

Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных

Задание № 2: Численное решение задачи Коши

Дано: функция $f(x, y)$, отрезок $[a, b]$, числа Y, n .

Требуется:

для задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = Y \end{cases} \quad (1)$$

1) с помощью команды `ode23` найти значения $\bar{y}_i, i = 1, 2, \dots$ приближённого решения задачи (1) в узлах $\bar{x}_i, i = 1, 2, \dots$;

2) построить на $[a, b]$ равномерную сетку узлов $x_i, i = \overline{1, n+1}$;

3) с помощью численного метода найти значения $y_i, i = \overline{1, n+1}$ приближённого решения задачи (1) в узлах $x_i, i = \overline{1, n+1}$;

4) построить графики

- приближённого решения, полученного командой `ode23`: $(\bar{x}_i, \bar{y}_i), i = 1, 2, \dots$;
- приближённого решения, полученного численным методом: $(x_i, y_i), i = \overline{1, n+1}$;

Примечания.

1) $[\bar{x}, \bar{y}] = \text{ode23}(\Gamma, [a \ b], Y)$

2) Равномерная сетка:

$$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow x_i = a + (i-1)h, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

3) Численные методы:

– метод Эйлера с пересчётом

$$y_1 = Y, \quad \begin{cases} z = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}), \\ y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2} (f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, z)), \quad i = \overline{2, n+1}; \end{cases}$$

– уточнённый метод Эйлера

$$y_1 = Y, \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), \quad y_i = y_{i-2} + 2hf(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = \overline{3, n+1};$$

– метод средней точки

$$y_1 = Y, \quad \begin{cases} z = y_{i-1} + \frac{h}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1}), \\ y_i = y_{i-1} + hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, z\right), \quad i = \overline{2, n+1}. \end{cases}$$

4) Построение графиков выполнить на одном рисунке: $\text{plot}(\bar{x}, \bar{y}, x, y)$.

Варианты задания

1.

$$f(x, y) = 5x - y, \quad a = 1, \quad b = 3, \quad Y = 4, \quad n = 20,$$

метод средней точки.

2.

$$f(x, y) = \sin x - 4y, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad Y = -2, \quad n = 15,$$

метод Эйлера с пересчётом.

3.

$$f(x, y) = 2y - 3x, \quad a = -3, \quad b = -1, \quad Y = 1, \quad n = 20,$$

уточнённый метод Эйлера.

4.

$$f(x, y) = -\cos x - 2y, \quad a = 0, \quad b = 3, \quad Y = 1, \quad n = 30,$$

метод средней точки.

5.

$$f(x, y) = x - y, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad Y = 0, \quad n = 15,$$

метод Эйлера с пересчётом.

6.

$$f(x, y) = 2 \sin x + y, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad Y = 0, \quad n = 20,$$

уточнённый метод Эйлера.

Варианты задания

7.

$$f(x, y) = 2y - x, \quad a = 0, \quad b = 3, \quad Y = 1, \quad n = 30,$$

метод средней точки.

8.

$$f(x, y) = \sin x - 2y, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad Y = -3, \quad n = 20,$$

метод Эйлера с пересчётом.

9.

$$f(x, y) = -y - 2x, \quad a = -1, \quad b = 2, \quad Y = 5, \quad n = 30,$$

уточнённый метод Эйлера.

10.

$$f(x, y) = -\cos x - 3y, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad Y = 2, \quad n = 15,$$

метод средней точки.

11.

$$f(x, y) = x + 3y, \quad a = 2, \quad b = 5, \quad Y = -2, \quad n = 30,$$

метод Эйлера с пересчётом.

12.

$$f(x, y) = 2 \cos x - y, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad Y = 3, \quad n = 15,$$

уточнённый метод Эйлера.

Варианты задания

13.

$$f(x, y) = x + 2y, \quad a = 1, \quad b = 3, \quad Y = 1, \quad n = 20,$$

метод средней точки.

14.

$$f(x, y) = -x + 3y, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad Y = -1, \quad n = 30,$$

метод Эйлера с пересчётом.

15.

$$f(x, y) = \cos x - 6y, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad Y = 0, \quad n = 15,$$

уточнённый метод Эйлера.

16.

$$f(x, y) = -4 \cos x + y, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad Y = 2, \quad n = 20,$$

метод средней точки.

17.

$$f(x, y) = 3x + 4y, \quad a = 2, \quad b = 4, \quad Y = 1, \quad n = 30,$$

метод Эйлера с пересчётом.

18.

$$f(x, y) = 5 \cos x - 2y, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad Y = 3, \quad n = 15,$$

уточнённый метод Эйлера.

Варианты задания

19.

$$f(x, y) = x - 3y, \quad a = 2, \quad b = 3, \quad Y = 1, \quad n = 20,$$

метод средней точки.

20.

$$f(x, y) = 2 \sin x - 5y, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad Y = 0, \quad n = 30,$$

метод Эйлера с пересчётом.