Лабораторные занятия по Численным методам решения уравнений в частных производных

Задание № 6:
Метод прямых для уравнения теплопроводности

Дано: функции $f(x,t)$, $u_0(x)$, $g_1(t)$, $g_1(t)$, $u(x,t)$, числа a, X, T.

Требуется:

в задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \;\; 0 \leqslant x \leqslant X, \; 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \; u(0,t) = g_1(t), \; u(X,t) = g_2(t)$$

для численного решения **методом прямых**:

1) с помощью условия устойчивости явной разностной схемы определить шаги h, τ и размеры m, n сетки узлов $\left\{(x_i, t_j), \, i = \overline{1, m+1}, \, j = \overline{1, n+1}\right\}$;

2) найти приближённое решение задачи (1) – сеточную функцию

$$v = \left\{v_i^j, \, i = \overline{1, m+1}, \, j = \overline{1, n+1}\right\};$$

3) вычислить глобальную погрешность

$$R = \max_{i,j} |u(x_i, t_j) - v_i^j|,$$

где $u(x,t)$ – точное решение задачи (1);

4) построить график приближённого решения v.

Примечания I.

Условие устойчивости явной разностной схемы:

$$\frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

Метод прямых:

– шаги сетки:

$h = \dfrac{X}{m} \quad \tau = \dfrac{T}{n};$

– сетка узлов:

$x_i = (i-1)h,\ i = \overline{1, m+1}, \quad t_j = (j-1)\tau,\ j = \overline{1, n+1};$

– задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot v_2(t) = a\,\dfrac{v_1(t) - 2v_2(t) + v_3(t)}{h^2} + f(x_2, t), & v_2(0) = u_0(x_2), \\ \dot v_3(t) = a\,\dfrac{v_2(t) - 2v_3(t) + v_4(t)}{h^2} + f(x_3, t), & v_2(0) = u_0(x_3), \\ \qquad\qquad \dots & \dots \\ \dot v_m(t) = a\,\dfrac{v_{m-1}(t) - 2v_m(t) + v_{m+1}(t)}{h^2} + f(x_m, t), & v_m(0) = u_0(x_m), \end{cases}$$

Здесь $v_1(t) = g_1(t),\ v_{m+1}(t) = g_2(t)$.

Формирование приближённого решения краевой задачи - сеточной функции v:

– в граничных узлах:

$v_i^1 = u_0(x_i),\ i = \overline{1, m+1}, \quad v_1^j = g_1(t_j),\ v_{m+1}^j = g_2(t_j),\ j = \overline{1, n+1};$

– во внутренних узлах:

значения $v_i^j,\ i = \overline{2, m},\ j = \overline{2, n+1}$ вычисляются с помощью явного метода Эйлера.

Явный метод Эйлера для приближённого решения системы ОДУ:

– задача Коши (система дифференциальных уравнений и начальные условия):

$\dot v_i(t) = F_i(v_{i-1}(t), v_i(t), v_{i+1}(t), b_i(t)), \quad v_i(0) = v_i^1, \quad i = \overline{2, m};$

– метод Эйлера:

$v_i^{j+1} = v_i^j + \tau \cdot F_i(v_{i-1}^j, v_i^j, v_{i+1}^j, b_i(t_j)), \quad i = \overline{2, m}, \quad j = \overline{1, n}.$

Примечания II.

```
clear all    // первые две строки
clc
```

$x_i = (i-1)h,\ i = \overline{1, m+1}$ $\quad\rightarrow\quad$ x = 0 : h : X;

$t_j = (j-1)\tau,\ j = \overline{1, n+1}$ $\quad\rightarrow\quad$ t = 0 : tau : T;

v_i^j $\quad\rightarrow\quad$ v(i,j)

$v_i^k = z_i^k,\ i = \overline{1, m+1}$ $\quad\rightarrow\quad$ v(: ,k)=z;

$v_i^k = z_i^k,\ i = \overline{2, m}$ $\quad\rightarrow\quad$ v(2 : m,k)=z(2 : m);

```
function результат=имя (параметр1, параметр2, ...)
    команда1;
    команда2;
    ...
    результат=...;
```

```
for счётчик=начало : конец
    команда1;
    команда2;
    ...
end
```

матрица2=**abs**(матрица1)

число=**max**(матрица2)

число=**max**(**abs**(матрица))

surf(матрица)

Варианты задания

1.

$$f(x,t) = 0, \quad u_0(x) = \sin(2\pi x), \quad g_1(t) = 0, \quad g_2(t) = 0, \quad a = 1, \quad X = 1, \quad T = 2,$$

$$u(x,t) = e^{-4\pi^2 at} \sin(2\pi x)$$

2.

$$f(x,t) = 0, \quad u_0(x) = x + \sin(\pi x), \quad g_1(t) = 0, \quad g_2(t) = 1, \quad a = 1, \quad X = 1, \quad T = 1,$$

$$u(x,t) = x + e^{-\pi^2 at} \sin(\pi x)$$

3.

$$f(x,t) = 0, \quad u_0(x) = \cos(x), \quad g_1(t) = e^{-at}, \quad g_2(t) = -e^{-at}, \quad a = 1, \quad X = \pi, \quad T = 2,$$

$$u(x,t) = e^{-at} \cos(x)$$

4.

$$f(x,t) = \sin(\pi x), \quad u_0(x) = 0, \quad g_1(t) = 0, \quad g_2(t) = 0, \quad a = 1, \quad X = 1, \quad T = 1,$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\left(1 - e^{-\pi^2 t}\right) \sin(\pi x)$$

5.

$$f(x,t) = 0, \quad u_0(x) = \sin(2\pi x), \quad g_1(t) = 0, \quad g_2(t) = 0, \quad a = 2, \quad X = 1, \quad T = 1,$$

$$u(x,t) = e^{-4\pi^2 at} \sin(2\pi x)$$

6.

$$f(x,t) = 0, \quad u_0(x) = x + \sin(\pi x), \quad g_1(t) = 0, \quad g_2(t) = 1, \quad a = 2, \quad X = 1, \quad T = 2,$$

$$u(x,t) = x + e^{-\pi^2 at} \sin(\pi x)$$

Варианты задания

7.

$$f(x,t)=0,\ \ u_0(x)=\cos(x),\ \ g_1(t)=e^{-at},\ \ g_2(t)=-e^{-at},\ \ a=2,\ \ X=\pi,\ \ T=1,$$

$$u(x,t)=e^{-at}\cos(x)$$

8.

$$f(x,t)=\sin(\pi x),\ \ u_0(x)=0,\ \ g_1(t)=0,\ \ g_2(t)=0,\ \ a=1,\ \ X=1,\ \ T=2,$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi^2}\left(1-e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x)$$

9.

$$f(x,t)=0,\ \ u_0(x)=\sin(2\pi x),\ \ g_1(t)=0,\ \ g_2(t)=0,\ \ a=3,\ \ X=1,\ \ T=2,$$

$$u(x,t)=e^{-4\pi^2 at}\sin(2\pi x)$$

10.

$$f(x,t)=0,\ \ u_0(x)=x+\sin(\pi x),\ \ g_1(t)=0,\ \ g_2(t)=1,\ \ a=3,\ \ X=1,\ \ T=4,$$

$$u(x,t)=x+e^{-\pi^2 at}\sin(\pi x)$$

11.

$$f(x,t)=0,\ \ u_0(x)=\cos(x),\ \ g_1(t)=e^{-at},\ \ g_2(t)=-e^{-at},\ \ a=3,\ \ X=\pi,\ \ T=2,$$

$$u(x,t)=e^{-at}\cos(x)$$

12.

$$f(x,t)=\sin(\pi x),\ \ u_0(x)=0,\ \ g_1(t)=0,\ \ g_2(t)=0,\ \ a=1,\ \ X=1,\ \ T=3,$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi^2}\left(1-e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x)$$