

Парадоксы коллективного выбора¹

А.Ю. Филатов

Институт систем энергетики имени Л.А. Мелентьева

Многие общественно значимые решения не могут приниматься на основе рыночных механизмов, поскольку кооперативные возможности не будут эффективно использованы при децентрализованных действиях агентов. Таким образом, часто возникает задача построения на основе индивидуальных предпочтений единого коллективного упорядочения альтернатив или (в более слабом варианте) нахождения наилучшей с точки зрения общества альтернативы.

Для случая $p=2$ единственным правилом, удовлетворяющим требованиям анонимности (равноправия избирателей), нейтральности (равноправия альтернатив) и монотонности (усиление поддержки не подвергает сомнению избрание), является правило большинства. Оно также является неманипулируемым (независимым от посторонних альтернатив). Однако для случая трех и более кандидатур все значительно сложнее [1].

Рассмотрим пример 1. При наиболее распространенном голосовании по большинству победителем становится кандидат A , наихудший для 13 избирателей из 21. В то же время легко заметить, что при парном сравнении кандидат C побеждает остальных: $C > A$ (13:8), $C > B$ (11:10), $C > D$ (14:7). Означает ли это, что он лучший? Сравним C с B — кандидатом, который также ни для кого не является наихудшим. И на первом, и на втором месте кандидат B появляется чаще (7 раз против 6 и 9 против 5 соответственно). Оказывается вполне логичной победа B .

3	5	7	6
A	A	B	C
B	C	D	B
C	B	C	D
D	D	A	A

Пример 1

Проблема построения идеального правила активно изучается в литературе с конца XVIII века. В частности, хорошо известны правило Кондорсе (победителем является кандидат, побеждающий любого из соперников при парном сравнении — вариант C), и правило Борда, основанное на подсчете очков (вариант B), а также их вариации. Проблема заключается в том, что у каждого из правил есть существенные недостатки.

Начнем с того, что победителя по Кондорсе может не существовать (пример 2). Вариантами решения являются вариация Копленда (победителем становится кандидат с максимальной разницей побед и поражений) и вариация Симпсона, связанная с максимизацией наименьшего числа избирателей, голосующих за данного кандидата при парном сравнении с другими.

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Пример 2

Но более существенным является то, что правила Кондорсе и Борда, в том числе, с произвольной шкалой (относительное большинство тоже к ним относится, т. к. это шкала $1,0, \dots, 0$), принципиально различны. Существуют профили предпочтений избирателей, при которых победитель по Кондорсе не может быть избран ни при каком методе подсчета очков.

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 09-02-00278а.

Продemonстрируем последний факт примером 3. Кандидат A является победителем по Кондорсе: $A > B$ (9:8), $A > C$ (10:7). В то же время при любой шкале $s_2 \geq s_1 \geq s_0$, $s_2 > s_0$ победителем оказывается B : $8s_2 + 6s_1 + 3s_0 > 6s_2 + 7s_1 + 4s_0$.

6 4 4 3
A B B C
B C A A
C A C B

Пример 3

Попробуем применить к теории коллективного выбора аксиоматический подход. Перечислим некоторые требования и приведем примеры их невыполнения для использующихся на практике правил.

Однозначность (правило всегда дает сделать однозначный выбор). Не выполняется для анонимных и нейтральных правил, если число избирателей n имеет делитель $\leq p$.

Состоятельность по Кондорсе (правило всегда выбирает победителя по Кондорсе, если он существует). Не выполняется для любых методов подсчета очков, в т.ч. для правила относительного большинства, правила Борда и т.д. (пример 3).

Парето-эффективность (если кандидат A для всех избирателей лучше B , то B не может быть избранным). Не выполняется для правила антибольшинства и правила повестки дня (последовательного сравнения по большинству). В примере 4 возможна победа кандидата D ($A < B < C < D$), который хуже A для всех избирателей. Аналогичная ситуация возможна, даже если для победы необходимо пройти 2 тура (пример 5). Действительно, если при равенстве голосов победитель определяется по алфавиту, в финал выходят A и C ($A > B$, $C > D$), а в финале победителем оказывается A ($A > C$) при том, что $D > A$ для всех избирателей.

B A C
A D B
D C A
C B D

Пример 4

Монотонность (увеличившаяся поддержка кандидата не может уменьшить шанса быть избранным). Не выполняется для правила альтернативных голосов (последовательного исключения неудачников) при любом способе подсчета очков, а также (пример 6) для применяемого во многих странах (в т.ч., в России на президентских выборах) правила относительного большинства с выбыванием (голосования в 2 тура). В изначальном варианте (профиль 1) в финал выходят A и B , при этом $A > B$ (11:6). После того, как A улучшает свое положение (профиль 2), в финал выходят A и C . При этом C побеждает A (9:8).

D D C C
A A D D
C C A A
B B B B

Пример 5

Пополнение (если 2 независимые группы избирателей выбирают кандидата A , то, объединившись, они выберут его же). Не выполняется для любого правила, состоятельного по Кондорсе. Допустим (пример 7), состоятельный по Кондорсе метод выбирает в группе 1 кандидата A , при этом $B > A$. В группе 2 также победителем по Кондорсе является кандидат A . Однако при объединении 2 групп видим, что победителем по Кондорсе становится кандидат B : $B > A$ (7:6), $B > C$ (9:4).

профиль 1	профиль 2
6 5 4 2	6 5 4 2
<i>A C B B</i>	<i>A C B A</i>
<i>B A C A</i>	<i>B A C B</i>
<i>C B A C</i>	<i>C B A C</i>

Пример 6

группа 1	группа 2
2 2 2	4 3
<i>C A B</i>	<i>A B</i>
<i>B C A</i>	<i>B A</i>
<i>A B C</i>	<i>C C</i>

Пример 7

Участие (собственный бюллетень не может уменьшить полезность избирателя). Не выполняется для любого правила, состоятельного по Кондорсе, при 4 и более кандидатах. Приведем пример для правила Симпсона (пример 8). До участия 4 избирателей, предпочитающих кандидата A кандидату B , победителем являлся именно A : $S(A)=6(B,C)$, $S(B)=4(D)$, $S(C)=3(B)$, $S(D)=5(A)$. После их участия же по правилу Симпсона побеждает кандидат B : $S(A)=6(C)$, $S(B)=8(D)$, $S(C)=7(D)$, $S(D)=5(A)$.

3	3	5	4	4
A	A	D	B	C
D	D	B	C	A
C	B	C	A	B
B	C	A	D	D

Пример 8

Неманипулируемость (нельзя увеличить свою полезность, ведя стратегическое голосование). По теореме Гиббарда-Сэттертуэйта это свойство при наличии трех и более кандидатов справедливо только для правила диктатора. Разрешение этой проблемы возможно либо путем ограничения области предпочтений, либо с помощью перехода к случайным правилам голосования, для которых, в свою очередь, не выполняется Парето-эффективность.

Сведем в таблице информацию о выполнении требований для правил относительного большинства (О), Борда (Б), антибольшинства (А), Борда со строго монотонной шкалой (М), Борда с произвольной шкалой (Ш), относительного большинства в 2 тура (2), Кондорсе (К), вариации Копленда (В), вариации Симпсона (С), повестки дня (П), диктатора (Д) и жребия (Ж).

	О	Б	А	М	Ш	2	К	В	С	П	Д	Ж
Простота	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+
Однозначность	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+
Анонимность	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+
Нейтральность	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	+	+
Состоятельность по Кондорсе	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-
Парето-эффективность	+	+	-	+	-	+	+	+	+	-	+	-
Монотонность	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-
Пополнение	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	-
Участие	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	-
Неманипулируемость	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	+	+

Еще более сложной задачей является не просто выявление победителя, но составление коллективного порядка. Пусть $N=\{1,2,\dots,n\}$ — множество избирателей, $A=\{a,b,c,\dots\}$ — множество кандидатов, $P(A)$ — множество линейных порядков на A , $R(A)$ — множество нестрогих порядков на A . Необходимо предложить правило $P(A)^n \rightarrow R(A)$, позволяющее на основе n индивидуальных линейных порядков построить единый нестрогий порядок. Здесь имеется отрицательный результат. Теорема Эрроу о невозможности демократии говорит, что если $|A|>2$, существует единственное Парето-эффективное неманипулируемое правило — правило диктатора.

Что делать? Во-первых, по возможности, использовать методы, для которых издержки невыполнения ряда требований оказываются обычно меньше, чем для использующихся на практике правил. Таким примером является метод Шульце, основанный на нахождении пу-

тей наибольшей силы, ведущих от одного кандидата к другому. В этом методе путем силы p от A до B называется последовательность кандидатов $C(1), \dots, C(k)$ со следующими свойствами:

$$C(1)=A, C(k)=B; \quad d(C(i), C(i+1)) > d(C(i+1), C(i)), \quad i=1, \dots, k; \quad p = \min d(C(i), C(i+1)),$$

где $d(X, Y)$ — число избирателей, строго предпочитающих кандидата X кандидату Y .

Если пути от кандидата A к кандидату B не существует, $p(A, B)=0$, в противном случае находим путь от A до B с максимальной силой. Победителем становится кандидат A , такой что $p(A, B) \geq p(B, A)$ для каждого кандидата B . Для реализации метода Шульце требуются достаточно серьезные вычисления, однако с развитием компьютеров его использование становится возможным. Важно отметить, что в данной процедуре используются сведения о предпочтениях избирателей относительно каждой пары кандидатур.

В качестве другого позитивного результата приведем случай однопиковых предпочтений, для которого проблема коллективного выбора является разрешимой. Если альтернативы можно упорядочить так, что полезность каждого i -избирателя сначала монотонно возрастает до некоторого уровня, а затем монотонно убывает, то при голосовании побеждает альтернатива, поддержанная медианным избирателем. Например, если в комнате присутствует 5 человек, идеальные температуры которых составляют соответственно 15, 18, 21, 24 и 27 градусов, то альтернатива 21 побеждает все остальные. Действительно, все «моржи» поддержат 21 в борьбе с более жаркими вариантами, а все «теплолюбивые» — в борьбе с более холодными.

Упорядочение не обязательно должно существовать изначально. Можно придумать порядок, при котором предпочтения окажутся однопиковыми. Например, все политические партии можно упорядочить в соответствии с их отношением к экономическим свободам. В соответствии с работой А.В. Захарова на основе данных опроса ВЦИОМ, проведенного перед выборами 2007 года, получаем следующую последовательность: КПРФ (−1,59), СП (−0,87), ЕР (0,30), ЛДПР (0,69), СПС (1,14). То есть пришедший на выборы сторонник рынка скорее проголосует за кандидата от Справедливой России, нежели за коммуниста, а коммунист за единососа против кандидата от СПС. Правда, здесь проблема остается из-за многомерности шкалы предпочтений.

Еще один интересный факт состоит в однопиковости предпочтений московских футбольных фанатов: среди трех команд «ЦСКА», Локомотив» и «Спартак» именно «Локомотив» является медианной, т. е. подавляющее большинство фанатов «ЦСКА» в матче «Л»—«С» будут болеть за «Локомотив», равно как и большинство фанатов «Спартака» в матче «Л»—«Ц», что обеспечивает железнодорожникам двойную поддержку трибун. Это подтверждается и эмпирически. Если взять данные за 2000—2008 г. г., мы увидим, что в турнире трех команд «Локомотив» ни разу не выступил хуже, чем в чемпионате в целом, 4 раза выступил лучше, при этом дважды (в 2005 и 2006), будучи худшим из трех команд в чемпионате, оказался первым в группе.

Литература

1. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991. 464 с.