Лабораторные занятия по Численным методам решения уравнений в частных производных

Задание № 7:

Явная разностная схема для волнового уравнения

Дано: функции $f(x,t)$, $u_0(x)$, $p(x)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $u(x,t)$, числа a, X, T.

Требуется:

в задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p(x), \ u(0,t) = g_1(t), \ u(X,t) = g_2(t)$$

для численного решения **разностным методом**:

1) с помощью условия устойчивости явной разностной схемы определить шаги h, τ и размеры m, n сетки узлов $\left\{(x_i, t_j), \ i = \overline{1, m+1}, \ j = \overline{1, n+1}\right\}$;

2) используя *первую аппроксимацию* начального условия найти приближённое решение задачи (1) – сеточную функцию

$$\overline{v} = \left\{\overline{v}_i^j, \ i = \overline{1, m+1}, \ j = \overline{1, n+1}\right\};$$

3) используя *вторую аппроксимацию* начального условия найти приближённое решение задачи (1) – сеточную функцию

$$\overline{\overline{v}} = \left\{\overline{\overline{v}}_i^j, \ i = \overline{1, m+1}, \ j = \overline{1, n+1}\right\};$$

4) вычислить глобальные погрешности

$$\overline{R} = \max_{i,j} |u(x_i, t_j) - \overline{v}_i^j|, \ \overline{\overline{R}} = \max_{i,j} |u(x_i, t_j) - \overline{\overline{v}}_i^j|,$$

где $u(x,t)$ – точное решение задачи (1);

5) построить график приближённого решения $\overline{\overline{v}}$;

6) провести сравнение полученных результатов.

Примечания I.

Условие устойчивости явной разностной схемы:

$$a\frac{\tau}{h} < 1$$

Явная разностная схема:

– шаги сетки:

$h = \dfrac{X}{m} \quad \tau = \dfrac{T}{n}$;

– сетка узлов:

$x_i = (i-1)h,\ i = \overline{1, m+1}, \quad t_j = (j-1)\tau,\ j = \overline{1, n+1}$;

– приближённое решение на начальном (первом) слое ($j = 1$):

$v_i^1 = u_0(x_i),\ i = \overline{1, m+1}$;

– приближённое решение на втором слое ($j = 2$):

1) *первая аппроксимация* начального условия

$v_i^2 = v_i^1 + \tau p(x_i),\ i = \overline{1, m+1}$;

2) *вторая аппроксимация* начального условия

$v_i^2 = v_i^1 + \tau p(x_i) + \dfrac{\tau^2}{2}\Big(a^2 u_0''(x_i) + f(x_i, t_1)\Big),\ i = \overline{1, m+1}$;

– приближённое решение на $(j+1)$-ом слое ($j = \overline{2, n}$):

$v_1^{j+1} = g_1(t_{j+1}),\ v_{m+1}^{j+1} = g_2(t_{j+1})$,

$v_i^{j+1} = a^2 \dfrac{\tau^2}{h^2}\Big(v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j\Big) - v_i^{j-1} + 2v_i^j + \tau^2 f(x_i, t_j),\ i = \overline{2, m},\ j = \overline{2, n}$.

Примечания II.

clear all % первые две строки
clc

$x_i = (i-1)h,\ i = \overline{1, m+1}$ → x = 0 : h : X;

$t_j = (j-1)\tau,\ j = \overline{1, n+1}$ → t = 0 : tau : T;

v_i^j → v(i,j)

$v_i^k = z_i^k,\ i = \overline{1, m+1}$ → v(: ,k)=z;

$v_i^k = z_i^k,\ i = \overline{2, m}$ → v(2 : m,k)=z(2 : m);

function результат=имя (параметр1, параметр2, ...)
команда1;
команда2;
...
результат=...;

for счётчик=начало : конец
команда1;
команда2;
...
end

матрица2=**abs**(матрица1)
число=**max**(матрица2)

число=**max**(**abs**(матрица))

surf(матрица)

Варианты задания

1.

$$f(x,t)=0,\quad u_0(x)=\sin x,\quad p(x)=-\cos x,$$
$$g_1(t)=-\sin t,\quad g_2(t)=\sin t,\quad a=1,\quad X=\pi,\quad T=2\pi,$$
$$u(x,t)=\sin(x-t)$$

2.

$$f(x,t)=0,\quad u_0(x)=\sin x+\cos x,\quad p(x)=-\sin x-\cos x,$$
$$g_1(t)=\cos(-t)-\sin(t),\quad g_2(t)=\cos(\pi-t)-\sin(\pi+t),\quad a=1,\quad X=\pi,\quad T=\pi,$$
$$u(x,t)=\sin(x-t)+\cos(x+t)$$

3.

$$f(x,t)=-3\cos x\sin 2t,\quad u_0(x)=0,\quad p(x)=2\cos x,$$
$$g_1(t)=\sin 2t,\quad g_2(t)=-\sin 2t,\quad a=1,\quad X=\pi,\quad T=2\pi,$$
$$u(x,t)=\cos x\sin 2t$$

4.

$$f(x,t)=-5e^{2x}\cos t,\quad u_0(x)=e^{2x},\quad p(x)=0,$$
$$g_1(t)=\cos t,\quad g_2(t)=e^2\cos t,\quad a=1,\quad X=1,\quad T=\pi,$$
$$u(x,t)=e^{2x}\cos t$$

5.

$$f(x,t)=0,\quad u_0(x)=\sin x,\quad p(x)=-2\cos x,$$
$$g_1(t)=-\sin 2t,\quad g_2(t)=\sin 2t,\quad a=2,\quad X=\pi,\quad T=2\pi,$$
$$u(x,t)=\sin(x-2t)$$

Варианты задания

6.

$$f(x,t)=0,\quad u_0(x)=\sin x+\cos x,\quad p(x)=-2(\sin x+\cos x),$$
$$g_1(t)=\cos(-2t)-\sin(2t),\quad g_2(t)=\cos(\pi-2t)-\sin(\pi+2t),\quad a=2,\quad X=\pi,\quad T=\pi,$$
$$u(x,t)=\sin(x-2t)+\cos(x+2t)$$

7.

$$f(x,t)=2e^{-x}\sin 2t(\cos x-\sin x),\quad u_0(x)=0,\quad p(x)=0,$$
$$g_1(t)=0,\quad g_2(t)=e^{-x}\sin x,\quad a=1,\quad X=\pi,\quad T=2\pi,$$
$$u(x,t)=\frac{1}{2}e^{-x}\sin x\sin 2t$$

8.

$$f(x,t)=-2e^{-x}\cos 2t(2\cos x+\sin x),\quad u_0(x)=e^{-x}\cos x,\quad p(x)=0,$$
$$g_1(t)=\cos 2t,\quad g_2(t)=0,\quad a=1,\quad X=\frac{\pi}{2},\quad T=\pi,$$
$$u(x,t)=e^{-x}\cos 2t\cos x$$

9.

$$f(x,t)=0,\quad u_0(x)=\sin x,\quad p(x)=-3\cos x,$$
$$g_1(t)=-\sin 3t,\quad g_2(t)=\sin 3t,\quad a=3,\quad X=\pi,\quad T=2\pi,$$
$$u(x,t)=\sin(x-3t)$$

10.

$$f(x,t)=0,\quad u_0(x)=\sin x+\cos x,\quad p(x)=-3(\sin x+\cos x),$$
$$g_1(t)=\cos(-3t)-\sin(3t),\quad g_2(t)=\cos(\pi-3t)-\sin(\pi+3t),\quad a=3,\quad X=\pi,\quad T=\pi,$$
$$u(x,t)=\sin(x-3t)+\cos(x+3t)$$

Варианты задания

11.

$$f(x,t) = 0, \quad u_0(x) = \sin x, \quad p(x) = -4\cos x,$$

$$g_1(t) = -\sin 4t, \quad g_2(t) = \sin 4t, \quad a = 4, \quad X = \pi, \quad T = \pi,$$

$$u(x,t) = \sin(x - 4t)$$

12.

$$f(x,t) = 0, \quad u_0(x) = \sin x + \cos x, \quad p(x) = -4(\sin x + \cos x),$$

$$g_1(t) = \cos(-4t) - \sin(4t), \quad g_2(t) = \cos(\pi - 4t) - \sin(\pi + 4t), \quad a = 4, \quad X = \pi, \quad T = 2\pi,$$

$$u(x,t) = \sin(x - 4t) + \cos(x + 4t)$$