РАВНОВЕСНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

О.В. Хамисов

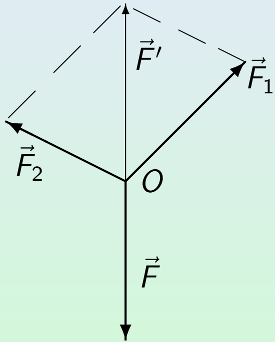
ИСЭМ СО РАН, Иркутск

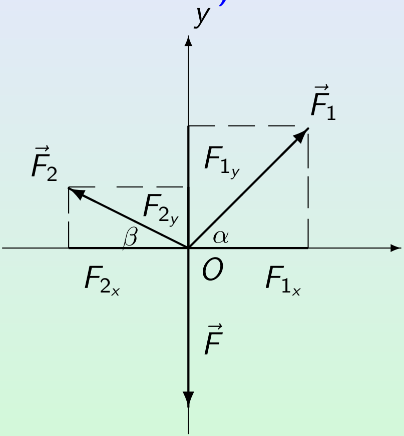
Иркутск, 2011

Разнообразие языков и интерпретаций

- "*Равновесие – равенство сил, взаимное уничтожение двух супротивных сил; покой тела при действии на него сил с разных сторон*"
  В.И. Даль "Толковый словарь живого великорусского языка"
- "*A state of balance between opposite forces, actions, or processes*"
  The Penguin Pocket English Dictionary
- "*A state of intellectual or emotional balance*"
  The Penguin Pocket English Dictionary

Пример 1 (равновесие материальной точки).





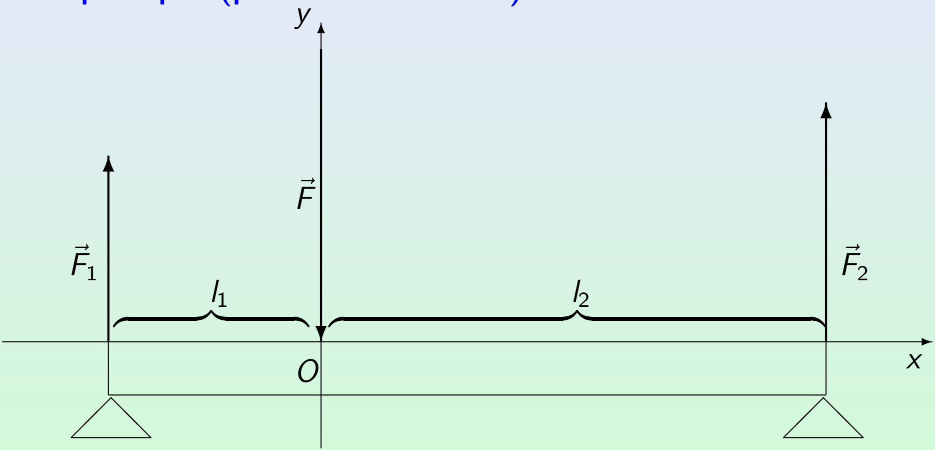
геометрическая интерпретация: правило параллелограмма

алгебраическая интерпретация: система уравнений

$$\cos(\alpha)F_1 - \cos(\beta)F_2 = 0,$$

$$\sin(\alpha)F_1 + \sin(\beta)F_2 = F.$$

Пример 2 (равновесие балки).



Система уравнений:

$$F_1 + F_2 - F = 0,$$

$$F_1 l_1 - F_2 l_2 = 0.$$

Ортогональность.

Условие равества нулю суммы моментов всех сил

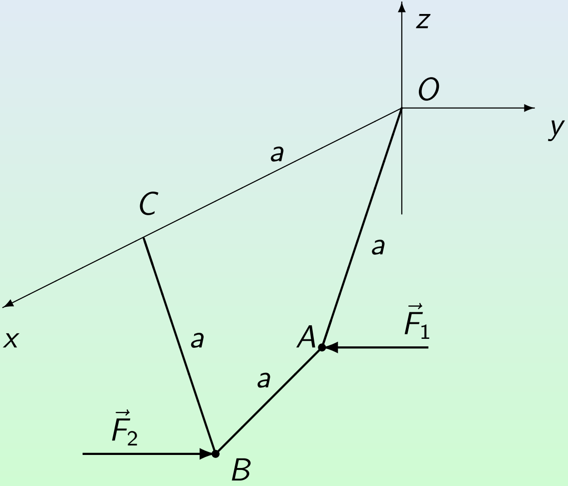
$$F_1 l_1 - F_2 l_2 = 0$$

запишем в виде условия ортогональности

$$\mathcal{F}^T l = 0, \ \mathcal{F} = (F_1, F_2), \ l = (l_1, -l_2).$$

- Рассмотренные примеры – примеры прямых задач статического равновесия: найти силы, удерживающие систему в состоянии равновесия
- Обратная задача статического равновесия заключается в нахождении равновесного положения по заданным силам

Пример 3 (обратная задача статики).



A и B – точки массой m, $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$.

Пример 3. Система нелинейных уравнений[1].

$$(x_1 + x_2 - a)(x_2 z_1 - x_1 z_2) - x_1 a(z_1 - z_2) = 0,$$

$$F(x_1 z_2 - x_2 z_1) - mg(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0,$$

$$F z_2(x_1 z_2 - x_2 z_1) + mg[x_1(y_1 z_2 - y_2 z_1) + y_2(x_1 z_2 - x_2 z_1)] = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - a^2 = 0,$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - a^2 = 0,$$

$$(x_2 - a)^2 + y_2^2 + z_2^2 - a^2 = 0,$$

где (x_1, y_1, z_1) – координаты точки A, (x_2, y_2, z_2) – координаты точки B, g - ускорение свободного падения.

---

[1] В.В. Величенко *Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники.* – М.:Наука, 1988. - 280 с.

Пример 4. Нелинейный аналог замкнутой модели Леонтьева

- n отраслей
- x_i – доход i-й отрасли
- $f_{ij}(x_i)$ – функция спроса отрасли i на продукцию отрасли j

В силу закнутости (расходная часть)

$$x_i = f_{i1}(x_i) + f_{i2}(x_i) + \dots + f_{in}(x_i), i = 1, \dots, n. \qquad (A)$$

Доходная часть

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ij}(x_i) = x_j,\ j = 1, \dots, n. \qquad (B)$$

Равновесие $\sim$ (доход=расход) $\sim$ одновременная разрешимость систем (A) и (B).

Существование решения $\Leftarrow$ т. о неподвижной точке

Теорема Брауэра. *Пусть*

- $F : S \to \mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$ *– выпуклое компактное множество;*
- $F(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)), f_i \in C;$
- F *отображает множество* S *в себя.*

Тогда существует точка x^* *такая, что*

$$F(x^*) = x^*.$$

Предположим, что суммарный доход постоянен:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M, M - const.$$

Определим множество

$$S_M = \{x : \sum_{i=1}^{n} x_i = M, x_i \geq 0, i = 1, ..., n\}$$

и непрерывное отображение $x \rightarrow y$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(x_i), j = 1, ..., n.$$

Предположим, далее, что f_{ij} непрерывны и неотрицательны. Тогда $\forall x \in S_M$

$$M = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j,$$

т.е. $y \in S_M$. Следовательно, отображение $x \to y$ удовлетворяет т. Брауэра, поэтому

$$\exists x^* \in S_M : x^* \to x^* \Rightarrow (\text{доход}=\text{расход})$$

$$\Downarrow$$

существует состояние равновесия

Пример 4. Модель с переменными ценами

- n отраслей
- a_i – объём продукции i-й отрасли (a_i – const.)
- $D_{ij}(x_i)$ – функция спроса отрасли i на продукцию отрасли j

В силу закнутости (расходная часть)

$$p_i a_i = \sum_{j=1}^{n} p_j D_{ij}(p), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Можно ли за счет выбора цен достичь равновесного функционирования всех отраслей:

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} D_{ij}(p), \quad j = 1, 2, \ldots, n?$$

Введем вектор-функцию $F(p) = (F_1(p), \ldots, F_n(p))^T$:

$$F_j(p) = \sum_{i=1}^{n} D_{ij}(p), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Условие равновесия

$$a_j = F_j(p), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Если D_{ij} неотрицательны и непрерывны, то $\exists p^*$:

$$p^* \geq 0, \quad a - F(p^*) \geq 0, \quad (p^*)^T (a - F(p^*)) = 0,$$

т.е.

- если $p_j^* > 0$, то $a_j = F_j(p^*)$;
- если $a_j - F_j(p^*) > 0$, то $p_j^* = 0$.

Товар, не пользующийся спросом, имеет нулевую цену.

Доказательство основано еще на одной т. о неподвижной точке – т. Какутани!

Условие равновесия

$$p^* \geq 0, \quad a - F(p^*) \geq 0, \quad (p^*)^T (a - F(p^*)) = 0 \qquad (NCP)$$

есть условие ортогональности

$$(p^*)^T (a - F(p^*)) = 0 \qquad (T)$$

$+$ условия неотрицательности

$$p^* \geq 0, \quad a - F(p^*) \geq 0. \qquad (N)$$

(T)+(N)=(NCP) – нелинейная задача о дополнительности.

Вид (fashion) “равновесной задачи”

- *система уравнений*
- *задача о дополнительности*

Концепция: равновесие=неподвижная точка (некоторого точечно-множественного отображения)

Пример 5. *Транспортное равновесие*

- Сеть: $G = (V, A)$;
- W: пары "источник-пункт назначения";
- P_w : множество путей, соединяющих пару $w \in W$;
- $f = (f_a)$: поток вдоль дуги $a \in A$;
- $h = (h_p)$: поток вдоль пути p;
- $$\delta_{ap} = \begin{cases} 1, & p \quad \text{содержит} \quad a, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases}$$
- $M = [\delta_{ap}]$: матрица инцидентности,
$$f = Mh;$$
- $c(f)$: "стоимость" потока;
- $T = (T_w)$: ф. спроса "поставщик-потребитель".

- парадокс Браесса
- принцип Вардропа
  “время (затраты) в пути для всех маршрутов, которые на самом деле используются, минимально по сравнению с тем, которое бы затратил автомобиль на любом неиспользованном маршруте”.

Т. *Поток $\hat{f}$ будет равновесным в том и только том случае, когда $\hat{f}$ есть решение следующей задачи*

$$c(\hat{f})^T(f - \hat{f}) \geq 0, \qquad (TVI)$$

$$f = Mh, \quad \sum_{p \in P_w} h_p = T_w, \quad w \in W.$$

(TVI) – специальный случай вариационного неравенства:

задано $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, найти x^*:

$$F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X \subset \mathbb{R}^n. \qquad (VI)$$

Расширение видов (fashions) “равновесных задач”

- *система уравнений*
- *задача о дополнительности*
- *вариационное неравенство (new)*

Концепция: равновесие=неподвижная точка (некоторого точечно-множественного отображения)

Задачи оптимизации: системы нелинейных уравнений.

Безусловная минимизация

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \nabla f(x) = 0.$$

+ограничения-равенства

$$f(x) \to \min,$$

$$g(x) = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0,$$

$$g(x) = 0.$$

Задачи минимизации. Нелинейная задача о дополнительности.

$$f(x) \to \min,$$

$$x \geq 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$(0 \leq x \perp \nabla f(x) \geq 0) \Leftrightarrow \left(x^T \nabla f(x) = 0, x \geq 0, \nabla f(x) \geq 0\right).$$

Задачи минимизации. Вариационное неравенство.

$$f(x) \to \min,$$

$$x \in X.$$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla f(x)^T (y - x) \geq 0 \quad \forall y \in X.$$

Задача оптимизации также сводятся к решению

- системы уравнений;
- задаче о дополнительности;
- вариационному неравенству.

И всё же задачи оптимизации “легче”, чем равновесные задачи. Почему?В чём разница?

Предположение: равновесные задачи **не** сводятся к задачам оптимизации.

РАВНОВЕСИЕ $\neq$ ОПТИМУМ

Механическая (статическая) интерпретация:

Сила – причина изменения движения.

Равновесие (покой) – отсутствие действия силы.

Ж.-Л. Лагранж *Аналитическая механика:*

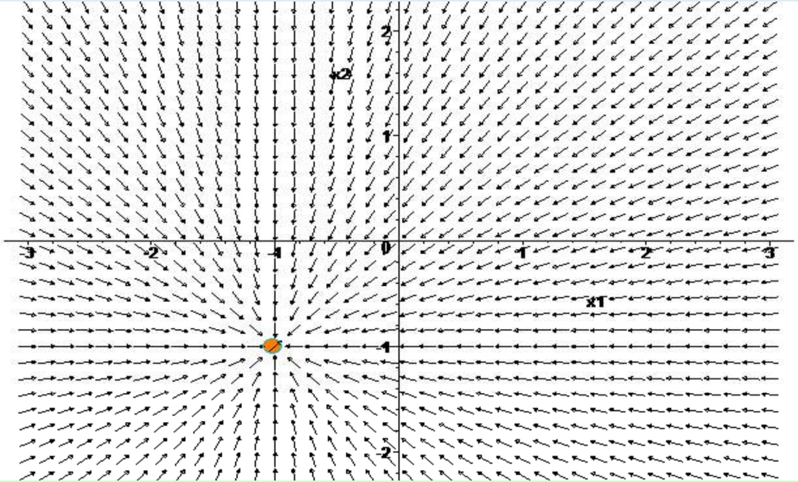
... для равновесия любого числа сил $P, Q, R, \ldots$, направленных по линиям $p, q, r, \ldots$ и приложенных к любой системе тел ..., мы имеем уравнение следующего вида

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = 0. \qquad (E_s)$$

$$\Downarrow$$

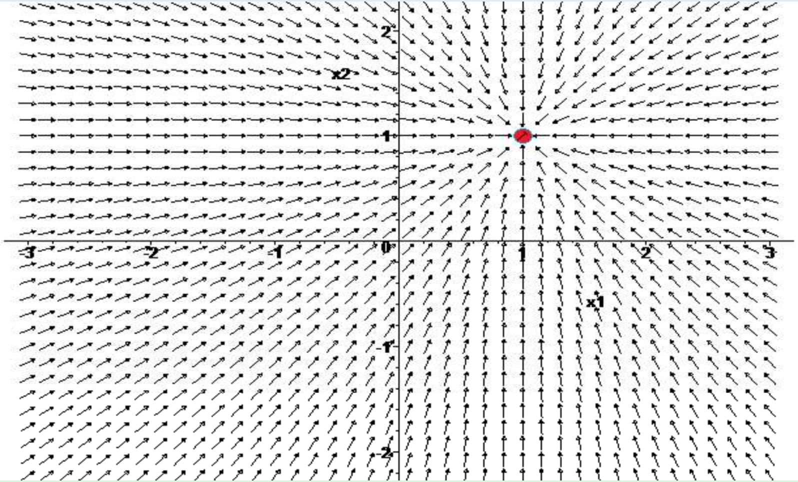
Состояние равновесие определяется в терминах силового (векторного) поля.

Пример 1: гравитационное поле первого тела



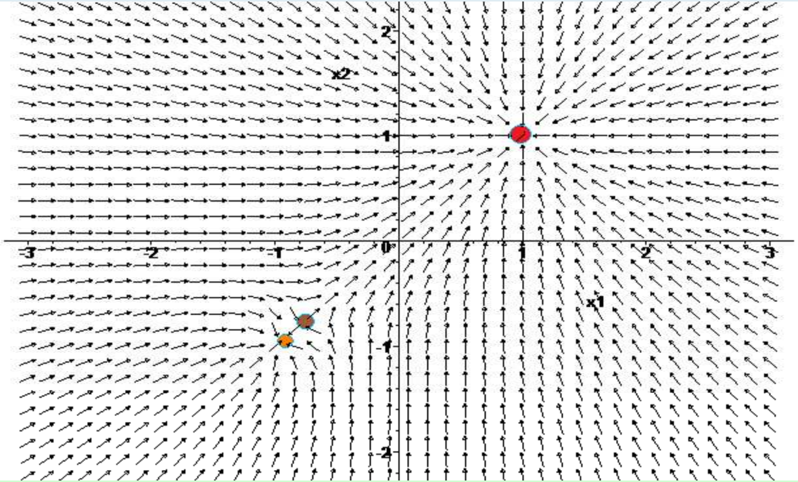
Тело массой M_1 в находится т. (-1,-1).

Пример 1: гравитационное поле второго тела



Тело массой $M_2 > M_2$ в находится т. (1,1).

Пример 1: суперпозиция гравитационных полей



Три состояния равновесия.

Основная задача статики – нахождение состояний (позиций) равновесия из условия (E_s).

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = 0. \tag{E_s}$$

$$\Downarrow$$

Все состояния равновесия равноправны.

Технический прием: разложение сил по осям координат дает эквивалент (E_s)

$$f_x dx + f_y dy = 0. \tag{E_f}$$

Потенциальный случай.

Если (!) $\exists \Pi : d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr + \ldots$, то условие равновесия

$$d\Pi = 0,$$

т.е. в точке равновесия может достигаться максимум или минимум П.

$$\Downarrow$$

Состояние равновесия неравноправны.

Техническое оформление: $\exists f(x, y)$:

$$df = f_x dx + f_y dy, f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$df = 0.$$

Нахождение потенциальной функции.

Условие:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x, y) = \int_0^1 (f_x(tx)x + f_y(ty)y)\, dt.$$

Продолжение примера 1: гравитационное поле – потенциальное поле

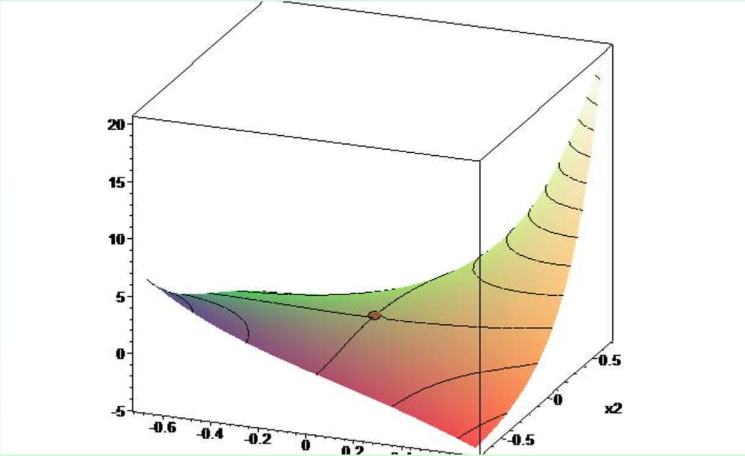


График потенциальной функции.

Определение потенциальной функции. Общий случай ($x \in \mathbb{R}^n$).

Векторное поле: $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$.

Условие симметричности: $\nabla F(x) = \nabla^T F(x)$.

Потенциальная функция :

$$f(x) = \int_0^1 F(\overline{x} + t(x - \overline{x}))^T (x - \overline{x}) dt$$

Модель Курно.

n участников, $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}$ – выпуск, $c_i(x_i)$ – издержки.
Обратная функция спроса

$$p(\sum x_i) = d - a \sum x_i, \quad d > 0, \quad a > 0.$$

Каждый участник максимизирует прибыль

$$\pi(x_i, x_{-i}) = p(\sum x_i)x_i - c_i(x_i) \to \max,$$

$$x_i \in X_i,$$

$i = 1, \ldots, n, x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.
$\pi(x_i, x_{-i})$ – вогнутая функция x_i.

x^{eq} – равновесие Нэша:

$$\pi_i(x_i^{eq}, x_{-i}^{eq}) \geq \pi(x_i, x_{-i}^{eq}) \ \ \forall x_i \in X_i, i = 1, \ldots, n.$$

n вариационных неравенств

$$\frac{\partial \pi_i(x^{eq})}{\partial x_i}(x_i - x_i^{eq}) \leq 0 \ \ \forall x_i \in X_i, i = 1, \ldots, n. \qquad (VI_n)$$

Эквивалент : $\forall x \in X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \pi_i(x^{eq})}{\partial x_i}(x_i - x_i^{eq}) \leq 0. \qquad (VI)$$

Векторное поле $V(x) = (\frac{\partial \pi_1(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \pi_n(x)}{\partial x_n})^T$.

Проверка потенциальности.

В силу определения

$$\frac{\partial \pi_k(x)}{\partial x_k} = d - a\sum x_i - ax_k - c_k'(x_k), k = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial V_k(x)}{\partial x_s} = \frac{\partial^2 \pi_k(x)}{\partial x_k \partial x_s} = -a = \frac{\partial^2 \pi_s(x)}{\partial x_s \partial x_k} = \frac{\partial V_s(x)}{\partial x_k}.$$

$$\Downarrow$$

V – потенциальное поле при любых $c_k(x_k)$!

Переход от равновесной задачи к задаче оптимизационной.

Издержки $c_i(x_i) = \alpha_i x_i + \beta_i, i = 1, \ldots, n$.

$$\Pi(x) = \int_0^1 V(tx)^T x dt = -\frac{a}{2} x^T Q x + b^T x,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} d - \alpha_1 \\ \cdots \\ d - \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Собственные числа Q

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \ldots, \lambda_{n-1} = 1, \lambda_n = n + 1.$$

$Q \succ 0$ – положительно определена, $\Pi(x)$ – сильно вогнутая функция.

- (Поиск равновесия) $\sim$ (Задача ВП)

$$\Pi(x) \to \max_{x \in X},$$

- Равновесие[2] единственно.
- „*Процедура Курно*" (процедура Гаусса-Зейделя)

$$x_i^{k+1} = \arg\min_{x_i \in X_i} \{\pi_i(x_1^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x_i, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k)\} \qquad (GS)$$

– сходится к точке равновесия.
- процедура Якоби

$$x_i^{k+1} = \arg\min_{x_i \in X_i} \{\pi_i(x_1^k, \ldots, x_{i-1}^k, x_i, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k)\} \qquad (J)$$

– сходится к точке равновесия.
- Процедуры (GS) и (J) могут быть распараллелены.

[2] Существование следует из вогнутости $\pi(x_i, x_{-i})$ по x_i.

Модель Курно. Издержки общего вида.

Поскольку

$$\int_0^1 c_k'(tx_k)x_k dt = c_k(x_k) - c_k(0),$$

потенциальная функция

$$\Pi(x) = -\frac{a}{2}x^T Qx + d^T x - \sum_{k=1}^{n}(c_k(x_k) - c_k(0)).$$

Главный недостаток – возможная потеря выпуклости.

Пусть

$$\hat{x} \in Argmax\{\Pi(x) : x \in X\}$$

– *глобальный* максимум.

Тогда $\forall k$

$$\Pi(\hat{x}_k, \hat{x}_{-k}) \geq \Pi(x_k, \hat{x}_{-k}) \ \ \forall x_k \in X_k.$$

В силу потенциальности

$$\frac{\partial \Pi(x_k, \hat{x}_{-k})}{\partial x_k} = \frac{\partial \pi_k(x_k, \hat{x}_{-k})}{\partial x_k} \ \ \forall x_k.$$

$$\Downarrow$$

$$\Pi(x_k, \hat{x}_{-k}) = \pi_k(x_k, \hat{x}_{-k}) + const$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_k(\hat{x}_k, \hat{x}_{-k}) \geq \pi_k(x_k, \hat{x}_{-k})$$

$$\Downarrow$$

$\hat{x}$ – равновесное решение.

Потенциальность сохраняет существование решения.

(Поиск равновесия) $\sim$ (Задача глобальной оптимизации)

Потеря выпуклости

$$\Downarrow$$

Методы глобальной оптимизации.

Модель Курно. Нелинейная обратная функция спроса.

Векторное поле

$$V_k = \frac{\partial}{\partial x_k}[p(\sum x_i)x_k - c_k(x_k)] = p'(\sum x_i)x_k + p(\sum x_i) - c_k'(x_k).$$

Проверка потенциальности

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_s} = p''(\sum x_i)x_k + p'(\sum x_i) \neq p''(\sum x_i)x_s + p'(\sum x_i) = \frac{\partial V_s}{\partial x_k}.$$

Векторное поле V непотенциально.

Равновесные задачи не сводятся к оптимизационным в непотенциальном случае!

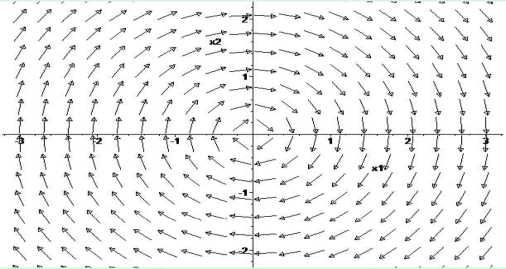
Ну и что?!

Классический пример непотенциального поля.

$x \in \mathbb{R}^2, F(x) = (x_2, -x_1)$. Проверка потенциальности

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 1 \neq -1 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

– векторное поле непотенциально.
Равновесие: $F(x) = 0 \Rightarrow x^{eq} = 0$.



Дивергенция $div(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ поле без источников!

Примитивная антагоностическая игра

$$X_1 = [-1, 1], f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad X_2 = [-1, 1], f_2 = -x_1 x_2$$

Векторное поле V

$$V_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2, V_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -x_1.$$

Следствие непотенциальности

- Расходимость привычных методов оптимизации (градиентного типа):

$$x^{k+1} = Pr_X(x^k + \alpha_k g^k);$$

- Необходимость разработки методов равновесного программирования.

Задача равновесного программирования.

Найти $v^* \in \Omega \subset R^n$:

$$v^* \in Argmin\{\Phi(v^*, w) : w \in \Omega\}. \qquad (EPA)$$

Стандартные условия существования решения:
1. Ω *- выпуклый компакт*
2. $\Phi(v, w)$ *– непрерывна и квазивыпукла по* w.

$$\Downarrow$$

Множество равновесных решений задачи (EPA) не пусто.

Решение задачи равновесного программирования – неподвижная точка *экстремального* отображения

- Обратные задачи оптимизации;
- Двухуровневое программирование;
- MPEC.

GAME OVER

Спасибо за внимание