+\vec{n}\,|\vec{m}|}{|\vec{m}|+|\vec{n}|}.$$

Если требуется найти направление биссектрисы, то можно воспользоваться вектором $\vec{m}\,|\vec{n}|+\vec{n}\,|\vec{m}|$.

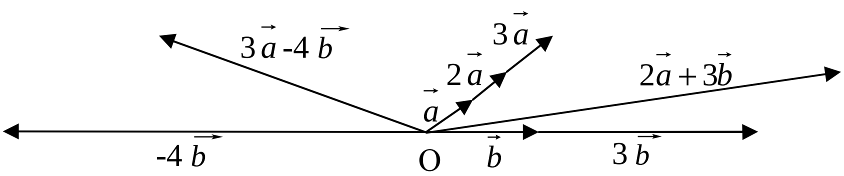

Рис. 2а

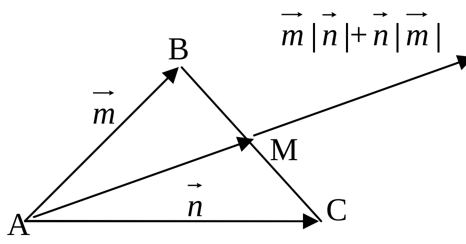

Рис. 2б

3.Линейная зависимость векторов. Базис.

Результат линейных операций над векторами называется их ***линейной комбинацией***. Например, вектор

$$\vec{b}=\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}$$

есть линейная комбинация векторов $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$; это выражают словами: вектор $\vec{b}$ линейно зависит от $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$. Чтобы исключить неравноправие выделенного вектора, введем следующее определение.

Векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=0.$$

Очевидно, что нуль-вектор линейно зависим с любой совокупностью векторов:

$$0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{0}=0.$$

Теорема 1. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они параллельны.
Теорема 2. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.
Теорема 3. Любые четыре вектора в трехмерном евклидовом пространстве линейно зависимы.
Базисом прямой называется любой ненулевой вектор на этой прямой.

Если $\vec{\ell}$ - базис прямой, то любой вектор $\vec{a}$ этой прямой можно в силу теоремы 1 представить в виде

$$\vec{a} = x \cdot \overrightarrow{\ell_1}.$$

Базисом плоскости называется любая пара линейно независимых векторов.
На плоскости с базисом $\left\{\overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}\right\}$

$$\vec{a} = x_1 \overrightarrow{\ell_1} + x_2 \overrightarrow{\ell_2}.$$

Базисом пространства называется любая тройка линейно зависимых векторов. В пространстве с базисом $\left\{\overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}, \overrightarrow{\ell_3}\right\}$

$$\vec{a} = x_1 \overrightarrow{\ell_1} + x_2 \overrightarrow{\ell_2} + x_3 \overrightarrow{\ell_3}.$$

Итак, задание базиса сопоставляет вектору число, пару или тройку чисел.
Координатами вектора в данном базисе называются коэффициенты линейной зависимости, выражающей его через базис.
Теорема 4. Координаты вектора в данном базисе единственны.
Теорема 5. Линейные операции над векторами сводятся к точно таким же операциям над их соответствующими координатами.
Например, $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$. Тогда координатами вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ будут числа $c_k = 3a_k - 2b_k$, $k = 1,2,3$.
Согласно теореме 1 условие $\vec{b} = \lambda\,\vec{a}$ параллельности векторов есть условие $\vec{b_i} = \lambda\overrightarrow{a_i}$ или

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda \ .$$

Записав очевидное соотношение $\overrightarrow{\ell_1} = \overrightarrow{\ell_2}$ в виде $\overrightarrow{\ell_1} = 1 \cdot \overrightarrow{\ell_1} + 0 \cdot \overrightarrow{\ell_2} + 0 \cdot \overrightarrow{\ell_3}$, получаем $\overrightarrow{\ell_1}(1,0,0)$, аналогично $\overrightarrow{\ell_2}(0,1,0)$, $\overrightarrow{\ell_3}(0,0,1)$ в базисе $\left\{\overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}, \overrightarrow{\ell_3}\right\}$.

4.Проекция вектора на ось.

Прямая с заданным на ней базисным вектором $\vec{\ell}$ называется ***осью***.
Пусть дан еще вектор $\vec{v}$ (не параллельный $\vec{\ell}$). Тогда $\left\{\vec{\ell}, \vec{v}\right\}$- базис плоскости, и любой вектор

$$\vec{a} = x\vec{\ell} + y\vec{v}.$$

Вектор $x\vec{\ell}$ (см. рис 3) называется составляющей вектора $\vec{a}$ по данной оси, а число (координата) x называется проекцией вектора на ось (или на вектор $\vec{\ell}$) параллельно $\vec{v}$:

$$x = \text{пр}\,\vec{a}\,\Big|_{\vec{\ell}}^{\parallel\vec{v}}$$

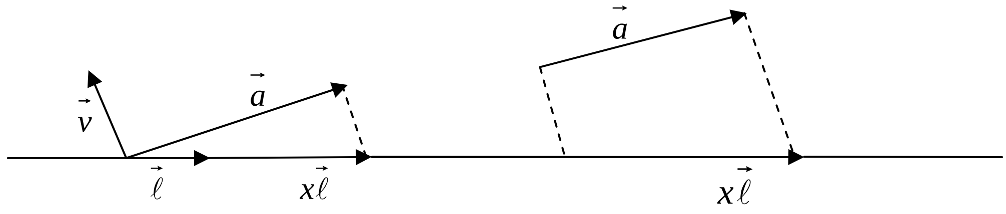

Рис. 3

Очевидно, что число x не зависит от положения вектора $\vec{a}$ на плоскости. Кроме того, как координата, проекция удовлетворяет свойствам:

1. пр$(\vec{a}+\vec{b})$= пр$\vec{a}$+пр$\vec{b}$,
2. пр $\lambda\,\vec{a}=\lambda\cdot$пр$\vec{a}$.

Если $\vec{v}\perp\vec{\ell}$, то проекция называется ортогональной и обозначается пр$\vec{a}\,\Big|_{\vec{\ell}}^{\perp\vec{v}}$. В этом случае всегда берется $|\vec{\ell}|$=1.

Теорема.

$$\text{пр}\,\vec{a}\,\Big|_{\vec{\ell}}^{\perp}=|\vec{a}|\cos\angle(\vec{\ell},\vec{a})$$

5. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением $(\vec{a},\vec{b})$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$

Свойства скалярного произведения:

1. Скалярное произведение коммутативно:
$$(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a}).$$
2. Скалярное произведение дистрибутивно:
$$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c}).$$
3. Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения:
$$(\lambda\,\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b}).$$

Пользуясь этими свойствами, для векторов $\vec{a}(a_1,a_2)$, $\vec{b}(b_1,b_2)$ можно записать

$$(\vec{a},\vec{b})=(a_1\vec{\ell_1}+a_2\vec{\ell_2},b_1\vec{\ell_1}+b_2\vec{\ell_2})=a_1b_1(\vec{\ell_1},\vec{\ell_2})+(a_1b_2+a_2b_1)(\vec{\ell_1},\vec{\ell_2})+a_2b_2(\vec{\ell_1},\vec{\ell_2}).$$

Следовательно, в произвольном базисе $\{\vec{\ell_1},\vec{\ell_2}\}$ невозможно подсчитать скалярное произведение векторов по их координатам, если не даны $|\vec{\ell_1}|$, $|\vec{\ell_2}|$, $\angle(\vec{\ell_1},\vec{\ell_2})$.

Декартовым называется базис, состоящий из единичных взаимно перпендикулярных векторов. В таком базисе векторы обозначаются $\vec{\ell_1}=\vec{i}$, $\vec{\ell_2}=\vec{j}$ на плоскости, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в пространстве. В декартовом базисе координаты обозначаются не номером, а буками x, y (в пространстве- x, y, z).

Для векторов $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$ в декартовом базисе

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},$$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности (иногда говорят ортогональности) векторов имеет вид:

$$(\vec{a},\vec{b})=0$$

или

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

Пример 1. Найти векторную проекцию вектора $\vec{q}$ на вектор $\vec{p}$ (см. рис.4).

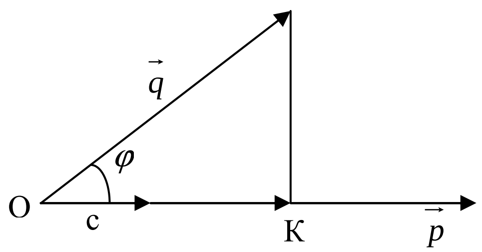

Рис.4

Если отложим векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ из одной точки O и из конца вектора $\vec{q}$ опустим перпендикуляр на вектор $\vec{p}$, то определится вектор $\overrightarrow{OK}$, называемый ортогональной проекцией вектора $\vec{q}$ на вектор $\vec{p}$:

$$\overrightarrow{OK}=\text{пр}\,\vec{q}\,\Big|_{\vec{p}}^{\perp}\ .$$

Единичный вектор $\overrightarrow{p_0}=\vec{p}:|\vec{p}|$ дает возможность получить вектор $\overrightarrow{OK}$:

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{p_0}\cdot OK=\overrightarrow{p_0}\cdot\text{пр}\,\vec{q}\,\Big|_{p}^{\perp}=\overrightarrow{p_0}\cdot|\vec{q}|\cos\varphi=\frac{\vec{p}}{p}\cdot|q|\cdot\frac{(\vec{p},\vec{q})}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}.$$

Окончательно,

$$\overrightarrow{OK}=\vec{p}\cdot\frac{(\vec{p},\vec{q})}{|\vec{p}|^2}.$$

Пример 2. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AB}$ (2,5,-3), $\overrightarrow{AC}$ (1,4,6). Найти вектор высоты $\overrightarrow{BK}$.

По предыдущей формуле получаем вектор

$$\overrightarrow{AK}=(2,5,-3)\cdot\frac{2\cdot1+5\cdot4-3\cdot6}{2^2+5^2+3^2}=(2,5,-3)\cdot\frac{4}{38},$$

$$\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{34}{19},-\frac{85}{19},\frac{51}{19}\right).$$

Пример 3. В плоскости векторов $\vec{a}$ (1,-2,3), $\vec{b}$ (2,0,1) найти вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a}$. Искомый вектор $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ имеет координаты $(\lambda+2\mu,-2\lambda,3\lambda+\mu)$. Условие перпендикулярности $(\vec{c},\vec{a})=0$ дает уравнение $14\lambda+5\mu=0$. Исключая, например, $\mu=\dfrac{14\lambda}{5}$, получаем множество векторов $\vec{c}$. Так как λ произвольно, то можно записать так: $\vec{c}=\lambda(5\vec{a}+14\vec{b})$, $\forall\ \lambda\in R$ (R - поле действительных чисел).

Пример 4. Средствами векторной алгебры доказать, что диагонали ромба перпендикулярны. Возьмем в ромбе $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Диагонали ромба суть векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$. Так как $(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|=0$, то $\vec{a}+\vec{b}\ \perp\ \vec{a}-\vec{b}$

6. Векторное произведение векторов.

В отличие от предыдущего рассмотрим случай, когда результатом умножения двух векторов будет снова вектор. Для этого потребуется сначала ввести понятие ориентации тройки векторов. Тройка векторов называется правоориентированной или правой (левой), если их взаимное расположение совпадает с положением трех первых пальцев правой (левой) руки.

Векторным произведением $[\vec{a},\vec{b}]$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, удовлетворяющий трем условиям:

1) $[\vec{a},\vec{b}] \perp \vec{a},\vec{b}$;
2) Тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a},\vec{b}]\}$ ориентирована как базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;
3) $|[\vec{a},\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$.

Свойства векторного произведения:

1. Векторное произведение антикоммутативно:
$$[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}].$$
2. Векторное произведение дистрибутивно:
$$[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}].$$
3. Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения:
$$[\lambda\vec{a},\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}].$$

Вычислительная формула

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

по координатам перемножаемых векторов $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ справедлива лишь в декартовом базисе.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(1, -4, 6)$, $\vec{b}(1, 4, -8)$.
В силу третьего пункта определения векторного произведения S= $|[\vec{a},\vec{b}]|$. Найдем

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 6 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k} = (8, 14, 8),$$

$$S = |[\vec{a},\vec{b}]| = |(8, 14, 8)| = \sqrt{8^2+14^2+8^2} = 18.$$

Если даны векторы $\vec{a}(x_1, y_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2)$ на плоскости, то представив их векторами $\vec{a}(x_1, y_1, 0)$, $\vec{b}(x_2, y_2, 0)$ плоскости XOY, получим

$$[\vec a,\vec b]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ x_1 & y_1 & 0\\ x_2 & y_2 & 0\end{vmatrix}=\vec k\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}.$$

Следовательно, для $\vec a\,(x_1, y_1)$, $\vec b\,(x_2, y_2)$

$$S=\pm\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}.$$

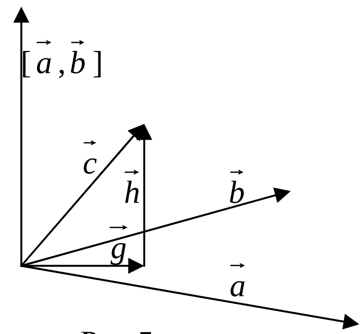

Рис.5

Пример. Найти вектор высоты параллепипеда, построенного на векторах

$$\vec a\,(-1, -1, 1),\ \vec b\,(0, -3, 1),\ \vec c\,(4, 0, 2).$$

Отложим векторы $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ от одной точки О и опустим перпендикуляр на плоскость векторов $\vec a$ и $\vec b$ (см.рис.5). Вектор $\vec c$ можно представить в виде суммы двух составляющих

$$\vec c=\vec g+\vec h,$$

из которых $\vec h\perp\vec a,\vec b$, $\vec g$ компланарен с $\vec a$ и $\vec b$. Найдем

$$[\vec a,\vec b]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & -3\end{vmatrix}\right)=(2,1,3)$$

Так как $\vec h\parallel[\vec a,\vec b]$, то $\vec h=\lambda[\vec a,\vec b]=(2\lambda,\lambda,3\lambda)$. Составляющая $\vec g=\vec c-\vec h=(4-2\lambda,-\lambda,-3\lambda)$ компланарна с $\vec a$ и $\vec b$, если $(\vec a,\vec b,\vec g)=0$ (см.следующий параграф). Получаем уравнение

$$\begin{vmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 1\\ 4-2\lambda & -\lambda & 2-3\lambda\end{vmatrix}=0,$$

дающее $\lambda=1$, следовательно $\vec h\,(2, 1, 3)$, $\vec g\,(2, -1, -1)$.

7. Смешанное произведение векторов.

Выражение $(\vec a,[\vec b,\vec c])$ называется ***смешанным произведением*** векторов.
Смешанное произведение векторов не зависит от положения символа векторного произведения в нем;

$(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$
поэтому этот символ можно убрать. Вычислительная формула

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

справедлива только в декартовом базисе.
Смешанное произведение численно равно объему параллепипеда, построенного на перемножаемых векторах:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm V \text{ или } |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = V.$$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, если ориентация тройки $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ совпадает с ориентацией $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, если ориентации противоположны. Условие $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ есть условие компланарности векторов.

Пример 1. Доказать, что векторы $\vec{a}(2, -1, 3)$, $\vec{b}(3, 1, 2)$, $\vec{c}(2, -7, 6)$ компланарны и найти линейную зависимость между ними.
Условие

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

выполняется, поэтому векторы линейно зависимы; зависимость будем искать в виде

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b},$$

так как

$$\frac{2}{3} \neq -\frac{1}{1} \neq \frac{3}{2},$$

векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ линейно независимы и образуют базис множества $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Так как линейная зависимость означает такую же линейную зависимость координат, то получаем систему

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda + 3\mu, \\ -7 = -\lambda + \mu, \\ 6 = 3\lambda + 2\mu. \end{cases}$$

Решив совместно два уравнения, получаем λ=4, μ=-3. В силу условия $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ =0 третье условие линейно зависит от первых, значит совместно с ними. Действительно, подставив для проверки λ и μ в третье, получаем тождество. Итак, $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$. Этот ответ можно было записать в виде $\vec{c}$ = (4, -3) в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Пример 2. Доказать, что векторы $\vec{a}(3, -2, 2)$, $\vec{b}(1, -1, 2)$, $\vec{c}(2, -1, 1)$ образуют базис пространства и найти координаты вектора $\vec{d}(4, -2, 1)$ в этом базисе.
Так как

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис пространства. Положив

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

и подставив координаты, получаем систему на x, y, z с решением x=1, y=-2, z=1. Итак,

$$\vec{d} = (1, -2, 1) \text{ в базисе } \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}.$$

Пример 3. Найти высоту тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}(1, -2, 2)$, $\vec{b}(1, -6, -8)$, $\vec{c}(1, -2, 2)$.
Если отложить векторы из одной точки, то они определят тетраэдр (пирамиду) с ребрами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; объем

$$V_{тетр.} = \pm\frac{1}{6}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -6 & -8 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(-60) = 10.$$

Площадь основания, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ есть площадь треугольника:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -6 & -8 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|(28,10,-4)\right| = \left|(14,5,-2)\right| = 15.$$

Тогда

$$H = \frac{3V}{S} = 2.$$

8. Аффинная и декартова системы координат и простейшие задачи

Фигура $\{O, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2\}$, состоящая из точки O и векторного базиса $\{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2\}$ называется ***аффинной системой координат*** (сокращенно- А.С.К.) на плоскости ($\{O, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3\}$ в пространстве).
Всякая точка M определяет вместе с точкой О, называемой началом системы координат, вектор $\overrightarrow{OM}$, называемый радиус- вектором точки М относительно данной системы координат. Будем обозначать радиус-вектор точки той же буквой, отличая его, как обычно, по стрелке:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M}.$$

Координатами точки называются координаты ее радиус-вектора.
Итак,

$$\overrightarrow{M} = x_1\vec{\ell}_1 + x_2\vec{\ell}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{M}(x_1, x_2) \Leftrightarrow M(x_1, x_2).$$

Координаты вектора, заданного началом $M'(x_1', x_2', x_3')$ и концом $M''(x_1'', x_2'', x_3'')$ равны разностям соответствующих координат конца и начала:

$$\overrightarrow{M'M''} = (x_1'' - x_1', x_2'' - x_2', x_3'' - x_3').$$

Каждой точке $M(x_i)$ и вектору $\vec{a}(a_i)$ можно сопоставить точку M' такую, что $\overrightarrow{M'M''} = \vec{a}$ (см. рис.6). из треугольника получаем

$$\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{M} + \vec{a},$$

следовательно, $M'(x_i + a_i)$. Полученная точка M' называется ***сдвигом*** точки M на вектор $\vec{a}$.

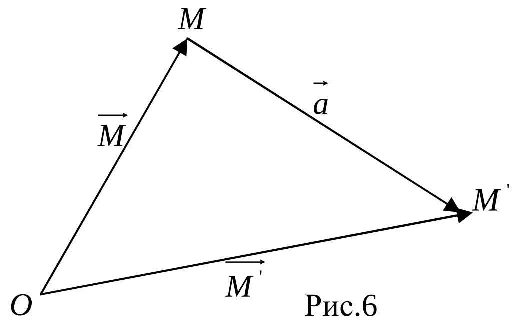

Рис.6

Пример 1.По вершинам A(2, -1, 3), B(3, -2, 1), C(0, 1, 2) параллелограмма найти четвертую вершину D.

Возьмем вектор $\vec{a} = \overrightarrow{BA} =$(-1, 1, 2). Сдвиг точки C на вектор $\vec{a}$ дает точку D, следовательно D(-1, 2, 4).

Точка M прямой, определяемой данными точками $M^{'}(x_i^{'})$ и $M^{''}(x_i^{''})$, и удовлетворяющая условию $\overrightarrow{M^{'}M^{''}} = \lambda\overrightarrow{MM^{''}}$, называется делящей отрезок $M^{'}M^{''}$ в отношении λ. Формула деления имеет вид

$$M^{'} = \frac{\overrightarrow{M^{'}} + \lambda\overrightarrow{M^{''}}}{1+\lambda}$$

или

$$x_i = \frac{x_i^{'} + \lambda x_i^{''}}{1+\lambda}.$$

$M \in \left[M^{'}M^{''}\right]$ при $\lambda \geq 0, M \notin \left[M^{'}M^{''}\right]$ при $\lambda < 0$, т.е. лежит вне отрезка. При λ =1 получаем координаты середины отрезка: $C\left(\frac{x_i^{'} + x_i^{''}}{2}\right)$. При λ = -1 $x_i \to \infty$, следовательно при λ = -1 получаем бесконечно удаленную точку прямой.

Пример 2. Найти вектор медианы $\overrightarrow{AC}$ треугольника с вершинами $M^{'}(x_i^{'})$, $M^{''}(x_i^{''})$, $M^{'''}(x_i^{'''})$.

Середина стороны $M^{'}M^{''}$ есть точка $C\left(\frac{x_i^{''} + x_i^{'''}}{2}\right)$; $\overrightarrow{MC}\left(\frac{x_i^{''} + x_i^{'''}}{2} - x_i^{'}\right)$.

Задачи, связанные с вычислением длин, расстояний, площадей, объемов, углов, называют метрическими и решают до конца по координатам точек только в декартовой системе координат. Аффинная система координат с декартовым базисом называется декартовой системой координат (сокращенно- Д.С.К.).

В такой системе расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле

$$M_1M_2 = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Площадь треугольника с вершинами M_1, M_2, M_3

$$S_\Delta = \frac{1}{2}S_{пар-ма} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right]\right|.$$

Объем тетраэдра-

$$V_{тетр.} = \frac{1}{6}V_{пар-да} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_1M_3}).$$

9. Формулы преобразования координат.

Пусть на плоскости относительно аффинной системы $\{O, \overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}\}$, которую будем называть "старой", даны элементы

$$O^*(c_{01}, c_{02}),$$
$$\ell_1^*(c_{11}, c_{12}), \qquad (1)$$
$$\ell_2^*(c_{21}, c_{22})$$

"новой" системы координат. Если точка M плоскости имеет старые координаты $M(x_1, x_2)$ и новые координаты $M(x_1^*, x_2^*)$, то

$$x_1 = c_{01} + c_{11}x_1^* + c_{21}x_2^*,$$
$$x_1 = c_{02} + c_{12}x_1^* + c_{22}x_2^*. \qquad (2)$$

Эти формулы называются формулами преобразования А.С.К.. В частном случае, когда системы координат имеют разные начала O и O^*, но общий базис $\{\overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}\}$, формулы преобразования приобретают вид

$$x_1 = c_{01} + x_1^*,$$
$$x_2 = c_{02} + x_2^*,$$

и называются формулами параллельного переноса системы координат.

Пример. Записать формулы перехода в аффинной системе координат с O^* (2, -1), $\overrightarrow{\ell_1^*}$ (3, 5), $\overrightarrow{\ell_2^*}$ (-4, 6) и найти новые координаты точки M (4, 15).

Коэффициентами первой (второй) формулы (2) должен быть столбец первых (вторых) координат в (1):

$$x_1 = 2 + 3x_1^* - 4x_2^*,$$
$$x_2 = -1 + 5x_1^* + 6x_2^*.$$

Подставив в эти формулы вместо x_1, x_2 координаты точки M, и вычислив x_1^*, x_2^*, получаем M^* (2, 1).

Формулы преобразования декартовой системы координат

$$x = c_{01} + x^* \cos\alpha - y^* \sin\alpha,$$
$$y = c_{02} + x^* \sin\alpha - y^* \cos\alpha$$

при $O^* = O$ (0,0) принимают вид

$$x = x^* \cos\alpha - y^* \sin\alpha,$$
$$y = x^* \sin\alpha - y^* \cos\alpha,$$

и называются формулами поворота системы координат. Формулы параллельного переноса имеют вид:

$$x = c_{01} + x^*,$$

Задачи

Задача 1

Отложить от точки O векторы:

N	Векторы	Если дано
1	$3\vec{a}; -2\vec{b}; 2\vec{a}+4\vec{b}; 4\vec{a}-3\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 30°$
2	$4\vec{a}; -2\vec{b}; 3\vec{a}+2\vec{b}; 3\vec{a}-5\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 3; \lvert\vec{b}\rvert = 1; (\vec{a},\vec{b}) = 60°$
3	$-4\vec{a}; 3\vec{b}; 2\vec{a}-3\vec{b}; 3\vec{a}+5\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 45°$
4	$3\vec{a}; -5\vec{b}; 2\vec{a}+4\vec{b}; \vec{a}-3\vec{b}$ 0	$\lvert\vec{a}\rvert = 3; \lvert\vec{b}\rvert = 1; (\vec{a},\vec{b}) = 30°$
5	$5\vec{a}; -3\vec{b}; \vec{a}-2\vec{b}; 3\vec{a}-\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 60°$
6	$-4\vec{a}; 2\vec{b}; 3\vec{a}-5\vec{b}; 2\vec{a}-3\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 1; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 45°$
7	$2\vec{a}; -3\vec{b}; 4\vec{a}-\vec{b}; 5\vec{a}+4\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 30°$
8	$3\vec{a}; -4\vec{b}; 2\vec{a}-3\vec{b}; 4\vec{a}+5\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 3; \lvert\vec{b}\rvert = 1; (\vec{a},\vec{b}) = 60°$
9	$4\vec{a}; -2\vec{b}; 3\vec{a}-\vec{b}; 5\vec{a}+2\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 45°$
10	$-3\vec{a}; 4\vec{b}; 5\vec{a}-2\vec{b}; 2\vec{a}+3\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 1; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 30°$
11	$2\vec{a}; -3\vec{b}; 3\vec{a}-4\vec{b}; \vec{a}+5\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 1; (\vec{a},\vec{b}) = 60°$
12	$-2\vec{a}; 3\vec{b}; 4\vec{a}-\vec{b}; 2\vec{a}+3\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 45°$
13	$3\vec{a}; -2\vec{b}; 4\vec{a}-\vec{b}; 5\vec{a}+2\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 1; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 30°$
14	$4\vec{a}; -3\vec{b}; 3\vec{a}-2\vec{b}; \vec{a}+4\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 60°$
15	$5\vec{a}; -4\vec{b}; 2\vec{a}-3\vec{b}; 3\vec{a}+\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 1; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 45°$
16	$3\vec{a}; -5\vec{b}; 3\vec{a}-\vec{b}; \vec{a}+2\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 3; \lvert\vec{b}\rvert = 2; (\vec{a},\vec{b}) = 30°$
17	$2\vec{a}; -4\vec{b}; 5\vec{a}-3\vec{b}; 3\vec{a}+2\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 60°$
18	$4\vec{a}; -3\vec{b}; 3\vec{a}-5\vec{b}; 2\vec{a}+\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 3; \lvert\vec{b}\rvert = 2; (\vec{a},\vec{b}) = 45°$
19	$3\vec{a}; -4\vec{b}; 5\vec{a}-2\vec{b}; 4\vec{a}+\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 1; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 30°$
20	$-5\vec{a}; 3\vec{b}; 6\vec{a}-3\vec{b}; 4\vec{a}+5\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 1; \lvert\vec{b}\rvert = 2; (\vec{a},\vec{b}) = 60°$
21	$-6\vec{a}; 5\vec{b}; 5\vec{a}-3\vec{b}; 3\vec{a}+2\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 1; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 45°$
22	$4\vec{a}; -3\vec{b}; 2\vec{a}-4\vec{b}; 3\vec{a}+\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 30°$
23	$3\vec{a}; -5\vec{b}; 2\vec{a}-3\vec{b}; 6\vec{a}+\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 1; \lvert\vec{b}\rvert = 2; (\vec{a},\vec{b}) = 60°$
24	$-4\vec{a}; 3\vec{b}; 5\vec{a}-\vec{b}; 3\vec{a}+4\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 3; (\vec{a},\vec{b}) = 45°$
25	$5\vec{a}; -2\vec{b}; 3\vec{a}-\vec{b}; 4\vec{a}+3\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 4; (\vec{a},\vec{b}) = 30°$
26	$3\vec{a}; -6\vec{b}; 4\vec{a}-2\vec{b}; 2\vec{a}+5\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 1; (\vec{a},\vec{b}) = 60°$
27	$2\vec{a}; -5\vec{b}; 3\vec{a}-3\vec{b}; 5\vec{a}+6\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert = 2; \lvert\vec{b}\rvert = 2; (\vec{a},\vec{b}) = 45°$

28	$4\vec{a};-3\vec{b};3\vec{a}-4\vec{b};2\vec{a}+5\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert=2;\lvert\vec{b}\rvert=1;(\vec{a},\vec{b})=60°$
29	$3\vec{a};-5\vec{b};5\vec{a}-2\vec{b};6\vec{a}+3\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert=1;\lvert\vec{b}\rvert=2;(\vec{a},\vec{b})=60°$
30	$5\vec{a};-4\vec{b};6\vec{a}-3\vec{b};3\vec{a}+2\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert=2;\lvert\vec{b}\rvert=3;(\vec{a},\vec{b})=45°$

Задача 2

В правильном шестиугольнике ABCDEF с центром O:

N	Дано	Найти
1	$\vec{AB}=\vec{a},\vec{AC}=\vec{b}$	$\vec{AD},\vec{BE},\vec{CF}$
2	$\vec{AC}=\vec{a},\vec{AE}=\vec{b}$	$\vec{AB},\vec{BC},\vec{CD}$
3	$\vec{AC}=\vec{a},\vec{CE}=\vec{b}$	$\vec{AD},\vec{BE},\vec{CF}$
4	$\vec{AD}=\vec{a},\vec{BE}=\vec{b}$	$\vec{AC},\vec{CE},\vec{EA}$
5	$\vec{AC}=\vec{a},\vec{EC}=\vec{b}$	$\vec{BF},\vec{BD},\vec{DF}$
6	$\vec{FE}=\vec{a},\vec{FD}=\vec{b}$	$\vec{AC},\vec{CE},\vec{EA}$
7	$\vec{EA}=\vec{a},\vec{EC}=\vec{b}$	$\vec{AB},\vec{BC},\vec{CD}$
8	$\vec{AD}=\vec{a},\vec{FC}=\vec{b}$	$\vec{FB},\vec{BD},\vec{DF}$
9	$\vec{AD}=\vec{a},\vec{AB}=\vec{b}$	$\vec{AC},\vec{CE},\vec{EA}$
10	$\vec{AE}=\vec{a},\vec{AD}=\vec{b}$	$\vec{BF},\vec{BD},\vec{FD}$
11	$\vec{AF}=\vec{a},\vec{AB}=\vec{b}$	$\vec{AD},\vec{BE},\vec{CF}$
12	$\vec{EC}=\vec{a},\vec{EA}=\vec{b}$	$\vec{AB},\vec{BC},\vec{CD}$
13	$\vec{AD}=\vec{a},\vec{AE}=\vec{b}$	$\vec{BD},\vec{DF},\vec{FB}$
14	$\vec{BF}=\vec{a},\vec{BD}=\vec{b}$	$\vec{AB},\vec{BC},\vec{CD}$
15	$\vec{BE}=\vec{a},\vec{CF}=\vec{b}$	$\vec{AC},\vec{CE},\vec{EA}$
16	$\vec{AC}=\vec{a},\vec{CE}=\vec{b}$	$\vec{BD},\vec{DF},\vec{FB}$
17	$\vec{AB}=\vec{a},\vec{AF}=\vec{b}$	$\vec{AC},\vec{CE},\vec{EA}$
18	$\vec{FB}=\vec{a},\vec{FD}=\vec{b}$	$\vec{AD},\vec{BE},\vec{CF}$
19	$\vec{OC}=\vec{a},\vec{OE}=\vec{b}$	$\vec{AC},\vec{CE},\vec{EA}$
20	$\vec{AC}=\vec{a},\vec{AE}=\vec{b}$	$\vec{OC},\vec{OE},\vec{OA}$
21	$\vec{FC}=\vec{a},\vec{FD}=\vec{b}$	$\vec{AB},\vec{BC},\vec{CD}$
22	$\vec{OF}=\vec{a},\vec{OD}=\vec{b}$	$\vec{BF},\vec{FD},\vec{DB}$
23	$\vec{FB}=\vec{a},\vec{FC}=\vec{b}$	$\vec{BC},\vec{CD},\vec{DE}$
24	$\vec{AC}=\vec{a},\vec{AO}=\vec{b}$	$\vec{BF},\vec{FD},\vec{DB}$
25	$\vec{OD}=\vec{a},\vec{OC}=\vec{b}$	$\vec{AC},\vec{CE},\vec{EA}$
26	$\vec{BC}=\vec{a},\vec{CD}=\vec{b}$	$\vec{BF},\vec{FD},\vec{DB}$
27	$\vec{AD}=\vec{a},\vec{AC}=\vec{b}$	$\vec{AB},\vec{BC},\vec{CD}$
28	$\vec{AD}=\vec{a},\vec{FC}=\vec{b}$	$\vec{FB},\vec{BD},\vec{DF}$
29	$\vec{FD}=\vec{a},\vec{FC}=\vec{b}$	$\vec{AC},\vec{CE},\vec{EA}$
30	$\vec{EC}=\vec{a},\vec{ED}=\vec{b}$	$\vec{OB},\vec{OC},\vec{OD}$

Задача 3

В параллелограмме ABCD с центром O найти $\vec{AB}, \vec{AD}$, векторы высот $\vec{BK}(BK \perp AD)$, $\vec{BL}(BL \perp DC)$, если даны:

N	Дано	N	Дано
1	$\vec{DC}=\vec{a}, \vec{AC}=\vec{b}$	16	$\vec{DC}=\vec{a}, \vec{AO}=\vec{b}$
2	$\vec{AO}=\vec{a}, \vec{OD}=\vec{b}$	17	$\vec{DC}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}$
3	$\vec{AO}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}$	18	$\vec{OC}=\vec{a}, \vec{BO}=\vec{b}$
4	$\vec{OD}=\vec{a}, \vec{OC}=\vec{b}$	19	$\vec{OC}=\vec{a}, \vec{AD}=\vec{b}$
5	$\vec{CD}=\vec{a}, \vec{DO}=\vec{b}$	20	$\vec{BO}=\vec{a}, \vec{DC}=\vec{b}$
6	$\vec{OB}=\vec{a}, \vec{OC}=\vec{b}$	21	$\vec{DO}=\vec{a}, \vec{OA}=\vec{b}$
7	$\vec{AO}=\vec{a}, \vec{BO}=\vec{b}$	22	$\vec{DO}=\vec{a}, \vec{DA}=\vec{b}$
8	$\vec{AC}=\vec{a}, \vec{AD}=\vec{b}$	23	$\vec{DO}=\vec{a}, \vec{CO}=\vec{b}$
9	$\vec{OD}=\vec{a}, \vec{DC}=\vec{b}$	24	$\vec{DA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}$
10	$\vec{BD}=\vec{a}, \vec{OC}=\vec{b}$	25	$\vec{DA}=\vec{a}, \vec{OC}=\vec{b}$
11	$\vec{BO}=\vec{a}, \vec{OA}=\vec{b}$	26	$\vec{DA}=\vec{a}, \vec{DO}=\vec{b}$
12	$\vec{BD}=\vec{a}, \vec{AC}=\vec{b}$	27	$\vec{AD}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}$
13	$\vec{AD}=\vec{a}, \vec{AO}=\vec{b}$	28	$\vec{OD}=\vec{a}, \vec{CO}=\vec{b}$
14	$\vec{AC}=\vec{a}, \vec{DC}=\vec{b}$	29	$\vec{BO}=\vec{a}, \vec{AO}=\vec{b}$
15	$\vec{AO}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}$	30	$\vec{AC}=\vec{a}, \vec{DC}=\vec{b}$

Задача 4

В треугольнике ABC с медианами $\vec{AE}, \vec{BF}, \vec{CY}$ и медианной точкой M.

Найти $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$, высоту $\vec{BK}$ и биссектрису $\vec{AD}$, если дано:

N	Дано	N	Дано
1	$\vec{AY}=\vec{a}, \vec{YM}=\vec{b}$	16	$\vec{MY}=\vec{a}, \vec{MB}=\vec{b}$
2	$\vec{AY}=\vec{a}, \vec{MC}=\vec{b}$	17	$\vec{MY}=\vec{a}, \vec{ME}=\vec{b}$
3	$\vec{BY}=\vec{a}, \vec{AM}=\vec{b}$	18	$\vec{MF}=\vec{a}, \vec{AE}=\vec{b}$
4	$\vec{YB}=\vec{a}, \vec{ME}=\vec{b}$	19	$\vec{MC}=\vec{a}, \vec{BF}=\vec{b}$
5	$\vec{YA}=\vec{a}, \vec{AM}=\vec{b}$	20	$\vec{EM}=\vec{a}, \vec{EC}=\vec{b}$
6	$\vec{BA}=\vec{a}, \vec{MY}=\vec{b}$	21	$\vec{EA}=\vec{a}, \vec{MB}=\vec{b}$
7	$\vec{BF}=\vec{a}, \vec{AE}=\vec{b}$	22	$\vec{MA}=\vec{a}, \vec{MF}=\vec{b}$
8	$\vec{FB}=\vec{a}, \vec{BE}=\vec{b}$	23	$\vec{MF}=\vec{a}, \vec{MY}=\vec{b}$
9	$\vec{CE}=\vec{a}, \vec{BM}=\vec{b}$	24	$\vec{MY}=\vec{a}, \vec{ME}=\vec{b}$
10	$\vec{EB}=\vec{a}, \vec{MY}=\vec{b}$	25	$\vec{MB}=\vec{a}, \vec{ME}=\vec{b}$
11	$\vec{EC}=\vec{a}, \vec{MA}=\vec{b}$	26	$\vec{MB}=\vec{a}, \vec{MY}=\vec{b}$
12	$\vec{BE}=\vec{a}, \vec{MC}=\vec{b}$	27	$\vec{MB}=\vec{a}, \vec{MC}=\vec{b}$
13	$\vec{MB}=\vec{a}, \vec{BE}=\vec{b}$	28	$\vec{MB}=\vec{a}, \vec{MA}=\vec{b}$
14	$\vec{CM}=\vec{a}, \vec{CE}=\vec{b}$	29	$\vec{MC}=\vec{a}, \vec{MY}=\vec{b}$
15	$\vec{MF}=\vec{a}, \vec{ME}=\vec{b}$	30	$\vec{YC}=\vec{a}, \vec{EA}=\vec{b}$

Задача 5

В недекартовом базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ найти $|\vec{a}|, |\vec{b}|, (\vec{a}, \vec{b}), \cos(\alpha)$, если дано:

N	Вектор $\vec{a}$	Вектор $\vec{b}$	$\lvert\vec{e}_1\rvert$	$\lvert\vec{e}_2\rvert$	$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$
1	$\vec{a}(2,-1)$	$\vec{b}(3,2)$	3	3	60°
2	$\vec{a}(3,\sqrt{3})$	$\vec{b}(1,\sqrt{3})$	2	1	30°
3	$\vec{a}(4,1)$	$\vec{b}(3,-2)$	1	3	120°
4	$\vec{a}(2,\sqrt{3})$	$\vec{b}(\sqrt{3},-4)$	3	1	150°
5	$\vec{a}(-1,3)$	$\vec{b}(2,-5)$	2	3	60°
6	$\vec{a}(2\sqrt{3},1)$	$\vec{b}(2,-3\sqrt{3})$	1	3	30°
7	$\vec{a}(5,1)$	$\vec{b}(2,-3)$	1	2	120°
8	$\vec{a}(\sqrt{3},-2)$	$\vec{b}(1,3\sqrt{3})$	2	1	150°
9	$\vec{a}(4,1)$	$\vec{b}(3,-2)$	1	3	60°
10	$\vec{a}(2,-\sqrt{3})$	$\vec{b}(2\sqrt{3},1)$	2	3	30°
11	$\vec{a}(3,-2)$	$\vec{b}(5,1)$	1	4	120°
12	$\vec{a}(\sqrt{3},2)$	$\vec{b}(2\sqrt{3},1)$	2	3	150°
13	$\vec{a}(4,1)$	$\vec{b}(-5,2)$	1	3	60°
14	$\vec{a}(2,\sqrt{3})$	$\vec{b}(3,-2\sqrt{3})$	2	1	30°
15	$\vec{a}(3,-2)$	$\vec{b}(1,4)$	4	1	120°
16	$\vec{a}(\sqrt{3},-3)$	$\vec{b}(2,\sqrt{3})$	2	1	150°
17	$\vec{a}(3,2)$	$\vec{b}(5,-2)$	1	3	60°
18	$\vec{a}(3,-2\sqrt{3})$	$\vec{b}(\sqrt{3},-1)$	2	1	30°
19	$\vec{a}(1,2)$	$\vec{b}(-3,1)$	3	2	120°
20	$\vec{a}(\sqrt{3},-1)$	$\vec{b}(3,-2\sqrt{3})$	2	1	150°
21	$\vec{a}(3,-2)$	$\vec{b}(-1,4)$	1	4	60°
22	$\vec{a}(2,-\sqrt{3})$	$\vec{b}(\sqrt{3},2)$	3	1	30°
23	$\vec{a}(4,2)$	$\vec{b}(1,4)$	3	2	120°
24	$\vec{a}(3,-2\sqrt{3})$	$\vec{b}(\sqrt{3},2)$	1	4	150°
25	$\vec{a}(2,-5)$	$\vec{b}(1,-3)$	3	2	60°
26	$\vec{a}(\sqrt{3},-4)$	$\vec{b}(-2,\sqrt{3})$	1	3	30°
27	$\vec{a}(4,2)$	$\vec{b}(2,3)$	3	1	120°
28	$\vec{a}(2,3)$	$\vec{b}(1,4)$	$\sqrt{3}$	2	150°
29	$\vec{a}(3,-4)$	$\vec{b}(1,-2)$	3	5	60°
30	$\vec{a}(5,1)$	$\vec{b}(3,-1)$	2	$\sqrt{3}$	30°

Задача 6

В декартовом базисе i, j даны векторы $\vec{a}, \vec{b}$. Найти $\vec{c}$, который с данными образует треугольник, площадь треугольника и косинус угла между данными векторами, скалярную и векторную проекцию вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$.

N	Вектор $\vec{a}$	Вектор $\vec{b}$	N	Вектор $\vec{a}$	Вектор $\vec{b}$
1	$\vec{a}(3,-4)$	$\vec{b}(3,-15)$	16	$\vec{a}(10,24)$	$\vec{b}(21,20)$
2	$\vec{a}(-8,15)$	$\vec{b}(5,12)$	17	$\vec{a}(10,21)$	$\vec{b}(4,3)$
3	$\vec{a}(-5,12)$	$\vec{b}(24,7)$	18	$\vec{a}(3,4)$	$\vec{b}(15,8)$
4	$\vec{a}(7,-24)$	$\vec{b}(24,10)$	19	$\vec{a}(8,15)$	$\vec{b}(12,5)$
5	$\vec{a}(10,-24)$	$\vec{b}(21,20)$	20	$\vec{a}(5,12)$	$\vec{b}(24,7)$
6	$\vec{a}(20,-21)$	$\vec{b}(4,3)$	21	$\vec{a}(7,24)$	$\vec{b}(24,10)$
7	$\vec{a}(4,-3)$	$\vec{b}(8,15)$	22	$\vec{a}(10,24)$	$\vec{b}(21,20)$
8	$\vec{a}(15,-8)$	$\vec{b}(5,12)$	23	$\vec{a}(20,21)$	$\vec{b}(15,8)$
9	$\vec{a}(12,-5)$	$\vec{b}(7,24)$	24	$\vec{a}(8,15)$	$\vec{b}(5,12)$
10	$\vec{a}(24,-7)$	$\vec{b}(10,24)$	25	$\vec{a}(12,5)$	$\vec{b}(7,24)$
11	$\vec{a}(24,-10)$	$\vec{b}(20,21)$	26	$\vec{a}(24,7)$	$\vec{b}(3,-4)$
12	$\vec{a}(20,21)$	$\vec{b}(4,3)$	27	$\vec{a}(4,7)$	$\vec{b}(12,5)$
13	$\vec{a}(3,4)$	$\vec{b}(15,8)$	28	$\vec{a}(15,-8)$	$\vec{b}(24,8)$
14	$\vec{a}(8,15)$	$\vec{b}(24,7)$	29	$\vec{a}(4,-3)$	$\vec{b}(5,-12)$
15	$\vec{a}(7,24)$	$\vec{b}(24,10)$	30	$\vec{a}(10,24)$	$\vec{b}(4,-3)$

Задача 7

Найти 1) $\{\vec{b} : \vec{b} \perp \vec{a}\}$;

2) $\vec{b} \perp \vec{a}$, если дан $|\vec{b}|$.

N	Вектор $\vec{a}$	$\lvert\vec{b}\rvert$	N	Вектор $\vec{a}$	$\lvert\vec{b}\rvert$
1	$\vec{a}(3,-4)$	15	16	$\vec{a}(24,-7)$	50
2	$\vec{a}(-8,15)$	34	17	$\vec{a}(24,-10)$	52
3	$\vec{a}(-5,12)$	26	18	$\vec{a}(21,-20)$	29
4	$\vec{a}(7,-24)$	50	19	$\vec{a}(3,4)$	15
5	$\vec{a}(10,-24)$	13	20	$\vec{a}(8,15)$	51
6	$\vec{a}(20,-21)$	58	21	$\vec{a}(5,12)$	39
7	$\vec{a}(4,3)$	10	22	$\vec{a}(7,24)$	75
8	$\vec{a}(15,8)$	34	23	$\vec{a}(10,24)$	52
9	$\vec{a}(12,5)$	26	24	$\vec{a}(20,21)$	58
10	$\vec{a}(24,7)$	50	25	$\vec{a}(0,5)$	10
11	$\vec{a}(24,10)$	52	26	$\vec{a}(24,7)$	30
12	$\vec{a}(21,20)$	29	27	$\vec{a}(8,15)$	51
13	$\vec{a}(4,-3)$	20	28	$\vec{a}(5,12)$	26
14	$\vec{a}(15,-8)$	34	29	$\vec{a}(7,24)$	25
15	$\vec{a}(12,-5)$	26	30	$\vec{a}(3,0)$	5

Задача 8

Найти 1) $\{\vec{b} : \vec{b} \| \vec{a}\}$;

2) $\vec{b} \| \vec{a}$, если дан $|\vec{b}|$.

N	$\vec{a}$	$\lvert\vec{b}\rvert$	N	$\vec{a}$	$\lvert\vec{b}\rvert$
1	$\vec{a}(1,-2,2)$	9	16	$\vec{a}(5,14,-2)$	30
2	$\vec{a}(2,3,-6)$	14	17	$\vec{a}(2,1,-2)$	12
3	$\vec{a}(1,-4,8)$	9	18	$\vec{a}(6,-3,2)$	21
4	$\vec{a}(4,-4,7)$	18	19	$\vec{a}(4,-1,8)$	18
5	$\vec{a}(2,6,-9)$	20	20	$\vec{a}(7,4,4)$	27
6	$\vec{a}(6,6,7)$	33	21	$\vec{a}(6,9,-2)$	33
7	$\vec{a}(3,-4,-12)$	26	22	$\vec{a}(6,7,6)$	22
8	$\vec{a}(2,5,14)$	30	23	$\vec{a}(4,-12,3)$	13
9	$\vec{a}(1,2,2)$	6	24	$\vec{a}(14,5,-2)$	30
10	$\vec{a}(2,3,6)$	21	25	$\vec{a}(2,2,1)$	9
11	$\vec{a}(1,4,8)$	18	26	$\vec{a}(2,6,-3)$	21
12	$\vec{a}(7,4,4)$	18	27	$\vec{a}(4,1,8)$	18
13	$\vec{a}(9,-6,2)$	22	28	$\vec{a}(7,4,4)$	27
14	$\vec{a}(6,7,6)$	33	29	$\vec{a}(6,9,2)$	22
15	$\vec{a}(4,12,-3)$	26	30	$\vec{a}(2,-9,6)$	33

Задача 9

Найти $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$, если:

N	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\lvert\vec{c}\rvert$	N	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\lvert\vec{c}\rvert$
1	$\vec{a}(1,2,2)$	$\vec{b}(6,14,7)$	30	16	$\vec{a}(8,4,1)$	$\vec{b}(-6,-4,1)$	9
2	$\vec{a}(1,4,8)$	$\vec{b}(1,0,1)$	18	17	$\vec{a}(-2,2,1)$	$\vec{b}(-16,2,3)$	15
3	$\vec{a}(2,-2,1)$	$\vec{b}(14,-28,9)$	60	18	$\vec{a}(-8,4,1)$	$\vec{b}(5,-4,2)$	18
4	$\vec{a}(4,-8,1)$	$\vec{b}(-4,6,1)$	9	19	$\vec{a}(-2,-2,1)$	$\vec{b}(4,-10,3)$	45
5	$\vec{a}(2,1,-2)$	$\vec{b}(16,3,-2)$	30	20	$\vec{a}(-8,-4,1)$	$\vec{b}(4,4,3)$	18
6	$\vec{a}(8,-1,-4)$	$\vec{b}(-5,-2,4)$	18	21	$\vec{a}(-2,1,-2)$	$\vec{b}(-6,1,8)$	15
7	$\vec{a}(1,-2,-2)$	$\vec{b}(3,-10,4)$	15	22	$\vec{a}(-4,1,-8)$	$\vec{b}(0,1,-1)$	27
8	$\vec{a}(1,-4,-8)$	$\vec{b}(3,4,4)$	27	23	$\vec{a}(2,1,2)$	$\vec{b}(14,6,7)$	30
9	$\vec{a}(2,1,2)$	$\vec{b}(6,1,-8)$	15	24	$\vec{a}(4,1,8)$	$\vec{b}(-4,1,-6)$	36
10	$\vec{a}(4,1,8)$	$\vec{b}(0,1,1)$	18	25	$\vec{a}(2,1,-2)$	$\vec{b}(14,9,-28)$	15
11	$\vec{a}(2,-1,2)$	$\vec{b}(14,-6,7)$	30	26	$\vec{a}(4,1,-8)$	$\vec{b}(-4,2,5)$	9
12	$\vec{a}(4,-1,8)$	$\vec{b}(4,1,6)$	9	27	$\vec{a}(2,-2,1)$	$\vec{b}(2,-16,3)$	45
13	$\vec{a}(2,-2,1)$	$\vec{b}(7,-14,6)$	30	28	$\vec{a}(4,-8,1)$	$\vec{b}(-4,4,3)$	18
14	$\vec{a}(8,-4,1)$	$\vec{b}(1,0,1)$	36	29	$\vec{a}(-2,2,1)$	$\vec{b}(-10,-4,3)$	15
15	$\vec{a}(2,2,1)$	$\vec{b}(28,14,9)$	15	30	$\vec{a}(-4,8,1)$	$\vec{b}(0,1,1)$	18

Задача 10

Найти работу силы F на пути ABC, если:

N	$\vec{F}$	A	B	C
1	$\vec{F}(3,-2,1)$	$A(0,-1,3)$	$B(1,-4,2)$	$C(3,1,0)$
2	$\vec{F}(-2,0,4)$	$A(3,-2,5)$	$B(0,-1,3)$	$C(2,-5,6)$
3	$\vec{F}(3,2,-1)$	$A(4,5,0)$	$B(3,1,2)$	$C(0,6,1)$
4	$\vec{F}(2,-5,3)$	$A(4,0,-3)$	$B(2,1,0)$	$C(5,2,-4)$
5	$\vec{F}(2,3,-4)$	$A(4,1,0)$	$B(3,-2,1)$	$C(0,-2,3)$
6	$\vec{F}(3,4,-2)$	$A(5,0,-4)$	$B(4,1,2)$	$C(3,-2,5)$
7	$\vec{F}(4,-3,1)$	$A(4,5,-2)$	$B(6,0,-3)$	$C(3,-2,1)$
8	$\vec{F}(2,-3,5)$	$A(6,3,-2)$	$B(4,-2,1)$	$C(0,1,3)$
9	$\vec{F}(3,-2,1)$	$A(4,1,0)$	$B(0,4,-3)$	$C(3,-2,5)$
10	$\vec{F}(4,2,-3)$	$A(4,1,3)$	$B(2,-3,1)$	$C(5,0,-2)$
11	$\vec{F}(3,2,-1)$	$A(4,-1,1)$	$B(3,0,-2)$	$C(4,1,-3)$
12	$\vec{F}(4,2,-5)$	$A(4,4,-2)$	$B(4,5,-6)$	$C(6,0,5)$
13	$\vec{F}(5,1,0)$	$A(5,1,3)$	$B(-3,1,6)$	$C(7,2,4)$
14	$\vec{F}(3,-2,6)$	$A(0,-2,4)$	$B(3,1,2)$	$C(4,3,4)$
15	$\vec{F}(3,3,5)$	$A(2,-1,3)$	$B(2,4,1)$	$C(7,4,-2)$
16	$\vec{F}(2,3,5)$	$A(0,-2,3)$	$B(2,3,0)$	$C(5,2,6)$
17	$\vec{F}(3,-2,4)$	$A(4,-2,0)$	$B(0,2,-3)$	$C(5,4,3)$
18	$\vec{F}(3,1,4)$	$A(3,2,-1)$	$B(3,1,2)$	$C(5,3,4)$
19	$\vec{F}(3,4,1)$	$A(3,1,5)$	$B(2,3,-5)$	$C(4,6,-1)$
20	$\vec{F}(4,-5,2)$	$A(3,1,4)$	$B(0,-1,2)$	$C(6,5,4)$
21	$\vec{F}(3,1,5)$	$A(2,3,4)$	$B(3,0,2)$	$C(-2,1,5)$
22	$\vec{F}(5,6,-2)$	$A(2,1,3)$	$B(-2,0,4)$	$C(3,-2,6)$
23	$\vec{F}(4,-3,2)$	$A(3,-2,5)$	$B(0,1,-3)$	$C(-2,1,3)$
24	$\vec{F}(0,2,-3)$	$A(4,3,5)$	$B(-2,1,3)$	$C(5,6,-1)$
25	$\vec{F}(3,-2,5)$	$A(3,2,-1)$	$B(1,5,-3)$	$C(6,4,-2)$
26	$\vec{F}(4,1,3)$	$A(3,4,-3)$	$B(2,0,1)$	$C(5,7,-2)$
27	$\vec{F}(4,5,-2)$	$A(3,-4,2)$	$B(0,-2,1)$	$C(2,-1,5)$
28	$\vec{F}(3,2,6)$	$A(-2,1,3)$	$B(3,0,1)$	$C(4,-2,3)$
29	$\vec{F}(0,-3,1)$	$A(2,3,-2)$	$B(4,2,0)$	$C(5,7,-1)$
30	$\vec{F}(3,-2,5)$	$A(2,3,-1)$	$B(0,1,3)$	$C(-1,2,4)$

Задача 11

Доказать, что векторы $\vec{a},\vec{b}$ образуют базис плоскости и найти координаты вектора $\vec{c}$ в этом базисе.

N	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
1	$\vec{a}(3,-2)$	$\vec{b}(2,3)$	$\vec{c}(5,12)$
2	$\vec{a}(2,3)$	$\vec{b}(1,-3)$	$\vec{c}(-1,12)$
3	$\vec{a}(2,-1)$	$\vec{b}(3,-2)$	$\vec{c}(-5,4)$
4	$\vec{a}(-3,-2)$	$\vec{b}(1,4)$	$\vec{c}(7,8)$
5	$\vec{a}(-2,1)$	$\vec{b}(2,3)$	$\vec{c}(4,10)$
6	$\vec{a}(3,5)$	$\vec{b}(-2,4)$	$\vec{c}(12,-2)$
7	$\vec{a}(4,1)$	$\vec{b}(3,-2)$	$\vec{c}(18,-1)$
8	$\vec{a}(5,2)$	$\vec{b}(3,-1)$	$\vec{c}(1,7)$
9	$\vec{a}(2,-3)$	$\vec{b}(1,2)$	$\vec{c}(-3,8)$
10	$\vec{a}(3,-2)$	$\vec{b}(2,-1)$	$\vec{c}(2,-2)$
11	$\vec{a}(1,3)$	$\vec{b}(2,-4)$	$\vec{c}(-5,15)$
12	$\vec{a}(2,-1)$	$\vec{b}(4,-2)$	$\vec{c}(-8,4)$
13	$\vec{a}(3,-2)$	$\vec{b}(2,-4)$	$\vec{c}(13,-14)$
14	$\vec{a}(2,-1)$	$\vec{b}(4,-2)$	$\vec{c}(8,-4)$
15	$\vec{a}(1,3)$	$\vec{b}(3,5)$	$\vec{c}(-1,1)$
16	$\vec{a}(2,-3)$	$\vec{b}(3,1)$	$\vec{c}(7,-5)$
17	$\vec{a}(3,-1)$	$\vec{b}(4,-2)$	$\vec{c}(2,0)$
18	$\vec{a}(4,-2)$	$\vec{b}(3,-1)$	$\vec{c}(6,-4)$
19	$\vec{a}(3,-1)$	$\vec{b}(2,-3)$	$\vec{c}(12,-11)$
20	$\vec{a}(-1,2)$	$\vec{b}(2,-3)$	$\vec{c}(-6,10)$
21	$\vec{a}(-3,2)$	$\vec{b}(2,-5)$	$\vec{c}(-11,11)$
22	$\vec{a}(1,2)$	$\vec{b}(-2,3)$	$\vec{c}(4,1)$
23	$\vec{a}(-1,3)$	$\vec{b}(2,4)$	$\vec{c}(-5,5)$
24	$\vec{a}(1,3)$	$\vec{b}(2,2)$	$\vec{c}(4,8)$
25	$\vec{a}(2,5)$	$\vec{b}(1,-2)$	$\vec{c}(7,22)$
26	$\vec{a}(2,3)$	$\vec{b}(1,4)$	$\vec{c}(8,17)$
27	$\vec{a}(-1,2)$	$\vec{b}(2,-3)$	$\vec{c}(0,1)$
28	$\vec{a}(-3,2)$	$\vec{b}(-2,1)$	$\vec{c}(-7,5)$
29	$\vec{a}(-1,3)$	$\vec{b}(2,-3)$	$\vec{c}(4,-3)$
30	$\vec{a}(1,3)$	$\vec{b}(2,4)$	$\vec{c}(0,2)$

Задача 12

Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - неколлинеарны. Найти линейную зависимость вектора $\vec{c}$ от $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

N	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
1	$\vec{a}(2,-1,3)$	$\vec{b}(2,-1,0)$	$\vec{c}(6,-3,6)$
2	$\vec{a}(1,-3,2)$	$\vec{b}(1,2,-1)$	$\vec{c}(4,-7,5)$
3	$\vec{a}(-2,1,2)$	$\vec{b}(1,2,-1)$	$\vec{c}(-1,8,1)$
4	$\vec{a}(-1,2,3)$	$\vec{b}(2,-1,2)$	$\vec{c}(-8,7,0)$
5	$\vec{a}(3,-1,2)$	$\vec{b}(-2,1,3)$	$\vec{c}(11,-4,3)$
6	$\vec{a}(1,-3,4)$	$\vec{b}(2,-2,3)$	$\vec{c}(-3,1,-2)$
7	$\vec{a}(2,-2,1)$	$\vec{b}(3,-1,2)$	$\vec{c}(12,-8,7)$
8	$\vec{a}(3,-1,2)$	$\vec{b}(1,-2,3)$	$\vec{c}(10,0,2)$
9	$\vec{a}(4,-1,2)$	$\vec{b}(3,-2,1)$	$\vec{c}(5,0,3)$
10	$\vec{a}(2,-2,1)$	$\vec{b}(3,-1,2)$	$\vec{c}(3,-5,1)$
11	$\vec{a}(2,-3,1)$	$\vec{b}(3,-2,2)$	$\vec{c}(-5,0,-4)$
12	$\vec{a}(3,1,-1)$	$\vec{b}(2,3,-2)$	$\vec{c}(-1,-5,3)$
13	$\vec{a}(4,1,-3)$	$\vec{b}(3,-1,-2)$	$\vec{c}(-1,5,0)$
14	$\vec{a}(2,-3,1)$	$\vec{b}(3,-2,-1)$	$\vec{c}(8,-7,-1)$
15	$\vec{a}(3,2,-1)$	$\vec{b}(4,3,-2)$	$\vec{c}(1,0,1)$
16	$\vec{a}(1,-2,3)$	$\vec{b}(2,-1,3)$	$\vec{c}(-2,-5,3)$
17	$\vec{a}(3,-2,5)$	$\vec{b}(2,-1,3)$	$\vec{c}(5,-4,9)$
18	$\vec{a}(1,-2,3)$	$\vec{b}(2,-1,2)$	$\vec{c}(2,-7,10)$
19	$\vec{a}(2,-1,4)$	$\vec{b}(1,-2,3)$	$\vec{c}(4,1,6)$
20	$\vec{a}(3,-1,4)$	$\vec{b}(2,-2,-3)$	$\vec{c}(8,-4,5)$
21	$\vec{a}(2,-3,4)$	$\vec{b}(1,-1,-3)$	$\vec{c}(7,-9,-1)$
22	$\vec{a}(1,-3,3)$	$\vec{b}(2,1,-2)$	$\vec{c}(7,-7,5)$
23	$\vec{a}(2,-2,4)$	$\vec{b}(1,3,-2)$	$\vec{c}(5,7,-2)$
24	$\vec{a}(1,-3,2)$	$\vec{b}(2,1,-3)$	$\vec{c}(5,-8,3)$
25	$\vec{a}(2,-1,3)$	$\vec{b}(1,2,-1)$	$\vec{c}(7,4,3)$
26	$\vec{a}(3,2,-1)$	$\vec{b}(-1,-4,3)$	$\vec{c}(6,-6,6)$
27	$\vec{a}(2,1,-3)$	$\vec{b}(3,-1,-2)$	$\vec{c}(8,-1,-7)$
28	$\vec{a}(1,3,-2)$	$\vec{b}(2,1,4)$	$\vec{c}(4,7,0)$
29	$\vec{a}(3,2,1)$	$\vec{b}(2,3,-1)$	$\vec{c}(5,0,5)$
30	$\vec{a}(4,1,-2)$	$\vec{b}(3,2,-1)$	$\vec{c}(9,1,-5)$

Задача 13

Доказать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ линейно независимы и найти координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

N	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	$\vec{a}(1,-2,3)$	$\vec{b}(3,-1,0)$	$\vec{c}(2,-1,1)$	$\vec{d}(3,-2,5)$
2	$\vec{a}(2,-1,4)$	$\vec{b}(1,0,2)$	$\vec{c}(3,-2,5)$	$\vec{d}(4,0,9)$
3	$\vec{a}(3,-1,0)$	$\vec{b}(4,2,3)$	$\vec{c}(5,3,-1)$	$\vec{d}(7,-5,8)$
4	$\vec{a}(4,2,-1)$	$\vec{b}(3,0,-1)$	$\vec{c}(3,1,-2)$	$\vec{d}(9,7,-1)$
5	$\vec{a}(3,-2,1)$	$\vec{b}(2,-1,0)$	$\vec{c}(4,-2,2)$	$\vec{d}(4,-3,0)$
6	$\vec{a}(2,-1,3)$	$\vec{b}(1,-2,4)$	$\vec{c}(3,0,2)$	$\vec{d}(1,-2,4)$
7	$\vec{a}(3,2,-4)$	$\vec{b}(2,1,-1)$	$\vec{c}(1,3,-3)$	$\vec{d}(4,1,-5)$
8	$\vec{a}(2,-1,3)$	$\vec{b}(3,-2,4)$	$\vec{c}(1,-3,2)$	$\vec{d}(1,5,1)$
9	$\vec{a}(1,-3,2)$	$\vec{b}(2,-1,1)$	$\vec{c}(3,-4,2)$	$\vec{d}(3,-9,5)$
10	$\vec{a}(-2,1,3)$	$\vec{b}(1,2,2)$	$\vec{c}(-1,3,1)$	$\vec{d}(-6,3,1)$
11	$\vec{a}(2,3,-1)$	$\vec{b}(1,2,0)$	$\vec{c}(3,5,1)$	$\vec{d}(3,6,2)$
12	$\vec{a}(3,1,-1)$	$\vec{b}(2,2,1)$	$\vec{c}(4,0,3)$	$\vec{d}(3,5,-2)$
13	$\vec{a}(3,2,-2)$	$\vec{b}(2,1,-3)$	$\vec{c}(5,3,-4)$	$\vec{d}(3,2,-3)$
14	$\vec{a}(4,2,-1)$	$\vec{b}(3,-1,1)$	$\vec{c}(7,1,2)$	$\vec{d}(5,5,-1)$
15	$\vec{a}(1,3,-2)$	$\vec{b}(2,1,-1)$	$\vec{c}(2,3,-3)$	$\vec{d}(6,6,-4)$
16	$\vec{a}(2,0,-1)$	$\vec{b}(1,2,-3)$	$\vec{c}(1,2,-4)$	$\vec{d}(6,0,-1)$
17	$\vec{a}(3,1,-1)$	$\vec{b}(2,2,-3)$	$\vec{c}(5,1,-4)$	$\vec{d}(5,5,-4)$
18	$\vec{a}(4,-2,1)$	$\vec{b}(3,-1,2)$	$\vec{c}(2,0,-1)$	$\vec{d}(3,-3,1)$
19	$\vec{a}(3,-1,2)$	$\vec{b}(2,-2,3)$	$\vec{c}(5,-3,1)$	$\vec{d}(2,-2,7)$
20	$\vec{a}(2,4,-1)$	$\vec{b}(1,3-2)$	$\vec{c}(1,7,-3)$	$\vec{d}(5,7,-3)$
21	$\vec{a}(3,1,-2)$	$\vec{b}(2,3,-1)$	$\vec{c}(1,4,-3)$	$\vec{d}(6,7,-9)$
22	$\vec{a}(4,1,-2)$	$\vec{b}(3,2,-1)$	$\vec{c}(1,3,-3)$	$\vec{d}(7,2,-7)$
23	$\vec{a}(1,3,-2)$	$\vec{b}(2,-1,1)$	$\vec{c}(3,1,-1)$	$\vec{d}(-7,9,-6)$
24	$\vec{a}(2,-2,1)$	$\vec{b}(3,-1,2)$	$\vec{c}(5,-3,1)$	$\vec{d}(2,-2,3)$
25	$\vec{a}(3,-1,2)$	$\vec{b}(2,-2,1)$	$\vec{c}(1,-3,2)$	$\vec{d}(3,3,1)$
26	$\vec{a}(2,-1,3)$	$\vec{b}(3,-2,1)$	$\vec{c}(1,2,3)$	$\vec{d}(-2,-2,0)$
27	$\vec{a}(3,-2,2)$	$\vec{b}(1,-1,2)$	$\vec{c}(2,-1,1)$	$\vec{d}(4,-2,1)$
28	$\vec{a}(2,-1,1)$	$\vec{b}(1,-2,2)$	$\vec{c}(3,-3,1)$	$\vec{d}(2,-1,3)$
29	$\vec{a}(1,-2,3)$	$\vec{b}(2,-1,2)$	$\vec{c}(3,-3,1)$	$\vec{d}(2,-2,6)$
30	$\vec{a}(4,-1,2)$	$\vec{b}(3,-2,1)$	$\vec{c}(1,1,0)$	$\vec{d}(6,1,3)$

Задача 14

Найти составляющие $\vec{h}$ и $\vec{g}$ вектора $\vec{c}$, ортогональную и компланарную векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

N	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
1	$\vec{a}(2,0,1)$	$\vec{b}(0,-1,-1)$	$\vec{c}(5,1,-1)$
2	$\vec{c}(3,6,1)$	$\vec{b}(8,16,0)$	$\vec{c}(3,1,3)$
3	$\vec{a}(5,1,-1)$	$\vec{b}(9,3,-1)$	$\vec{c}(0,-1,4)$
4	$\vec{a}(2,1,-3)$	$\vec{b}(7,4,-10)$	$\vec{c}(3,0,0)$
5	$\vec{a}(3,-1,3)$	$\vec{b}(2,0,4)$	$\vec{c}(1,4,0)$
6	$\vec{a}(1,-2,1)$	$\vec{b}(0,-4,3)$	$\vec{c}(4,3,3)$
7	$\vec{a}(2,-3,2)$	$\vec{b}(5,-8,4)$	$\vec{c}(5,1,1)$
8	$\vec{a}(2,3,-3)$	$\vec{b}(2,5,-3)$	$\vec{c}(5,1,-1)$
9	$\vec{a}(1,1,1)$	$\vec{b}(3,3,4)$	$\vec{c}(3,-3,1)$
10	$\vec{a}(1,2,-1)$	$\vec{b}(1,4,-1)$	$\vec{c}(5,0,-1)$
11	$\vec{a}(1,4,0)$	$\vec{b}(3,10,-1)$	$\vec{c}(5,1,1)$
12	$\vec{a}(1,-5,0)$	$\vec{b}(2,-8,1)$	$\vec{c}(6,-2,-1)$
13	$\vec{a}(1,2,2)$	$\vec{b}(0,1,3)$	$\vec{c}(5,-2,0)$
14	$\vec{a}(2,-1,4)$	$\vec{b}(5,-1,13)$	$\vec{c}(4,3,4)$
15	$\vec{a}(4,1,4)$	$\vec{b}(10,1,7)$	$\vec{c}(-1,5,-1)$
16	$\vec{a}(1,2,5)$	$\vec{b}(4,4,16)$	$\vec{c}(4,-1,0)$
17	$\vec{a}(3,3,-1)$	$\vec{b}(7,8,-2)$	$\vec{c}(4,0,2)$
18	$\vec{a}(4,1,-1)$	$\vec{b}(6,2,-1)$	$\vec{c}(3,-1,2)$
19	$\vec{a}(1,1,-1)$	$\vec{b}(2,1,-4)$	$\vec{c}(6,1,-2)$
20	$\vec{a}(1,0,2)$	$\vec{b}(3,-2,5)$	$\vec{c}(5,-1,-1)$
21	$\vec{a}(1,1,0)$	$\vec{b}(0,1,3)$	$\vec{c}(5,-2,-2)$
22	$\vec{a}(2,1,-1)$	$\vec{b}(5,4,-2)$	$\vec{c}(1,0,4)$
23	$\vec{a}(1,1,-2)$	$\vec{b}(2,1,-6)$	$\vec{c}(5,0,1)$
24	$\vec{a}(2,3,1)$	$\vec{b}(4,2,2)$	$\vec{c}(3,-1,-1)$
25	$\vec{a}(2,-6,0)$	$\vec{b}(1,-5,-1)$	$\vec{c}(4,0,-1)$
26	$\vec{a}(-1,-1,1)$	$\vec{b}(0,-3,1)$	$\vec{c}(4,0,2)$
27	$\vec{a}(2,2,3)$	$\vec{b}(3,2,3)$	$\vec{c}(1,-1,5)$
28	$\vec{a}(-1,1,1)$	$\vec{b}(-1,3,4)$	$\vec{c}(3,3,-1)$
29	$\vec{a}(0,3,1)$	$\vec{b}(-1,11,3)$	$\vec{c}(3,-1,-3)$
30	$\vec{a}(2,1,2)$	$\vec{b}(3,2,4)$	$\vec{c}(1,-1,3)$

Задача 15

В параллелограмме $ABCD$ с срединами сторон E, F, G, H и вектором M найти вершины, если даны:

N	Точки
1	$E(4,-4,4), F(8,-3,2), Y(6,2,-2)$
2	$E(1,-5,2), Y(5,-11,2), H(3,-5,1)$
3	$F(7,-11,7), Y(9,-10,6), H(5,-5,5)$
4	$E(6,2,2), F(10,-1,7), H(8,3,1)$
5	$E(4,5,2), F(7,7,7), M(6,4,5)$
6	$F(8,-12,10), M(6,-8,7), Y(9,-10,8)$
7	$Y(14,-2,10), M(10,-1,7), H(8,-4,8)$
8	$E(5,1,-3), M(9,-2,1), H(6,0,-2)$
9	$E(3,3,5), F(6,4,8), Y(7,-3,7)$
10	$F(13,-1,4), Y(12,-2,3), H(5,1,-2)$
11	$E(5,4,3), Y(7,8,-3), H(3,5,-4)$
12	$E(5,3,7), F(8,8,15), H(6,0,5)$
13	$E(4,-3,3), F(7,-3,8), M(6,-2,6)$
14	$F(-1,3,8), Y(0,4,7), M(1,2,6)$
15	$Y(7,1,9), H(4,-2,4), M(6,-1,6)$
16	$E(5,0,4), H(4,1,3), M(6,3,6)$
17	$E(4,2,4), F(7,7,6), Y(6,6,6)$
18	$F(8,3,9), Y(7,4,8), H(4,-1,3)$
19	$E(6,-1,3), Y(8,5,7), H(5,5,3)$
20	$E(5,0,2), F(8,5,5), H(4,1,3)$
21	$E(6,-1,3), F(9,4,6), M(7,2,5)$
22	$F(2,4,6), Y(5,5,7), M(4,2,5)$
23	$Y(9,6,7), H(6,1,4), M(7,3,6)$
24	$E(5,1,5), H(4,2,3), M(6,4,6)$
25	$E(4,-2,1), F(7,2,6), Y(6,4,5)$
26	$F(8,3,9), Y(7,4,8), H(4,-1,3)$
27	$E(4,-3,2), G(7,1,5), H(3,-1,1)$
28	$E(2,4,-2), F(1,5,2), M(2,4,0)$
29	$E(6,6,4), H(4,3,-1), M(3,5,2)$

Задача 16

Отрезок A_1A_5 разделен на четыре равные части. Найти координаты остальных точек, если даны:

N	Дано	N	Дано
1	$A_1(2,-1,3), A_4(5,5,-3)$	16	$A_1(3,-7,5), A_4(6,2,-1)$
2	$A_2(3,-1,2), A_5(6,5,5)$	17	$A_2(3,-2,3), A_5(9,7,9)$
3	$A_1(-4,2,1), A_3(2,4,5)$	18	$A_1(-8,1,5), A_3(-2,5,3)$
4	$A_2(3,-2,3), A_4(7,4,5)$	19	$A_2(4,0,4), A_4(-2,4,2)$
5	$A_3(5,2,1), A_5(9,8,-1)$	20	$A_3(2,0,3), A_5(-2,4,5)$
6	$A_1(2,-3,2), A_4(5,6,-1)$	21	$A_1(1,5,-5), A_4(7,-1,4)$
7	$A_2(-2,2,1), A_5(4,5,-2)$	22	$A_2(-1,-4,3), A_5(2,5,-3)$

8	$A_1(1,-2,5)$, $A_3(5,2,3)$	23	$A_1(4,1,-6)$, $A_3(0,5,0)$
9	$A_2(3,-1,3)$, $A_4(5,3,1)$	24	$A_2(2,2,-4)$, $A_4(0,6,2)$
10	$A_3(4,0,1)$, $A_5(6,6,-1)$	25	$A_3(5,3,4)$, $A_5(1,7,6)$
11	$A_1(0,4,-3)$, $A_4(6,1,3)$	26	$A_1(2,-5,5)$, $A_4(5,4,-1)$
12	$A_2(3,-2,0)$, $A_5(9,7,-6)$	27	$A_2(5,0,-3)$, $A_5(-4,6,6)$
13	$A_1(2,-7,5)$, $A_3(4,-1,3)$	28	$A_1(1,-7,3)$, $A_3(5,-1,1)$
14	$A_2(3,-3,3)$, $A_4(1,1,7)$	29	$A_2(-1,3,-4)$, $A_4(3,5,2)$
15	$A_3(4,1,2)$, $A_5(6,7,6)$	30	$A_3(5,-1,3)$, $A_5(1,3,5)$

Задача 17

В тетраэдре $ABCD$ найти объем V, площадь S основания ABC, высоту $H = DK$ и высоту $h = CL$ основания.

N	A	B	C	D
1	$A(-1,2,5)$	$B(0,4,7)$	$C(5,16,12)$	$D(0,4,22)$
2	$A(2,-3,1)$	$B(3,1,9)$	$C(3,-3,2)$	$D(4,1,19)$
3	$A(3,-5,4)$	$B(4,-3,2)$	$C(9,9,-3)$	$D(9,1,7)$
4	$A(4,-2,5)$	$B(5,2,-3)$	$C(5,-6,11)$	$D(6,-2,21)$
5	$A(-1,-3,-5)$	$B(0,-1,-3)$	$C(8,11,23)$	$D(9,13,40)$
6	$A(2,1,-3)$	$B(3,5,5)$	$C(6,-7,-13)$	$D(2,17,-2)$
7	$A(2,-3,1)$	$B(4,1,5)$	$C(5,-1,17)$	$D(4,-3,-15)$
8	$A(2,-1,3)$	$B(3,3,11)$	$C(5,-5,-1)$	$D(6,-1,16)$
9	$A(-2,4,3)$	$B(-1,6,5)$	$C(4,24,-5)$	$D(-2,26,8)$
10	$A(2,-3,1)$	$B(3,1,-7)$	$C(4,-3,-1)$	$D(4,1,10)$
11	$A(3,2,-1)$	$B(4,0,1)$	$C(4,-4,-9)$	$D(4,-6,23)$
12	$A(4,2,3)$	$B(5,0,1)$	$C(16,-26,-11)$	$D(11,-14,24)$
13	$A(3,-1,2)$	$B(4,-5,-6)$	$C(5,7,14)$	$D(5,-1,9)$
14	$A(3,5,-1)$	$B(4,1,-9)$	$C(7,13,9)$	$D(3,3,0)$
15	$A(-1,2,0)$	$B(0,0,-2)$	$C(8,-12,-28)$	$D(9,-14,-15)$
16	$A(2,5,9)$	$B(3,1,1)$	$C(5,9,13)$	$D(6,5,32)$
17	$A(2,3,5)$	$B(3,1,1)$	$C(5,1,-11)$	$D(6,-1,17)$
18	$A(4,3,4)$	$B(5,-1,12)$	$C(6,3,6)$	$D(6,-1,4)$
19	$A(2,3,4)$	$B(3,1,2)$	$C(5,-7,8)$	$D(6,-9,-9)$
20	$A(2,6,-1)$	$B(3,2,7)$	$C(3,10,-7)$	$D(4,6,28)$
21	$A(2,3,-6)$	$B(3,6,-8)$	$C(4,-4,10)$	$D(4,0,15)$
22	$A(-1,3,2)$	$B(0,-1,10)$	$C(3,11,-8)$	$D(2,3,8)$
23	$A(3,1,5)$	$B(4,3,3)$	$C(15,29,-9)$	$D(3,-2,5)$
24	$A(-1,4,3)$	$B(0,8,-5)$	$C(2,0,7)$	$D(3,4,26)$
25	$A(3,-1,2)$	$B(4,1,0)$	$C(12,13,-26)$	$D(-1,-1,0)$
26	$A(2,-3,2)$	$B(3,1,-6)$	$C(4,-3,0)$	$D(4,1,2)$
27	$A(3,-4,8)$	$B(4,-2,6)$	$C(6,-2,-8)$	$D(7,0,5)$
28	$A(3,-2,-1)$	$B(4,2,9)$	$C(4,-6,5)$	$D(5,-2,24)$
29	$A(-3,1,2)$	$B(-2,3,0)$	$C(0,11,6)$	$D(2,-3,2)$
30	$A(1,5,-3)$	$B(2,9,-11)$	$C(5,-3,7)$	$D(0,3,-3)$

Задача 18

Записать формулы преобразования АСК, если дано новое начало O^* и базисные векторы $\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*$. Найти новые координаты точки M.

N	O^*	$\vec{e}_1^*$	$\vec{e}_2^*$	M
1	(2,-1)	(1,-2)	(3,5)	(9,7)
2	(2,0)	(3,0)	(1,-2)	(12,-2)
3	(2,1)	(3,-2)	(4,-1)	(15,-6)
4	(3,1)	(2,0)	(1,3)	(7,-5)
5	(5,4)	(1,0)	(0,1)	(9,5)
6	(3,-4)	(1,-1)	(3,0)	(5,-3)
7	(3,0)	(1,-1)	(0,1)	(3,1)
8	(-1,1)	(3,-1)	(0,3)	(2,-6)
9	(3,-1)	(0,-3)	(2,0)	(1,-4)
10	(-2,2)	(1,0)	(0,-1)	(-1,1)
11	(3,-1)	(7,1)	(3,-1)	(18,4)
12	(3,4)	(2,0)	(-3,2)	(0,1)
13	(3,-1)	(0,-1)	(3,1)	(0,0)
14	(3,4)	(-1,5)	(-4,0)	(0,-1)
15	(1,-3)	(3,0)	(0,1)	(-2,0)
16	(0,0)	(3,-3)	(-2,2)	(1,-1)
17	(3,-5)	(1,0)	(0,1)	(0,0)
18	(-1,2)	(3,4)	(0,2)	(-4,0)
19	(3,0)	(3,3)	(-1,3)	(16,9)
20	(1,2)	(-1,-1)	(3,1)	(-2,-1)
21	(3,-1)	(0,3)	(3,0)	(3,-1)
22	(-1,1)	(3,4)	(0,-5)	(2,0)
23	(0,-1)	(7,3)	(3,0)	(1,2)
24	(3,1)	(1,3)	(-1,-3)	(3,1)
25	(4,-10	(2,0)	(0,-2)	(0,1)
26	(3,2)	(2,3)	(1,-1)	(2,0)
27	(3,0)	(0,3)	(-3,0)	(0,0)
28	(3,4)	(2,1)	(-1,2)	(3,4)
29	(3,-1)	(2,3)	(-1,1)	(8,9)
30	(-1,1)	(3,0)	(0,-1)	(8,1)

Задача 19

Записать формулы преобразования ДСК на плоскости при новом начале O^* и угле поворота α. Найти старые координаты точки M.

N	O^*	α	M^*	N	O^*	α	M^*
1	(3,-2)	0°	(5,-1)	16	(3,-2)	330°	$(0,2\sqrt{3})$
2	(-2,1)	30°	(0,1)	17	(4,-5)	0°	(1,3)
3	(0,0)	45°	$(0,\sqrt{2})$	18	(1,-1)	30°	$(-2\sqrt{3},2)$
4	(1,0)	60°	(2,-8)	19	(-1,3)	45°	$(\sqrt{2},\sqrt{2})$
5	(2,3)	90°	(5,7)	20	(0,-1)	60°	$(\sqrt{3},1)$
6	(1,0)	120°	$(\sqrt{3},-1)$	21	(1,2)	90°	(1,-2)
7	(3,-2)	135°	(1,-1)	22	(3,-2)	120°	$(3, \sqrt{3})$
8	(1,-2)	150°	$(2\sqrt{3},0)$	23	(-1,1)	135°	(1,1)
9	(4,-3)	180°	(3,5)	24	(0,1)	150°	$(-2\sqrt{3},2)$

10	(2,-3)	210°	$(4\sqrt{3},2)$	25	(0,0)	180°	(1,1)
11	(0,1)	225°	$(\sqrt{2},0)$	26	$(\sqrt{3},-\sqrt{3})$	210°	(2,0)
12	(3,1)	240°	$(2\sqrt{3},2)$	27	(1,1)	225°	$(\sqrt{2},0)$
13	(2,1)	270°	(2,0)	28	$(1, \sqrt{3})$	240°	(2,0)
14	(3,0)	300°	$(2, 2\sqrt{3})$	29	(-3,1)	270°	(3,0)
15	(4,2)	315°	(1,1)	30	(0,0)	300°	$(2,2\sqrt{3})$

Задача 20

В треугольнике с данными вершинами найти координаты векторов: высоты $\vec{AK}$, медианы $\vec{AL}$, биссектрисы $\vec{AM}$.

N	*A*	*B*	*C*
1	(0,1,2)	(1,3,4)	(1,5,10)
2	(3,-2,1)	(4,0,3)	(5,0,2)
3	(-2,1,3)	(0,6,17)	(-1,,5)
4	(3,0,-2)	(3,3,2)	(5,5,12)
5	(-1,2,0)	(3,10,8)	(1,7,14)
6	(0,1,3)	(1,-1,5)	(1,-3,11)
7	(3,-2,1)	(4,0,-1)	(7,6,-7)
8	(4,0,-1)	(3,-2,-3)	(6,3,5)
9	(2,-1,0)	(4,-4,6)	(2,-4,-4)
10	(4,5,11)	(4,2,7)	(5,1,3)
11	(3,-5,0)	(4,-1,8)	(1,1,9)
12	(4,-3,2)	(0,5,10)	(4,2,-10)
13	(6,-2,1)	(6,-5,-3)	(4,3,15)
14	(2,0,-3)	(4,6,6)	(2,5,9)
15	(4,0,-2)	(6,3,4)	(6,6,7)
16	(5,-3,0)	(1,-11,8)	(7,2,14)
17	(6,-1,3)	(7,1,5)	(4,2,-3)
18	(-1,3,5)	(1,6,-1)	(-1,6,9)
19	(2,-2,3)	(2,1,-1)	(1,2,-5)
20	(4,0,-6)	(3,4,2)	(2,6,3)
21	(4,0,-1)	(6,6,8)	(4,5,-13)
22	(3,-2,6)	(3,3,-6)	(5,3,-8)
23	(0,-1,2)	(2,4,-12)	(1,1,0)
24	(-3,0,-2)	(-2,2,0)	(-1,3,-8)
25	(1,-2,4)	(3,1,10)	(1,1,0)
26	(3,-1,0)	(3,2,-4)	(4,3,8)
27	(-4,5,1)	(-3,1,9)	(-2,-1,10)
28	(0,-2,-5)	(2,1,1)	(0,3,7)
29	(0,-4,1)	(1,-2,3)	(1,0,-7)
30	(2,-3,5)	(3,1,-3	(4,3,-4)