

Федеральное агентство по образованию  
**Иркутский государственный университет**



**А. Ю. Филатов**

***Задачи иркутских олимпиад  
по математической экономике  
2004–2006 годов с решениями***

**Сборник задач**

**Рекомендовано Иркутским региональным отделением  
Научно-методического совета по математике  
Министерства образования Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов математических  
и экономико-математических специальностей университетов.**

**Иркутск – 2006**

УДК 373.167.1:330  
ББК 65.01я721

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Иркутского государственного университета

**Рецензенты:** д-р техн. наук, проф. Зоркальцев В. И.  
(зав. кафедрой математической экономики ИМЭИ ИГУ),  
канд. физ.-мат. наук Бокмельдер Е. П.  
(доцент кафедры математического анализа ИМЭИ ИГУ),  
канд. экон. наук Савватеев А. В.  
(старший научный сотрудник ЦЭМИ РАН, доцент РЭШ),

**Филатов А. Ю.** Задачи иркутских олимпиад по математической экономике  
2004–2006 годов с решениями: сб. задач. – Иркутск: Ир-  
кут. ун-т, 2006. – 32 с.

Содержит задачи из области микро- и макроэкономики, теории производственных организаций, составленные и предложенные автором на городских и региональных олимпиадах школьников и студентов по математической экономике в 2004–2006 годах. Задачи сопровождаются решениями. Более сложные задачи отмечены звездочкой, наиболее трудные и требующие специальной подготовки – отмечены двумя звездочками.

Предназначен для преподавателей экономики средних общеобразовательных школ, средних специальных учебных заведений и вузов. Также будет полезен старшеклассникам, студентам и аспирантам, изучающим курсы по микро- и макроэкономике.

© Филатов А.Ю., 2006

© Иркутский государственный университет, 2006

**Александр Юрьевич Филатов,**  
e-mail: fial@irlan.ru, ICQ 10793366

Другие авторские разработки в области математической экономики выложены на сайтах  
[http://polnolunie.baikal.ru/me/mat\\_ec.htm](http://polnolunie.baikal.ru/me/mat_ec.htm)  
<http://matec.isu.ru>  
[http://fial\\_.livejournal.com](http://fial_.livejournal.com)

Редактор Э. А. Невзорова

Темплан 2006. Поз.38.

Подписано в печать 16.05.2006. Формат 60×84 1/16.

Бумага писчая белая. Печать офсетная. Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 300 экз.

Редакционно-издательский отдел  
Иркутского государственного университета  
664003, Иркутск, бул. Гагарина, 36

## 1. Спрос и предложение

### Задача 1

Фирма понизила цену на свою продукцию на 20%. На сколько процентов фирма должна повысить цену, чтобы она стала первоначальной. Объяснить.

**Решение:**

Пусть начальная цена составляла  $p$ . После понижения она стала равной  $0,8p$ . По условию,  $0,8px = p$ . Отсюда повышение цены составит  $x = p / 0,8p = 1,25$  раза или **25%**.

### Задача 2

Фирма повысила цены на велосипеды на 20%, в результате объем продаж сократился на 10%. Как изменилась выручка?

**Решение:**

Пусть начальная цена составляла  $p$ , а объем продаж  $q$ . Выручка в этой ситуации была равна  $pq$ . После повышения цена стала равна  $1,2p$ , а объем продаж  $0,9q$ . Новая выручка составила  $1,2p \times 0,9q = 1,08pq$ , что **на 8% больше, чем раньше**.

### Задача 3

В микрорайоне есть 2 супермаркета: «Мир ниже нуля» и «+20». Первый с целью увеличения объема продаж снижает цену на 20%. Второй – каждому покупателю дает дополнительно 20% продукции бесплатно. Есть ли разница, где делать покупки, если изначально цены были одинаковы? Ответ поясните.

**Решение:**

В супермаркете «Мир ниже нуля» на первоначальную сумму  $TR$  по сниженной на 20% цене  $0,8p$  можно купить объем товара  $q = \frac{TR}{0,8p} = 1,25 \frac{TR}{p}$ , то есть на 25% больше, чем раньше. Супермаркет же «+20» дает бесплатно только 20% продукции.

**Ответ.** В супермаркете «Мир ниже нуля» делать покупки выгоднее.

### Задача 4

Пусть годовой спрос на CD-RW в Иркутске задан соотношением  $p = 50 - 0,1q$ , а в Шелехове –  $p = 40 - 0,4q$ . Здесь  $p$  – цена (в руб.), а  $q$  – объем продаж (в тыс. шт.). Если цена превышает уровень 50 руб. в Иркутске и 40 руб. в Шелехове, спрос становится нулевым. Найти суммарный спрос на CD-RW в 2 городах.

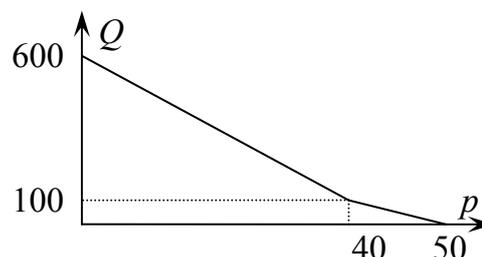
**Решение:**

Выразим объем продаж в Иркутске ( $q_1$ ) и в Шелехове ( $q_2$ ) через цену:

$$q_1 = 500 - 10p \text{ при } p \leq 50 \text{ и } q_1 = 0 \text{ при } p > 50;$$

$$q_2 = 100 - 2,5p \text{ при } p \leq 40 \text{ и } q_2 = 0 \text{ при } p > 40.$$

$$\text{Суммарный спрос } Q = \begin{cases} 600 - 12,5p, & p \in [0; 40]; \\ 500 - 10p, & p \in (40; 50); \\ 0, & p \geq 50. \end{cases}$$



**Задача 5**

Заполните пропущенные ячейки в таблице. Ответ поясните.

Цена	Спрос	Предлож.	Дефицит	Избыток	Объем продаж	Выручка
40			80			800
	80				30	1800
		50	5			5000
120				30	40	

**Решение:**

Используем формулы:

- 1) дефицит = спрос – предложение, если спрос > предложения;
- 2) избыток = предложение – спрос, если предложение > спроса;
- 3) объем продаж =  $\min\{\text{спрос, предложение}\}$ ;
- 4) выручка = цена × объем продаж.

**Ответ.**

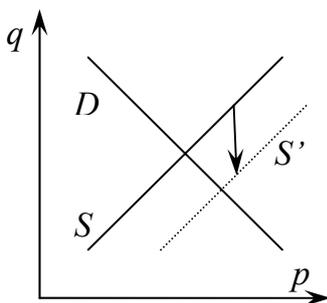
Цена	Спрос	Предлож.	Дефицит	Избыток	Объем продаж	Выручка
<b>40</b>	100	20	<b>80</b>	–	20	<b>800</b>
60	<b>80</b>	30	50	–	<b>30</b>	<b>1800</b>
100	55	<b>50</b>	<b>5</b>	–	50	<b>5000</b>
<b>120</b>	40	70	–	<b>30</b>	<b>40</b>	4800

**Задача 6**

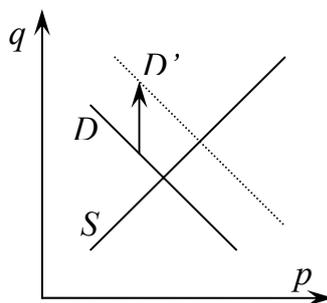
Какие изменения равновесной цены и объема продаж на рынке автомобилей можно ожидать в результате каждого из описанных ниже событий? Проиллюстрируйте произошедшие изменения с помощью графиков.

1. Государство увеличило таможенные пошлины.
2. Выросли доходы населения.
3. Резко повысилась цена на бензин.

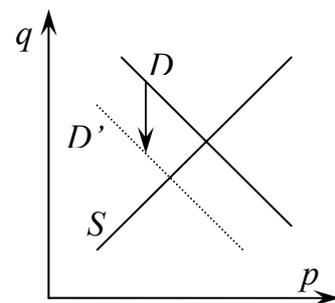
**Решение:**



1



2



3

1. Увеличение таможенных пошлин сокращает предложение (по старой цене производители не в состоянии поставлять прежнее количество автомобилей). **Цена увеличивается, объем продаж сокращается.**
2. Увеличение доходов стимулирует увеличение спроса на автомобили. **Цена и объем продаж увеличиваются.**

3. Поскольку бензин и автомобили являются дополняющими товарами, то повышение бензина приведет к сокращению спроса на автомобили. **Цена и объем продаж сокращаются.**

**Задача 7**

Пусть  $p$  – цена мороженого (в руб.),  $q$  – объем продаж (в млн. шт.). Апрельский спрос задан функцией  $q_D = 2 - 0,2p$ . В мае он увеличился на 40%. Определить функцию майского спроса на мороженое. Каков будет спрос при цене 7 руб.? При какой цене мороженое перестанут покупать совсем?

**Решение:**

В мае спрос увеличивается на 40% или в 1,4 раза. Зависимость будет иметь вид  $q_D = 1,4(2 - 0,2p) = 2,8 - 0,28p$ . При цене 7 руб. спрос составит  $q = 2,8 - 0,28 \times 7 = 0,84$ . Найдем, при какой цене спрос станет нулевым:  $2,8 - 0,28p = 0$ ,  $p = 2,8/0,28 = 10$  руб.

**Задача 8\***

Предприятие ежедневно производит лекарство в количестве  $q_S = 2p - 80$ . Ежедневный объем спроса составляет  $q_D = 130 - p$ . Как и насколько изменится равновесный объем продаж и равновесная цена, если государство примет решение дотировать каждую единицу продукции в размере 15 руб.?

**Решение:**

Точка равновесия – это точка, в которой спрос равен предложению. Найдем точку равновесия в ситуации до введения государственной дотации:

$$130 - p = 2p - 80, \quad 3p = 210, \quad p^* = 70, \quad q^* = 130 - 70 = 60.$$

Введение дотации приведет к росту предложения. Если на ценнике указана цена  $p$ , то производитель получает  $(p + 15)$  руб. и готов предоставить на рынок лекарство в объеме  $q_S = 2(p + 15) - 80 = 2p - 50$ . Таким образом, в новой ситуации

$$130 - p = 2p - 50, \quad 3p = 180, \quad p^{**} = 60, \quad q^{**} = 130 - 60 = 70.$$

**Ответ.** Введение государственной дотации сократит цену лекарства с **70 до 60 руб.** и увеличит ежедневный объем продаж с **60 до 70 упаковок.**

**Задача 9**

Известно, что при бесплатном входе на концерт придет 4 тыс. зрителей, а увеличение цены билета на каждый рубль сокращает их число на 5 человек. Какую цену за билет должны установить организаторы, если они хотят максимизировать выручку, сколько человек придет на концерт и какова будет выручка?

**Решение:**

Спрос на билеты в зависимости от цены выражается функцией  $q_D = 4000 - 5p$ .

Выручка равна произведению числа билетов и цены, ее надо максимизировать:

$$(4000 - 5p)p \rightarrow \max.$$

Подсчитываем производную и приравниваем ее к нулю.

$$4000 - 10p = 0, \quad p = 400 \text{ руб.}, \quad q = 4000 - 5 \times 400 = 2000, \quad \pi = 400 \times 2000 = 800 \text{ тыс. руб.}$$

**Ответ.** Цена билета **400 руб.**, придут **2000 зрителей**, выручка составит **800 тыс. руб.**

**Задача 10\***

Месячный спрос на говядину на иркутском рынке составляет  $q_D = 204 - 1,2p$ , а предложение  $q_S = 0,6p - 12$ . Здесь  $p$  – цена, руб., а  $q$  – объем продаж, т. Найти объем продаж на третий месяц в условиях динамической паутинообразной модели рынка, если в первый месяц на рынок будет привезено 96 т. говядины. Является ли процесс сходящимся, расходящимся или постоянным?

В паутинообразной модели объем привезенной продукции определяется из функции предложения на основе цены предыдущего месяца, а цена – из функции спроса при подстановке объема текущего месяца.

**Решение:**

Из уравнения спроса  $q_D = 204 - 1,2p$  можно выразить цену  $p_D = 170 - 5/6q$ . Отсюда,

$$\begin{aligned} p_1 &= 170 - 5/6 q_1 = 170 - 5/6 \times 96 = 90, & q_2 &= 0,6 p_1 - 12 = 0,6 \times 90 - 12 = 42, \\ p_2 &= 170 - 5/6 q_2 = 170 - 5/6 \times 42 = 135, & q_3 &= 0,6 p_2 - 12 = 0,6 \times 135 - 12 = 69. \end{aligned}$$

Равновесную точку найдем, приравняв спрос и предложение:

$$204 - 1,2p = 0,6p - 12, \quad 1,8p = 216, \quad p^* = 120 \text{ руб.}, \quad q^* = 60 \text{ т.}$$

Поскольку  $q_3 = 69$  ближе к  $q^* = 60$ , чем  $q_1 = 96$ , а функции спроса и предложения линейные, то **процесс сходящийся**.

**2. Эластичность****Задача 11**

Заданы значения эластичности спроса от доходов населения в краткосрочном и долгосрочном периодах на квартиры, мебель и одежду. Определить, какому товару соответствует какая строчка данных. Ответ объяснить.

Краткосрочный период	Долгосрочный период
0,95	1,17
0,07	2,45
2,60	0,53

**Решение:**

Даже значительное повышение доходов в краткосрочном периоде не приведет к серьезному увеличению спроса на **квартиры** (квартира – слишком дорогой товар, чтобы его можно было купить сразу). В долгосрочном же периоде покупка квартир при повышении доходов становится возможной. То есть эластичность в долгосрочном периоде должна быть гораздо больше, чем в краткосрочном, что соответствует второй строке (**0,07 → 2,45**).

Для **мебели** ситуация противоположная – повышение доходов уже в краткосрочном периоде позволяет приобрести новую мебель. Однако в долгосрочном периоде повторное приобретение мебели, как правило, уже не требуется. Поэтому эластичность в долгосрочном периоде меньше, чем в краткосрочном – третья строка (**2,60 → 0,53**).

Оставшаяся первая строка (**0,95 → 1,17**) соответствует **одежде**. Эластичность слабо меняется в долгосрочном периоде относительно краткосрочного.

**Задача 12**

Издатель журнала понизил цену на свое издание с 50 до 45 руб. По старым ценам распродавался тираж 80 тыс. экз. Каков будет тираж журнала в новой ситуации, если известно, что коэффициент ценовой эластичности спроса при цене 50 руб. равен  $-3$ ?

**Решение:**

Цена сокращается с 50 до 45 руб., то есть новая цена составляет  $45/50 = 0,9 = 90\%$  от старой, сокращение составляет  $10\%$ .

$$\varepsilon = \frac{\% \text{ изменение спроса}}{\% \text{ изменение цены}}, \quad -3 = \frac{\% \text{ изменение спроса}}{-10\%}, \quad \% \text{ изменение спроса} = 30\%.$$

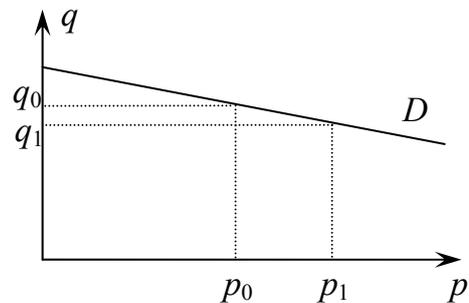
Новый тираж будет на  $30\%$  или в  $1,3$  раза больше и составит  $1,3 \times 80 = 104$  тыс. экз.

**Задача 13**

Монополист работает на рынке с неэластичным спросом. Как он должен изменить цену с целью максимизации прибыли? Ответ поясните.

**Решение:**

В зоне неэластичного спроса даже серьезное повышение цены ведет лишь к небольшому падению спроса. Таким образом, выручка (на графике изображена прямоугольниками) с ростом цены вырастет. Издержки в этой ситуации снизятся в связи с сокращением объема продаж. Таким образом, прибыль фирмы увеличится **при повышении цены**.

**Задача 14**

Эластичность спроса на DVD-диски по цене равна  $-2$ , а по доходу равна  $1,5$ . Цена DVD-дисков в 2005 году упала на  $30\%$ . Доходы населения выросли на  $10\%$ . Как изменился объем продаж? Эластичности указаны для начальной ситуации.

**Решение:**

$$\varepsilon = \frac{\% \text{ изменение спроса}}{\% \text{ изменение цены}}, \quad -2 = \frac{\% \text{ изменение спроса}}{-30\%}, \quad \% \text{ изменение спроса} = 60\%.$$

$$\varepsilon = \frac{\% \text{ изменение спроса}}{\% \text{ изменение дохода}}, \quad 1,5 = \frac{\% \text{ изменение спроса}}{10\%}, \quad \% \text{ изменение спроса} = 15\%.$$

Таким образом, за счет понижения цены спрос вырос в  $1,6$  раза, а за счет повышения доходов еще в  $1,15$  раза. Итоговое увеличение составило  $1,6 \times 1,15 = 1,84$  раза, т.е. **объем продаж вырос на  $84\%$** .

**Задача 15\***

Эластичность спроса на пленочные фотоаппараты по цене равна  $-2,5$ , а по цене цифровых фотоаппаратов равна  $1$ . Цифровые фотоаппараты в 2005 году подешевели на  $20\%$ . Как должны изменить цену производители пленочных фотоаппаратов, чтобы объем продаж остался прежним. Эластичности указаны для начальной ситуации.

**Решение:**

$$\varepsilon_C = \frac{\% \text{ изменение спроса}}{\% \text{ измен. цены другого товара}}, \quad 1 = \frac{\% \text{ измен. спроса}}{-20\%}, \quad \% \text{ измен. спроса} = -20\%.$$

Таким образом, за счет сокращения цены цифровых фотоаппаратов спрос на пленочные упал на 20%, то есть составил 0,8 от первоначального количества. Чтобы восстановить объем продаж, необходимо за счет цены увеличить спрос на пленочные фотоаппараты в  $1/0,8 = 1,25$  раза, то есть на 25%.

$$\varepsilon = \frac{\% \text{ изменение спроса}}{\% \text{ изменение цены}}, \quad -2,5 = \frac{25\%}{\% \text{ изменение цены}}, \quad \% \text{ изменение цены} = -10\%.$$

Отсюда видим, что производителям пленочных фотоаппаратов необходимо **понижить цену своей продукции на 10%**.

### Задача 16\*

Известно, что спрос на журнал «Афиша Иркутска» линейно убывает с ростом цены. При текущей цене 15 руб. распространяется 6000 экземпляров. Найти функцию спроса, если известно, что текущая эластичность равна  $-0,5$ . Отыскать, при какой цене издатель получит максимальную выручку.

**Решение:**

Найдем, как изменится объем продаж, если цена упадет до нуля (то есть на 100%):

$$\varepsilon = \frac{\% \text{ изменение спроса}}{\% \text{ изменение цены}}, \quad -0,5 = \frac{\%q}{-100\%}$$

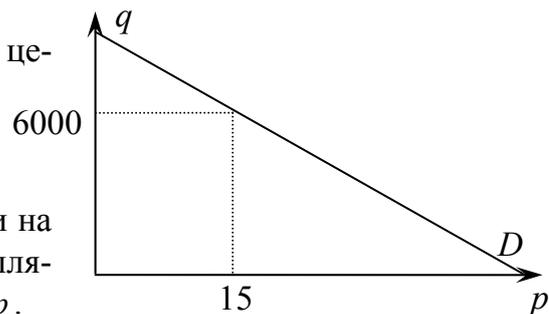
Получим, что объем продаж должен вырасти на  $(-0,5) \times (-100\%) = 50\%$  и достичь 9000 экземпляров. Функция спроса имеет вид  $q_D = 9000 - bp$ .

Подставив в нее  $p = 15$  и  $q = 6000$ , получим, что  $b = 200$ ,  $q_D = 9000 - 200p$ .

Максимизируем выручку, равную произведению цены и объема продаж:

$$TR = pq = p(9000 - 200p) = 9000p - 200p^2 \rightarrow \max.$$

Приравняв производную к нулю ( $TR' = 9000 - 400p = 0$ ), найдем, что максимальная выручка будет при цене  $9000/400 = 22,5$  руб.



## 3. Теория потребительского поведения

### Задача 17

Пепси-кола продается в магазине в полулитровых бутылках ценой 12 руб., литровых — ценой 20 руб. и двухлитровых — ценой 30 руб. Сколько и каких бутылок будет покупать в месяц школьник Сережа, если он готов потратить на Пепси-колу 120 руб. и на эти деньги он хочет получить максимальное количество напитка?

**Решение:**

В полулитровых бутылках литр Пепси-колы стоит  $12/0,5 = 24$  руб., в литровых — 20 руб., а в двухлитровых —  $30/2 = 15$  руб. Школьник Сережа должен покупать Пепси-колу наиболее дешево — **в двухлитровых бутылках**, которых сможет приобрести **4 штуки**.

**Задача 18**

На 2 товара – компакт-диски ( $p_x = 100$  руб.) и аудиокассеты ( $p_y = 25$  руб.) Влад тратит в год 1000 руб. Определить оптимальный выбор, если его функция полезности: 1)  $u = xy$ ; 2)  $u = 2x^2 + 3xy$ ; 3)  $u = 3x^4y$ .

**Решение:**

Выпишем бюджетное ограничение в алгебраической форме:  $100x + 25y \leq 1000$ . При этом в точке оптимума тратятся все имеющиеся деньги, поэтому данное ограничение будет выполняться в виде равенства, и можно выразить одну переменную через другую:  $25y = 1000 - 100x$ ,  $y = 40 - 4x$ . Подставим это выражение в каждую функцию полезности:

$$1) \quad u = xy = x(40 - 4x) = 40x - 4x^2 \rightarrow \max, \quad 40 - 8x = 0, \quad x = 5, \quad y = 40 - 4 \times 5 = 20.$$

$$2) \quad u = 2x^2 + 3xy = 2x^2 + 3x(40 - 4x) = 120x - 10x^2 \rightarrow \max, \quad 120 - 20x = 0, \quad x = 6, \quad y = 40 - 4 \times 6 = 16.$$

3) В этом случае удобно пользоваться свойством, справедливым для функций полезности Кобба-Дугласа  $u = Ax^\alpha y^\beta$ :  $\alpha$  и  $\beta$  – доли, в которых распределяется имеющаяся сумма. В нашей ситуации средства делятся в пропорции 4:1, то есть 800 руб. на компакт-диски и 200 руб. на кассеты. Следовательно, оптимальный выбор  $x = 800/100 = 8$  компакт-дисков и  $y = 200/25 = 8$  кассет.

**Ответ.** 1) А(5; 20); 2) В(6; 16); 3) С(8; 8).

**Задача 19\***

Студент Дмитрий тратит в месяц 600 руб. на оплату интернета и приобретение компакт-дисков. Компакт-диски стоят 60 руб., а час работы в интернете 10 руб. При этом имеется альтернативная возможность разово заплатить 240 руб. и после этого весь месяц работать в интернете за 5 руб./час. Построить множество покупательских возможностей Дмитрия. Определить оптимальный выбор, если функция полезности имеет вид  $u = xy$ , где  $x$  – число часов работы в интернете, а  $y$  – число купленных компакт-дисков. Что изменится, если разовая оплата увеличится до 300 руб.? Если уменьшится до 120 руб.?

**Решение:**

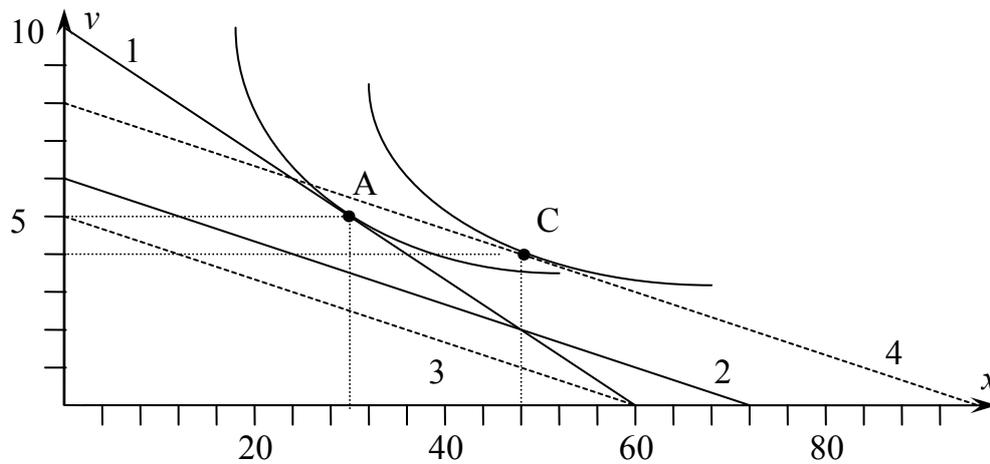
Если Дмитрий не использует альтернативный тариф, то бюджетное ограничение выглядит  $10x + 60y \leq 600$  (1). При использовании альтернативы после оплаты 240 руб. у Дмитрия остается 360 руб. Ограничение в этом случае принимает вид  $5x + 60y \leq 360$  (2). Итоговым множеством покупательских возможностей будет объединение двух множеств, заданных указанными ограничениями и ограничениями  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Решением задачи  $xy \rightarrow \max, 10x + 60y = 600$  будет точка **А(30;5)**. Значение функции полезности в ней составляет  $30 \times 5 = 150$ .

Решением задачи  $xy \rightarrow \max, 5x + 60y = 360$  будет точка **В(36;3)**. Значение функции полезности в ней составляет  $36 \times 3 = 108$ , что существенно хуже, чем в точке А.

Таким образом, Дмитрий не будет использовать альтернативный тариф.

Если разовая оплата за интернет повысится до любой величины, в том числе, до 300 руб. (ограничение (3)), то Дмитрий по-прежнему не будет использовать альтернативный тариф. Оптимальный выбор (**А**) и полезность не изменятся.



Если разовая оплата снизится до 120 руб., то новое ограничение будет иметь вид  $5x + 60y \leq 480$ . Максимум функции  $u = xy$  достигается при этом в точке **C(48;4)**, а полезность окажется равной  $48 \times 4 = 192$ , что больше, чем в точке A. Таким образом, Дмитрий будет использовать альтернативный тариф и получит при этом большую полезность.

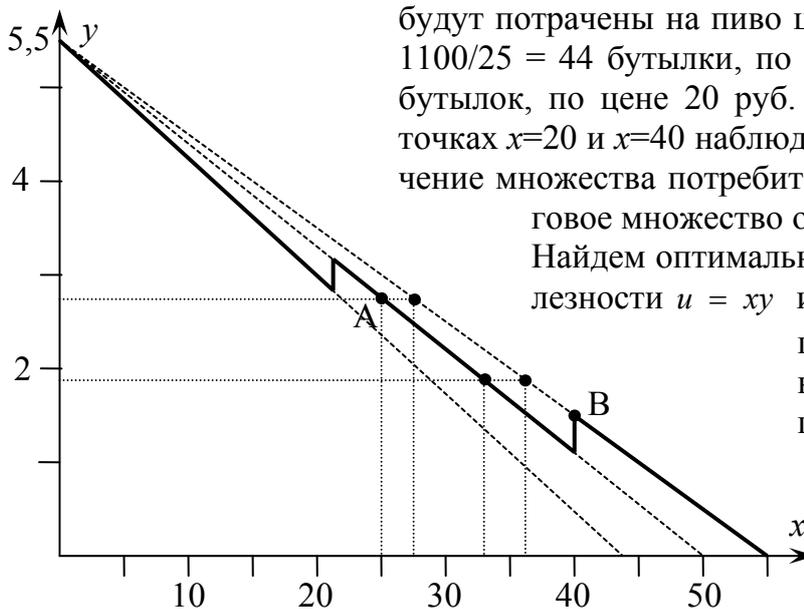
**Задача 20\***

Компания, собираясь на шашлыки, планирует потратить на пиво (товар  $x$ ) и мясо (товар  $y$ ) не более 1100 руб. Мясо стоит 200 руб. / кг. Цена пива составляет 25 руб. при покупке до 20 бутылок, 22 руб. – при покупке 20 и более бутылок, 20 руб. – при покупке 40 и более бутылок. Построить множество потребительских возможностей. Найти оптимальный выбор, если функция полезности имеет вид:

- 1)  $u = xy$  ;    2)  $u = x^2y$ .

**Решение:**

Построим множество потребительских возможностей. Если все деньги будут потрачены на мясо, компания в состоянии купить  $1100/200 = 5,5$  кг. Если все деньги будут потрачены на пиво ценой 25 руб., можно купить  $1100/25 = 44$  бутылки, по цене 22 руб. –  $1100/22 = 50$  бутылок, по цене 20 руб. –  $1100/20 = 55$  бутылок. В точках  $x=20$  и  $x=40$  наблюдается скачкообразное увеличение множества потребительских возможностей. Итоговое множество ограничено жирной линией.



Найдем оптимальный выбор. Для функции полезности  $u = xy$  имеющиеся средства делятся пополам, то есть по 550 руб. на каждый из товаров. При покупке пива по цене 22 руб. денег хватит на 25 бутылок и 2,75 кг мяса (точка A).

Проверим, нельзя ли увеличить полезность, покупая пиво по 20 руб. В этом случае денег хватает на 27,5 бутылок, однако минимальный объем покупки при такой цене 40 бутылок. Мяса можно купить на  $1100 - 40 \times 20 = 300$  руб., то есть  $300/200 = 1,5$  кг (точка В).  $u(A) = 25 \times 2,75 = 68,75 > 60 = 40 \times 1,5 = u(B)$ , поэтому оптимальным выбором будет все-таки точка **A (25; 2,75)**.

Для функции полезности  $u = x^2y$  средства делятся в соотношении 2:1, то есть примерно 773 руб. на пиво и 367 руб. на мясо. При покупке пива по 22 руб. можно купить  $33 \frac{1}{3}$  бутылки и 1,83 кг мяса. Полезность при этом составит 2037.

Если пиво покупается по 20 руб., денег хватит на  $773/20 = 36,7$  бутылок. Минимальный объем покупок составляет 40 бутылок, так что ближайшей допустимой точкой снова будет точка В, полезность в которой  $u(B) = 40^2 \times 1,5 = 2400 > 2037$ . Таким образом, для этого случая оптимальным выбором будет точка **B (40; 1,5)**.

## 4. Теория фирмы

### Задача 21

В таблице представлена часть данных о возможных вариантах ведения бизнеса на некотором предприятии при неизменных постоянных издержках. Восстановите недостающую информацию.

		Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Цена, руб.	$p$		70	50
Объем продаж, тыс. шт.	$q$	30	40	
Выручка, тыс. руб.	$TR$			
Постоянные издержки, тыс. руб.	$FC$			
Переменные издержки, тыс. руб.	$VC$		900	1200
Суммарные издержки, тыс. руб.	$TC$	1600	1900	
Прибыль, тыс. руб.	$\pi$	800		800

#### Решение:

Будем использовать формулы:  $TR = pq$ ,  $TC = FC + VC$ ,  $\pi = TR - TC$ , а также то, что постоянные издержки для всех 3 вариантов ведения бизнеса одинаковы.

Из второго столбца  $FC = 1900 - 900 = 1000$ ,  $TR = 70 \times 40 = 2800$ ,  $\pi = 2800 - 1900 = 900$ .

В первом столбце  $VC = 1600 - 1000 = 600$ ,  $TR = 1600 + 800 = 2400$ ,  $p = 2400/30 = 80$ .

В третьем столбце  $TC = 1000 + 1200 = 2200$ ,  $TR = 2200 + 800 = 3000$ ,  $q = 3000/50 = 60$ .

		Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Цена, руб.	$p$	80	<b>70</b>	<b>50</b>
Объем продаж, тыс. шт.	$q$	<b>30</b>	<b>40</b>	60
Выручка, тыс. руб.	$TR$	2400	2800	3000
Постоянные издержки, тыс. руб.	$FC$	1000	1000	1000
Переменные издержки, тыс. руб.	$VC$	600	<b>900</b>	<b>1200</b>
Суммарные издержки, тыс. руб.	$TC$	<b>1600</b>	<b>1900</b>	2200
Прибыль, тыс. руб.	$\pi$	<b>800</b>	900	<b>800</b>

**Задача 22**

Выручка предпринимателя за год составила 4 млн. руб. Для этого ему потребовалось в начале года вложить в дело 2 млн. 200 тыс. руб. Найти бухгалтерскую и экономическую прибыль предпринимателя при условии, что ему предлагали следующую альтернативу: сдать производственные помещения в аренду за 750 тыс. руб. в год и наняться на работу с зарплатой в 25 тыс. руб. / мес. Налог на прибыль 24%. Процентные ставки по кредиту и депозиту 20% и 10% соответственно. Собственные средства предпринимателя на начало года составляли 700 тыс. руб.

**Решение:**

Прибыль к налогообложению составит  $4000 - 2200 = 1800$  тыс. руб. Налог на прибыль равен  $1800 \times 0,24 = 432$  тыс. руб. Также предпринимателю необходимо взять кредит на сумму  $2200 - 700 = 1500$  тыс. руб., по которому требуется выплатить  $1500 \times 0,2 = 300$  тыс. руб. процентов.

**Бухгалтерская прибыль** равна  $4000 - 2200 - 432 - 300 = 1068$  тыс. руб.

В альтернативе предприниматель мог получить 750 тыс. руб. арендной платы,  $25 \times 12 = 300$  тыс. руб. зарплаты и  $700 \times 0,1 = 70$  тыс. руб. банковского процента.

**Экономическая прибыль** равна  $1068 - 750 - 300 - 70 = -52$  тыс. руб.

**Задача 23**

Михаил живет в Слюдянке, а работает в Иркутске. Он ездит на работу на микроавтобусе, который идет 2 часа при цене билета 80 руб.

- 1) При каком уровне почасовой оплаты труда ему будет экономически выгоднее ездить на электричке, которая идет 3 часа при цене билета 40 руб.?
- 2) При какой почасовой зарплате он станет ездить на такси за 300 рублей, если на такси он может добраться до Иркутска за 1,5 часа?

**Решение:**

- 1) Если Михаил ездит на электричке, то он экономит 40 руб., но тратит лишний час. Если он за час зарабатывает меньше 40 руб., то ему экономически выгоднее ездить на электричке.
- 2) Михаилу выгоднее ездить на такси, если за сэкономленные полчаса он может заработать больше переплаченных 220 руб. Этот случай оплаты, превышающей 440 руб./час.

**Ответ.** 1) Меньше 40 руб./час                      2) Больше 440 руб./час

**Задача 24**

Предприниматель шьет рюкзаки себестоимостью 300 руб. Спрос на его продукцию составляет  $q_D = 350 - 0,5p$ , где  $q$  – количество, шт., а  $p$  – цена, руб. Сколько рюкзаков и по какой цене будет продавать предприниматель, чтобы получить максимальную прибыль? Какова будет эта прибыль?

**Решение:**

Предприниматель, устанавливая цену  $p$ , будет с каждого проданного рюкзака получать прибыль  $(p - 300)$  руб. Таких рюкзаков он продаст  $q = 350 - 0,5p$ . Сум-

марная прибыль составит  $\pi = (p - 300)(350 - 0,5p) = -0,5p^2 + 500p - 105000$ . Ее нужно максимизировать:  $\pi' = 500 - p = 0$ . Следовательно, цена будет равна  $p = 500$  руб., объем продаж составит  $q = 350 - 0,5 \times 500 = 100$  рюкзаков, а предприниматель получит прибыль  $\pi = (500 - 300) \times 100 = 20000$  руб.

**Задача 25\***

Фирма действует на рынке совершенной конкуренции. Зависимость суммарных издержек от выпуска представлена в таблице:

Суточный выпуск, тыс. шт.	$q$	0	1	2	3	4	5	6
Суммарные издержки, тыс. руб.	$TC$	500	620	700	900	1240	1750	2400

На рынке установилась цена 400 руб.

- 1) Сколько продукции должна производить фирма, чтобы достичь максимума прибыли? Какова будет при этом прибыль?
- 2) Начиная с какой цены, фирма может работать с прибылью?
- 3) При какой цене фирме будет выгоднее прекратить производство продукции? Рассмотреть краткосрочный период.

**Решение:**

- 1) Умножив суточный выпуск на 400, получим суммарную выручку. Прибыль равна разности суммарной выручки и суммарных издержек:

Суточный выпуск, тыс. шт.	$q$	0	1	2	3	4	5	6
Суммарные издержки, тыс. руб.	$TC$	500	620	700	900	1240	1750	2400
Суммарная выручка, тыс. руб.	$TR$	0	400	800	1200	1600	2000	2400
Прибыль, тыс. руб.	$\pi$	-500	-220	100	300	360	250	0

Из таблицы видим, что максимальная прибыль, равная 360 тыс. руб., будет при суточном выпуске 4 тыс. единиц продукции

- 2) Фирма работает с прибылью, если цена устанавливается выше уровня минимума средних суммарных издержек. Для их нахождения разделим суммарные издержки на выпуск.

Суточный выпуск, тыс. шт.	$q$	0	1	2	3	4	5	6
Средние сумм. издержки, руб.	$ATC$	-	620	350	300	310	350	400

Минимальное значение составляет 300 руб. Если цена устанавливается **выше 300 руб.**, фирма работает с прибылью.

- 3) Фирма прекращает производство продукции, если она не в состоянии покрыть даже переменные издержки, то есть если цена устанавливается ниже минимума средних переменных издержек. Для их нахождения разделим переменные издержки на выпуск. Переменные издержки можно отыскать, отняв от суммарных издержек постоянные, равные 500 тыс. руб. (издержкам при нулевом объеме производства).

Суточный выпуск, тыс. шт.	$q$	0	1	2	3	4	5	6
Переменные издержки, тыс. руб.	$VC$	0	120	200	400	740	1250	1900
Средние перем. издержки, руб.	$AVC$	-	120	100	133	185	250	317

Минимальное значение составляет 100 руб. Если цена устанавливается **ниже 100 руб.**, фирма прекращает производство продукции.

**Задача 26\***

Функция суммарных издержек в зависимости от объема производства  $q$  (тыс. шт.) имеет вид  $TC(q) = q^2 + 600q + 10000$  (тыс. руб.). Найти, при каких ценах на продукцию фирма будет получать прибыль, при каких – нести убытки, а при какой цене вовсе уйдет с рынка. Рассмотреть краткосрочный период.

**Решение:**

Фирма будет получать прибыль, если цена установится выше минимума средних суммарных издержек, уйдет с рынка, если цена установится ниже минимума средних переменных издержек, и будет нести убытки, продолжая при этом производство, при промежуточных ценах.

$$ATC = TC/q = q + 600 + 10000/q \rightarrow \min, \quad 1 - 10000/q^2 = 0, \quad q = 100, \quad \min ATC = 800 \text{ руб.}$$

$$VC = q^2 + 600q, \quad AVC = VC/q = q + 600 \rightarrow \min, \quad \min AVC = 600 \text{ руб. при } q = 0.$$

**Ответ.**  $p > 800$  – фирма получает прибыль;

$p \in [600; 800]$  – фирма несет убытки, но продолжает производство;

$p < 600$  – фирма закрывается.

**Задача 27**

Сравнить эффективность двух инвестиционных проектов, рассчитанных на 3 года, при дисконте  $d = 20\%$ . В таблице заданы чистые прибыли/убытки (в тыс. руб.) за каждый год:

	1-й год	2-й год	3-й год
Проект 1	-1000	720	720
Проект 2	-1000	240	1224

**Решение:**

Приведем чистые прибыли/убытки каждого года к деньгам первого года. Для этого суммы второго года разделим на 1,2, а суммы третьего года – на  $1,2^2 = 1,44$ :

	1-й год	2-й год	3-й год
Проект 1	-1000	600	500
Проект 2	-1000	200	850

После этого, просуммировав приведенные прибыли/убытки за 3 года, получим чистую текущую стоимость каждого проекта.

$$NPV_1 = -1000 + 600 + 500 = 100; \quad NPV_2 = -1000 + 200 + 850 = 50.$$

Таким образом, при дисконте  $d = 20\%$  **наиболее эффективным оказывается проект 1.**

**Замечание:** если считать, что все прибыли/убытки приведены на конец года, то чистая текущая стоимость каждого проекта окажется в 1,2 раза меньше. На вывод это не влияет.

**Задача 28**

Проранжировать по внутренней норме доходности 3 инвестиционных проекта различной длительности, требующие стартовых капиталовложений в 1 млн. руб. В таблице приведены чистые прибыли (в тыс. руб.) за каждый год:

Проект (длительность)	1-й год	2-й год	3-й год
Проект 1 (1 год)	1250	–	–
Проект 2 (2 года)	230	1058	–
Проект 3 (3 года)	0	0	1728

**Решение:**

Внутренняя норма доходности  $d_1$  первого проекта находится из соотношения

$$-1000 + 1250/(1+d_1) = 0, \quad 1+d_1 = 1250/1000 = 1,25, \quad d_1 = 0,25 = 25\%.$$

Внутренняя норма доходности  $d_3$  третьего проекта находится из соотношения

$$-1000 + 1728/(1+d_3)^3 = 0, \quad 1+d_3 = \sqrt[3]{1728/1000} = \sqrt[3]{1,728} = 1,2, \quad d_3 = 0,2 = 20\%.$$

Для нахождения внутренней нормы доходности второго проекта нужно решить квадратное уравнение

$$-1000 + 230/(1+d_2) + 1058/(1+d_2)^2 = 0, \quad 1+d_2 = 1,15, \quad d_2 = 0,15 = 15\%.$$

Таким образом, **самым эффективным по внутренней норме доходности является первый проект, далее идет третий и на последнем месте – второй.**

**Задача 29\***

Record-компания решает вопрос об издании альбома группы, спрос на диски которой оценивается функцией  $q_D = 900/p - 4$  (тыс. шт.), где  $p$  – цена, руб. Себестоимость одного диска 25 руб. При этом за право издания компания должна выплатить группе 350 тыс. руб. Возьмется ли компания издавать альбом, если минимальная прибыль, за которую она готова это сделать, составляет 100 тыс. руб.? Что изменится, если компания применит «политику снятия сливок», установив изначально цену 150 руб., по которой диск по оценкам купит 88% из готовых это сделать по такой цене, а затем будет максимизировать прибыль на остаточном рынке?

**Решение:**

Выпишем функцию прибыли record-компания и максимизируем ее:

$$\pi = (p - 25)(900/p - 4) = 900 - 25 \times 900/p - 4p + 100 \rightarrow \max,$$

$$25 \times 900/p^2 - 4 = 0, \quad p^* = 75, \quad q^* = 900/75 - 4 = 8, \quad \pi^* = (75 - 25) \times 8 = 400 \text{ тыс. руб.}$$

Видим, что эта сумма не покрывает гонорар группе 350 тыс. руб. + минимальную прибыль 100 тыс. руб. Проверим, изменит ли ситуацию «политика снятия сливок».

По цене 150 руб. спрос составляет  $q_D = 900/150 - 4 = 2$  тыс. дисков. 88% из этого количества будет куплена, соответственно остаточный спрос сократится на  $2 \times 0,88 = 1,76$  тыс. дисков и составит  $q_{ост} = 900/p - 5,76$ . Выпишем функцию прибыли и найдем оптимальную цену на остаточном спросе:

$$\pi_{ост} = (p - 25)(900/p - 5,76) = 900 - 25 \times 900/p - 5,76p + 144 \rightarrow \max,$$

$$25 \times 900/p^2 - 5,76 = 0, \quad p_{ост} = 62,5, \quad q_{ост} = 900/62,5 - 5,76 = 8,64.$$

Суммарная прибыль будет складываться из прибыли от проданных по высокой цене дисков и от прибыли на остаточном спросе:

$$\pi^* = (150 - 25) \times 1,76 + (62,5 - 25) \times 8,64 = 544 \text{ тыс. руб.}$$

Данная сумма превосходит необходимые для положительного решения вопроса об издании альбома 450 тыс. руб.

**Задача 30\***

В молодежном лагере «Шалопай» проживает 100 детей. Каждому из них выделяется до 15 руб. в день на мороженое. Причем каждый не может съесть больше килограмма в день, а цену запрещено поднимать выше 150 руб./кг. В лагере есть единственный ларек тети Дуси, где продают мороженое, которое привозят из города по цене 50 руб./кг.

- 1) Построить кривую спроса на мороженое.
- 2) По какой цене будет продавать мороженое тетя Дуся, чтобы получить максимальную прибыль?
- 3) Завхоз лагеря предложил выдавать ежедневно каждому из детей не 15 руб., а 20, но за вычетом цены 100 г. мороженого. Какая цена на мороженое установится, если тете Дусе это известно, и она будет по-прежнему максимизировать свою прибыль? Как изменится объем продаж? Как изменятся расходы лагеря?

**Решение:**

- 1) При цене  $p$  руб./кг каждый ребенок на 15 руб. в состоянии купить  $(15/p)$  кг мороженого, а все совместно –  $1500/p$ . Максимально в день дети могут съесть 100 кг мороженого. Таким образом,

$$q_D = \min\{1500/p; 100\}, \quad p \leq 150.$$

- 2) Прибыль тети Дуси составит

$$\pi_1 = pq - 50q = (p - 50)1500/p = 1500 - 75000/p \rightarrow \max_{p \in [15; 150]}.$$

Максимальное значение будет при наивысшей разрешенной цене в **150 руб./кг**, при этом каждый ребенок будет покупать **по 100 г мороженого**, прибыль тети Дуси будет равна **1000 руб./день**. Расходы лагеря **1500 руб./день**.

- 3) В новой ситуации каждому ребенку будет выдаваться по  $(20 - 0,1p)$  руб., таким образом, новый спрос и прибыль тети Дуси составят соответственно:

$$q_D = \min\{100(20 - 0,1p)/p; 100\}, \quad p \leq 150,$$

$$\pi_2 = pq - 50q = (100p - 5000)(20 - 0,1p)/p = -10p + 2500 - 100000/p \rightarrow \max_{p \leq 150}.$$

$$-10 + 100000/p^2 = 0, \quad p^2 = 10000, \quad p = 100 \text{ руб.}$$

Таким образом, тетя Дуся будет продавать мороженое по **100 руб./кг**, при этом каждый ребенок будет получать по  $20 - 0,1 \times 100 = 10$  руб. и по-прежнему покупать **по 100 г мороженого**, прибыль тети Дуси будет равна **500 руб./день**, а расходы лагеря **сократятся до 1000 руб.**

**Задача 31\***

Малая фирма, производящая торты, продает их в своем фирменном отделе, где суточный спрос составляет  $q_D = 200 - 2p$  (здесь  $p$  – цена торта в руб., а  $q$  – объем продаж в шт.), и на центральном рынке, где существует возможность продать неограниченное количество тортов по 60 руб. Определить объем продаж в фирменном отделе и на рынке, а также цену торта в фирменном отделе, при которых прибыль будет максимальна. Суммарные издержки на производство тортов составляют  $TC(q) = q^2/10 + 40q + 500$ .

**Решение:**

Пусть в фирменном отделе будет продаваться  $q_1$  тортов, а на центральном рынке  $q_2$  тортов. Из функции спроса в фирменном отделе выразим цену:  $p_1 = 100 - q_1/2$ . Выручка при этом составит  $TR_1(q_1) = p_1 q_1 = (100 - q_1/2)q_1 = 100q_1 - q_1^2/2$ . Также имеется выручка  $TR_2(q_2) = 60q_2$  на центральном рынке. Учитывая, что функция издержек зависит от суммарного объема производства, составим функцию прибыли

$$\begin{aligned}\pi(q_1, q_2) &= TR_1(q_1) + TR_2(q_2) - TC(q_1 + q_2), \\ \pi(q_1, q_2) &= 100q_1 - q_1^2/2 + 60q_2 - (q_1 + q_2)^2/10 - 40(q_1 + q_2) - 500 = \\ &= 100q_1 - q_1^2/2 + 60q_2 - q_1^2/10 - q_1q_2/5 - q_2^2/10 - 40q_1 - 40q_2 - 500 \rightarrow \max_{q_1, q_2}.\end{aligned}$$

Найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 100 - q_1 - 0,2q_1 - 0,2q_2 - 40 = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 60 - 0,2q_1 - 0,2q_2 - 40 = 0.$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 1,2q_1 + 0,2q_2 = 60, \\ 0,2q_1 + 0,2q_2 = 20. \end{cases} \Rightarrow q_1 = 40, \quad q_2 = 60, \quad q = 100, \quad p_1 = 100 - 40/2 = 80 \text{ руб.}$$

Таким образом, фирма будет производить **100 тортов** в день, из них **40** она продает в фирменном отделе **по 80 руб.**, а оставшиеся **60** – на центральном рынке.

**Задача 32\***

Сотовый оператор «Пчелайн» планирует вход на иркутский и шелеховский рынок. Годовой спрос на иркутском рынке он оценивает в размере  $q_1 = 50 - 10p$ , спрос на шелеховском рынке –  $q_2 = 7,6 - 2p$ . Здесь  $p$  – цена разговора, руб. / мин.,  $q$  – суммарное время разговоров, млн. мин. Себестоимость минуты разговора составляет 1 руб. Постоянные издержки работы на иркутском рынке равны 30 млн. руб. / год, на шелеховском рынке – 3 млн. руб. / год. Определить ценовую политику компании, если она применяет ценовую дискриминацию, устанавливая отдельные тарифы для Иркутска и Шелехова. Что произойдет, если запретить ценовую дискриминацию? Что произойдет, если постоянные издержки работы на шелеховском рынке возрастут до 3,5 млн. руб.? Рассмотреть случай использования ценовой дискриминации и запрета на нее.

**Решение:**

Ценовая дискриминация означает определение оптимальной цены и соответствующего объема продаж на каждом отдельном рынке.

На иркутском рынке функция прибыли равна

$$\begin{aligned}\pi_1 &= p_1 q_1 - c q_1 - F_1 = p_1(50 - 10p_1) - 1(50 - 10p_1) - 30 = -10p_1^2 + 60p_1 - 80 \rightarrow \max, \\ -20p_1 + 60 &= 0, \quad \boxed{p_1 = 3}, \quad \boxed{q_1 = 50 - 10 \times 3 = 20}, \\ \boxed{\pi_1 &= -10 \times 3^2 + 60 \times 3 - 80 = 10}.\end{aligned}$$

На шелеховском рынке функция прибыли равна

$$\begin{aligned}\pi_2 &= p_2 q_2 - c q_2 - F_2 = p_2(7,6 - 2p_2) - 1(7,6 - 2p_2) - 3 = -2p_2^2 + 9,6p_2 - 10,6 \rightarrow \max, \\ -4p_2 + 9,6 &= 0, \quad \boxed{p_2 = 2,4}, \quad \boxed{q_2 = 7,6 - 2 \times 2,4 = 2,8}, \\ \boxed{\pi_2 &= -2 \times 2,4^2 + 9,6 \times 2,4 - 10,6 = 0,92}.\end{aligned}$$

В случае запрета ценовой дискриминации устанавливается единая цена  $p$  для обоих рынков. Суммарный спрос равен  $q = q_1 + q_2 = 57,6 - 12p$ . С учетом того, что в Шелехове спрос существует только при цене ниже  $7,6/2 = 3,8$  руб., эта формула будет верна для  $p < 3,8$ .

$$\begin{aligned} \pi &= pq - cq - F_1 - F_2 = p(57,6 - 12p) - 1(57,6 - 12p) - 30 - 3 = -12p^2 + 69,6p - 90,6 \rightarrow \max, \\ -24p + 69,6 &= 0, \quad \boxed{p = 2,9}, \quad \boxed{q_1 = 50 - 10 \times 2,9 = 21}, \quad \boxed{q_2 = 7,6 - 2 \times 2,9 = 1,8}, \\ \pi_1 &= 2,9 \times 21 - 1 \times 21 - 30 = 9,9, \quad \pi_2 = 2,9 \times 1,8 - 1 \times 1,8 - 3 = 0,42, \\ \pi &= \pi_1 + \pi_2 = \boxed{10,32}. \end{aligned}$$

Если постоянные издержки в Шелехове возрастут до 3,5 млн. руб. (то есть прибыль сократится на 0,5 млн. руб.), то при отсутствии ценовой дискриминации суммарная прибыль станет равной  $\pi = \pi_1 + \pi_2 = 10,32 - 0,5 = 9,82$ , что меньше 10 млн. руб., получаемых исключительно с иркутского рынка. Работать только на иркутском рынке оказывается выгоднее, следовательно, **оператор уйдет с шелеховского рынка**. В случае использования ценовой дискриминации прибыль на шелеховском рынке сократится до уровня  $\pi_2 = 0,92 - 0,5 = 0,42$ , но останется положительной. **Оператор останется на шелеховском рынке**.

### Задача 33\*

На рынке манной небесной спрос зависит от рекламных вложений и выражается соотношением  $p = 1 - q(1 - a)$ . Здесь  $p$  – цена за 1 грамм, тыс. руб.,  $q$  – объем продаж, тонн,  $0 \leq a \leq 1$  – затраты на рекламу, млрд. руб. Себестоимость добычи не зависит от объема и составляет 500 руб. за 1 грамм. При каком объеме рекламных вложений можно получить максимальную прибыль?

#### Решение:

Задачу можно решать, выписав функцию прибыли  $\pi = (p - 0,5)q - a = (1 - q(1 - a) - 0,5)q - a$ , найдя оптимальный объем добычи при каждом уровне рекламных вложений и затем исследовав функцию прибыли от оптимального объема добычи на максимум по одной переменной: уровню рекламных вложений.

Однако проще заметить, что **при равенстве рекламных вложений 1 млрд. руб.** уравнение спроса принимает вид  $p = 1$ , то есть по цене 1 тыс. руб. за 1 грамм можно продать неограниченное количество продукции. Поскольку себестоимость составляет 500 руб., что меньше продажной цены, можно получить неограниченную прибыль.

### Задача 34\*\*

Малая фирма, печатающая фотографии, работает на рынке с постоянной ценовой эластичностью спроса. Известно, что оптимальной является цена, втрое превышающая себестоимость одной фотографии, не зависящую от объема печати. Прибыль фирмы при цене 1 руб. составляет 27 тыс. руб., а при цене 2,25 руб. – 48 тыс. руб. Найти оптимальную цену, соответствующий объем печати и получаемую при этом прибыль фирмы.

**Решение:**

Спрос на рынке с постоянной ценовой эластичностью  $\varepsilon$  задается функцией  $q_D = ap^\varepsilon$ , где  $a > 0$  – произвольная константа, тогда выручка равна  $TR = pq = ap^{\varepsilon+1}$ . Себестоимость одной фотографии  $c$  не зависит от объема печати, поэтому суммарные издержки заданы в виде  $TC = cq = acp^\varepsilon$ . Выпишем функцию прибыли:

$$\pi = TR - TC = ap^{\varepsilon+1} - acp^\varepsilon \rightarrow \max, a(\varepsilon+1)p^\varepsilon - ac\varepsilon p^{\varepsilon-1} = 0, ap^{\varepsilon-1}((\varepsilon+1)p - c\varepsilon) = 0,$$

$$p = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}c = 3c, \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} = 3, \quad \varepsilon = 3\varepsilon + 3, \quad \varepsilon = -1,5, \quad q_D = ap^{-1,5} = \frac{a}{p\sqrt{p}}.$$

Таким образом, прибыль выражается соотношением  $\pi = \frac{a}{\sqrt{p}} - \frac{ac}{p\sqrt{p}}$ .

Поскольку известно, что при  $p = 1$   $\pi = 27$ , а при  $p = 2,25$   $\pi = 48$ , то

$$\begin{cases} 27 = a - ac \\ 48 = \frac{a}{1,5} - \frac{ac}{2,25 \times 1,5} \end{cases} \quad \begin{cases} 27 = a(1 - c) \\ 162 = a(2,25 - c) \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$$6 = \frac{2,25 - c}{1 - c}, \quad 6 - 6c = 2,25 - c, \quad c = 0,75, \quad a = \frac{27}{1 - 0,75} = 108.$$

Оптимальная цена будет равна  $p^* = 3 \times 0,75 = 2,25$  руб., объем печати составит

$$q^* = \frac{108}{2,25\sqrt{2,25}} = 32 \text{ тыс. фотографий. Прибыль } - \pi^* = \frac{108}{\sqrt{2,25}} - \frac{108 \times 0,75}{2,25 \times \sqrt{2,25}} = 48 \text{ тыс. руб.}$$

## 5. Рыночные структуры

### Задача 35

На рынке действуют репетиторская фирма «МиниМакс» и разработчик сайтов «CWR», на каждой из которых работают 4 человека по 20 дней в месяц. Работники «МиниМакса» решают по 6 принесенных им контрольных работ в день, а на разработку сайта, что не является их прямой специализацией, тратят 20 дней. Работники «CWR» сайт разрабатывают вчетверо быстрее – за 5 дней, но решают всего по 2 контрольных работы в день.

- 1) Если в некотором месяце фирмам поступил заказ на разработку 12 сайтов, то какое максимальное количество контрольных работ они смогут выполнить при объединении усилий?
- 2) Если цена выполнения контрольной работы установилась на рынке в размере 300 руб., то при каком диапазоне цен на разработку сайта обеим фирмам будет выгодно специализация в своей области?

**Решение:**

- 1) Месячный ресурс каждой из фирм составляет  $4 \times 20 = 80$  дней. На разработку 12 сайтов фирма «CWR» потратит  $12 \times 5 = 60$  дней. За оставшиеся 20 дней ее работники решат  $20 \times 2 = 40$  контрольных работ. Работники «Минимакса» за месяц выполняют  $80 \times 6 = 480$  контрольных работ. Таким образом, совместными усилиями будут решены  $480 + 40 = 520$  контрольных работ.

- 2) Работники «CWR» разрабатывают сайт в 10 раз дольше, чем решают контрольную работу. Если цена сайта будет превышать цену контрольной работы менее, чем в 10 раз (будет менее 3000 руб.), то они будут решать контрольные работы.
- 3) Работники «Минимакса» разрабатывают сайт в 120 раз дольше, чем решают контрольную работу. Если цена сайта превысит цену контрольной работы более, чем в 120 раз (то есть будет больше 36000 руб.), то они будут разрабатывать сайты. **При цене сайта от 3000 до 36000 руб. будет выгодна специализация.**

**Задача 36**

В таблице заданы чистые прибыли/убытки (в млн. руб.) от реализации трех инвестиционных проектов, в зависимости от действий конкурента (который либо идет на сговор с нашей фирмой, либо действует в своих интересах, либо пытается удалить нашу фирму с рынка).

	Идет на сговор	Действует в своих интересах	Пытается удалить с рынка
<b>Проект 1</b>	8	6	4
<b>Проект 2</b>	15	5	-5
<b>Проект 3</b>	8	7	2

Определить наиболее привлекательный проект, если по оценке экспертов конкурент с вероятностью 30% пойдет на сговор, а с вероятностью 20% будет пытаться удалить нашу фирму с рынка.

**Решение:**

Поскольку заданы вероятности каждого из 3 вариантов действий конкурента (30%, 50% и 20% соответственно), то можно подсчитать математическое ожидание прибыли для каждого проекта:

$$M\pi_1 = 0,3 \times 8 + 0,5 \times 6 + 0,2 \times 4 = 6,2;$$

$$M\pi_2 = 0,3 \times 15 + 0,5 \times 5 - 0,2 \times 5 = 6;$$

$$M\pi_3 = 0,3 \times 8 + 0,5 \times 7 + 0,2 \times 2 = 6,3.$$

**Ответ.** Наиболее привлекательным оказывается проект 3.

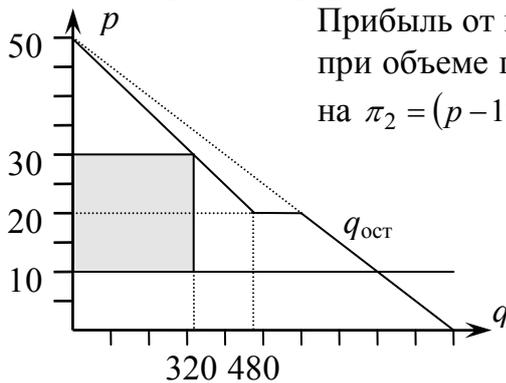
**Задача 37\***

Продажу апельсинов на рынке с суточным спросом  $q_D = 1000 - 20p$  ( $p$  – цена, руб.,  $q$  – объем продаж, кг), контролирует фирма «Яблокитай». Однажды на рынке появляется конкурент-однодневка, предлагающий сделку: он быстро продает 120 кг апельсинов по 20 руб., после чего фирма «Яблокитай» остается монополистом на остаточном спросе. Альтернативой является продажа фирмой «Яблокитай» апельсинов по цене не дороже 20 руб. Тогда конкурент в борьбу не вступает. Определить экономически оптимальное поведение и прибыль фирмы «Яблокитай» в этих условиях, если себестоимость килограмма апельсинов для нее составляет 10 руб. Считать, что покупать дешевые апельсины у конкурента будут случайно подошедшие покупатели.

**Решение:**

Рассмотрим обе альтернативы. Первая состоит в том, чтобы продавать апельсины по цене, не дороже, чем у конкурента:  $p = 20$  руб. Тогда покрывается весь рыночный спрос  $q_D = 1000 - 20p = 1000 - 20 \times 20 = 600$  кг. Прибыль от продажи 1 кг составит  $20 - 10 = 10$  руб., а суммарная прибыль  $\pi_1 = 10 \times 600 = 6000$  руб.

Вторая альтернатива состоит в допущении конкурента на рынок и последующем извлечении монопольной прибыли на остаточном спросе. По цене  $p = 20$  объем спроса составляет  $q_D = 1000 - 20 \times 20 = 600$  кг. Из них 120 кг, то есть 20%, продает конкурент. Поскольку дешевые апельсины покупают случайно подошедшие покупатели, то остаточный спрос составит при любой цене, начиная с 20 руб., 80% от первоначального.  $q_{ост} = 0,8(1000 - 20p) = 800 - 16p$ . На нем будет максимизировать свою прибыль фирма «Яблокитай».



Прибыль от продажи 1 кг апельсинов составит  $(p - 10)$  руб. при объеме продаж  $(800 - 16p)$  кг. Суммарная прибыль равна  $\pi_2 = (p - 10)(800 - 16p) = -16p^2 + 960p - 8000 \rightarrow \max$ .

Продифференцируем прибыль и приравняем производную к нулю:

$$-32p + 960 = 0, \quad p^* = 30, \quad q^* = 320, \quad \pi_2 = 6400.$$

Поскольку  $\pi_2 > \pi_1$ , фирме «Яблокитай» выгоднее **допустить конкурента** на рынок, но продавать апельсины по монопольной цене.

### Задача 38\*\*

Рынок мороженого в Иркутске характеризуется годовым спросом  $q_D = 10 - p$  (здесь  $p$  – цена, руб.,  $q$  – объем продаж, млн. шт.). Все производители мороженого имеют одинаковые функции суммарных издержек  $TC(q) = 4 + q^2$  (млн. руб.). Сколько фирм ожидается на этом рынке при совершенной конкуренции в долгосрочном периоде – каждая фирма имеет неотрицательную прибыль и нет стимулов для входа дополнительных фирм? Какая установится на рынке цена и каков будет объем продаж?

#### Решение:

Условие максимизации прибыли для рынка совершенной конкуренции записывается в виде  $p = MC(q) = TC'(q) = 2q$ . Отсюда оптимальный объем производства одной фирмы в зависимости от цены составит  $q = p/2$ . Поскольку в отрасли находится  $n$  таких фирм, суммарный объем производства будет равен  $Q = nq = np/2$ . Этот объем производства должен покрывать спрос:  $Q = 10 - p$ . Следовательно,

$$10 - p = np/2, \quad p = \frac{20}{n+2}, \quad q = \frac{10}{n+2}.$$

Проверим, при каком числе фирм у каждой из них будет неотрицательная прибыль.

$$\pi = TR(q) - TC(q) = pq - (4 + q^2) = \frac{20}{n+2} \frac{10}{n+2} - \left(\frac{10}{n+2}\right)^2 - 4 \geq 0,$$

$$\left(\frac{10}{n+2}\right)^2 \geq 4, \quad \frac{10}{n+2} \geq 2, \quad n+2 \leq 5, \quad n \leq 3, \quad p = \frac{20}{3+2} = 4, \quad q = \frac{10}{3+2} = 2, \quad Q = 2 * 3 = 6.$$

Таким образом, на рынке будет присутствовать **3 фирмы**, каждая из которых будет производить **по 2 млн. порций** мороженого и продавать их **по 4 руб.**

**Замечание:** поскольку каждая из 3 фирм будет получать в точности нулевую прибыль, возможен вариант, что на рынке останется 2 фирмы, каждая из которых будет производить по  $q = 10/(2+2) = 2,5$  млн. порций и продавать их по  $20/(2+2) = 5$  руб.

**Задача 39\*\***

На рынке некоторого товара, спрос на который составляет  $q_D = 1 - p$ , действуют 2 одинаковые фирмы с издержками производства  $TC(q) = q^2/2$ . Построить кривые реакции и найти равновесие, если фирмы функционируют в условиях конкуренции по Бертрану (стратегической переменной является цена; все покупатели покупают товар у того производителя, у которого он дешевле; в случае одинаковых цен рынок делится пополам; производитель обязан покрыть весь рыночный спрос).

**Решение:**

Рассмотрим возможное поведение первой фирмы в зависимости от цены, установленной второй. У первой фирмы есть 3 альтернативы:

- 1)  $p_1 > p_2 \Rightarrow q_1 = 0, \pi_1 = 0$  – уход с рынка;
- 2)  $p_1 = p_2 \Rightarrow q_1 = q_2 = Q/2$  – дележ рынка пополам;
- 3)  $p_1 < p_2 \Rightarrow q_1 = Q$  – захват рынка. В этой ситуации нет смысла устанавливать цену существенно ниже, чем у конкурента. Если цена будет даже на копейку ниже, по условиям задачи захват рынка можно считать осуществленным. Поэтому можно считать, что  $p_1 = p_2 - \Delta \approx p_2$ . Обозначим эту цену  $p = 1 - Q$ .

Подсчитаем прибыли первой фирмы в ситуациях 2 и 3:

$$2) \pi_2 = p \frac{Q}{2} - \left(\frac{Q}{2}\right)^2 / 2 = \frac{(1-Q)Q}{2} - \frac{Q^2}{8} = \frac{Q}{2} - \frac{5Q^2}{8};$$

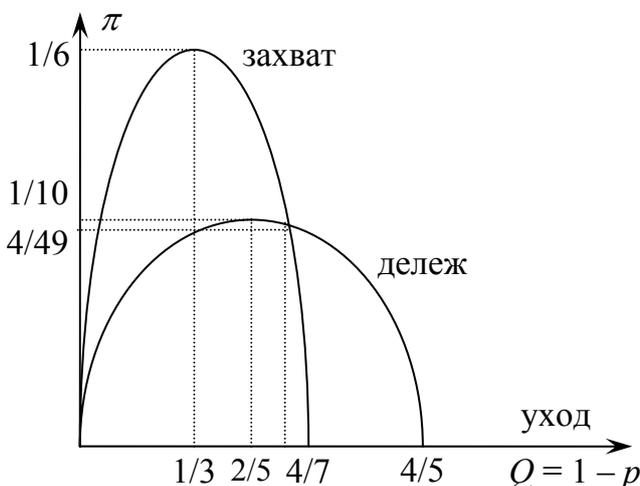
$$3) \pi_3 = pQ - \frac{Q^2}{2} = (1-Q)Q - \frac{Q^2}{2} = Q - \frac{3Q^2}{2}.$$

Обе функции представляют из себя параболы с ветвями, направленными вниз. Найдем вершины каждой из них:

$$2) \left(\frac{Q}{2} - \frac{5Q^2}{8}\right)' = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}Q = 0, \quad Q = \frac{2}{5}, \quad \pi_2^{\max} = \frac{2/5}{2} - \frac{5(2/5)^2}{8} = \frac{1}{10}$$

$$3) \left(Q - \frac{3Q^2}{2}\right)' = 1 - 3Q = 0, \quad Q = \frac{1}{3}, \quad \pi_3^{\max} = 1/3 - \frac{3(1/3)^2}{2} = \frac{1}{6}$$

Схематически зависимость прибыли от объема производства в каждой из трех ситуаций (уход с рынка, дележ рынка и захват рынка) изображена на графике.



Найдем точку  $\pi_2 = \pi_3$ :

$$\frac{Q}{2} - \frac{5Q^2}{8} = Q - \frac{3Q^2}{2}, \quad \frac{7Q^2}{8} = \frac{Q}{2}, \quad Q = \frac{4}{7}.$$

Найдем точку  $\pi_2 = 0$ :

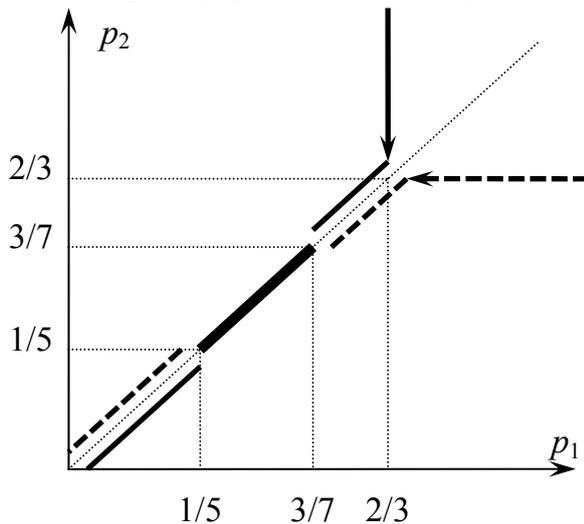
$$\frac{Q}{2} - \frac{5Q^2}{8} = 0, \quad Q = \frac{4}{5}.$$

Таким образом, при  $Q > 4/5$  первой фирме выгоднее уйти с рынка, при  $Q \in [4/7; 4/5]$  – разделить рынок с конкурентом, а при  $Q < 4/7$  – захватить рынок. При этом производить объем продукции  $Q < 1/3$  также невыгодно.

Перейдем обратно в систему координат, зависящую от цены конкурента  $p_2 = 1 - Q$ :

- 1)  $p_2 < 1/5 \Rightarrow p_1 > p_2, q_1 = 0, \pi_1 = 0$  – уход с рынка;
- 2)  $p_2 \in [1/5; 3/7] \Rightarrow p_1 = p_2, q_1 = q_2 = Q/2 = (1 - p_2)/2$  – дележ рынка;
- 3)  $p_2 \in (3/7; 2/3] \Rightarrow p_1 = p_2 - \Delta \approx p_2, q_1 = Q = 1 - p_2$  – захват рынка;
- 4)  $p_2 > 2/3 \Rightarrow p_1 = 2/3, q_1 = Q = 1/3$  – захват рынка, извлечение монопольной прибыли.

Для второй фирмы ситуация будет абсолютно симметричной.



Нарисуем на графике кривые реакции: Сплошной линией изображена кривая реакции первой фирмы на цену второй, а пунктирной – кривая реакции второй фирмы на цену первой.

Жирной линией показана область их пересечения – область равновесия, когда ни одной из фирм не выгодно изменить цену.

Наилучшим из всех равновесий будет равновесие  $p_1 = p_2 = 3/7, q_1 = q_2 = 2/7$ . Прибыль каждой фирмы при этом составит  $\pi_1 = \pi_2 = 3/7 \times 2/7 - (2/7)^2 / 2 = 4/49$ .

**Задача 40\*\***

На рынке компакт-дисков, суммарный месячный спрос на которые составляет  $Q = 160 - p$  (тыс. шт.), действует 2 независимых конкурента. Если обе фирмы установят одинаковые цены  $p_1 = p_2$ , рынок разделится пополам. Спрос  $q_2$  на продукцию второй (более дорогой) фирмы линейно убывает с падением цены  $p_1$  первой (более дешевой) и становится нулевым в точке  $p_1 = p^*$ , в которой суммарный спрос  $Q(p_1)$  вдвое больше, чем при цене  $p_2$ . Найти точку (цены, объемы продаж и прибыли), равновесную по Нэшу, когда ни одной из фирм не выгодно увеличивать или уменьшать цену продукции, при условии, что каждой из них компакт-диски обходятся в 50 руб.

**Решение:**

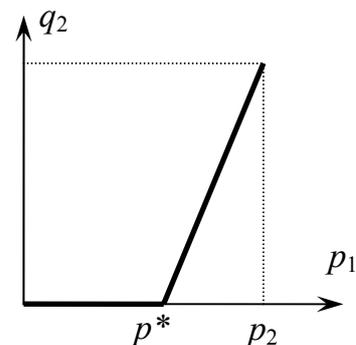
Пусть вторая (дорогая) фирма продает продукцию по цене  $p_2$ . Найдем критическую цену первой (дешевой) фирмы  $p^*$ , при которой она захватывает весь рынок:

$$160 - p^* = 2(160 - p_2), \quad p^* = 2p_2 - 160.$$

Так как при падении цены первой фирмы с  $p_1 = p_2$  до  $p_1 = p^* = 2p_2 - 160$  спрос на продукцию второй фирмы линейно уменьшается с  $q_2 = 0,5(160 - p_2)$  до  $q_2 = 0$ , то можем найти эту линейную зависимость  $q_2 = \alpha + \beta p_1$ .

Коэффициент  $\beta$  находим как тангенс угла наклона:

$$\beta = \frac{0,5(160 - p_2)}{p_2 - (2p_2 - 160)} = \frac{0,5(160 - p_2)}{160 - p_2} = 0,5.$$



Свободный член  $\alpha$  отыщем, подставив в функцию  $q_2 = \alpha + 0,5p_1$  значения  $p_1 = p_2$  и  $q_2 = 0,5(160 - p_2)$ :

$$0,5(160 - p_2) = \alpha + 0,5p_2, \quad \alpha = 80 - p_2.$$

Таким образом,

$$q_2(p_1) = \begin{cases} 80 - p_2 + 0,5p_1, & p^* \leq p_1 \leq p_2, \\ 0, & p_1 < p^*. \end{cases}$$

Поскольку суммарный спрос при цене  $p_1$  составляет  $Q = 160 - p_1$ , то спрос на продукцию первой фирмы равен

$$q_1(p_1) = 160 - p_1 - q_2(p_1) = \begin{cases} 80 + p_2 - 1,5p_1, & p^* \leq p_1 \leq p_2, \\ 160 - p_1, & p_1 < p^*. \end{cases}$$

Найдем кривую реакции первой фирмы (ее оптимальную цену в зависимости от цены второй фирмы) при условии, что себестоимость единицы продукции равна 50 руб. Для этого максимизируем прибыль

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - 50)q_1 = (p_1 - 50)(80 + p_2 - 1,5p_1) \rightarrow \max_{p_1}.$$

Найдем частную производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial \pi_1(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 155 + p_2 - 3p_1 = 0, \quad \boxed{p_1 = \frac{1}{3}(155 + p_2)}.$$

Аналогично, зафиксировав  $p_1$ , вычислим кривую реакции второй фирмы:

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - 50)q_2 = (p_2 - 50)(80 - p_2 + 0,5p_1) \rightarrow \max_{p_2}.$$

Найдем частную производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial \pi_2(p_1, p_2)}{\partial p_2} = 260 + p_1 - 4p_2 = 0, \quad \boxed{p_2 = \frac{1}{4}(260 + p_1)}.$$

Решив систему из 2 уравнений, найдем точку пересечения кривых реакции:

$$\bar{p}_1 = 80, \quad \bar{p}_2 = 85.$$

Данная точка является равновесной по Нэшу – ни одной из фирм не выгодно увеличивать или уменьшать цену продукции. Найдем объемы продаж и прибыли каждой фирмы:

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= 80 + 85 - 1,5 \times 80 = 45, & \bar{q}_2 &= 80 - 85 + 0,5 \times 80 = 35, \\ \bar{\pi}_1 &= (80 - 50) \times 45 = 1350, & \bar{\pi}_2 &= (85 - 50) \times 35 = 1225. \end{aligned}$$

## 6. Макроэкономика

### Задача 41

Месячная инфляция не изменялась в течение года и составляла 10%. На сколько процентов выросли цены за год?

**Решение:**

Поскольку проценты насчитываются на проценты, а ежемесячно цены растут в 1,1 раза, то за 12 месяцев будет наблюдаться рост в  $1,1^{12} = 3,14$  раза или **на 214%**.

**Задача 42**

Верховный шейх Ачхурабии поставил задачу увеличить валовый внутренний продукт государства вдвое за предстоящие 8 лет. На сколько процентов ВВП должен возрастать ежегодно, если считать, что темпы роста постоянны.

**Решение:**

Важно заметить, что проценты насчитываются на проценты. Таким образом, ежегодный темп роста должен составлять  $\sqrt[8]{2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \approx 1,0905$ , то есть ВВП должен **ежегодно возрастать на 9,05%**.

**Задача 43**

Валовый внутренний продукт в стране Инфляндии за 2005 год вырос с 4 до 9 триллионов талеров. Как и насколько изменился физический объем производства, если цены за этот же период выросли на 150%.

**Решение:**

Индекс ВВП, показывающий во сколько раз вырос номинальный ВВП (в задаче он составляет  $9/4=2,25$ ), равен произведению индекса цен (2,5) и индекса объемов производства.  $I_Q = 2,25/2,5 = 0,9$ . Таким образом, объем производства **сократился на 10%**.

**Задача 44**

В стране Инфляндии денежная масса за 2005 год выросла на 100%. Могли ли за тот же период цены вырасти втрое при неизменном физическом объеме производства? Если нет, то почему? Если да, то в какой ситуации?

**Решение:**

Цены могут вырасти втрое при неизменном физическом объеме производства и росте денежной массы вдвое, если **в  $3/2=1,5$  раза вырастет скорость обращения денег**.

**Задача 45\***

На начало года денежная масса в Ачхурабии была равна 50 млрд. бакшишей. Рост производства за год составил 8%. Может ли Центральный Банк безинфляционно провести денежную эмиссию, при условии, что скорость обращения денег упала на 10%. Если нет, то почему? Если да, в каком объеме?

**Решение:**

По уравнению денежного обмена,  $I_p I_q = I_M I_v$ , где  $I_p$  – индекс цен,  $I_q$  – индекс объема производства,  $I_M$  – индекс денежной массы и  $I_v$  – индекс скорости обращения.

В нашем случае  $I_p = 1$  (цены не должны вырасти),  $I_q = 1,08$  (рост производства 8%),  $I_v = 0,9$  (скорость обращения упала на 10%). Найдем индекс денежной массы:

$$I_M = I_p I_q / I_v = 1 \times 1,08 / 0,9 = 1,2.$$

Денежная масса может, не вызывая инфляции, вырасти в 1,2 раза или на 20%. Следовательно, можно напечатать  $50 \times 20\% = 10$  млрд. бакшишей.

**Задача 46**

Указать, что из вышеперечисленного войдет в состав ВВП, а что – ВВП России:

1. Армянские рабочие строят дачи под Иркутском.
2. Фирма продала 500 автомобилей, произведенных в прошлом году.
3. «Внешторгбанк» приобрел контрольный пакет акций «Гута-банка».

**Решение:**

**Ни один из этих пунктов не войдет в состав ВВП России, а в ВВП России будут включены только дачи под Иркутском.** Поясним:

1. Армянские рабочие не являются гражданами России, поэтому стоимость построенных ими дач не войдет в ВВП России.
2. Все товары входят в ВВП и ВВП по году производства.
3. Никакие финансовые сделки не входят ни в ВВП, ни в ВВП.

**Задача 47**

Естественный уровень безработицы составляет 4%. При фактическом уровне безработицы 10% ВВП равен 15,3 трлн. руб. Найти потенциальный ВВП. Предположить, что коэффициент Оукена равен 2,5.

**Решение:**

Уровень безработицы превышает естественный на  $(10 - 4)\% = 6\%$ . По закону Оукена каждый лишний процент безработицы сокращает ВВП на 2,5%. Таким образом, итоговые потери ВВП составят  $6 \times 2,5 = 15\%$ , то есть фактический ВВП составляет 85% от потенциального.

$$\begin{aligned} \text{ВВП}_{\text{факт}} &= 0,85 \times \text{ВВП}_{\text{пот}}, & 15,3 &= 0,85 \times \text{ВВП}_{\text{пот}}, \\ \text{ВВП}_{\text{пот}} &= 15,3/0,85 = \mathbf{18 \text{ трлн. руб.}} \end{aligned}$$

**Задача 48**

Некто произвел оплату за телефонные разговоры на сумму 500 руб. Рассчитать величину НДС (НДС = 18%)

**Решение:**

Если цена до взятия НДС равна 100%, то цена вместе с НДС (в данном случае 500 руб.) составит  $100\% + 18\% = 118\%$ . Решим пропорцию:

$$\begin{aligned} 118\% &= 500 \text{ руб.}, & 18\% &= x \text{ руб.}, \\ x &= 500 \times 0,18/1,18 = \mathbf{76,27 \text{ руб.}} \end{aligned}$$

**Задача 49**

Номинальная зарплата рабочего составляет 20 тыс. руб./мес. Сколько он получит на руки? Сколько должен заплатить работодатель? Подоходный налог 13%, единый социальный налог 26%.

**Решение:**

На руки рабочий получает сумму за вычетом 13%, то есть  $20 \text{ тыс.} - 0,13 \times 20 \text{ тыс.} = \mathbf{17400 \text{ руб.}}$  Работодатель помимо 20 тыс. руб. должен заплатить 26% единого социального налога:  $20 \text{ тыс.} + 0,26 \times 20 \text{ тыс.} = \mathbf{25200 \text{ руб.}}$

**Задача 50**

Фирма за 100 тыс. руб. приобрела ризограф, нормативный износ которого достигается при печати 5 млн. копий. Ликвидационная стоимость ризографа равна 20 тыс. руб. Сколько копий сделано на текущий момент, если остаточная стоимость ризографа составляет 40 тыс. руб.?

**Решение:**

При печати 5 млн. копий стоимость ризографа уменьшится на  $100 - 20 = 80$  тыс. руб. На текущий момент стоимость ризографа уменьшилась только на  $100 - 40 = 60$  тыс. руб. Таким образом, износ ризографа составляет  $5 \text{ млн} \times \frac{60}{80} = 3,75$  млн. копий.

**Задача 51**

Некто положил в банк на валютный счет 1000 евро под 6% годовых. За 2005 год курс евро относительно рубля упал на 10%. Какой процент прибыли был получен в пересчете на рубли?

**Решение:**

По итогам года вкладчик получил валюты на 6% (то есть в 1,06 раза) больше, но каждое евро стало стоить на 10% меньше. Таким образом, в пересчете на рубли было получено  $1,06 \times 0,9 = 0,954$  от начальной суммы. То есть **убытки вкладчика составили 4,6%**.

**Задача 52\***

Процентная ставка на рублевом счете 8% годовых, а на долларовом счете 6% годовых. Вкладчик имел 15 марта 2005 года 50 тыс. руб. На какой счет ему было выгоднее положить деньги, если курсы покупки и продажи долларов на 15 марта 2005 года составляли 27,30 и 27,60 соответственно, а на 15 марта 2006 года 27,90 и 28,20 соответственно. Какую сумму (в рублях) он выиграл/проиграл, держа деньги на валютном счете?

**Решение:**

В случае рублевого вклада вкладчик мог получить  $50 \times 1,08 = 54$  тыс. руб. В случае валютного вклада, ему было необходимо обменять рубли на доллары по курсу 27,60, полученную сумму положить на счет, и, спустя год, обменять доллары на рубли по курсу 27,90. Получим:  $50/27,60 \times 1,06 \times 27,90 = 53,576$  тыс. руб. Таким образом, держа деньги на валютном счете, вкладчик относительно рублевого вклада потерял **424 руб.**

**Задача 53**

Минимальная потребительская корзина в США стоит 500 долларов. Сколько эквивалентная корзина стоит в России, если номинальный обменный курс равен 28 руб./\$, а реальный обменный курс равен 2?

**Решение:**

Реальный обменный курс показывает, что цены в России в 2 раза меньше, чем в США. То есть эквивалентная потребительская корзина стоит в России  $500/2=250$  долларов или  $250 \times 28 = 7000$  руб.

**Задача 54\***

Планируемые потребительские расходы заданы функцией  $C = 0,5 + 0,8(Y - T)$  (трлн. руб.), где  $Y$  – номинальный ВВП,  $T$  – налоги. Инвестиционные расходы составляют 2 трлн. руб., государственные расходы – 2,5 трлн. руб., экспорт – 2,8 трлн. руб., импорт 2 трлн. руб. Найти равновесный объем ВВП при условии сбалансированного бюджета. Как должны измениться инвестиционные расходы, чтобы экономика достигла уровня полной занятости, если известно, что потенциальный ВВП составляет 20 трлн. руб.

**Решение:**

Условие макроэкономического равновесия:  $Y = C + I + G + Ex - Im$ . Подставим имеющиеся данные, учитывая, что при сбалансированном бюджете налоги равны государственным расходам:  $Y = 0,5 + 0,8(Y - 2,5) + 2 + 2,5 + 2,8 - 2$ ,  $0,2Y = 3,8$ ,  $Y = 19$ .

При изменении инвестиционных расходов на  $\Delta I$ , равновесие станет следующим:  $Y = 0,5 + 0,8(Y - 2,5) + (2 + \Delta I) + 2,5 + 2,8 - 2$ ,  $0,2Y = 3,8 + \Delta I$ ,  $Y = 19 + 5\Delta I = 20$ ,  $\Delta I = 0,2$ .

**Ответ.** Равновесный ВВП составляет **19 трлн. руб.** Инвестиционные расходы должны увеличиться на **200 млрд. руб.**

**7. Другие задачи****Задача 55**

Игрок на фондовом рынке играет на акциях 3 компаний, курсы которых были следующими (по указанным курсам в данные дни он может как купить, так и продать акции):

	10.03.2006	17.03.2006	24.03.2006	31.03.2006
«Ойл-Эве»	10	14	12	16
«Айн-Нене»	120	150	140	182
«Дельта-кредит»	2000	3000	2400	3000

Какую максимальную сумму и с помощью какой стратегии мог заработать игрок, если первоначально он обладал капиталом в размере 120 тыс. руб.?

**Решение:**

Игроку на фондовом рынке для получения максимальной прибыли необходимо покупать акции компаний, которые дорожают за соответствующую неделю сильнее всего. Подсчитаем, как изменялся курс каждой из акций за каждую неделю:

	10–17.03.2006	17–24.03.2006	24–31.03.2006
«Ойл-Эве»	$14/10 = 1,4$	$12/14 \approx 0,86$	<b><math>16/12 \approx 1,33</math></b>
«Айн-Нене»	$150/120 = 1,25$	$140/150 \approx 0,93$	$182/140 = 1,3$
«Дельта-кредит»	<b><math>3000/2000 = 1,5</math></b>	$2400/3000 = 0,8$	$3000/2400 = 1,25$

Видим, что в первую неделю сильнее всего (в 1,5 раза) подорожали акции компании «Дельта-кредит». Купив на 120 тыс. руб. 60 таких акций, можно было увеличить состояние до 180 тыс. руб. Во вторую неделю акции всех фирм понизи-

лись в цене. Соответственно, идеальным вариантом было не покупать акций, сохранив средства. На третьей неделе сильнее всего подорожали акции компании «Ойл-Эве». Можно было купить на 180 тыс. руб. 15 тыс. акций по 12 руб., а 31 марта, продав их по 16 руб., заработать 240 тыс. руб.

**Ответ.** Игрок на фондовом рынке с 10 по 31 марта мог удвоить свое состояние – со 120 до 240 тыс. руб.

**Задача 56\***

В Ачхурабии каждый закон должен приниматься двумя палатами парламента: Меджлисом и Советом Старейшин. Меджлис тратит на обсуждение каждого экономического закона 0,5 месяца, а политического закона – 0,2 месяца. Совет Старейшин обсуждает экономический закон 1/6 месяца, а политический закон – 0,4 месяца. Сколько и каких законов должны принимать работающие по 10 месяцев в год парламентарии для максимально быстрого движения страны к светлому будущему, если каждый принятый экономический закон увеличивает благосостояние граждан на 1%, а политический закон – на 0,5%? Каков при этом будет экономический рост? Что изменится, если Верховный шейх Ачхурабии, утверждающий все законы, откажется подписывать более 10 политических законов в год?

**Решение:**

Пусть парламентарии принимают  $x \geq 0$  экономических и  $y \geq 0$  политических законов. Тогда Меджлис тратит на их обсуждение  $(0,5x + 0,2y)$  месяцев, а Совет Старейшин –  $(1/6x + 0,4y)$  месяцев. По условию парламентарии обеих палат работают не более 10 месяцев. Поэтому в задаче будет два ограничения:

$$0,5x + 0,2y \leq 10 \quad (1) \quad \text{и} \quad 1/6x + 0,4y \leq 10 \quad (2)$$

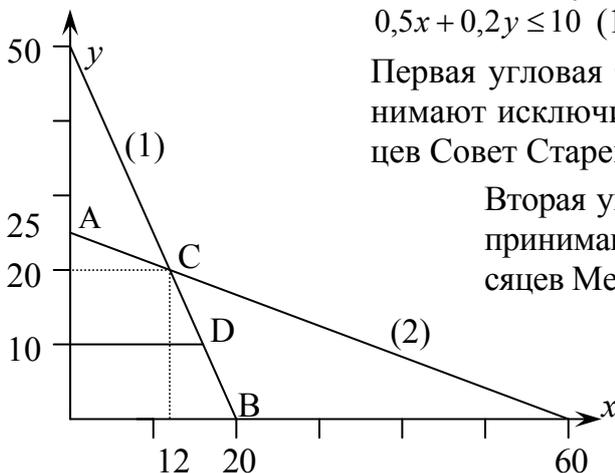
Первая угловая точка – точка  $A(0; 25)$  – обе палаты принимают исключительно политические законы, за 10 месяцев Совет Старейшин может принять  $10/0,4=25$  законов.

Вторая угловая точка – точка  $B(20; 0)$  – обе палаты принимают только экономические законы, за 10 месяцев Меджлис может принять  $10/0,5=20$  законов.

И третья угловая точка – точка  $C$ . Для ее нахождения нужно решить систему:

$$0,5x + 0,2y = 10, \quad 1/6x + 0,4y = 10$$

Получим координаты точки  $C(12; 20)$ .



Оптимум достигается в одной из угловых точек. Вычислим экономический рост в каждой из них:  $\pi(A) = 0,5 \times 25 = 12,5\%$ ,  $\pi(B) = 1 \times 20 = 20\%$ ,  $\pi(C) = 1 \times 12 + 0,5 \times 20 = 22\%$ .

Если Верховный Шейх Ачхурабии подписывает только 10 политических законов в год, точки  $A$  и  $C$  становятся недоступными, но появляется новая угловая точка  $D$ :  $0,5x + 0,2y = 10, y = 10$ . Откуда  $D(16; 10)$ ,  $\pi(D) = 1 \times 16 + 0,5 \times 10 = 21\% > 20\% = \pi(B)$ .

**Задача 57\*\***

Покупателю известно, что цена костюмов удовлетворяющего его качества в различных магазинах равномерно распределена от 2,5 до 5 тыс. руб. Издержки поиска очередного костюма (добраться до нового места) покупатель оценивает в 50 руб. Если в очередном магазине цена не превышает некоторый критический уровень, костюм покупается, в противном случае покупатель продолжает поиски. Найти критический уровень цены, если покупатель ведет себя оптимально.

**Решение:**

Покупатель сделает покупку, если цена костюма в очередном магазине не будет превышать некоторой критической цены  $\bar{p}$ , в противном случае он продолжит поиски. Если цена строго равна  $\bar{p}$ , ему нет разницы, купить костюм или идти дальше. Рассмотрим данную ситуацию для нахождения  $\bar{p}$ .

Добраться до следующего магазина стоит 50 руб. Эти расходы покупатель несет всегда. Вероятность того, что цена костюма в следующем магазине будет ниже критической  $\bar{p}$ , равна  $\frac{\bar{p} - 2500}{2500}$ , при этом она в среднем составит  $\frac{\bar{p} + 2500}{2}$  (здесь учитываем то, что цена распределена равномерно). В этом случае покупка костюма будет осуществлена. Вероятность обратного равна  $1 - \frac{\bar{p} - 2500}{2500} = \frac{5000 - \bar{p}}{2500}$ .

Тогда покупатель возвращается к исходной ситуации: продолжать поиски дешевого места. Математическое ожидание издержек в этом случае составит  $\bar{p}$ . Получаем равенство:  $\bar{p} = 50 + \frac{\bar{p} - 2500}{2500} \frac{\bar{p} + 2500}{2} + \frac{5000 - \bar{p}}{2500} \bar{p}$ .

$$5000\bar{p} = 100 * 2500 + \bar{p}^2 - 2500^2 + 10000\bar{p} - 2\bar{p}^2, \quad \bar{p}^2 - 5000\bar{p} + 2500^2 = 10^2 * 50^2, \\ (\bar{p} - 2500)^2 = 500^2, \quad \boxed{\bar{p} = 3000 \text{ руб.}}$$

**Ответ.** При цене меньше 3000 руб. костюм покупается, иначе поиски продолжаются.

## Оглавление

1. Спрос и предложение (задачи 1–10).....	3
2. Эластичность (задачи 11–16).....	6
3. Теория потребительского поведения (задачи 17–20).....	8
4. Теория фирмы (задачи 21–34).....	11
5. Рыночные структуры (задачи 35–40).....	19
6. Макроэкономика (задачи 41–54).....	24
7. Другие задачи (задачи 55–57).....	28

## **ДОБРО ПОЖАЛОВАТЬ** **в Институт математики, экономики и информатики** **Иркутского государственного университета!**

СЕГОДНЯ ИМЭИ – ЭТО:

13 кафедр, 4 специальности и 17 специализаций. 5 компьютерных классов. Центр информационной безопасности. Студенческий центр информационных технологий «Unicom». Лингвистический центр. Два учебно-научных комплекса ИМЭИ – Институт динамики систем и теории управления СО РАН, ИМЭИ – Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН.

23 доктора наук, профессора и 67 кандидатов наук, доцентов, в том числе, 1 член-корреспондент РАН, 2 члена РАЕН, 2 члена-корреспондента АН высшей школы, 7 членов Академии нелинейных наук, 1 заслуженный работник высшей школы РФ, 7 почетных работников высшего образования РФ.

Среди преподавателей ИМЭИ много совместителей. Это лучшие специалисты города в областях математики, экономики, компьютерных технологий. Их участие в учебном процессе обеспечивает более качественную подготовку студентов как в теоретическом, так и в прикладном отношении.

### **Специальность: «Математические методы в экономике»** **(обучение 5 лет, квалификация «экономист-математик»)**

Выпускник данной специальности приобретает следующие знания и навыки:

- математическое моделирование, качественный и количественный анализ экономических процессов и объектов на микро- и макроуровнях;
- эффективное применение современных информационных технологий в экономической деятельности;
- управление инвестициями и бизнес-планирование.

Наши выпускники работают на крупных предприятиях и в известных компаниях, занимаются финансово-банковской деятельностью, служат в государственных и муниципальных органах управления.

**Приглашаем юношей и девушек, равнодушных к математике, экономике и информационным технологиям, учиться у нас!**

**664003, Иркутск, Бульвар Гагарина, 20**  
**Телефоны для справок: (3952) 24-22-14, 24-22-28**  
**<http://imei.isu.ru>**