Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных

Задание № 5:
Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности

Дано: функции $f(x,t)$, $u_0(x)$, $g_1(t)$, $g_1(t)$, $u(x,t)$, числа a, X, T.

Требуется:

в задаче
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \;\; 0 \leqslant x \leqslant X, \; 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (1)$$
$$u(x,0) = u_0(x), \; u(0,t) = g_1(t), \; u(X,t) = g_2(t)$$

для численного решения разностным методом:

1) выбрать самостоятельно размеры m, n сетки узлов $\Big\{(x_i,t_j),\, i = \overline{1,m+1},\, j = \overline{1,n+1}\Big\}$;

2) найти приближённое решение задачи (1) – сеточную функцию $v = \Big\{v_i^j,\, i = \overline{1,m+1},\, j = \overline{1,n+1}\Big\}$, используя неявную разностную схему;

3) вычислить глобальную погрешность
$$R = \max_{i,j} |u(x_i,t_j) - v_i^j|,$$
где $u(x,t)$ – точное решение задачи (1);

4) построить график приближённого решения v.

Примечания I.

Неявная разностная схема:

– шаги сетки:

$h = \dfrac{X}{m} \quad \tau = \dfrac{T}{n};$

– сетка узлов:

$x_i = (i-1)h,\ i = \overline{1, m+1}, \quad t_j = (j-1)\tau,\ j = \overline{1, n+1};$

– приближённое решение на начальном слое ($j = 1$):

$v_i^1 = u_0(x_i),\ i = \overline{1, m+1};$

– линейная система для поиска приближённого решения на $(j+1)$-ом слое ($j = \overline{1, n}$):

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
v_1^{j+1} & & & & & & & & = g_1(t_{j+1}), \\
rv_1^{j+1} & + & qv_2^{j+1} & + & rv_3^{j+1} & & & & = v_2^j + \tau f_2^{j+1}, \\
 & & rv_2^{j+1} & + & qv_3^{j+1} & + & rv_4^{j+1} & & = v_3^j + \tau f_3^{j+1}, \\
 & & & & rv_3^{j+1} & + & qv_4^{j+1} & + \quad rv_5^{j+1} & = v_4^j + \tau f_4^{j+1}, \\
 & & & & & & & \dots & \dots \\
 & & & & & & & ryv_{m-1}^{j+1} \quad + \quad qv_m^{j+1} \quad + \quad rv_{m+1}^{j+1} & = v_m^j + \tau f_m^{j+1}, \\
 & & & & & & & \qquad\qquad\qquad\qquad v_{m+1}^{j+1} & = g_2(t_{j+1}),
\end{array}\right.$$

где

$$r = -\frac{a\tau}{h^2}\,, \quad q = 1 + \frac{2a\tau}{h^2}\,, \quad f_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1}),\ i = \overline{2, m};$$

– решение линейной системы $Ay = c$:

$$y = A^{-1}c;$$

– заполнение приближённого решения на $(j+1)$-ом слое:

$$v_i^{j+1} = y_i,\ i = \overline{1, m+1}.$$

Примечания II.

clear all // первые две строки
clc

$x_i = (i-1)h,\ i = \overline{1, m+1}$ → x = 0 : h : X;

$t_j = (j-1)\tau,\ j = \overline{1, n+1}$ → t = 0 : tau : T;

v_i^j → v(i,j)

$v_i^k = y_i,\ i = \overline{1, m+1}$ → v(:,k)=y;

function результат=имя (параметр1, параметр2, ...)
    команда1;
    команда2;
    ...
    результат=...;

for счётчик=начало : шаг : конец // счётчик в обратном порядке – шаг=-1
    команда1;
    команда2;
    ...
end

матрица2=**abs**(матрица1)
число=**max**(матрица2)

число=**max**(**abs**(матрица))

surf(матрица)

Варианты задания

1.

$$f(x,t)=0,\quad u_0(x)=\sin(2\pi x),\quad g_1(t)=0,\quad g_2(t)=0,\quad a=1,\quad X=1,\quad T=2,$$

$$u(x,t)=e^{-4\pi^2 at}\sin(2\pi x)$$

2.

$$f(x,t)=0,\quad u_0(x)=x+\sin(\pi x),\quad g_1(t)=0,\quad g_2(t)=1,\quad a=1,\quad X=1,\quad T=1,$$

$$u(x,t)=x+e^{-\pi^2 at}\sin(\pi x)$$

3.

$$f(x,t)=0,\quad u_0(x)=\cos(x),\quad g_1(t)=e^{-at},\quad g_2(t)=-e^{-at},\quad a=1,\quad X=\pi,\quad T=2,$$

$$u(x,t)=e^{-at}\cos(x)$$

4.

$$f(x,t)=\sin(\pi x),\quad u_0(x)=0,\quad g_1(t)=0,\quad g_2(t)=0,\quad a=1,\quad X=1,\quad T=1,$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi^2}\left(1-e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x)$$

5.

$$f(x,t)=0,\quad u_0(x)=\sin(2\pi x),\quad g_1(t)=0,\quad g_2(t)=0,\quad a=2,\quad X=1,\quad T=1,$$

$$u(x,t)=e^{-4\pi^2 at}\sin(2\pi x)$$

6.

$$f(x,t)=0,\quad u_0(x)=x+\sin(\pi x),\quad g_1(t)=0,\quad g_2(t)=1,\quad a=2,\quad X=1,\quad T=2,$$

$$u(x,t)=x+e^{-\pi^2 at}\sin(\pi x)$$

Варианты задания

7.

$$f(x,t) = 0, \;\; u_0(x) = \cos(x), \;\; g_1(t) = e^{-at}, \;\; g_2(t) = -e^{-at}, \;\; a = 2, \;\; X = \pi, \;\; T = 1,$$

$$u(x,t) = e^{-at}\cos(x)$$

8.

$$f(x,t) = \sin(\pi x), \;\; u_0(x) = 0, \;\; g_1(t) = 0, \;\; g_2(t) = 0, \;\; a = 1, \;\; X = 1, \;\; T = 2,$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\left(1 - e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x)$$

9.

$$f(x,t) = 0, \;\; u_0(x) = \sin(2\pi x), \;\; g_1(t) = 0, \;\; g_2(t) = 0, \;\; a = 3, \;\; X = 1, \;\; T = 2,$$

$$u(x,t) = e^{-4\pi^2 at}\sin(2\pi x)$$

10.

$$f(x,t) = 0, \;\; u_0(x) = x + \sin(\pi x), \;\; g_1(t) = 0, \;\; g_2(t) = 1, \;\; a = 3, \;\; X = 1, \;\; T = 4,$$

$$u(x,t) = x + e^{-\pi^2 at}\sin(\pi x)$$

11.

$$f(x,t) = 0, \;\; u_0(x) = \cos(x), \;\; g_1(t) = e^{-at}, \;\; g_2(t) = -e^{-at}, \;\; a = 3, \;\; X = \pi, \;\; T = 2,$$

$$u(x,t) = e^{-at}\cos(x)$$

12.

$$f(x,t) = \sin(\pi x), \;\; u_0(x) = 0, \;\; g_1(t) = 0, \;\; g_2(t) = 0, \;\; a = 1, \;\; X = 1, \;\; T = 3,$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\left(1 - e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x)$$