УДК 519.833.2, УДК 519.8:656

РЫНОЧНОЕ САМОРЕГУЛИРОВАНИЕ И СОГЛАСОВАНИЕ ПО НЭШУ ПЛАНОВ ПЕРЕВОЗОК КЛИЕНТОВ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ [1]

М.А. Киселева

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
E-mail: marinee@mail.ru

Рассматривается проблема согласования по Нэшу планов перевозок клиентов транспортной сети при тарифах на перевозки, линейно зависящих от суммарных объемов перевозок всех клиентов. Показано, что данная задача многокритериальной оптимизации сводится к задаче квадратичного программирования. В качестве приложений модели могут служить электрические сети, трубопроводные системы, железнодорожный транспорт особенно в свете перехода к рыночным отношениям в рамках реформирования организации этих отраслей.

Ключевые слова: нелинейная транспортная модель, согласование интересов, равновесие Нэша, квадратичное программирование.

Введение

В экономической науке, начиная от истоков и по сегодняшний день, наиболее распространенный подход к способу организации и функционирования рынка основывается на идее его саморегулирования. С понятием рыночного саморегулирования неразрывно связано понятие конкуренции, которая рассматривается в качестве некоторой силы, приводящей действие рыночного механизма к устойчивому состоянию – точке равновесия. Равновесие трактуется как такое состояние рынка, в котором интересы рыночных субъектов (продавцов и покупателей) совпадают, а отклонение от этого состояния одной из сторон создает дисбаланс.

Механизмы взаимодействия экономических субъектов и установления состояния равновесия зависят от типа рыночной структуры. Так, в модели совершенной конкуренции – практически идеальном состоянии экономической системы, где действует множество независимых продавцов и покупателей, равновесие достигается в точке равенства функций спроса и предложения. На рынках несовершенной конкуренции, к которым относятся рынки монополии, дуополии, олигополии, равновесие зависит от стратегического взаимодействия рыночных субъектов.

При небольшом числе фирм, действующих на рынке, каждый продавец осознает свою зависимость от поведения других продавцов, взаимное влияние своих действий на выбор цен (модель Бертрана) и объемов (модель Курно) конкурентами. Как пишет Чемберлин, «продавцу приходится

[1] Исследования выполнены при финансовой поддержке РГНФ (проект 06-02-00266а)

брать в расчет не только то, что его конкурент делает теперь, но и то, что конкурент вынужден будет сделать в связи с той переменой, которую продавец замышляет сам». Поэтому при достаточно малом числе продавцов падения цены до конкурентного уровня не будет, каждый агент самостоятельно (возможно, методом проб и ошибок) выберет тот объем и ту цену, которые максимизируют совокупную отраслевую прибыль. «Так как снижение цены, предпринятое кем бы то ни было, неминуемо приводит к уменьшению его собственных прибылей, то никто не будет ее снижать, и, хотя продавцы вполне самостоятельны, равновесие достигается здесь точно таким же образом, как если бы между ними существовало монополистическое соглашение» [1]. Подобная стратегия вслед за Чемберлином будет называться «сознательным параллелизмом» и в течение долгого времени использоваться адвокатами компаний, попадающих под антимонопольные разбирательства в связи с обвинениями их в картельной деятельности, в частности в США.

Анализ всякого рода стратегических взаимодействий участников экономических отношений начинает рассматриваться в рамках новой индустриальной экономики (1980 г.), основная цель которой заключается в том, чтобы показать, каким образом фирмы через конкурентное взаимодействие приходят к координации своей деятельности. Под стратегическим взаимодействием понимается специфическое поведение фирмы-участницы рыночного процесса: каждая фирма принимает свои решения, учитывая, каким образом ее действия отразятся на планируемых действиях конкурентов. Этот сложный процесс формирования и корректировки ожиданий фирм невозможно описать на основе традиционных количественных методов анализа, поэтому для исследования рыночных стратегий поведения фирм применяется аппарат теории игр.

Для описания исхода игры «конкуренции по объемам» в новой индустриальной экономике вводится понятие равновесия Нэша. Так называется набор стратегий, максимизирующий целевую функцию каждого игрока (фирмы) при неизменной оптимальной стратегии другого игрока (фирмы конкурента). Это равновесие является точкой устойчивого сочетания личной и коллективной выгоды и показывает такую ситуацию на рынке, когда ни у одной фирмы нет стимулов менять свое текущее поведение ни в качественном, ни в количественном отношении.

В данной статье концепция равновесия Нэша рассматривается для нелинейной транспортной модели с несколькими перевозчиками в качестве способа согласования их интересов. Такая модель поведения субъектов экономических отношений может иметь место в системах передачи электро- и теплоэнергии, системах железнодорожного, газо- и нефтетранспорта. Так, нынешняя реформа в электроэнергетике, направленная на создание конкурентных отношений в отрасли, подразумевает, в частности, отделение сетей от генерации. В этом случае независимые компании могут генерировать электроэнергию и передавать ее оптовым производителям или сбытовым компаниям на основе двусторонних договоров через единую магистральную сеть, управляемую системным оператором.

Далее дается описание транспортной модели и в предположении линейной зависимости тарифа от объема транспортировок излагается конструктивный способ нахождения равновесия Нэша (в общем виде проблемы многокритериальной оптимизации) как решения задачи квадратичного программирования, для решения которой существует много эффективных алгоритмов, изложенных, например, в [2], [3].

Описание модели

Пусть m – число узлов транспортной сети, n – число дуг, L – количество клиентов, A – матрица размера $m \times n$ инциденций узлов и дуг. Элементы этой матрицы имеют значения:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если узел } i \text{ не связан с ветвью } j, \\ -1, \text{ если узел } i \text{ является началом дуги } j, \\ +1, \text{ если узел } i \text{ является концом дуги } j. \end{cases}$$

Заданы векторы $b^l \in R^m$, компоненты которых b_i^l равны объемам транспортируемых грузов из узла $i = 1,...,m$ клиентами $l = 1,...,L$. Отметим, что если $b_i^l < 0$, то величина $\left|b_i^l\right|$ соответствует объему поставок клиента l из узла i. Считаем, что объемы грузов, поставляемых в транспортную систему и получаемых из транспортной системы каждым клиентом, должны совпадать, т.е. векторы b^l удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^l = 0, \ l = 1,...,L. \qquad (1)$$

Обозначим x^l – вектор из R^n, компоненты которого x_j^l соответствуют объемам перевозок грузов клиента l по дуге $j = 1,...,n$. Вектор x^l будем называть планом перевозок клиента l. Этот план перевозок будем называть допустимым, если выполняются условия

$$Ax^l = b^l, \, x^l \geq 0. \qquad (2)$$

Здесь первое условие – баланс ввозимых и вывозимых грузов клиента l в каждом узле. Второе условие означает, что грузы могут перевозиться только по заданному для каждой дуги направлению.

Для существования допустимого плана перевозок клиента l необходимо выполнение условия (1). Это следует из того, что сумма строк матрицы A равна нулевому вектору. Условие (1) становится достаточным для существования допустимого плана перевозок, если рассматриваемая транспортная сеть является связным графом. Здесь под связностью транспортного графа понимается возможность перевозки груза из произвольного узла в любой другой узел, используя только допустимые направления перевозок по дугам.

План перевозок всех клиентов представим в виде матрицы размера $n \times L$:

$$X = \left[x^1, x^2, ..., x^L\right].$$

План перевозок всех клиентов X будем называть допустимым, если таковыми являются планы перевозок x^l клиентов $l=1,\dots,L$, составляющие вектор-столбцы данной матрицы X.

Пусть z – вектор из R^n, компоненты которого равны суммарным объемам перевозок всех клиентов по отдельным дугам:

$$z=\sum_{l=1}^{L}x^l. \qquad (3)$$

Тариф на перевозку по дуге j будем рассматривать в виде линейно возрастающей функции от объема перевозок по данной дуге j

$$P_j(z_j)=\alpha_j z_j+\beta_j,\ j=1,\dots,n. \qquad (4)$$

Здесь α_j,β_j – некоторые вещественные числа, причем $\alpha_j>0$.

Произведение тарифа на объем перевозок клиента l по дуге j будет давать величину затрат этого клиента на перевозки по данной дуге. Эти затраты представляются в виде функции от суммарных перевозок z_j и перевозок x_j^l клиента l по дуге j:

$$G_j^l(z_j,x_j^l)=P_j(z_j)x_j^l. \qquad (5)$$

Суммируя затраты по всем дугам, получим суммарные затраты на перевозки клиента l в виде функции от плана перевозок данного клиента x^l и вектора суммарных перевозок всех клиентов по всем дугам z:

$$G^l(z,x^l)=\sum_{j=1}^{n}G_j^l(z_j,x_j^l). \qquad (6)$$

Для клиентов единой транспортной сети, стремящихся перевезти свои грузы с наименьшими затратами, равновесием Нэша будет такой набор допустимых планов перевозок каждого клиента $x^l, l=1,\dots,L$, при котором никому из них не выгодно менять свой план. Приведем строгое математическое определение такого равновесия.

Равновесие по Нэшу в транспортной модели

Допустимый план перевозок всех клиентов

$$\overline{X}=\left[\overline{x}^1,\overline{x}^2,\dots,\overline{x}^L\right]$$

будет равновесным по Нэшу, если ни для какого $l=1,\dots,L$ не существует допустимого плана перевозок

$$\tilde{X}=\left[\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\dots,\tilde{x}^L\right]$$

такого, что

$$\tilde{x}^t=\overline{x}^t, t\in\{1,\dots,L\}, t\neq l,$$

и при этом

$$G^l(\tilde{z},\tilde{x}^i)<G^l(\overline{z},\overline{x}^l),$$

где

$$\tilde{z}=\sum_{\tau=1}^{t}\tilde{x}^\tau, \overline{z}=\sum_{\tau=1}^{t}\overline{x}^\tau.$$

Отметим, что в этом определении переход от плана $\bar{X}$ к плану $\tilde{X}$ осуществляется только за счет изменения плана перевозок одного из клиентов при неизменных планах перевозок остальных. При переходе от плана l-го клиента $\bar{x}^l$ к плану $\tilde{x}^l$ учитывается влияние этого перехода на тарифы вследствие изменения векторов суммарных перевозок по дугам.

Итак, в соответствии с концепцией равновесия Нэша каждый клиент $l=1,\ldots,L$ при выборе своего плана перевозок (вектора x^l) решает задачу

$$G^l(z,x^l)\to \min \tag{7}$$

при ограничениях (2) на вектор x^l при условии, что суммарные перевозки по всем дугам остальных клиентов фиксированы. Эти суммарные перевозки составляют, согласно (3), вектор

$$z^l = z - x^l.$$

Пусть

$$F^l(z^l,x^l) = G^l(z^l + x^l, x^l),$$

где G^l – функция, определенная правилом (6). Учитывая (4)–(6), имеем

$$F^l(z^l,x^l) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (z_j^l + x_j^l) x_j^l + \beta_j x_j^l. \tag{8}$$

При фиксированном z^l задача (7) приобретает вид задачи квадратичного программирования со строго выпуклой сепарабельной целевой функцией: найти x^l из условий

$$F^l(z^l,x^l)\to \min,\ Ax^l = b^l,\ x^l \ge 0. \tag{9}$$

Обозначим

$$f^l(z^l,x^l) = \nabla_{x^l} F^l(z^l,x^l)$$

градиент целевой функции задачи (9). Согласно (8), компонентами этой вектор-функции будут функции

$$f_j^l(z_j^l,x_j^l) = 2\alpha_j x_j^l + \alpha_j z_j^l + \beta_j,\ j=1,\ldots,n. \tag{10}$$

Поскольку $\alpha_j > 0$, при любом z_j^l значение f_j^l неограниченно возрастает с увеличением x_j^l. Поэтому задача (9) с любым заданным $z^l \ge 0$ имеет решение, причем всегда единственное.

Согласно условиям оптимальности Куна–Таккера для задачи минимизации дифференцируемой выпуклой функции при линейных ограничениях (см., например, [2, 4]) для того чтобы вектор x^l был решением задачи (9), необходимо и достаточно выполнение условий

$$Ax^l = b^l, x^l \ge 0, \tag{11}$$

$$f^l(z^l,x^l) \ge A^T u^l, \tag{12}$$

$$(x^l)^T (f^l(z^l,x^l) - A^T u^l) = 0 \tag{13}$$

при некотором $u^l \in R^m$. Вектор u^l состоит из множителей Лагранжа ограничений-равенств задачи (9).

Представление проблемы поиска точки равновесия Нэша в виде задачи квадратичного программирования

Введем функцию от векторов $x^l \in R^n$, $l = 1,\ldots,L$:

$$H(x^1,\ldots,x^L) = \Phi(x^1,\ldots,x^L) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{l=1}^{L} x_j^l,$$

где

$$\Phi(x^1,\ldots,x^L) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left((\sum_{l=1}^{L} x_j^l)^2 + \sum_{l=1}^{L} (x_j^l)^2 \right).$$

Нетрудно убедиться, что эта функция является строго выпуклой.

Рассмотрим задачу выпуклого квадратичного программирования с переменными, составляющими векторы $x^l \in R^n, l = 1,\ldots,L$

$$H(x^1,\ldots,x^L) \to \min \tag{14}$$

при ограничениях

$$Ax^l = b^l,\ x^l \geq 0,\ l = 1,\ldots,L. \tag{15}$$

Отметим, что

$$\frac{dH(x^1,\ldots,x^L)}{dx_j^l} = \alpha_j x_j^l + \alpha_j \sum_{\tau=1}^{L} x_j^\tau + \beta_j,\ j = 1,\ldots,n,\ l = 1,\ldots,L.$$

Согласно (10)

$$\frac{dH(x^1,\ldots,x^L)}{dx_j^l} = f_j^l\left(\sum_{\tau \neq l} x_j^\tau, x_j^l \right) = f_j^l(z_j^l, x_j^l),$$

т.е. градиент функции $H(x^1,\ldots,x^L)$ по векторам x^l совпадает с градиентом целевой функции $F^l(z^l, x^l)$ задачи (9).

Вследствие этого и учитывая совпадение ограничений данных задач, необходимые и достаточные условия оптимальности набора векторов x^l, $l = 1,\ldots,L$ для задачи (14), (15) состоят в выполнении условий (11) – (13) при некоторых $u^l \in R^m$, $l = 1,\ldots,L$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если ограничения* (2) *непротиворечивы для всех* $l = 1,\ldots,L$, *то задача квадратичного программирования* (14), (15) *имеет единственное решение. Векторы* $x^l, l = 1,\ldots,L$, *составляющие решение этой задачи, являются точкой равновесия Нэша в нелинейной транспортной модели.*

Итак, из теоремы 1 вытекает существование и единственность (в силу строгой выпуклости функции $H(x^1,\ldots,x^L)$) равновесия Нэша для нелинейной транспортной модели с линейно возрастающими функциями тарифов от объемов перевозок, если все клиенты имеют допустимые планы перевозок.

Сведение задачи поиска равновесия Нэша к задаче квадратичного программирования дает конструктивный путь вычисления этого равновесия. Естественно, что многие алгоритмы решения задач квадратичного программирования (14) – (15) можно интерпретировать как имитацию процесса согласования решений (объемов перевозок, тарифов по отдельным дугам) между клиентами транспортной сети.

Численный пример

Рассмотрим задачу нахождения равновесия Нэша для транспортной сети, состоящей из пяти узлов и соединяющих их шести дуг, перевозки по которой осуществляют три клиента (рис.1).

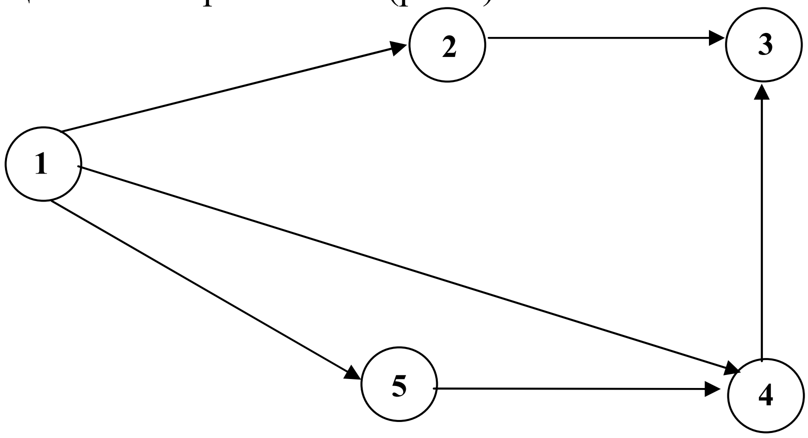

*Рис.*1. Графическое изображение транспортной сети, состоящей из пяти узлов и соединяющих их шести дуг

Матрица инциденций узлов и дуг этой сети имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заданными являются объемы транспортируемых грузов – векторы $b^1=(-5,0,5,0,0)^T$ и $b^2=(-7,0,0,0,0)^T$, $b^3=(-9,0,0,9,0)^T$. Введем функции тарифов на перевозку грузов для каждой дуги сети. Пусть

$$P_1(z_1)=0,2z_1+2, P_2(z_2)=0,5z_2+4, P_2(z_3)=0,7z_3+1, P_4(z_4)=0,9z_4+2,$$
$$P_5(z_5)=0,6z_5+3, P_6(z_6)=z_6+2$$

при $z=x^1+x^2+x^3$. Здесь x^1,x^2,x^3 – векторы R^3, состоящие из планов перевозок первого, второго и третьего клиентов. Функции затрат на перевозку грузов по сети для каждого клиента имеют вид

$$F^1(x^2,x^3,x^1)=0,2(x_1^1+x_1^2+x_1^3)x_1^1+2x_1^1+0,5(x_2^1+x_2^2+x_2^3)x_2^1+4x_2^1+$$
$$+0,7(x_3^1+x_3^2+x_3^3)x_3^1+x_3^1+0,9(x_4^1+x_4^2+x_4^3)x_4^1+2x_4^1+$$
$$+0,6(x_5^1+x_5^2+x_5^3)x_5^1+3x_5^1+(x_6^1+x_6^2+x_6^3)x_6^1+2x_6^1,$$

$$F^2(x^1,x^3,x^2)=0,2(x_1^1+x_1^2+x_1^3)x_1^2+2x_1^2+0,5(x_2^1+x_2^2+x_2^3)x_2^2+4x_2^2+$$
$$+0,7(x_3^1+x_3^2+x_3^3)x_3^2+x_3^2+0,9(x_4^1+x_4^2+x_4^3)x_4^2+2x_4^2+$$
$$+0,6(x_5^1+x_5^2+x_5^3)x_5^2+3x_5^2+(x_6^1+x_6^2+x_6^3)x_6^2+2x_6^2,$$
$$F^3(x^1,x^2,x^3)=0,2(x_1^1+x_1^2+x_1^3)x_1^3+2x_1^3+0,5(x_2^1+x_2^2+x_2^3)x_2^3+4x_2^3+$$
$$+0,7(x_3^1+x_3^2+x_3^3)x_3^3+x_3^3+0,9(x_4^1+x_4^2+x_4^3)x_4^3+2x_4^3+$$
$$+0,6(x_5^1+x_5^2+x_5^3)x_5^3+3x_5^3+(x_6^1+x_6^2+x_6^3)x_6^3+2x_6^3.$$

Согласно (9), получаем три взаимосвязанные задачи оптимизации. Первая задача: рассматривая векторы x^2,x^3 как параметры, найти вектор x^1 из условий

$$F^1(x^2,x^3,x^1)\to\min,$$
$$\left.\begin{aligned}-x_1^1-x_5^1-x_6^1&=-5,\\ x_1^1-x_2^1&=0,\\ x_2^1+x_3^1&=5,\\ -x_3^1+x_4^1+x_6^1&=0,\\ -x_4^1+x_5^1&=0,\\ x_1^1\ge0,x_2^1\ge0,x_3^1&\ge0.\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Вторая задача: рассматривая векторы x^1,x^3 как параметры, найти вектор x^2 из условий

$$F^2(x^1,x^3,x^2)\to\min,$$
$$\left.\begin{aligned}-x_1^2-x_5^2-x_6^2&=-7,\\ x_1^2-x_2^2&=0,\\ x_2^2+x_3^2&=7,\\ -x_3^2+x_4^2+x_6^2&=0,\\ -x_4^2+x_5^2&=0,\\ x_1^2\ge0,x_2^2\ge0,x_3^2&\ge0.\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

Третья задача: рассматривая векторы x^1,x^2 как параметры, найти вектор x^3 из условий

$$F^3(x^1,x^2,x^3)\to\min,$$
$$\left.\begin{aligned}-x_1^3-x_5^3-x_6^3&=-9,\\ x_1^3-x_2^3&=0,\\ x_2^3+x_3^3&=0,\\ -x_3^3+x_4^3+x_6^3&=9,\\ -x_4^3+x_5^3&=0,\\ x_1^3\ge0,x_2^3\ge0,x_3^3&\ge0.\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Представим задачу поиска равновесия Нэша в виде задачи квадратичного программирования (14) – (15):

$$H(x^1, x^2, x^3) \to \min \tag{19}$$

при ограничениях (16) – (18), где

$$H(x^1,x^2,x^3) = \frac{1}{2}(0,2((x_1^1 + x_1^2 + x_1^3)^2 + (x_1^1)^2 + (x_1^2)^2 + (x_1^3)^2) + 0,5((x_2^1 + x_2^2 + x_2^3)^2 +$$
$$+(x_2^1)^2 + (x_2^2)^2) + (x_2^3)^2) + 0,7((x_3^1 + x_3^2 + x_3^3)^2 + (x_3^1)^2 + (x_3^2)^2 + (x_3^3)^2) +$$
$$+0,9((x_4^1 + x_4^2 + x_4^3)^2 + (x_4^1)^2 + (x_4^2)^2 + (x_4^3)^2) + 0,6((x_5^1 + x_5^2 + x_5^3)^2 +$$
$$+(x_5^1)^2 + (x_5^2)^2 + (x_5^3)^2) + ((x_6^1 + x_6^2 + x_6^3)^2 + (x_6^1)^2 + (x_6^2)^2 + (x_6^3)^2))) + 2(x_1^1 + x_1^2 + x_1^3) +$$
$$4(x_2^1 + x_2^2 + x_2^3) + 1(x_3^1 + x_3^2 + x_3^3) + 2(x_4^1 + x_4^2 + x_4^3) + 3(x_5^1 + x_5^2 + x_5^3) + 2(x_6^1 + x_6^2 + x_6^3).$$

Решением полученной задачи квадратичного программирования являются векторы

$$\overline{x}^1 = \begin{pmatrix} 3,85 \\ 3,85 \\ 1,15 \\ 0,16 \\ 0,16 \\ 0,99 \end{pmatrix}, \overline{x}^2 = \begin{pmatrix} 5,15 \\ 5,15 \\ 1,85 \\ 0,44 \\ 0,44 \\ 1,41 \end{pmatrix}, \overline{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3,3 \\ 3,3 \\ 5,7 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

а затраты на перевозки каждого из трех клиентов составляют величины $F^1 = 62,655$, $F^2 = 88,095$, $F^3 = 93,375$.

Сопоставление с результатами решения других постановок задачи взаимодействия клиентов транспортной сети.

Рассматривая вопрос согласования по Нэшу интересов пользователей сети, интересно сравнить полученное решение с так называемым «общесистемным оптимумом», т.е. случаем, когда отсутствует конкуренция, а перевозки по сети осуществляет один агрегированный клиент. Поиск общесистемного оптимума, обозначим его $F^{\Sigma}(z)$, где $z = \sum_{l=1}^{L} x^l$, состоит в решении задачи условной минимизации, где целевая функция формируется в виде суммы произведений тарифов по дугам на суммарный объем перевозок по ним всех клиентов, а ограничения представляют объединение ограничений всех клиентов.

Имеем задачу

$$F^{\Sigma}(z) \to \min,$$

при ограничениях

$$Ax^l = b^l,\ x^l \geq 0, \text{ для всех } l = 1,\ldots,L,$$

где

$$F^{\Sigma}(z) = \sum_{j=1}^{n} P_j(z_j) \sum_{l=1}^{L} x_j^l.$$

Теоретически несложно обосновывается факт, что решение, равновесное по Нэшу, проигрывает в эффективности общесистемному оптимуму, т.е. сумма затрат на перевозки конкурирующих клиентов всегда не ниже, чем затраты одного агрегированного из всех них клиента. Это понятно и интуитивно, так как в случае «эгоистичного» поведения клиентов они стараются минимизировать свои затраты на перевозки за счет конкурентов, что в состоянии равновесия проявляется в увеличении суммарных затрат.

Потеря эффективности равновесия Нэша по сравнению с общесистемным оптимумом носит название «цены анархии» или «цены безначалия». Она рассчитывается как отношение суммы значений целевых функций игроков, взаимодействующих по Нэшу, к значению общесистемного оптимума. В [5] получены оценки «цены анархии» для некоторых видов функций тарифов. В частности, для линейных функций тарифов эта оценка не превышает значения 1,5.

Для рассмотренного примера общесистемный оптимум $F^{\Sigma} = 241{,}695$, а сумма затрат на перевозки всех клиентов в точке равновесия Нэша $F^1 + F^2 + F^3 = 62{,}655 + 88{,}095 + 93{,}375 = 244{,}125$. Отсюда получаем, что «цена анархии» составляет 1,01.

Помимо рассмотренного и описанного случая доопределения задачи поиска оптимального решения каждым клиентом – нахождения равновесия по Нэшу – существуют другие способы взаимодействия клиентов транспортной сети между собой. Можно предположить, например, что один из клиентов обладает преимуществом при выборе плана перевозок своих грузов. Тогда остальные подстраиваются под его приоритетное решение, и модель принимает вид «лидер – последователь». Ситуацию равновесия, соответствующую данной постановке, называют **равновесием по Штакельбергу**. Следует заметить, что «лидеров» как и «последователей» может быть несколько, и возможна ситуация, что «внутри одного уровня» клиенты являются равноправными и будут стремиться к достижению равновесия Нэша.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Розанова Н.М.** Эволюция взглядов на конкуренцию и практика антимонопольного регулирования: опыт стран с развитой рыночной экономикой. – http://economics.boom.ru/Rozanova/rozanova2.htm.

2. **Васильев Ф.П**. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. – 552 с.

3. **Полак Э.** Численные методы оптимизации. Единый подход. – М.: Мир, 1974.– 376 с.

4. **Зоркальцев В.И., Киселева М.А.** Системы линейных неравенств: учеб. пособие. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2007. – 127с.

5. **Harks T.** On the price of anarchy for network games with non-atomic and atomic players.

6. **Зоркальцев В.И., Киселева М.А.** Равновесие Нэша в нелинейной транспортной модели // Дискретный анализ и исследование операций, 2008. – Т.15. – №3. – С.31–42.