Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных

Задание № 3: Линейная краевая задача для уравнения второго порядка

Дано: функции $p(x)$, $f(x)$, отрезок $[a,b]$, числа y_a, y_b, натуральное n.

Требуется:

1) найти точное решение $y^*(x)$, $x \in [a,b]$ краевой задачи

$$y'' + p(x)y = f(x),\ a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

$$y(a) = y_a,\ \ y(b) = y_b.$$

2) построить на $[a,b]$ равномерную сетку узлов интегрирования x_i, $i = \overline{1, n+1}$;

3) с помощью *разностного метода* найти значения y_i, $i = \overline{1, n+1}$ приближённого решения задачи (1) в узлах x_i, $i = \overline{1, n+1}$;

4) построить графики

- точного решения: $(x_i, y^*(x_i))$, $i = \overline{1, n+1}$;
- приближённого решения: $(x_i,\ y_i)$, $i = \overline{1, n+1}$;

5) вычислить глобальную погрешность

$$R = \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} |y^*(x_i) - y_i|.$$

Примечания I.

1) Точное решение $y^*(x)$ можно найти либо аналитически, либо с помощью какого-либо online-решателя (например, wolframalpha.com).

2) Равномерная сетка:

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \Rightarrow \quad x_i = a + (i-1)h, \; i = \overline{1, n+1}.$$

3) Разностный метод:

– линейная система $(Ay = c)$

$$\begin{cases} y_1 & & & & & & & = y_a \\ ry_1 & + \; q_2y_2 & + \; ry_3 & & & & & = f(x_2) \\ & ry_2 & + \; q_3y_3 & + \; ry_4 & & & & = f(x_3) \\ & & ry_3 & + \; q_4y_4 & + \; ry_5 & & & = f(x_4) \\ & & & & \dots & & & \dots \\ & & & & ry_{n-1} & + \; q_ny_n & + \; ry_{n+1} & = f(x_n) \\ & & & & & & y_{n+1} & = y_b \end{cases}$$

где

$$r = \frac{1}{h^2}\,, \quad q_i = p(x_i) - \frac{2}{h^2}\,, \; i = \overline{2, n};$$

– решение линейной системы: $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$.

4) Построение графиков необходимо выполнить на одном рисунке: **plot**$(x, y^*(x), x, y)$.

Примечания II.

```
clear all     // первые две строки
clc

function результат=имя (параметр1, параметр2, ...)
    команда1;
    команда2;
    ...
    результат=...;

for счётчик=начало : конец
    команда1;
    команда2;
    ...
end

вектор1=abs(вектор2)
число=max(вектор)


число=max(abs(вектор))
```

Варианты задания

1.

$$p(x) = -1,\ f(x) = 1 + 3x,\ a = 0,\ b = 3,\ y_a = 0,\ y_b = 1,\ n = 10.$$

2.

$$p(x) = -1,\ f(x) = \cos x,\ a = -\pi,\ b = \pi,\ y_a = 0,\ y_b = 0,\ n = 12.$$

3.

$$p(x) = -2,\ f(x) = x,\ a = 0,\ b = 1,\ y_a = 0,\ y_b = 1,\ n = 14.$$

4.

$$p(x) = -3,\ f(x) = 1 - 2x,\ a = 0,\ b = 1,\ y_a = 0,\ y_b = 0,\ n = 10.$$

5.

$$p(x) = -4,\ f(x) = 2 + x,\ a = -1,\ b = 1,\ y_a = -1,\ y_b = 0,\ n = 12.$$

6.

$$p(x) = -1,\ f(x) = 1 + \sin 2x,\ a = -\pi,\ b = 0,\ y_a = 0,\ y_b = 0,\ n = 14.$$

Варианты задания

7.

$$p(x) = -2,\ f(x) = 3x,\ a = 0,\ b = 2,\ y_a = 0,\ y_b = 1,\ n = 10.$$

8.

$$p(x) = -3,\ f(x) = 3x,\ a = -2,\ b = 0,\ y_a = 1,\ y_b = 1,\ n = 12.$$

9.

$$p(x) = -1,\ f(x) = 5x - 1,\ a = 0,\ b = 4,\ y_a = 1,\ y_b = 0,\ n = 14.$$

10.

$$p(x) = -2,\ f(x) = 2\cos 2x,\ a = 0,\ b = \pi,\ y_a = 1,\ y_b = 1,\ n = 10.$$

11.

$$p(x) = -2,\ f(x) = x,\ a = -2,\ b = 0,\ y_a = 0,\ y_b = 1,\ n = 12.$$

12.

$$p(x) = -2,\ f(x) = 2x - 4,\ a = 0,\ b = 4,\ y_a = 0,\ y_b = 0,\ n = 14.$$

Варианты задания

13.

$$p(x) = -1,\ f(x) = 2x - 1,\ a = 0,\ b = 3,\ y_a = 0,\ y_b = 0,\ n = 10.$$

14.

$$p(x) = -1,\ f(x) = \cos 2x,\ a = 0,\ b = 2\pi,\ y_a = 1,\ y_b = 1,\ n = 12.$$

15.

$$p(x) = -4,\ f(x) = -\cos x,\ a = -\pi,\ b = \pi,\ y_a = 0,\ y_b = 0,\ n = 14.$$