

Лабораторные занятия по Численным методам решения уравнений в частных производных

Задание № 8:

Краевая задача для эллиптического уравнения

Дано: функции $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, числа X, Y, ε .

Требуется:

в задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y \leq Y, \quad (1)$$

$$u(0, y) = \varphi(0, y), \quad u(X, y) = \varphi(X, y), \quad u(x, 0) = \varphi(x, 0), \quad u(x, Y) = \varphi(x, Y)$$

для численного решения **разностным методом**:

1) выбрать самостоятельно размеры m, n сетки узлов $\{(x_i, y_j), i = \overline{1, m+1}, j = \overline{1, n+1}\}$;

2) с помощью *метода простой итерации* найти приближённое решение задачи (1) – сеточную функцию

$$v = \{v_{ij}, i = \overline{1, m+1}, j = \overline{1, n+1}\};$$

3) вычислить глобальную погрешность

$$R = \max_{i,j} |u(x_i, y_j) - v_{ij}|,$$

где $u(x, y)$ – точное решение задачи (1);

5) построить график приближённого решения v .

Примечание I.

Явная разностная схема:

– шаги сетки:

$$h_x = \frac{X}{m}, \quad h_y = \frac{Y}{n};$$

– сетка узлов:

$$x_i = (i-1)h_x, \quad i = \overline{1, m+1}, \quad y_j = (j-1)h_y, \quad j = \overline{1, n+1};$$

– приближённое решение на границе:

$$v_{i1} = \varphi(x_i, 0), \quad v_{i, n+1} = \varphi(x_i, Y), \quad v_{1j} = \varphi(0, y_j), \quad v_{m+1, j} = \varphi(X, y_j), \quad i = \overline{1, m+1}, \quad j = \overline{1, n+1};$$

– линейная система для поиска приближённого решения v во внутренних узлах:

$$v_{ij} = \frac{(v_{i-1, j} + v_{i+1, j})h_y^2 + (v_{i, j-1} + v_{i, j+1})h_x^2 - h_x^2 h_y^2 f(x_i, y_j)}{2h_x^2 + 2h_y^2}, \quad i = \overline{2, m}, \quad j = \overline{2, n}.$$

Метод простой итерации для решения линейной системы $y = By + c$:

$y^0 \in R^\ell$ – начальное приближение;

$$\begin{cases} y^{k+1} = By^k + c, \\ k = 0, 1, \dots; \end{cases}$$

условие остановки: $r_{k+1} = \max_{1 \leq i \leq \ell} |y_i^{k+1} - y_i^k| \leq \varepsilon \Rightarrow \tilde{y} = y^{k+1}$.

Примечание II.

– начальное приближение для внутренних узлов:

$$v_{ij}^0 = 0, \quad i = \overline{2, m}, \quad j = \overline{2, n};$$

– условие остановки:

$$r_{k+1} = \max_{2 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n} |v_{ij}^{k+1} - v_{ij}^k| \leq \varepsilon \Rightarrow v = v^{k+1}.$$

Примечание III.

```
clear all    % первые две строки  
clc
```

```
 $x_i = (i - 1)h_x, i = \overline{1, m + 1} \rightarrow x = 0 : h_x : X;$ 
```

```
 $y_j = (j - 1)h_y, j = \overline{1, n + 1} \rightarrow y = 0 : h_y : Y;$ 
```

```
 $v_{ij} \rightarrow v(i,j)$ 
```

```
function результат=имя (параметр1, параметр2, ...)
```

```
    команда1;
```

```
    команда2;
```

```
    ...
```

```
    результат=...;
```

```
for счётчик=начало : конец
```

```
    команда1;
```

```
    команда2;
```

```
    ...
```

```
end
```

```
while условие
```

```
    команда1;
```

```
    команда2;
```

```
    ...
```

```
end
```

```
матрица2=abs(матрица1)
```

```
число=max(матрица2)
```

```
число=max(abs(матрица))
```

```
surf(матрица)
```

Варианты задания

1.

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = x + y, \quad X = 1, \quad Y = 2, \quad \varepsilon = 10^{-5}, \\ u(x, y) = x + y$$

2.

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = x^2 + y^2, \quad X = 2, \quad Y = 2, \quad \varepsilon = 10^{-4}, \\ u(x, y) = x^2 + y^2$$

3.

$$f(x, y) = 6x + 6y, \quad \varphi(x, y) = x^3 + y^3, \quad X = 1, \quad Y = 1, \quad \varepsilon = 10^{-3}, \\ u(x, y) = x^3 + y^3$$

4.

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = x - 2y, \quad X = 1, \quad Y = 2, \quad \varepsilon = 10^{-5}, \\ u(x, y) = x - 2y$$

5.

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 2x^2 - y^2, \quad X = 1, \quad Y = 3, \quad \varepsilon = 10^{-4}, \\ u(x, y) = 2x^2 - y^2$$

6.

$$f(x, y) = 6x - 6y, \quad \varphi(x, y) = x^3 - y^3, \quad X = 2, \quad Y = 1, \quad \varepsilon = 10^{-3}, \\ u(x, y) = x^3 - y^3$$

7.

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 2x + 3y, \quad X = 3, \quad Y = 4, \quad \varepsilon = 10^{-5}, \\ u(x, y) = 2x + 3y$$

8.

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = -x^2 + 2y^2, \quad X = 2, \quad Y = 1, \quad \varepsilon = 10^{-4}, \\ u(x, y) = -x^2 + 2y^2$$

Варианты задания

9.

$$f(x, y) = 6x - 12y, \quad \varphi(x, y) = x^3 - 2y^3, \quad X = 3, \quad Y = 2, \quad \varepsilon = 10^{-3},$$

$$u(x, y) = x^3 - 2y^3$$

10.

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 3x + 4y, \quad X = 2, \quad Y = 2, \quad \varepsilon = 10^{-5},$$

$$u(x, y) = 3x + 4y$$

11.

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 3x^2 - y^2, \quad X = 2, \quad Y = 1, \quad \varepsilon = 10^{-4},$$

$$u(x, y) = 3x^2 - y^2$$

12.

$$f(x, y) = 18x + 6y, \quad \varphi(x, y) = 3x^3 + y^3, \quad X = 1, \quad Y = 3, \quad \varepsilon = 10^{-3},$$

$$u(x, y) = 3x^3 + y^3$$