ФЕДЕРАЛЬНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ПРОГРАММА
«ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОДДЕРЖКА ИНТЕГРАЦИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ НА 1997–2000 ГОДЫ»

О.В. ВАСИЛЬЕВ, А.В. АРГУЧИНЦЕВ

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

МОСКВА • ФИЗМАТЛИТ • 1999

УДК 517.97; 519.85
ББК 22.161.8; 22.18
В 19

Издание осуществлено при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Государственная интеграция высшего образования и фундаментальной науки на 1997-2000 годы»

Васильев О. В., Аргучинцев А. В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1999. – 208 с. – ISBN 5-9221-0006-8.

Учебное пособие написано на основе лекций и практических занятий по курсу «Методы оптимизации», читаемых авторами на третьем курсе математического факультета Иркутского государственного университета по специальностям «Прикладная математика» и «Математические методы и исследование операций в экономике». В книге изложен справочный материал, дающий идею аналитического исследования и структуру численных методов решения задач математического программирования, вариационного исчисления и теории оптимального управления. Качественные и конструктивные методы исследования указанных задач сопровождаются примерами и упражнениями, решение которых позволит читателю применять методы в своей практической деятельности. Большое число задач снабжено ответами, а некоторые — указаниями и подробными решениями.

Для студентов математических факультетов, преподавателей, аспирантов и исследователей в области методов математического моделирования и управления реальными процессами техники, экономики, естествознания.

Библиогр. 46 назв.

ISBN 5-9221-0006-8

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано на основе лекций и практических занятий по курсу «Методы оптимизации», которые велись авторами на протяжении ряда лет в Иркутском государственном университете. По лекционному материалу в 1994 г. одним из авторов был издан учебник [11], который в 1996 г. в значительно переработанном варианте, адаптированном для американских студентов, издан в США [46]. Другой автор в двух учебно-методических пособиях [5, 6], изданных в 1993 г., отразил свой опыт ведения практических занятий. На наш взгляд, приведенные учебники вполне позволяют организовать преподавание курса «Методы оптимизации» для студентов математических факультетов университетов. Определенным преимуществом при таком изложении является то обстоятельство, что теоретические аспекты оптимизации не являются самоцелью, а служат основой, на которую опираются методы поиска оптимума в задачах математического программирования, вариационного исчисления и теории оптимального управления. Отсюда распределение материала выдержано по принципу последовательного усложнения задач, и итерационные процессы оптимизации сквозной нитью проходят через весь курс. В то же время при изучении предмета «Методы оптимизации» для более ясного понимания сути проблем нельзя сбрасывать со счета и аналитические методы, внимание на которые было обращено в задачниках [1, 2, 8, 17, 27, 39], сопровождающих теоретический материал [16, 21, 22, 42]. Далее, требования к обучению математиков-профессионалов, естественно приводили авторов к строгим обоснованиям необходимых конструкций, что замедляло процесс использования результатов на практике, ибо известно, что в оптимизации конечный результат прост и изящен в формулировках, сразу определяет путь его использования, хотя путь доказательства этого результата достаточно сложен. Блестящий пример, иллюстрирующий этот факт, — принцип максимума Л.С. Понтрягина. Так как методы исследования и методы решения задач оптимизации нужны не только математикам, то у авторов возникла идея написать книгу, где справочный материал, дающий идею и ход решения задач оптимизации, сопровождался бы задачами и упражнениями. Такая книга, на наш взгляд, была бы весьма полезна как математикам, так и представителям естественных и гуманитарных наук, в исследованиях которых встречаются задачи оптимизации. Мы надеемся, что в представленной книге мы в какой-то степени реализуем эту идею.

Необходимо отметить, что авторам неизвестны задачники, которые охватывают все разделы, рассматриваемые в настоящем пособии. Единственное, от чего отказались авторы — это включение в книгу методов и примеров решения задач линейного программирования. Это связано с большим количеством хороших книг, посвященных данному вопросу (например, [1, 8, 18, 25, 28, 38, 42]).

Книга состоит из 6 глав. В первой главе приведен справочный материал по множествам и функциям в n-мерном евклидовом пространстве, дана постановка задачи математического программирования, описана классификация этих задач и определены типы итерационных процессов минимизации. Приведенные здесь упражнения закрепляют справочный материал.

Вторая глава посвящена аналитическим методам исследования различных классов задач математического программирования. Этот аппарат изящен, позволяет найти решение в аналитической форме, но, к сожалению, применим лишь для определенных классов задач. К ним относятся простые задачи безусловной и условной (задачи с ограничениями типа равенств) минимизации, а так же задачи с ограничениями типа неравенств. Приведены многочисленные примеры и в качестве примеров дано использование аналитических методов для решения некоторых (весьма распространенных) задач минимизации линейных функций и задач проецирования для множеств простой структуры.

Численным методам решения задач математического программирования посвящена третья глава. Конечно же, здесь прежде всего изложены методы одномерного поиска, роль которых в организации вычислительных процессов минимизации весьма высока. Далее приводятся схемы градиентных методов (метод Ньютона), методов штрафных и нагруженных функций, методов множителей Лагранжа. Применение методов разбирается на конкретных примерах, упражнения способствуют закреплению схем методов. Приведен ряд тестовых примеров.

В четвертой главе исследуются задачи вариационного исчисления. Несмотря на то, что эти задачи могут рассматриваться как частный случай задач управления (которые анализируются позже), мы намеренно оставляем их в классическом виде. С одной стороны, мы воспринимаем это как дань уважения великим математикам прошлых веков, создавшим «язык естествознания», с другой стороны (как видно по приведенным примерам), изящные аналитические методы решения соответствующих дифференциальных уравнений Эйлера не потеряли своей актуальности и в наше время. Весь справочный материал по основам вариационного исчисления сопровождается многочисленными примерами и упражнениями, многие из которых имеют глубокий прикладной смысл.

Пятая, самая большая по объему, глава содержит в себе качественные и конструктивные методы решения задач оптимального управления в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Конечно же, основу справочного материала по необходимым и достаточным (в выпуклом варианте) условиям оптимальности здесь составляет знаменитый принцип максимума Л.С.Понтрягина. Приведены многочисленные примеры использования принципа максимума в качестве проверочного условия; для сужения класса допустимых управлений, подозрительных на оптимальность; для решения линейных задач оптимального управления; решения задач оптимального управления путем редукции к краевой задаче. Качественный анализ задачи оптимального управления дополнен итерационными процессами численного решения этих задач. Приведены ставшие уже классическими схемы итерационного процесса принципа максимума. Их использование иллюстрируется на примерах. Кроме этого, в главе нашли свое отражение методы градиентного типа и, главное, обращено внимание исследователей на совершенно новый и весьма эффективный путь решения определенных классов задач оптимального управления путем построения методов точной прямой релаксации, позволяющих улучшить допустимое управление без дополнительной процедуры параметрической оптимизации. Эффект применения таких методов нового поколения иллюстрируется на примерах.

В шестой, заключительной, главе рассматриваются задачи оптимального управления системами уравнений с частными производными. Изложенная здесь операторная схема исследования позволяет для решения многих типов этих задач достаточно эффективно использовать опыт решения задач оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

В конце книги приведены ответы, указания, решения для ряда примеров и упражнений.

В книге принята тройная система нумераций формул, теорем, примеров. Первая цифра — номер главы, вторая — номер параграфа, третья — номер формулы, теоремы, примера в параграфе.

В заключение авторы выражают благодарность доцентам А.И.Беникову, В.Г.Антонику за предоставленные материалы по одномерной минимизации, методам прямой релаксации и градиентным методам решения задач оптимального управления. Наша особая благодарность аспирантам В.В.Квитко, Н.В.Козловой, О.А.Крутиковой, Е.А.Лутковской, взявшим на себя труд по компьютерному набору рукописи.

В такой быстро развивающейся научной области как методы оптимизации, наверное, невозможно охватить все области исследования, да авторы и не ставили перед собой такую задачу. Наша основная цель заключалась в создании справочника, сопровожденного примерами и упражнениями.

Авторы будут признательны за критические замечания, которые способствовали бы улучшению пособия.

Глава 1

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Множества и функции в n-мерном евклидовом пространстве

Пусть n — натуральное число. Совокупность всевозможных упорядоченных систем n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется n-мерным вещественным пространством, его элементы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются векторами или точками, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — их компонентами, или координатами. Равенство векторов в n-мерном вещественном пространстве понимается как равенство их соответствующих компонент, т.е. вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равен вектору $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_n = y_n$ Нулевой вектор, сложение векторов и умножение вектора на число определяются следующим образом:

$$0 = (0, 0, \ldots, 0),$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Число

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{1.1.1}$$

называется скалярным произведением векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$; n-мерное вещественное пространство со скалярным произведением (1.1.1) называется n-мерным евклидовым пространством. Мы будем обозначать его через E^n.

Векторы $x, y \in E^n$ называются ортогональными, если $\langle x, y\rangle = 0$. Под длиной или нормой (евклидовой нормой) вектора $x \in E^n$ в дальнейшем понимается число

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ .$$

Расстояние $\rho(x, y)$ между векторами x и y из E^n определяется как длина вектора $x - y$, т.е.,

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Непосредственно из определения скалярного произведения, нормы и расстояния вытекает, что

$$\langle x, y\rangle = \langle y,x\rangle,$$

$$\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle,$$

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,$$

$$\|x\| \geq 0\ \forall x \in E^n \text{ и } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

$$\rho(x, y) \geq 0\ \ \forall x, y \in E^n \text{ и } \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x).$$

Кроме того, для любых $x, y, z \in E^n$ справедливы неравенства

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\cdot \|y\|, \tag{1.1.2}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \tag{1.1.3}$$

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|. \tag{1.1.4}$$

Неравенство (1.1.2) называется неравенством Коши–Буняковского, неравенства (1.1.3) и (1.1.4) — неравенствами треугольника.

Вектор-столбцом, или просто столбцом, размерности n называется матрица вида

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.1.5}$$

Поскольку сложение матриц и умножение их на число определяются точно также, как соответствующие операции над векторами, векторы $x \in E^n$, очевидно, можно отождествлять со столбцами (1.1.5). Всюду ниже вектор $x \in E^n$ будет считаться вектор-столбцом, но для экономии места, если необходимо указать его компоненты, мы будем по-прежнему записывать его в строчку как $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Запись же $[x_1 x_2 \ldots x_n]$ означает, что это — матрица, состоящая из одной строки (вектор-строка, или просто строка), так что если $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$, то $[x_1 x_2 \ldots x_n] = x^T$, где символ «$T$» означает транспонирование матрицы (вектора).

Матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

мы будем кратко записывать как $[a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$. Нормой матрицы A (подчиненной норме вектора x) называется число

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Отсюда, в частности, следует, что для любого вектора x

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

Пусть $x, y \in E^n$. По правилу умножения матриц

$$x^T y = y^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

т.е., в терминах матриц $\langle x, y\rangle = x^T y$, $\|x\| = \sqrt{x^T x}$, а неравенство Коши–Буняковского принимает вид

$$| x^T y | \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Произведение вектор-столбца x на вектор-строку y^T, где $y \in E^n$, представляет собой уже матрицу

$$xy^T = [x_i y_i]_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}.$$

Матрица xy^T называется диадой, или внешним произведением векторов x и y и обозначается $x\rangle\langle y$ (в противоположность внутреннему произведению, как иногда называют скалярное произведение векторов). В отличие от внутреннего произведения, которое имеет смысл только для векторов одинаковой размерности, внешнее произведение определено для любых векторов x, y. А именно, если $x \in E^n$, $y \in E^m$, то, очевидно, xy^T — матрица размерности $n \times m$, а yx^T — матрица размерности $m \times n$ и $(yx^T)^T = xy^T$.

***Определение* 1.1.1.** Отрезком, соединяющим точки $x, y \in E^n$, называется множество

$$[x, y] = \{z \in E^n: z = \alpha x + (1 - \alpha)y = y + \alpha[x - y],\ 0 \le \alpha \le 1\}.$$

***Определение* 1.1.2.** Множество $X \subseteq E^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми своими точками x и y оно содержит и весь отрезок их соединяющий, т.е. если точка $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ принадлежит X при любых $x, y \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$.

Пустое множество, множество, состоящее из одной точки, и все пространство E^n — выпуклые множества.

Приведем другие примеры выпуклых множеств.

Пример 1.1.1. Шар

$$B[a, r] = \{x \in E^n: \|x - a\| \le r\}$$

радиуса r с центром в точке a — выпуклое множество. Действительно, если $x, y \in B[a, r]$, $\alpha \in [0, 1]$, то

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y - a\| = \|\alpha(x - a) + (1 - \alpha)(y - a)\| \le$$
$$\le \alpha\|x - a\| + (1 - \alpha)\|y - a\| \le \alpha r + (1 - \alpha)r = r.$$

Пример 1.1.2. Пусть x^k, $p^k \in E^n$, $p^k \ne 0$, — фиксированные векторы, α — число. Множество

$$l = \{x \in E^n: x = x^k + \alpha p^k,\ -\infty < \alpha < +\infty\}$$

называется прямой, проходящей через точку x^k с направляющим вектором p^k. Множество

$$l_+ = \{x \in E^n: x = x^k + \alpha p^k,\ \alpha \ge 0\}$$

называется полупрямой или лучом, исходящим из точки x^k в направлении p^k. Прямая и луч — выпуклые множества. В самом деле, пусть например, $x, y \in l_+$, т.е. $x = x^k + \alpha p^k$, $y = x^k + \beta p^k$, где $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ — фиксированные числа. Тогда

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda[x^k + \alpha p^k] + (1 - \lambda)[x^k + \beta p^k] = x^k + \gamma p^k,$$

где $\gamma = \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta \ge 0$ для любых $\lambda \in [0, 1]$.

Пример 1.1.3. Множество

$$\Gamma = \Gamma(c, \alpha) = \{x \in E^n: \langle c, x\rangle = \alpha, \ c \neq 0\}$$

называется гиперплоскостью. Вектор c называется нормальным вектором гиперплоскости. Он ортогонален гиперплоскости Γ в том смысле, что $\langle c, x - y\rangle = 0$ для любых $x, y \in \Gamma$ (вектор $p = x - y$ можно считать направляющим вектором произвольной прямой, лежащей в гиперплоскости Γ и проходящей через точку y: $\langle c, y + \lambda p\rangle = \langle c, y\rangle = \alpha$ для любых $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. В пространстве E^n гиперплоскость Γ определяет множества:

$$\Gamma_+ = \{x \in E^n: \langle c, x\rangle > \alpha\},$$

$$\Gamma_- = \{x \in E^n: \langle c, x\rangle < \alpha\},$$

$$\bar{\Gamma}_+ = \{x \in E^n: \langle c, x\rangle \geq \alpha\},$$

$$\bar{\Gamma}_- = \{x \in E^n: \langle c, x\rangle \leq \alpha\}.$$

Множества Γ_+ и Γ_- называются открытыми, а множества $\bar{\Gamma}_+$ и $\bar{\Gamma}_-$ — замкнутыми полупространствами. Нетрудно видеть, что гиперплоскость, открытые и замкнутые полупространства — выпуклые множества. Например, если $x, y \in \Gamma$ и $\lambda \in [0, 1]$, то

$$\langle c, \lambda x + (1 - \lambda)y\rangle = \lambda\langle c, x\rangle + (1 - \lambda)\langle c, y\rangle = \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha.$$

Пример 1.1.4. Пусть $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$, $b \in E^m$. Множество

$$X = \{x \in E^n: Ax = b\}$$

называется афинным множеством или линейным многообразием.

Если $x, y \in X$, то

$$A[\alpha x + (1 - \alpha)y] = \alpha Ax + (1 - \alpha)Ay = b$$

для любых α, в том числе и для $\alpha \in [0, 1]$. Следовательно, афинное множество — выпуклое. Очевидно, афинное множество представляет собой пересечение m гиперплоскостей, нормальными векторами которых являются строки матрицы A.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subseteq E^n$. Линией (поверхностью, множеством) уровня функции $f(x)$ называется множество

$$L_k = \{x \in X: f(x) = k = \text{const}\},$$

т.е. линия уровня функции $f(x)$ — это множество точек $x \in X$, в которых функция $f(x)$ принимает какое-либо постоянное значение.

Так, например, линии уровня функции $f(x) = \langle c, x\rangle$ суть гиперплоскости $\Gamma(c, k) = \{x \in E^n: \langle c, x\rangle = k\}$; линии уровня функции двух переменных $f(x) = \frac{1}{2}(Lx_1^2 + \mu x_2^2)$, $0 < \mu < L$, для $k > 0$ — эллипсы $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, где $a^2 = \frac{2k}{L}$, $b^2 = \frac{2k}{\mu}$, для $k = 0$ $L_k = \{0\}$, а для $k < 0$ $L_k = \varnothing$; линии уровня функции $f(x) = \max\{0, x_1 + x_2\}$ $(E^2 \to E^1)$ для $k > 0$ — прямые $x_1 + x_2 = k$, для $k = 0$ — полуплоскость $x_1 + x_2 \le 0$, для $k < 0$ $L_k = \varnothing$.

Определение **1.1.3.** Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subseteq E^n$, называется выпуклой на этом множестве, если для любых $x, y \in X$ и числа $\alpha \in [0, 1]$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \le \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \tag{1.1.6}$$

Если при любых $x, y \in X$, $x \ne y$ и $\alpha \in (0, 1)$ неравенство (1.1.6) строгое, то функция $f(x)$ называется строго выпуклой на множестве X.

Примерами выпуклых функций (на E^n) являются линейная функция $f(x) = \langle c, x\rangle$ и расстояние $f(x) = \|x - a\|$. Ясно, что сумма выпуклых функций и произведение выпуклой функции на неотрицательное число являются выпуклыми функциями. Вообще, если функции $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, выпуклы на множестве X, то функция $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$ также выпукла на X при $\alpha_i \ge 0$, $i = \overline{1, m}$.

Графически выпуклость функции $f(x)$ означает следующее: при любых $x, y \in X$ график функции $g(\alpha) = g_{x,y}(\alpha) = f(\alpha x + (1 - \alpha)y)$ на отрезке $[0, 1]$ лежит не выше хорды, соединяющей точки $(0, g(0)) = (0, f(y))$ и $(1, g(1)) = (1, f(x))$.

З а м е ч а н и е. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется вогнутой на этом множестве, если для любых $x, y \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \ge \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Ясно, что если функция $f(x)$ вогнута на X, то функция $[-f(x)]$ выпукла на этом множестве, так что свойства вогнутых функций могут быть легко получены из соответствующих свойств выпуклых функций.

Теорема 1.1.1. *Пусть функция* $f(x) \in C_1(X)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $f(x)$ *выпукла на* X;

2) *для любых* $x, y \in X$

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle; \tag{1.1.7}$$

3) *для любых* $x, y \in X$

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0. \tag{1.1.8}$$

Теорема 1.1.2. *Функция* $f(x) \in C_2(X)$ *выпукла на* X *тогда и только тогда, когда для любых* $x, y \in X$

$$\langle y - x, \nabla^2 f(x)(y - x) \rangle \geq 0. \tag{1.1.9}$$

Если $X = E^n$ или внутренность множества X непуста, то условие (1.1.9) эквивалентно условию

$$\langle p, \nabla^2 f(x) p \rangle \geq 0 \quad \forall p \in E^n, \ \forall x \in X. \tag{1.1.10}$$

Таким образом, для выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции на некотором множестве достаточно неотрицательной определенности ее матрицы вторых производных на этом множестве. При исследовании на знакоопределенность матриц вторых производных целесообразно использовать критерий Сильвестра.

***Определение* 1.1.4.** Главным угловым минором k-го порядка некоторой квадратной матрицы называется определитель матрицы, составленной из первых k строк и первых k столбцов исходной матрицы.

Критерий Сильвестра. Симметричная матрица является:

а) положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные угловые миноры положительны;

б) отрицательно определенной, когда все ее главные угловые миноры нечетного порядка отрицательны, четного—положительны;

в) неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда все миноры, образованные строками и столбцами исходной матрицы с одинаковыми номерами, неотрицательны;

г) неположительно определенной, когда все миноры, образованные строками и столбцами исходной матрицы с одинаковыми номерами, нечетного порядка неположительны, а четного—неотрицательны.

В дальнейшем нам понадобятся специальные типы вогнутых функций, используемых в микроэкономическом анализе.

Рассмотрим модель поведения потребителя на рынке товаров и услуг. Пусть вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ характеризует объем потребляемых товаров или услуг, т.е. x_i — количество единиц потребляемого товара или услуги i-го вида, $x_i \geq 0$

***Определение* 1.1.5.** Функция $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, характеризующая ценность для потребителя приобретаемого набора товаров и услуг, называется индивидуальной функцией полезности потребителя.

Очевидно, что функция полезности есть функция, определенная для неотрицательных значений компонент вектора x. Если набор $\bar{x}$ предпочтительнее для потребителя, чем набор $\bar{\bar{x}}$, то $u(\bar{x}) > u(\bar{\bar{x}})$.

***Определение* 1.1.6.** Предельной полезностью товара i называется частная производная функции полезности по переменной x_i:

$$M_i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}. \tag{1.1.11}$$

Относительно функции полезности обычно принимаются следующие основные гипотезы:

1) функция $u(x)$ строго монотонно возрастает по каждому из своих аргументов, т.е., если

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, \bar{x}_n),$$

$$\bar{\bar{x}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \bar{\bar{x}}_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n), \quad \bar{x}_i > \bar{\bar{x}}_i,$$

то

$$u(\bar{x}) > u(\bar{\bar{x}});$$

2) функция полезности является строго вогнутой при $x > 0$.

Гипотеза строгой вогнутости, в частности, означает отрицательность вторых производных:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,[Mu_i(x)] < 0,$$

при $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это означает убывание предельных полезностей с ростом объема потребления.

В прикладных задачах допускается замена условий 1), 2) более слабыми требованиями неубывания и вогнутости.

Упражнения

1.1.1. Доказать, что пересечение любого числа выпуклых множеств — выпуклое множество. Верно ли это утверждение для объединения выпуклых множеств?

1.1.2. Доказать выпуклость следующих множеств:

а) неотрицательного ортанта $R^n_+ = \{x \in E^n : x_i \geq 0,\ i = \overline{1, n}\}$;

б) n-мерного параллелепипеда $X = \{x \in E^n : \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i,\ i = \overline{1, n}\}$;

в) множества $X = \{x \in E^n : Ax = b,\ \bar{A}x \leq \bar{b},\ x \geq 0\}$,
где $A = [a_{i,j}]^{m,n}_{i,j=1}$, $\bar{A} = [\bar{a}_{kj}]^{r,n}_{k,j}$, $b \in E^m$, $\bar{b} \in E^r$;

г) декартова произведения выпуклых множеств X и Y

$X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$.

1.1.3. Суммой множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется множество $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, состоящее из тех и только тех точек z, которые представимы в виде $z = \sum_{i=1}^{k} x^i$, $x^i \in X_i$, $i = \overline{1, k}$. Разностью множеств X и Y называется множество $Z = X - Y$, состоящее из тех и только тех точек z, которые представимы в виде $z = x - y$, $x \in X$, $y \in Y$. Произведением множества X на действительное число λ называется множество $Z = \lambda X$, состоящее из всех точек вида $z = \lambda x$, $x \in X$. Доказать, что множества $Z = \sum_{i=1}^{k} X_i$, $Z = X - Y$ и $Z = \lambda X$ выпуклы, если выпуклы множества $X_1, X_2, \ldots, X_k$, X и Y.

1.1.4. Начертить графики и линии уровня следующих функций $(E^2 \to E^1)$:

а) $f(x) = \|x - a\|$;

б) $f(x) = \|x - a\|^2$;

в) $f(x) = [1 + \|x - a\|^2]^{-1}$.

1.1.5. Построить линии уровня функций $(E^2 \to E^1)$:

а) $f(x) = x_1 x_2$;

б) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$;

в) $f(x) = x_1^4 + x_2^2 - 2x_1^2x_2$;

г) $f(x) = |x_1| + |x_2|$;

д) $f(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$;

е) $f(x) = \max\{x_1, x_2\}$;

ж) $f(x) = \max\{0, -\|x\|^2\}$;

з) $f(x) = x_1^2 - x_2^2$;

и) $f(x) = \min\{0, x_1\}$;

к) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2$;

л) $f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2$.

1.1.6. Пусть функция $f(x)$ выпукла и неотрицательна на выпуклом множестве X. Доказать, что тогда функция $\varphi(x) = f^2(x)$ также выпукла на X. Если функция $f(x)$ строго выпукла, то строго выпукла и функция $\varphi(x)$.

1.1.7. Пусть функция $h(x)$ выпукла на выпуклом множестве X. Доказать, что тогда ее срезка $h^+(x) = \max\{0, h(x)\}$ также выпукла на X.

1.1.8. Доказать, что если функция $f(x)$ выпукла на выпуклом множестве X, то ее множество Лебега $X_k = \{x \in X: f(x) \le k\}$ выпукло при любом k.

1.1.9. Пусть функции $h_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ выпуклы на выпуклом множестве X. Доказать, что тогда множество $X_0 = \{x \in X: h_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}\}$ является выпуклым.

1.1.10. Пусть функции $g_i(x)$, $i = \overline{1, r}$ вогнуты на выпуклом множестве X. Доказать, что тогда множество $X_0 = \{x \in X: g_i(x) \ge 0, i = \overline{1, r}\}$ является выпуклым.

1.1.11. Функция $f(x)$ $(E^n \to E^1)$ называется сепарабельной, если она представима в виде

$$f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n).$$

Сепарабельными являются, например, функции $f(x) = \langle c, x\rangle$ и $f(x) = \|x - 1\|^2$. Доказать, что сепарабельная функция $f(x)$ выпукла тогда и только тогда, когда выпуклы функции $f_i(x_i)$, $i = \overline{1, n}$.

1.1.12. В следующих примерах исследовать функции $f(x)$ на выпуклость (вогнутость) на заданных множествах X:

а) $f(x) = x_1^6 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 10x_1 + 5x_2 - 3x_4 - 20,\ X = E^4$;

б) $f(x) = \exp(2x_1 + x_2),\ X = E^2$;

в) $f(x) = -x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 + 10x_1 - x_2 + 15x_3 + 6,\ X = E^3_+$;

г) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_2 - x_3 + 10,\ X = E^3$;

д) $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_2,\ X = E^3$;

е) $f(x) = x_1^3 + 2x_3^3 + 10x_1 + x_2 - 5x_3 + 6,\ X = E^3_-$;

ж) $f(x) = 5x_1^4 + x_2^6 + x_3^2 - 13x_1 + 7x_3 - 8,\ X = E^3$;

з) $f(x) = -\frac{1}{2}x_2^7 + \frac{1}{2}x_3^4 + 2x_2x_3 + 11x_1 + 6,\ X = E^3_-$;

и) $f(x) = (x_1^2 - x_2)^2,\ X = E^2$;

к) $f(x) = x_1 \exp(-x_1 - x_2),\ X = E^2$;

л) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 - 6x_1x_3,\quad X = E^3$;

м) $f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2x_3 + 3x_2,\quad X = E^3$;

н) $f(x) = 5x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 4x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3,\quad X = E^3$;

о) $f(x) = -2x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 5x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 + 3x_1 - 2x_2 + 6$, $X = E^3$.

1.1.13. Проверить возможность использования следующих функций в качестве функций полезности (т.е. необходимо проверить выполнение основных гипотез или их ослабленных аналогов):

а) $u = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2$; б) $u = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$;

в) $u = kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha},\ k > 0,\ \alpha \in (0, 1)$; г) $u = x_1/x_2$;

д) $u = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$; е) $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i$.

1.2. Постановка задачи математического программирования. Классификация

Любая формализованная задача, которую мы будем рассматривать в дальнейшем, включает в себя:

1) отображение f, определенное на некотором подмножестве линейного нормированного пространства (будем предполагать, что значение этого отображения принадлежит множеству действительных чисел);

2) ограничение, заданное в виде множества X, являющегося подмножеством области определения отображения f.

***Определение* 1.2.1.** Точка $x^* \in X$ называется точкой глобального минимума отображения f на множестве X, если

$$f(x^*) \le f(x) \text{ для всех } x \in X.$$

***Определение* 1.2.2.** Точка $x^* \in X$ называется точкой локального минимума отображения f на множестве X, если найдется константа $\varepsilon > 0$ такая, что

$$f(x^*) \le f(x)$$

для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $\|x - x^*\| \le \varepsilon$.

***Определение* 1.2.3.** Точка $x^* \in X$ называется точкой строгого минимума (в локальном или глобальном смысле), если соответствующие неравенства в определениях 1.2.1 или 1.2.2 выполняются как строгие (при $x \neq x^*$).

Обозначения, обычно применяемые для записи того факта, что точка x^* — точка минимума f на множестве X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \quad x^* = \arg\min_{x \in X} f(x).$$

Иногда, чтобы подчеркнуть локальность точки минимума, используют запись

$$x^* = \arg \operatorname{loc} \min_{x \in X} f(x).$$

Множество точек глобального минимума в дальнейшем будем обозначать следующим образом:

$$X_* = \{x^* \in X: f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)\}.$$

Соответственно,

$$S_* = \{x^* \in X: f(x^*) = \operatorname{loc} \min_{x \in X} f(x)\}$$

— множество точек локального минимума.

Аналогичным образом вводятся определения точек локального и глобального максимума.

Условное обозначение

$$f(x) \to \operatorname{extr}, \quad x \in X$$

применяется при рассмотрении задачи поиска экстремума функции f на множестве X. Запись

$$f(x) \to \min \quad \text{или} \quad f(x) \to \max$$

означает, что исследуется только задача минимизации или максимизации отображения f.

Пример 1.2.1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-1, 2], \\ 5, & x \geq 2. \end{cases}$$

Данная функция имеет на луче $X = [-1, +\infty)$ одну точку строгого глобального минимума $\bar{x} = 0$, $\min_{x \in X} f(x) = f(\bar{x}) = 1$. Точка $\tilde{x} = -1$ является точкой строгого локального максимума, $f(\tilde{x}) = 2$. Луч $[2, +\infty)$ представляет собой множество точек нестрогого глобального максимума, $\max_{x \in X} f(x) = 5$. Отметим также, что точки глобального максимума, принадлежащие открытому лучу $(2, +\infty)$, одновременно являются точками нестрогого локального минимума.

Пример 1.2.2. Функция $f(x) = e^{-x}$, $X = \{x \in E^1 : x \geq 0\}$ имеет одну точку строгого глобального максимума и не имеет точек минимума (проверьте!).

Пример 1.2.3. Функция $f(x) = 2x$ не достигает экстремума ни в одной точке множества $X = \{x \in E^1 : a < x < b\}$ (проверьте!).

Естественным обобщением понятия наименьшего значения функции является определение нижней грани.

Определение **1.2.4.** Пусть отображение f ограничено снизу на множестве X. Число f_* называется нижней гранью (точной нижней границей, инфимумом) f если оно является наибольшей из нижних границ отображения f на X, т.е.

1) $f_* \leq f(x) \quad \forall x \in X$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X: f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$.

Если отображение f ограничено снизу на X, то существует единственная конечная нижняя грань этого отображения на рассматриваемом множестве. Принимая в качестве инфимума неограниченной снизу на X функции $f_* = -\infty$, можно считать, что нижняя грань (в отличии от минимума) существует всегда.

Аналогично вводится определение верхней грани (точной верхней границы, супремума) как наименьшей верхней границы функции f на X

Поскольку любая задача максимизации функции $f(x)$ может быть записана в виде задачи минимизации функции $-f(x)$ (см. упражнение 1.2.5 а), то все теоретические рассуждения можно проводить только для задачи на минимум.

Задачи математического программирования классифицируются по типам множества X и виду функции $f(x)$ Различаются следующие типы задач математического программирования.

1. *Задача одномерной минимизации*

Здесь $x \in E^1$, $X = [a, b]$.

2. *Задача линейного программирования*

Эта задача минимизации линейной функции $f(x) = \langle c, x\rangle$, $x \in E^n$ на выпуклом и замкнутом множестве $X \subset E^n$, заданном системой линейных равенств и неравенств:

$$X = \{x \in E^n : Ax \leq b,\ \bar{A}x = \bar{b}\}.$$

Здесь A и $\bar{A}$ — матрицы размерностей $m \times n$ и $r \times n$ соответственно, $b \in E^m$, $\bar{b} \in E^r$, $r < n$.

Множество такого вида называют многогранным, или симплексным, множеством. Выделение в условиях задачи ограничений типа равенств или неравенств довольно условно, поскольку одни сводятся к другим путем увеличения размерности вектора x.

Различают задачу линейного программирования в стандартной (нормальной) форме:

$$X = \{x \in E^n\colon Ax \le b,\ x \ge 0\},\quad A — m \times n\text{-матрица},\quad b \in E^m,$$

и канонической:

$$X = \{x \in E^n\colon Ax = b,\ x \ge 0\},\quad A — m \times n\text{-матрица},\quad b \in E^m,\quad m < n.$$

3. *Задача квадратичного программирования*

$X \subset E^n$ — многогранное множество, целевая функция квадратичная: $f(x) = \langle Cx, x\rangle + \langle d, x\rangle$, $x \in E^n$; C — положительно определенная матрица.

4. *Задача выпуклого программирования*

Здесь целевая функция — выпуклая на выпуклом множестве $X \subset E^n$. Задачи квадратичного программирования представляют собой частный случай задач выпуклого программирования.

5. *Задача на безусловный минимум*

$$f(x) \to \min,\quad x \in E^n.$$

6. *Задача на условный минимум, или задача с ограничениями типа равенств*

Здесь $x \in X \subset E^n$, где X представляет собой многообразие в E^n, заданное системой равенств

$$X = \{x \in E^n\colon g_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \dots, m,\ m < n,\ g_i(x)\colon E^n \to E^1\}.$$

7. *Задача с ограничениями типа неравенств*

$$f(x) \to \min,\ x \in X = \{x \in E^n\colon g_i(x) \le 0,\quad i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (1.2.1)$$

Если в задаче (1.2.1) $g_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, выпуклы в E^n, то задача (1.2.1) представляет собой задачу выпуклого программирования.

Наконец, из общей задачи математического программирования выделяют задачу:

$$f(x) \to \min,\ x \in X = \{x \in E^n\colon x \in \Omega;$$
$$g_i(x) \le 0,\quad i = 1, 2, \dots, r;$$
$$g_i(x) = 0,\quad i = r + 1, \dots, m,\ m - r < n\},$$

где множество Ω — выпуклое.

Укажем некоторые важнейшие свойства задачи выпуклого программирования ([11, с. 18; 16, с. 163]).

Утверждение **1.2.1.** Любая точка локального минимума выпуклой функции на выпуклом множестве является точкой глобального минимума.

Утверждение **1.2.2.** Множество точек минимума выпуклой функции на выпуклом множестве выпукло.

Утверждение **1.2.3.** Строго выпуклая функция может достигать своего минимума не более, чем в одной точке выпуклого множества.

Утверждение **1.2.4.** Пусть выпуклая функция f непрерывно дифференцируема на выпуклом множестве X, $\nabla f(x^*) = 0$ для некоторой точки $x^* \in X$. Тогда x^* — точка глобального минимума функции f на рассматриваемом множестве.

Аналогичные свойства справедливы для задачи максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве.

Упражнения

1.2.1. Доказать, что если глобальный минимум функции на некотором множестве существует, то он совпадает с нижней гранью этой функции на рассматриваемом множестве.

1.2.2. Доказать, что любая изолированная точка области определения функции является точкой ее локального экстремума.

1.2.3. В примерах 1.2.1–1.2.3 найти верхние и нижние грани функций.

1.2.4. Найти все точки экстремума, дать их характеристики и вычислить верхние и нижние грани функций:

а) $f(x) = \exp\,[(x_1^2 - 1)^2 + |x_2| + x_3^4], \quad x \in E^3;$

б) $f(x) = \begin{cases} |\cos x|, & x \le 0, \\ |\sin x|, & x > 0, \quad x \in E^1; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x^4, & x \le -2, \\ 1, & -2 < x \le 0, \\ \cos x, & 0 < x \le \pi, \\ 2, & \pi < x \le 5, \\ 2e^{(x-5)}, & 5 < x < 10; \end{cases} \quad X = \{x \in E^1 : x < 10\},$

г) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x \le 1, \\ (x-3)^2 - 3, & 1 \le x \le 4, \\ 0, & 4 < x \le 5; \end{cases} \quad X = \{x \in E^1 : -1 \le x \le 5\},$

д) $f(x) = \max\,(x_1, x_2), \quad x \in E^2.$

1.2.5. Доказать следующие свойства:

а) $\max\limits_{x \in X} \lambda f(x) = \lambda \max\limits_{x \in X} f(x), \quad \lambda \geq 0,$

$\max\limits_{x \in X} \lambda f(x) = \lambda \min\limits_{x \in X} f(x), \quad \lambda < 0;$

б) $\min\limits_{x \in X} [f(x) + c] = \min\limits_{x \in X} f(x) + c,$

$\max\limits_{x \in X} [f(x) + c] = \max\limits_{x \in X} f(x) + c,$

где c — произвольная константа;

в) $\max\limits_{x \in X} (f(x) + \varphi(x)) \leq \max\limits_{x \in X} f(x) + \max\limits_{x \in X} \varphi(x),$

$\min\limits_{x \in X} (f(x) + \varphi(x)) \geq \min\limits_{x \in X} f(x) + \min\limits_{x \in X} \varphi(x);$

г) $\max\limits_{x \in X} (f(x) - \varphi(x)) \geq \max\limits_{x \in X} f(x) - \max\limits_{x \in X} \varphi(x),$

$\min\limits_{x \in X} (f(x) - \varphi(x)) \leq \min\limits_{x \in X} f(x) - \min\limits_{x \in X} \varphi(x);$

д) если $\varphi(x) \leq f(x)$ для всех $x \in X$, то

$\inf\limits_{x \in X} \varphi(x) \leq \inf\limits_{x \in X} f(x), \qquad \sup\limits_{x \in X} \varphi(x) \leq \sup\limits_{x \in X} f(x);$

е) Пусть $f\colon X \times Y \to E^1$; тогда

$\sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} f(x, y) \leq \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} f(x, y)$

(неравенство минимакса);

ж) $\left| \sup\limits_{x \in X} f(x) \right| \leq \sup\limits_{x \in X} |f(x)|, \quad \left| \inf\limits_{x \in X} f(x) \right| \leq \inf\limits_{x \in X} |f(x)|;$

з) пусть $X \subset Y$; тогда

$\sup\limits_{x \in X} f(x) \leq \sup\limits_{x \in Y} f(x), \ \inf\limits_{x \in X} f(x) \geq \inf\limits_{x \in Y} f(x);$

и) пусть $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$; тогда

$\sup\limits_{x \in X} f(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sup\limits_{x \in X_i} f(x), \qquad \inf\limits_{x \in X} f(x) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \inf\limits_{x \in X_i} f(x).$

1.2.6. Пусть $f\colon X \to E^1$, φ — возрастающая числовая функция, определенная на области значений функции f. Доказать, что множества глобальных и локальных, строгих и нестрогих точек экстремума функции $\varphi(f(x))$ совпадают с соответствующими множествами для функции $f(x)$, причем

$$\min_{x \in X} \varphi(f(x)) = \varphi\left(\min_{x \in X} f(x)\right),$$

$$\max_{x \in X} \varphi(f(x)) = \varphi\left(\max_{x \in X} f(x)\right).$$

Сформулировать и доказать аналоги данного утверждения для случая, когда φ является убывающей функцией; невозрастающей функцией; неубывающей функцией.

1.2.7. Пусть функция $f(x)$ — сепарабельная:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i),$$

$X = \prod_{i=1}^{n} X_i, X_i \subset E^1$. Доказать, что

а) $\min_{x \in X} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \min_{x_i \in X_i} f_i(x_i)$;

б) $\left(\arg\min_{x \in X} f(x)\right)_i = \arg\min_{x_i \in X_i} f_i(x_i)$.

1.3. Сходимость в экстремальных задачах. Существование экстремумов

Рассмотренные примеры показывают, что не всегда можно указать точку, в которой нижняя грань целевой функции достигается. Часто переходят к обобщенной задаче оптимизации — построению минимизирующей последовательности.

Определение **1.3.1.** Последовательность точек $\{x^k\}$ из допустимого множества X называется минимизирующей для функции $f(x)$, если

$$\lim_{k \to \infty} f(x^k) = \inf_{x \in X} f(x) = f_*.$$

Конструирование минимизирующих последовательностей является целью решения задачи минимизации не только в том случае, когда точная нижняя граница функции не достигается. Большинство методов теории оптимизации — приближенные итерационные методы. Если последовательность, генерируемая некоторым алгоритмом, является минимизирующей, то это — один из показателей эффективности данного алгоритма. На практике применяются и другие способы оценки методов.

Определение **1.3.2.** Последовательность точек $\{x^k\}_{k=1,2,\dots}$ из допустимого множества X называется релаксационной, если значения минимизируемой (максимизируемой) функции, вычисляемые на элементах этой последовательности, не возрастают (не убывают), т.е.

$$f(x^1) \geq f(x^2) \geq \ldots \; [f(x^1) \leq f(x^2) \leq \ldots].$$

Определение **1.3.3.** Расстоянием между точкой a и множеством X называется число

$$\rho(a, X) = \inf_{x \in X} \|a - x\|.$$

Определение **1.3.4.** Последовательность точек $\{x^k\}$ сходится к множеству X_* точек глобального минимума функции f на множестве X, если

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x^k, X_*) = 0.$$

Аналогичным образом вводится понятие сходимости к множеству точек, удовлетворяющих некоторому условию оптимальности.

Одно из достаточных условий достижения верхней и нижней граней сформулировано в простейшем варианте классической теоремы Вейерштрасса ([16, с. 74–76]).

Теорема Вейерштрасса. *Пусть X — компактное множество, отображение f непрерывно на X.*

Тогда $f_* = \inf f(x) > -\infty$, множество точек глобального минимума $X_* = \{x \in X: f(x) = f_*\}$ непусто и компактно, а любая минимизирующая последовательность сходится к X_*.

Следствие 1. Пусть X — непустое замкнутое подмножество пространства E^n, функция f непрерывна на X, и для некоторой фиксированной точки $y \in X$ множество Лебега

$$M(y) = \{x \in X: f(x) \leq f(y)\}$$

ограничено.

Тогда выполняются все утверждения теоремы Вейерштрасса при условии, что элементы минимизирующей последовательности $x^k \in M(y)$.

Следствие 2. Пусть X — непустое замкнутое подмножество пространства E^n, функция f непрерывна на X и для любой последовательности $\{x^k\}$ точек из X, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{k \to \infty} \|x^k\| = +\infty$, выполняется соотношение

$$\lim_{k \to \infty} f(x^k) = +\infty.$$

Тогда выполняются все утверждения теоремы Вейерштрасса.

Аналогично формулируются утверждения для задачи максимизации.

Упражнения

1.3.1. Пользуясь определением нижней грани, показать, что минимизирующая последовательность существует всегда.

1.3.2. Выяснить, является ли в задаче

$$f(x) = \frac{x^2}{x^6 + 2} \to \min, \quad x \in E^1,$$

последовательность $\{x^k\}$, $x^k = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, минимизирующей? Сходящейся к множеству точек глобального минимума?

1.3.3. На примере предыдущей задачи показать существенность требования принадлежности членов минимизирующей последовательности множеству Лебега в следствии 1 теоремы Вейерштрасса.

1.3.4. Доказать, что минимизирующая последовательность не обязательно является релаксационной, рассмотрев, например, последовательность точек $x^k = \frac{(-1)^k}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, в задаче

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases} \to \min, \quad x \in E^1.$$

1.3.5. Пусть последовательность $\{x^k\}$ — минимизирующая, $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \bar{x} \in X$, функция $f(x)$ непрерывна на X. Доказать, что в этом случае минимизирующая последовательность сходится к непустому множеству точек глобального минимума функции f на множестве X.

1.3.6. Показать, что последовательность, сходящаяся к множеству точек глобального минимума, не обязательно сходится к какой-либо точке глобального минимума.

Например, в задаче

$$f(x) = \cos x \to \min, \quad x \in E^1$$

рассмотреть последовательности $\{x^k\}_{k=1,2,\ldots}$:

а) $x^{2k} = -\pi - \frac{1}{k},$ $x^{2k+1} = \pi - \frac{1}{k}$;

б) $x^k = \pi(2k + 1) - \frac{1}{k}$.

В обоих случаях выяснить, можно ли из рассматриваемой последовательности выделить подпоследовательности, сходящиеся к конкретным точкам глобального минимума.

1.3.7. Является ли в задаче

$$f(x) = \begin{cases} |\cos x|, & x \le 0 \\ |\sin x|, & x > 0 \end{cases} \to \text{extr}, \quad x \in E^1,$$

последовательность точек $x^k = \dfrac{(-1)^k}{k}$, $k = 1, 2, \ldots,$

— минимизирующей?

— сходящейся к множеству точек глобального минимума?

— сходящейся к множеству точек глобального максимума?

1.3.8. Доказать, что существуют глобальные решения задач:

а) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^4 \to \max,$

$$X = \{x \in E^3 \colon x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10,\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3\};$$

б) $f(x) = x_1^6 \cdot x_5^4 + x_2^5 + e^{x_3} - (x_4 \cdot \cos x_5)^9 \to \min,$

$$X = \left\{x \in E^5 \colon \sum_{i=1}^{5} x_i^4 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_1^2 + x_2^2 \ge 1/2\right\};$$

в) $f(x) = x_1^8 + x_2^8 + (x_1 + x_2)^2 \to \min,\ x \in E^2;$

г) $f(x) = \|x\|^4 + 2 \cdot \|x\|^2 \to \min,$

$$X = \{x \in E^n \colon x_i \ge 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Глава 2

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Безусловная оптимизация

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \text{extr}, \quad x \in E^n. \tag{2.1.1}$$

Классический метод поиска безусловного экстремума основан на следующих утверждениях ([18, с. 123–126; 42, с. 9, 10]).

Теорема 2.1.1. *Пусть функция f дифференцируема в точке $x^* \in E^n$. Тогда если x^* — локальное решение задачи* (2.1.1), *то*

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{2.1.2}$$

Решения системы уравнений (2.1.2) называются критическими (стационарными, подозрительными на экстремум) точками.

Теорема 2.1.2. *Пусть функция f дважды дифференцируема в точке $x^* \in E^n$.*

а. *Если x^* — точка локального минимума в задаче* (2.1.1), *то матрица $\nabla^2 f(x^*)$ неотрицательно определена, т.е.*

$$\langle \nabla^2 f(x^*)p, p\rangle \geq 0 \text{ для всех } p \in E^n.$$

б. *Если x^* — точка локального максимума, то $\nabla^2 f(x^*)$ неположительно определена, т.е.*

$$\langle \nabla^2 f(x^*)p, p\rangle \leq 0 \text{ для всех } p \in E^n.$$

Теорема 2.1.3. *Пусть функция f дважды дифференцируема в точке $x^* \in E^n$, $\nabla f(x^*) = 0$.*

а. *Если матрица $\nabla^2 f(x^*)$ положительно определена, т.е.*

$$\langle \nabla^2 f(x^*)p, p\rangle > 0 \text{ для всех } p \in E^n, \ p \neq 0,$$

то x^* — *точка строгого локального минимума функции* f *на* E^n.

6. *Если матрица* $\nabla^2 f(x^*)$ *отрицательно определена, т.е.*

$$\langle \nabla^2 f(x^*)p, p\rangle < 0 \text{ для всех } p \in E^n,\ p \neq 0,$$

то x^* — *точка строгого локального максимума функции* f *на* E^n.

Все сформулированные выше утверждения справедливы также для задачи поиска экстремума на множестве $X \subset E^n$, если x^* — внутренняя точка X.

Если известно, что глобальный экстремум исследуемой функции существует, то точкой глобального минимума (максимума) является та критическая точка, в которой функция принимает наименьшее (наибольшее) значение. Для установления факта существования глобального безусловного экстремума иногда удается использовать следствия из теоремы Вейерштрасса, сформулированные в предыдущей главе. Для выпуклой (вогнутой) на E^n функции критические точки являются точками ее глобального минимума (максимума). Для проверки функции на выпуклость (вогнутость) можно рекомендовать следующий критерий ([16, с. 167; 25; 42, с. 91, 92]).

Теорема 2.1.4. *Дважды непрерывно дифференцируемая на выпуклом множестве с непустой внутренностью функция является выпуклой (вогнутой) на этом множестве в том и только том случае, когда матрица* $\nabla^2 f(x)$ *неотрицательно (неположительно) определена для всех* $x \in X$.

Наконец, в ряде случаев установить, является ли найденный экстремум глобальным, можно, лишь проанализировав вид самой целевой функции.

При исследовании на знакоопределенность матриц вторых производных целесообразно применять критерий Сильвестра.

Таким образом, можно предложить следующую схему поиска безусловных экстремумов функций:

1) составляется и решается система алгебраических уравнений (2.1.2);

2) в критических точках исследуется на знакоопределенность матрица вторых производных; те точки, в которых матрица положительно определена, являются точками строгого локального минимума; стационарные точки, в которых матрица отрицательно определена, — точками строгого локального максимума;

3) анализируются критические точки, в которых матрица вторых производных не является строго знакоопределенной. Если матрица неотрицательно (неположительно) определена, то соответствующая точка подозрительна на локальный минимум (максимум). Иногда, непосредственно изучая поведение функции в

окрестности подозрительной точки, удается выяснить, является или нет она экстремальной. Наконец, если в критической точке матрица вторых производных вообще не является знакоопределенной, то такая точка заведомо не может быть экстремальной;

4) найденные точки локального экстремума исследуются на глобальный экстремум (если это возможно). В частности, если выяснится, что матрица вторых производных неотрицательно (неположительно) определена на всем пространстве E^n, то все критические точки функции являются точками глобального минимума (максимума).

Пример 2.1.1. Исследовать на экстремум

$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^3 - 2x_1x_2, \quad x \in E^n.$$

Составляем систему алгебраических уравнений (2.1.2):

$$2x_1 - 2x_2 = 0,$$

$$12x_2^2 - 2x_1 = 0.$$

Находим критические точки $\bar{x} = (0, 0)$, $\tilde{x} = (1/6, 1/6)$. Матрица вторых производных в первой из этих точек

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

не является знакоопределенной (главный угловой минор 2-го порядка, совпадающий с определителем самой матрицы, отрицателен). Следовательно, точка $\bar{x}$ не является экстремальной;

$$\nabla^2 f(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Данная матрица положительно определена, а значит $\tilde{x} = (1/6, 1/6)$ — точка строгого локального минимума. Поскольку, например, $f(\tilde{x}) = -1/108 > f(0, -1) = -4$, то рассматриваемая точка не может быть точкой глобального минимума. Точек глобального минимума нет.

Пример 2.1.2. Исследовать на экстремум

$$f(x) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2, \quad x \in E^2.$$

Вычислив градиент целевой функции, составив соответствующую систему алгебраических уравнений, находим критические точки $x^1 = (0, 0)$, $x^2 = (-1, -1)$, $x^3 = (1, 1)$. Матрица

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

неположительно определена. Точка x^1 подозрительна на локальный максимум, $f(x^1) = 0$. Заметим, что $f(x_1, -x_1) = 2x_1^4 > f(0, 0)$, причем точки, лежащие на прямой $x_2 = -x_1$ могут быть выбраны сколь угодно близко к началу координат. Следовательно, точка x^1 не является экстремальной:

$$\nabla^2 f(-1, -1) = \nabla^2 f(1, 1) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Данная матрица положительно определена. Точки x^2 и x^3 являются точками строгого локального минимума. Так как

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty,$$

то, применяя следствие 2 из теоремы Вейерштрасса, убеждаемся, что x^2 и x^3 — точки глобального минимума рассматриваемой функции на E^2, $\min\limits_{x \in E^2} f(x) = -2$.

В заключение заметим, что прилагаемая схема может быть применена для исследования на экстремум лишь дифференцируемых всюду на E^n функций, дважды дифференцируемых в критических точках. Точки, в которых целевая функция не является дифференцируемой, нуждаются в специальном анализе.

Упражнения

Решить следующие экстремальные задачи:

2.1.1. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3 \to \text{extr}, \ x \in E^3$;

2.1.2. $f(x) = -x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 \to \text{extr}, \ x \in E^2$;

2.1.3. $f(x) = -x_1^2 + x_1\sqrt{x_2} - x_2 + 6x_1 + 10 \to \text{extr}, \ x \in E^2, \ x_2 \ge 0$;

2.1.4. $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + x_1 + \cos x_3 \to \text{extr}, \ x \in E^3$;

2.1.5. $f(x) = x_1^3 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_2x_3 - x_2 \to \text{extr}, \ x \in E^3$;

2.1.6. $f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 \to \text{extr}, \ x \in E^2$;

2.1.7. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2 \to \text{extr}, \ x \in E^3$;

2.1.8. $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1 - x_2)^2 \to \text{extr}, \ x \in E^2$;

2.1.9. $f(x) = x_1x_2 + 20/x_1 + 50/x_2 \to \text{extr}, \ x \in E^2, \ x_1 \ne 0, \ x_2 \ne 0$;

2.1.10. $f(x) = \exp(-x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_2) \to \text{extr}, \ x \in E^2$;

2.1.11. $f(x) = \exp(-2x_1^2 - 5x_2^2 + x_1x_2) \to \text{extr}, \ x \in E^2$;

2.1.12. $f(x) = (4 - x_1)^2 + (x_1 - x_2^2)^2 \to \text{extr}, \ x \in E^2$;

2.1.13. $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + e^{-x_1^2} \to \text{extr}, \quad x \in E^2$;

2.1.14. $f(x) = e^{-x_1^2 - x_2^2} \to \min, \ x \in E^2$;

2.1.15. $f(x) = \exp(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2) \to \text{extr}, \ x \in E^2$;

2.1.16. $f(x) = (x_1^3 - 1)^4 + (x_2 - x_1)^2 - 2 \to \min, \ x \in E^2$;

2.1.17. $f(x) = x_1x_2^2(1 - x_1 - x_2) \to \text{extr}, \ x \in E^2$;

2.1.18. $f(x) = (x_1 + x_2 - 1)\exp(-x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \to \text{extr}, \ x \in E^2$;

2.1.19. $f(x) = x_1x_2^2x_3^2(1 - x_1 - 2x_2 - 3x_3) \to \text{extr}, \ x \in E^3$;

2.1.20. $f(x) = 2x_1^{2/3} + x_2^{2/3} + 4x_3^{2/3} \to \text{extr}, \ x \in E^3$;

2.1.21. $f(x) = (x_1 - 1)^3 + (x_2^3 - x_1)^2 \to \max, \ x \in E^2$.

П р и м е ч а н и е. В упражнениях 2.1.1, 2.1.2, 2.1.4–2.1.16, 2.1.20, 2.1.21 целевая функция легко исследуется на глобальный экстремум.

2.1.22. Исследовать на экстремум функцию $f(x_1, x_2)$, заданную неявно:

а) $x_1^2 + x_2^2 + f^2 - 2x_1 + 2x_2 - 4f + 2 = 0$;

б) $x_1^2 + x_2^2 + f^2 - x_1f - x_2f + 2x_1 + 2x_2 + 2f = 2$.

2.1.23. Может ли функция двух переменных на плоскости иметь бесконечно много точек локального минимума и ни одной точки локального максимума? Рассмотреть функцию

$$f(x) = x_1e^{x_1} - (1 + e^{x_1})\cos x_2.$$

2.1.24. Доказать, что функция $f(x) = (x_1 - 4x_2^2)(x_1 - x_2^2), \ x \in E^2$, не имеет экстремума в начале координат, а ее сужение на любую прямую, проходящую через начало координат, достигает строгого локального минимума в этой точке.

2.1.25. В пространстве E^n найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до k заданных точек y^i, $i = 1, 2, \ldots, k$, минимальна.

2.1.26. В пространстве E^n найти глобальные решения задач:

а) $f(x) = \frac{1}{2}\langle Gx, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \to \text{extr}$,

положительно определенная матрица G размерности $n \times n$, вектор $b \in E^n$ и число c заданы;

б) $f(x) = \|Ax + b\|^2 \to \text{extr}$,

A — заданная матрица размерности $m \times n$, $\text{rang}\, A = n$, b — заданный вектор из E^m.

2.2. Задача с ограничениями типа равенств

Классический тип задач на условный экстремум, традиционно рассматриваемый в курсе математического анализа, имеет вид

$$f(x) \to \text{extr}, \tag{2.2.1}$$

$$x \in X = \{x \in E^n \colon g_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{2.2.2}$$

Обычно предполагается, что $m < n$.

В некоторых случаях для решения (2.2.1), (2.2.2) удается применить метод исключения. Допустим, что из ограничений-равенств можно выразить m каких-либо компонент вектора x через остальные $n - m$ компонент. Например, пусть для определенности

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \\ x_2 &= \varphi_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= \varphi_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Подставляя эти выражения в целевую функцию, приходим к задаче на безусловный экстремум в пространстве E^{n-m}.

Более общий подход основан на использовании правила множителей Лагранжа ([16, с. 83–85; 18, с. 128–132; 21, с. 45, 46]). Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\begin{gathered} L(\lambda_0, \lambda, x) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g(x), \\ \lambda_0 \in E^1,\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in E^m. \end{gathered} \tag{2.2.4}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть x^* — точка локального экстремума в задаче математического программирования* (2.2.1), (2.2.2); *функции* $f(x)$, $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности x_*. Тогда существует число λ_0^* и вектор $\lambda^* \in E^m$ *не равные нулю одновременно, такие что*

$$\frac{\partial L(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2.5}$$

Каждой точке локального экстремума соответствует бесконечное множество наборов множителей Лагранжа.

3. Заказ № 1889.

***Определение* 2.2.1.** Если среди систем множителей Лагранжа, соответствующих точке локального экстремума, нет множителей с $\lambda_0^* = 0$, то такая точка называется нормальной точкой экстремума.

Теорема 2.2.2. *Для нормальной точки локального экстремума соответствующие множители Лагранжа определяются единственным образом с точностью до постоянного множителя.*

Теорема 2.2.3. *Точка локального экстремума x^* в задаче* (2.2.1), (2.2.2) *является нормальной точкой экстремума тогда и только тогда, когда векторы $\nabla g_1(x^*), \nabla g_2(x^*), \ldots, \nabla g_m(x^*)$ линейно независимы.*

Данное утверждение является одним из критериев регулярности рассматриваемой задачи.

Условия оптимальности второго порядка связаны со знаком квадратичной формы, определяемой матрицей вторых производных $\partial^2 L/\partial x^2$ функции Лагранжа по x.

Теорема 2.2.4. *Пусть*: 1) *функции f, $g_1, \ldots, g_m$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^* \in X$ и дважды дифференцируемы в самой этой точке*; 2) *градиенты $\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_m(x^*)$ линейно независимы*; 3) *x^* — точка локального минимума (максимума) задачи* (2.2.1), (2.2.2). *Тогда*

$$\left\langle \frac{\partial^2 L(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)}{\partial x^2} h, h \right\rangle \le 0 \ (\ge 0) \tag{2.2.6}$$

для любого нетривиального набора $\{\lambda_0^*, \lambda^*\}$, $\lambda_0^* > 0$, удовлетворяющего (2.2.5), *и всех $h \in E^n$ таких, что*

$$\langle \nabla g_i(x^*), h \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.2.7}$$

Теорема 2.2.5 (Достаточное условие оптимальности.) *Пусть*: 1) *функции f, $g_1, \ldots, g_m$ дважды дифференцируемы в точке $x^* \in X$*; 2) *для некоторого нетривиального набора $\{\lambda_0^*, \lambda^*\}$, $\lambda_0^* \ge 0$, выполнено условие* (2.2.5); 3) *квадратичная форма*

$$\left\langle \frac{\partial^2 L(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)}{\partial x^2} h, h \right\rangle > 0 \ (<0)$$

для всех ненулевых h из линейного многообразия (2.2.7). *Тогда x^* — точка строгого локального минимума (максимума) функции f на X.*

При исследовании на глобальный экстремум нередко удается воспользоваться теоремой Вейерштрасса или одним из ее следствий.

Таким образом, может быть рекомендована следующая схема решения задачи с ограничениями типа равенств.

1. Составляется функция Лагранжа (2.2.4).

2. Выписываются необходимые условия экстремума (2.2.5), к ним добавляются ограничения равенства, определяющие допустимое множество (2.2.2). Из полученной системы алгебраических уравнений находятся стационарные точки задачи, для которых существует нетривиальный набор множителей Лагранжа. Целесообразно проанализировать отдельно два случая:

а) $\lambda_0 = 0$. Данный вырожденный случай на практике встречается достаточно редко. В большинстве задач предположение $\lambda_0 = 0$ приводит к несовместности рассматриваемой системы алгебраических уравнений (тривиальность всех множителей Лагранжа). В некоторых примерах удается сразу убедиться в линейной независимости градиентов ограничений для всех допустимых x. Тогда этот вариант рассматривать не надо;

б) λ_0 — любое отличное от нуля число. Часто бывает удобно принять $\lambda_0 = 1$.

3. Найденные стационарные точки исследуются на локальный экстремум с помощью достаточного условия, сформулированного в теореме 2.2.5. Отметим, что иногда стоит проверить квадратичную форму

$$\left\langle \frac{\partial^2 L(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)}{\partial x^2} h, h \right\rangle$$

на строгую знакоопределенность на всем пространстве E^n с помощью критерия Сильвестра и лишь затем (если это необходимо) выяснять вопрос о знаке квадратичной формы на множестве, определяемом равенствами (2.2.7).

4. Стационарные точки, не удовлетворяющие условиям теоремы 2.2.5, проверяются на выполнение необходимых условий оптимальности, указанных в теореме 2.2.4. После проверки отбрасываются точки, которые заведомо не могут являться оптимальными. Также как и в задаче на безусловный экстремум иногда, непосредственно изучая поведение функции в окрестности подозрительной точки, удается выяснить, является или нет она экстремальной.

5. Найденные точки минимума и максимума исследуются на глобальный экстремум (если это возможно).

Пример 2.2.1. Применить правило множителей Лагранжа к решению задачи

$$f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 4x_1x_3 \to \mathrm{extr},$$

$$x_1 + 2x_2x_3 = 10, \tag{2.2.8}$$
$$x_1^2 + 2x_2^2 = 50.$$

Составляем функцию Лагранжа:

$$L(\lambda_0, \lambda, x) = \lambda_0(3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 4x_1x_5) +$$
$$+ \lambda_1(x_1 + 2x_2x_3 - 10) + \lambda_2(x_1^2 + 2x_2^2 - 50).$$

Дифференцируя функцию Лагранжа по компонентам вектора x, приходим к уравнениям:

$$\lambda_0(6x_1 + 2) + \lambda_1 + 2\lambda_2x_1 = 0,$$
$$\lambda_0(4x_2 + 4x_3) + 2\lambda_1x_3 + 4\lambda_2x_2 = 0, \tag{2.2.9}$$
$$4\lambda_0x_2 + 2\lambda_1x_2 = 0.$$

Данные уравнения вместе с ограничениями (2.2.8) образуют систему алгебраических уравнений для определения стационарных точек задачи.

Рассмотрим два случая:

а) $\lambda_0 = 0$. Из третьего уравнения в (2.2.9) получаем, что либо $x_2 = 0$, либо $\lambda_1 = 0$. Первый из этих вариантов невозможен, так как из условий связи (2.2.8) мы получим противоречие: $x_1 = 10$ и $x_1^2 = 50$. Предположение $\lambda_0 = 0$ приводит нас к уравнению (второе уравнение из (2.2.9)):

$$\lambda_2x_2 = 0.$$

В силу условия нетривиальности множителей Лагранжа снова приходим к тому, что $x_2 = 0$. Следовательно, $\lambda_0 \neq 0$;

б) $\lambda_0 = 1$. Уравнения (2.2.9) превращаются в следующие:

$$6x_1 + 2 + \lambda_1 + 2\lambda_2x_1 = 0,$$
$$4x_2 + 4x_3 + 2\lambda_1x_3 + 4\lambda_2x_2 = 0,$$
$$x_2(4 + 2\lambda_1) = 0.$$

Из третьего уравнения (так как $x_2 \neq 0$) получаем $\lambda_1 = -2$. Тогда второе уравнение позволяет вычислить $\lambda_2 = -1$. Подставляя эти значения в первое уравнение, находим $x_1 = 0$, а (2.2.8) дают нам оставшиеся компоненты стационарных точек. Таким образом, мы получили две подозрительные на экстремум точки $\bar{x} =$

$= (0, -5, -1)$, $\tilde{x} = (0, 5, 1)$ и соответствующий этим точкам набор множителей Лагранжа $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$.

Матрица вторых производных по x функций Лагранжа

$$\frac{\partial^2 L(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)}{\partial x^2} =$$

$$= \left.\begin{bmatrix} 6\lambda_0 + 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + 4\lambda_2 & 4 + 2\lambda_1 \\ 0 & 4 + 2\lambda_1 & 0 \end{bmatrix}\right|_{\substack{\lambda_0 = 1, \\ \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -1}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

не является строго знакоопределенной. В нашем случае

$$\nabla g_1(x) = (1, 2x_3, 2x_2), \quad \nabla g_2(x) = (2x_1, 4x_2, 0), \quad \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} h, h \right\rangle = 4h_1^2.$$

Ограничения (2.2.7) на вектор h приводят к условиям:

$h_2 = 0$ (для обеих стационарных точек),

$h_1 - 10h_3 = 0$ (для точки $\bar{x}$),

$h_1 + 10h_3 = 0$ (для точки $\tilde{x}$).

В силу нетривиальности вектора h, $h_1 \neq 0$, и, следовательно, для каждой стационарной точки

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} h, h \right\rangle > 0.$$

Таким образом, $\bar{x} = (0, -5, -1)$ и $\tilde{x} = (0, 5, 1)$ являются точками строгого локального минимума функции f на множестве, задаваемом ограничениями (2.2.8), $f(\bar{x}) = f(\tilde{x}) = 70$.

В рассматриваемой задаче применим метод исключения, причем в данном случае нет необходимости в явном выражении части компонент вектора x через остальные компоненты. Действительно, из (2.2.8) следует, что

$$4x_2x_3 = 20 - 2x_1,$$

$$2x_2^2 = 50 - x_1^2.$$

Подставляя эти выражения в целевую функцию, получим

$$f = 2x_1^2 + 70. \qquad (2.2.10)$$

Отсюда имеем, что $x_1 = 0$ — точка глобального минимума функции одной переменной (2.2.10). Остальные компоненты вектора x определяются из (2.2.8).

Итак, $\bar{x} = (0, -5, -1)$ и $\tilde{x} = (0, 5, 1)$ — точки глобального минимума функции f на множестве, заданном ограничениями (2.2.8), причем наименьшее значение функции равно 70.

Упражнения

2.2.1. Применить правило множителей Лагранжа. Результат проверить с помощью метода исключения:

а) $f(x) = x_1x_2 \to \text{extr}, \quad 3x_1 + x_2 = 6;$

б) $f(x) = e^{x_1x_2} \to \text{extr}, \quad x_1 + x_2 = 1;$

в) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr}, \quad 2x_1 + x_2 = 1;$

г) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3^2 \to \text{extr}, \quad -x_1 + x_3 = 1, \quad -x_1x_3 + x_2 = 1;$

д) $f(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \to \text{extr}, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3;$

е) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \to \text{extr}, \ x_1 + x_2 - x_4 = 6, \ x_1 + x_3 + + x_4 = 9;$

ж) $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \text{extr}, \quad x_1 + x_2 = a,$ где a — произвольное число;

з) $f(x) = x_1^2 - x_2^2 \to \text{extr}, \quad x_1 - x_2 = 10.$

2.2.2. Следующие экстремальные задачи решать, используя правило множителей Лагранжа:

а) $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3 \to \text{extr}, \quad x_1^3 + x_2^3 = 1;$

б) $f(x) = 2x_1 \to \text{extr}, \quad x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0;$

в) $f(x) = 4x_1x_2 \to \text{extr}, \quad x_1^2 + x_2^2 = 9;$

г) $f(x) = 2x_1^3 + 2x_2^3 + 3x_1 + 3x_2 \to \text{extr}, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1;$

д) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min, \quad \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = 1.$

2.2.3. Найти глобальные решения задач

а) $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \to \text{extr}, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = 1;$

б) $f(x) = \langle Gx, x\rangle \to \text{extr}, \quad \|x\|^2 = 1,$

G — симметрическая матрица размерности $n \times n$ с известными n собственными значениями $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \ldots \geq \xi_n$;

в) $f(x) = \frac{1}{2}\langle Gx, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \to \min, \quad Ax = d,$

G — положительно определенная матрица размерности $n \times n$, A — матрица размерности $m \times n$, $\operatorname{rang} A = m$, $b \in E^n$, $d \in E^m$;

г) $f(x) = \|Bx + q\|^2 \to \min, \quad Ax = d,$

B — матрица размерности $k \times n$, $\operatorname{rang} B = n$, $q \in E^k$, A и d те же, что и в предыдущем задании.

2.2.4. С помощью правила множителей Лагранжа проверить, является ли точкой экстремума (минимума, максимума) вектор $x = (1, 1, 1)$ в задаче

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \to \text{extr},$$

$$2x_1^3x_2^2x_3 + 4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 = 17.$$

2.2.5. Применить правило множителей Лагранжа. Проверить полученный результат, построив на плоскости линии уровня целевой функции и множество ограничений:

а) $f(x) = x_2 \to \min, \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0, \quad (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1;$

б) $f(x, y) = x \to \min, \quad 9x^3 - y^3 = 9.$

2.2.6. Применить правило множителей Лагранжа для поиска экстремума функции $f(x) = x_1$ на множестве

$$X = \{x \in E^2 \colon x_1^p + x_2^q = 0\}, \quad p \text{ и } q \text{ — натуральные.}$$

При каких p и q классическое правило (с $\lambda_0 = 1$) не действует?

2.2.7. Исследовать на экстремум функцию $f = f(x_1, x_2, x_3)$, заданную неявно:

$$x_1^2 + x_2^2 + f^2 - x_1f - x_2f + 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2f - 1 = 0$$

при ограничении $x_2 + x_3 = 0$.

2.2.8. Найти расстояние между началом координат и кривой $y = 1/x^2$.

2.2.9. Среди всех прямоугольных параллелепипедов, сумма ребер которых имеет заданную длину l, найти параллелепипед наибольшего объема.

2.2.10. Данное положительное число a представить в виде суммы n положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

2.2.11. Определить размеры прямоугольного бассейна данного объема V, при которых на облицовку боковой поверхности и дна потребуется наименьшее количество материала.

2.2.12. Среди всех вписанных в данный круг радиуса R треугольников найти тот, площадь которого наибольшая. Дать геометрическую иллюстрацию.

2.2.13. Среди треугольных пирамид с заданными основанием и высотой найти ту, которая имеет наименьшую площадь боковой поверхности.

2.3. Задача с ограничениями типа равенств и неравенств

Рассмотрим схему применения правила множителей Лагранжа для более общих задач на условный экстремум:

$$f(x) \to \min, \tag{2.3.11}$$

$$x \in X = \{x \in \Omega\colon g_i \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r;$$

$$g_i(x) = 0, \quad i = r+1, r+2, \ldots, m, \; m - r < n\}, \quad \Omega \subset E^n. \tag{2.3.12}$$

Теорема 2.3.1. (См. [16, с. 224, 229–233; 42, с. 130, 133, 134].) *Пусть x^* — точка локального минимума в задаче математического программирования* (2.3.11)–(2.3.12), *функции f, $g_1, \ldots, g_r$ дифференцируемы в точке x^*, функции $g_{r+1}, g_{r+2}, \ldots, g_m$* непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x^*, Ω — выпуклое множество.

Тогда существует число λ_0^* и вектор $\lambda^* \in E^m$ такие, что выполняются следующие условия:

1) *условие нетривиальности:*

$$\lambda_0^{*2} + \|\lambda^*\|^2 > 0,$$

т.е. хотя бы один из множителей Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ отличен от нуля;

2) *условие неотрицательности:*

$$\lambda_0^* \ge 0, \; \lambda_i^* \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

т.е. множители Лагранжа, отвечающие целевой функции и ограничениям-неравенствам, неотрицательны;

3) *условия дополняющей нежесткости:*

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r;$$

4) *условие стационарности*

$$\left\langle \frac{\partial L(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)}{\partial x}, x - x^* \right\rangle \ge 0 \tag{2.3.13}$$

для всех $x \in \Omega$. *Здесь* L — *функция Лагранжа, имеющая вид* (2.2.4), *вектор-функция* $\dfrac{\partial L(\lambda_0, \lambda, x)}{\partial x}$ *составлена из частных производных функции Лагранжа по компонентам вектора* x.

Наиболее простыми для проверки достаточными условиями регулярности рассматриваемой задачи, гарантирующими существование набора множителей Лагранжа с $\lambda_0^* = 1$, является (в дополнение к условиям теоремы 2.3.1) ([42, с. 137, 138]):

1) выпуклость функций g_i, $i = 1, 2, \dots, r$, отсутствие ограничений–равенств ($m = r$) и существование точки $\bar{x} \in \Omega$ такой, что $g_i(\bar{x}) < 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, r$ (условие Слейтера); или

2) линейность всех функций g_i, $i = r + 1, r + 2, \dots, m$ при дополнительном предположении, что Ω — полиэдр, т.е. множество, являющееся пересечением конечного числа полупространств вида

$$\langle a^j, x \rangle \le \gamma_j, \quad a^j \in E^n.$$

Условия оптимальности второго порядка, аналогичные теоремам 2.2.4, 2.2.5, достаточно громоздки при проверке ([42, с. 141]). Отметим, в частности, что если функции f, $g_1, \dots, g_m$ дважды дифференцируемы в точке x^*, существует набор $\{\lambda_0^*, \lambda^*\}$, для которого выполняются утверждения 1)–4) теоремы 2.3.1, а квадратичная форма

$$\left\langle \frac{\partial^2 L(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)}{\partial x^2} h, h \right\rangle$$

положительно определена на E^n, тогда x^* — точка строгого локального минимума функции f на множестве X.

Укажем одно достаточное условие глобального минимума ([42, с. 131]).

Теорема 2.3.2. *Предположим, что в задаче* (2.3.11), (2.3.12) *множество* Ω *выпукло, функции* f, $g_1, \dots, g_r$ *выпуклы на* Ω *и дифференцируемы в точке* $x^* \in X$, *а функции* $g_{r+1}, g_{r+2}, \dots, g_m$ *линейны. Если для некоторого набора множителей Лагранжа* $\{\lambda_0^*, \lambda^*\}$, $\lambda_0^* = 1$, *справедливы утверждения* 1)–4) *теоремы* 2.3.1, *то* x^* — *точка глобального минимума рассматриваемой целевой функции на множестве* (2.3.12).

Итак, общая схема решения рассматриваемой задачи выглядит следующим образом.

1. Составляется функция Лагранжа вида (2.2.4).

2. Выписываются необходимые условия экстремума, сформулированные в утверждениях 1)–4) теоремы 2.3.1. К этим

условиям добавляются ограничения, задающие множество (2.3.12). Полученная система алгебраических уравнений и неравенств используется для поиска подозрительных на экстремум точек. Также как и для задачи с ограничениями–равенствами целесообразно проанализировать отдельно случай $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 = 1$ (или λ_0 — любое положительное число). Если выполнено одно из условий регулярности, то вариант $\lambda_0 = 0$ рассматривать не надо.

3. Среди найденных стационарных точек отыскиваются точки минимума и проводится анализ на глобальный экстремум (если это возможно).

Заметим, что множество Ω обычно также задается с помощью ограничений типа равенства и неравенства. Однако для некоторых специальных типов множеств иногда имеет смысл не включать эти ограничения в основные ограничения — равенства и неравенства (2.3.12).

Рассмотрим два часто встречающихся случая.

а) $\Omega = E^n$.

Неравенство (2.3.13) выполняется для любых $x \in E^n$ в том и только том случае, когда (проверьте!)

$$\frac{\partial L(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.3.14}$$

Пример 2.3.1. Решить задачу математического программирования:

$$f(x) = 3x_2^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \to \min,$$

$$x \in X = \{x \in E^3 \colon x_1 - 7x_2 + 3x_3 \le -7,\ x_3 + 2 \ge 5x_1 + 2x_2\}.$$

В рассматриваемом примере выполняются условия регулярности, поскольку ограничения–равенства отсутствуют, а ограничения–неравенства задаются линейными функциями. Поэтому функцию Лагранжа рассмотрим сразу в нормальном виде ($\lambda_0 = 1$):

$$L(\lambda, x) = 3x_2^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 + \lambda_1(x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7) +$$
$$+ \lambda_2(5x_1 + 2x_2 - x_3 - 2);$$

уравнения (2.3.14) в виде

$$\lambda_1 + 5\lambda_2 = 11,$$

$$6x_2 - 7\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3,$$

$$3\lambda_1 - \lambda_2 = 1.$$

Условия неотрицательности множителей Лагранжа и дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0,$$

$$\lambda_1(x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7) = 0,$$

$$\lambda_2(5x_1 + 2x_2 - x_3 - 2) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 2$, $x^* = (0, 1, 0)$. Поскольку целевая функция и функции, задающие ограничения, удовлетворяют условиям теоремы 2.3.2, то x^* — точка глобального минимума, $\min\limits_{x \in X} f(x) = f(x^*) = 0.$

б) $\Omega = \{x \in E^n\colon \alpha_j \le x_j \le \beta_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$.

Неравенство (2.3.13) выполняется для всех $x \in \Omega$ тогда и только тогда, когда (проверьте!)

$$\frac{\partial L(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)}{\partial x_j}(x_j - x_j^*) \ge 0 \quad \forall x_j\colon \alpha_j \le x_j \le \beta_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial L(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)}{\partial x_j} \begin{cases} = 0, & \text{если } \alpha_j < x_j^* < \beta_j, \\ \ge 0, & \text{если } x_j^* = \alpha_j, \\ \le 0, & \text{если } x_j^* = \beta_j. \end{cases} \tag{2.3.15}$$

Пример 2.3.2. Решить с помощью правила множителей Лагранжа

$$f(x) = x_1^2 - x_2 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 = 2, \quad \Omega = \{x \in E^2\colon 0 \le x_1 \le 5,\ 0 \le x_2 \le 1\}.$$

Функция Лагранжа (с учетом выполнения условия регулярности):

$$L(\lambda, x) = x_1^2 - x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2).$$

Условия (2.3.15):

$$2x_1 + \lambda \begin{cases} = 0, & \text{если } 0 < x_1 < 5, \\ \ge 0, & \text{если } x_1 = 0, \\ \le 0, & \text{если } x_1 = 5; \end{cases} \qquad -1 + \lambda \begin{cases} = 0, & \text{если } 0 < x_2 < 1, \\ \ge 0, & \text{если } x_2 = 0, \\ \le 0, & \text{если } x_2 = 1. \end{cases}$$

Варианты $x_1 = 0$ и $x_1 = 5$ невозможны, так как при этом точки, удовлетворяющие ограничению-равенству, не принадлежат Ω. Следовательно, $x_1 = -\lambda/2$. Отсюда получаем единственную подозрительную на экстремум точку $x^* = (1, 1)$, $\lambda^* = -2$. В силу теоремы 2.3.2 x^* — точка глобального минимума, причем $\min\limits_X f(x) = 0$

В заключение укажем, что рассмотренная схема позволяет одновременно решать также и задачу максимизации, если исключить условие $\lambda_0 \geq 0$. При этом, случаю $\lambda_0 \leq 0$ будут соответствовать точки, подозрительные на максимум (переформулируйте соответствующим образом теорему 2.3.2). При решении некоторых задач удается применить метод исключения (см. пример 2.3.2; выразить $x_1 = 2 - x_2$. Наконец, некоторые задачи в пространстве E^2 можно решить геометрически, построив линии уровня целевой функции и множеств ограничений.

Пример 2.3.3. Рассмотрим одну из экономических интерпретаций множителей Лагранжа. Предположим, что потребитель решает вопрос о приобретении товаров и услуг n видов из условия максимума функции полезности (см. § 1.1). Пусть x_j — количество приобретаемых товаров или услуг j-го вида; p_j — стоимость единицы товара или услуги, $j = 1, 2, \ldots, n$; D — бюджет потребителя; $u(x)$ — функция полезности. Тогда соответствующая задача математического программирования может быть записана в виде

$$u(x) \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq D, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Перейдя к задаче минимизации функции $-u(x)$, запишем функцию Лагранжа в нормальном виде:

$$L(x, \lambda) = -u(x) + \lambda(\langle p, x\rangle - D),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = -M_j(x) + \lambda p_j,$$

где $M_j(x) = \partial u/\partial x_j$ — предельная полезность j-го товара. Условия (2.3.15) в данном случае имеют вид

$$-M_j(x) + \lambda p_j \begin{cases} \geq 0, & x_j = 0, \\ = 0, & x_j > 0. \end{cases}$$

Таким образом, если в оптимальном наборе $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ приобретаемых товаров или услуг $x_j^* > 0$ (товар покупается), то $\lambda^* = M_j(x^*)/p_j$, т.е. отношение предельной полезности к цене каждого приобретаемого товара при оптимальном плане покупок является одной и той же константой, равной множителю Лагранжа.

Упражнения

В задачах 2.3.1–2.3.5 построить на плоскости линии уровня функции f и найти минимум и максимум функций на множествах X.

2.3.1. $f(x) = 2x_1 - x_2$;

а) $X = \{x \in E^2: x_1^2 - x_2 = 0\}$,

б) $X = \{x \in E^2: x_1 \geq 0,\ ax_1 + bx_2 = 0;\ a, b \in E^1\}$;

2.3.2. $f(x) = |x_1| + |x_2 - 2|$;

а) $X = \{x \in E^2: x_1 - x_2^2 = 0,\ x_2 \leq 0\}$,

б) $X = \{x \in E^2: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1\}$;

2.3.3. $f(x) = x_1^2 + x_2^2$;

а) $X = \{x \in E^2: x_1^4 - x_2 = 0\}$,

б) $X = \{x \in E^2: (x_1 - 2)^2 + 4x_2^2 = 1\}$;

2.3.4. $f(x) = |x_1| \cdot x_2$;

а) $X = \{x \in E^2: -1 \leq x_1 \leq 2,\ x_2 \geq 0\}$,

б) $X = \{x \in E^2: x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_1 \geq 0\}$;

2.3.5. $f(x) = \max(x_1, x_2)$;

а) $X = \{x \in E^2: -1 \leq x_1 \leq 1,\ -1 \leq x_2 \leq 1\}$,

б) $X = \{x \in E^2: x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4\}$.

2.3.6. Показать, что неравенство (2.3.13) в правиле множителей Лангранжа выполняется тогда и только тогда, когда справедливы равенства (2.3.14), если x^* — внутренняя точка множества Ω.

2.3.7. Получить условия, аналогичные (2.3.15), если

$\Omega = \{x \in E^n: x_j \geq 0,\ j \in J \subset \{1, 2, \ldots, n\}\}$.

2.3.8. Доказать, что если выполнены условия правила множителей Лагранжа, $\Omega = \{x \in E^n: \|x - r\|^2 \leq R^2\}$, а точка локального минимума x^* лежит на границе Ω, т.е. $\|x - r\|^2 = R^2$, то

$$x^* = r - R\,\frac{L_x(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)}{\|L_x(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*)\|}.$$

2.3.9. Решить двумя способами (правило множителей Лагранжа и геометрический метод) следующие задачи:

а) $f(x) = x_1^2 - 6x_1 - x_2 \to \text{extr}$,

$x_1 + 2x_2 \le 15,\ 2x_1 + 3x_2 \le 24,\ 3x_1 + 2x_2 \le 24,\ 0 \le x_2 \le 2$;

б) $f(x) = (x_1 - 7)(x_2 - 1) \to \text{extr}$,

$x_1 + 2x_2 \le 19,\ x_1 + x_2 \le 9,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

в) $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \text{extr}$,

$x_1 + x_2 \le 9,\ x_1 + 2x_2 \le 12,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

г) $f(x) = x_1^2 - x_1 - x_2 \to \min$,

$x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1 \le 3,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

д) $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$,

$x_1^2 + x_2^2 \le 25,\ x_1x_2 \ge 4,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

2.3.10. Применить правило множителей Лагранжа к решению следующих задач:

а) $2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \min$,

$8x_1 - 5x_2 + 4x_3 \le 40,\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0$;

б) $2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - 4x_2 \to \min$,

$x_1 + 2x_2 \le 12,\ x_1 \ge 0$;

в) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \max$,

$x_1 + x_2 + x_3 \le 15,\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3$;

г) $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \to \max$,

$x_1 + x_2 + x_3 = 3,\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5$;

д) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 10 \to \min$,

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4,\ x_3 \ge 0$;

е) $x_1 \to \min$,

$x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1^3 + x_2^3 = 1;$

ж) $x_1 x_2 x_3 \to \min$,

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 \le 0;$

з) $\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \to \max$,

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le 1.$

Примечание. Во всех примерах достаточно просто удается найти точки глобального экстремума.

2.3.11. Найти расстояние от точки y до множества X:

а) $y = (2, 1, 0, 1),\ X = \{x \in E^4\colon 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 1\}$;

б) $y = (0, 1, 0, 1),\ X = \{x \in E^4\colon 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \ge 2,\ x_4 \ge 0\}$.

2.3.12. Пусть функция полезности $u(x) = \sqrt{x_1 x_2}$, вектор цен $p = (3, 1)$, бюджет потребителя равен 6 единицам. Определить оптимальный набор приобретаемых товаров. Вычислить предельные полезности каждого товара при оптимальном плане покупок.

2.4. Минимизация линейных и квадратичных функций на простых множествах

Поиск точек экстремума путем решения систем уравнений, используемых в правиле множителей Лагранжа, представляет весьма серьезную задачу. Однако для линейных и квадратичных целевых функций можно легко получить аналитические решения экстремальных задач на множествах специального вида. В дальнейшем такие множества будем называть простыми. Рассмотрим два типа подобных задач.

2.4.1. Минимизация линейной функции на выпуклом, замкнутом и ограниченном множестве. Рассмотрим задачу

$$f(x) = \langle c, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min, \quad x \in X. \tag{2.4.1}$$

Здесь c — заданный вектор, $c \in E^n$, $c \ne 0$; множество X выпукло, замкнуто и ограничено.

Остановимся на важнейших свойствах задачи (2.4.1) ([11, с. 25]).

***Утверждение* 2.4.1.** Решение задачи (2.4.1) существует. Любая точка минимума или максимума является точкой глобального экстремума.

Справедливость данного утверждения следует из теоремы Вейерштрасса и того факта, что линейная функция является одновременно выпуклой и вогнутой.

***Утверждение* 2.4.2.** Экстремум линейной функции на некотором множестве может достигаться лишь на границе этого множества.

Достаточно просто удается найти экстремум линейной функции на многомерном параллелепипеде, шаре, эллипсоиде, а также некоторых других простейших множествах (см. упражнения).

2.4.2. Задача проецирования на выпуклое и замкнутое множество.

***Определение* 2.4.1.** Проекцией точки $y \in E^n$ на множество $X \subset E^n$ называется такая точка $p \in X$, что

$$\|p - y\| = \min_{x \in X} \|x - y\|.$$

Будем применять обозначение $p = P_X(y)$. Таким образом, проекция точки y — это точка p, расстояние до которой от точки y равно расстоянию от точки y до множества X (см. § 1.3).

Перечислим основные свойства проекции ([16, с. 189, 190; 25, с. 24; 11, с. 29, 30]).

***Утверждение* 2.4.3.** Если $X \subset E^n$ — непустое замкнутое множество, то проекция на него любой точки $y \in E^n$ существует. Проекция принадлежит границе множества X, если $y \notin \operatorname{int} X$.

***Утверждение* 2.4.4.** Если множество $X \subset E^n$ — непустое, замкнутое и выпуклое, то проекция на него любой точки существует и единственна.

***Утверждение* 2.4.5.** Необходимым и достаточным условием того, чтобы точка p являлась проекцией y на выпуклое множество X является выполнение неравенства

$$\langle p - y, x - p\rangle \geq 0, \quad \forall x \in X. \tag{2.4.2}$$

Необходимость решения задачи проецирования точки на множество возникает, в частности, при использовании метода проекций градиента для численного решения задач математического программирования.

Таким образом, для поиска проекции точки y на множество X необходимо решить задачу

$$\|x - y\| \to \min, \quad x \in X. \tag{2.4.3}$$

При решении задачи проецирования обычно (2.4.3) заменяется на эквивалентную задачу

$$\frac{1}{2}\,\|x - y\|^2 \to \min, \quad x \in X; \tag{2.4.4}$$

целевая функция в (2.4.4) является сепарабельной и всюду дифференцируемой.

Упражнения

Найти решения задач минимизации линейной функции $f(x) = \langle c, x\rangle$, $c \in E^n$, $c \neq 0$, для следующих видов множества X:

2.4.1. X — n-мерный куб:

$$X = \{x \in E^n\colon \ |x_i| \le l, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ l > 0\};$$

2.4.2. X — n-мерный прямоугольный параллелепипед:

$$X = \{x \in E^n\colon \alpha_i \le x_i \le \beta_i, \ i = 1, 2, \ldots, n\};$$

2.4.3. X — n-мерный шар:

$$X = \{x \in E^n\colon \ \|x - r\| \le l, \ l > 0\},$$

r — заданный вектор из E^n;

2.4.4. X — n-мерный эллипсоид:

$$X = \left\{x \in E^n\colon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 x_i^2 \le l, \ l > 0\right\};$$

числа α_i заданы, некоторые из них могут равняться нулю;

2.4.5. X — n-мерный фундаментальный симплекс:

$$X = \left\{x \in E^n\colon \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ x_i \ge 0, \ i = 1, 2, \ldots, n\right\};$$

2.4.6. X — простейший полиэдр:

$$X = \{x \in E^n\colon \langle a, x\rangle \le b, \ x \ge 0\},$$

вектор $a \in E^n$, $a > 0$ и число $b > 0$ заданы;

2.4.7. X — множество Лебега квадратичной функции:

$$X = \left\{x \in E^n\colon \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \le r^2\right\},$$

A — симметрическая положительно определенная матрица.

2.4.8. Предположим, что экстремум линейной функции достигается во внутренней точке множества X. Показать, что этот случай невозможен, т.е. значение целевой функции можно улучшить. (Тем самым будет доказано утверждение 2.4.2.)

4. Заказ № 1889.

Решить задачи проецирования произвольной точки $y \in E^n$ на следующие множества X:

2.4.9. X — n-мерный куб:

$$X = \{x \in E^n\colon\ |x_i| \le l,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ l > 0\};$$

2.4.10. X — n-мерный прямоугольный параллелепипед:

$$X = \{x \in E^n\colon \alpha_i \le x_i \le \beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\};$$

2.4.11. X — неотрицательный ортант:

$$X = \{x \in E^n\colon x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\};$$

2.4.12. X — n-мерный шар:

$$X = \{x \in E^n\colon\ \|x - r\| \le l,\ l > 0\},$$

r — заданный вектор из E^n;

2.4.13. X — n-мерное пространство с «выколотым» шаром:

$$X = \{x \in E^n\colon\ \|x - r\| \ge l,\ l > 0\},$$

r — заданный вектор из E^n;

2.4.14. X — гиперплоскость:

$$X = \{x \in E^n\colon \langle b, x\rangle = \gamma\},$$

вектор $b \in E^n$ и число γ заданы;

2.4.15. X — полупространство:

$$X = \{x \in E^n\colon \langle b, x\rangle \le \gamma\};$$

2.4.16. X — линейное многообразие:

$$X = \{x \in E^n\colon Ax = b\},$$

A — прямоугольная матрица размерности $m \times n$ $(m < n)$ с линейно независимыми строками, $b \in E^n$ — заданный вектор.

2.4.17. Множество $X \in E^n$ называется аффинным, если оно вместе с любыми двумя своими элементами целиком содержит соединяющую эти элементы прямую, т.е., если $x, y \in X$, то $\alpha x + (1 - \alpha)y \in X$ для всех чисел $\alpha \in E^1$. Показать, что для аффинного множества условие (2.4.2) равносильно следующему:

$$\langle p - y, x - p\rangle = 0 \text{ для всех } x \in X.$$

Проверить с помощью этого критерия результат решения упражнения 2.4.14.

Глава 3

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Одномерный поиск

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min; \quad x \in [a, b]. \tag{3.1.1}$$

Решение задачи (3.1.1) обозначим через x^*. Через f_* будем обозначать минимальное значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$: $f_* = f(x^*) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$.

3.1.1. Методы перебора. Простейший способ приближенного решения задачи (3.1.1) очевиден и состоит в следующем. Отрезок $[a, b]$ разбивается на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$; в этих точках вычисляется значение функции $f(x)$ и среди них выбирается минимальное. Рассмотрим два варианта этого метода.

Метод равномерного перебора. Так называется метод, использующий равноотстоящие узлы $x_0, x_1, \ldots, x_N$. Формально его можно описать следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 0, \ldots, N-1,$$

$$x_0 = a, \quad h = \frac{b-a}{N}; \tag{3.1.2}$$

$$\hat{x} = \arg \min_{k=\overline{0,N}} f(x_k). \tag{3.1.3}$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица с константой L, т.е.

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b], \tag{3.1.4}$$

то при $h \le 2\varepsilon/L$

$$f(\hat{x}) - f_* \le \varepsilon. \tag{3.1.5}$$

Метод адаптивного перебора. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию (3.1.4), $\varepsilon > 0$ — заданная точность. Положим $h = 2\varepsilon/L$ и сетку $x_0, \ldots, x_N$ построим следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k + h + h_k, \quad k = 0, \ldots, N-2,$$

$$x_0 = a, \quad x_N = b.$$

Здесь число узлов N не фиксируется заранее, а определяется в процессе вычислений из условия $x_{N-1} < b \le x_{N-1} + h + h_k$; шаг h_k вычисляется по формуле

$$h_k = \frac{f(x_k) - F_k}{L},$$

где $F_k = \min\limits_{i=\overline{0,k}} f(x_i)$ Приближенное решение задачи (3.1.1), точка $\hat{x}$, определяется также, как и в методе равномерного перебора, $\hat{x} = \arg\min\limits_{k=\overline{0,N}} f(x_k)$, и удовлетворяет условию (3.1.5).

3.1.2. Метод ломаных. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию (3.1.4). Метод ломаных для решения задачи (3.1.1) состоит в построении двух последовательностей точек — вспомогательной $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots\}$ и основной $\{x_0, x_1 \ldots\}$ по следующим правилам:

$$x_0 \in [a, b] \text{ — произвольная точка;} \tag{3.1.6}$$

$$\bar{x}_k = \arg\min_{[a,b]} f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{3.1.7}$$

$$f_k(x) = \max_{i=0,\ldots,k-1} [f(\bar{x}_i) - L\,|\,x - \bar{x}_i\,|\,]; \tag{3.1.8}$$

$$x_k = \arg\min_{i=\overline{0,k}} f(\bar{x}_i), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.1.9}$$

Таким образом, на каждой итерации метода ломаных строится функция $f_k(x)$, находится точка ее минимума $\bar{x}_k$ и затем по правилу (3.1.9) вычисляется очередное приближение к решению задачи (3.1.1). Условием остановки метода (3.1.6)–(3.1.9) является условие

$$f(x_k) - f_k(\bar{x}_k) \le \varepsilon, \tag{3.1.10}$$

где $\varepsilon > 0$ — заданная точность решения задачи (3.1.1). При выполнении условия (3.1.10) $f(x_k)$ отличается от f_* не более, чем на ε ([11, с. 283]). Название метода связано с его геометрической интерпретацией — функция $f_k(x)$ является кусочно-линейной, а ее график представляет собой непрерывную ломаную линию, состоящую из отрезков прямых с угловыми коэффициентами $+L$ или $-L$. Точка $\bar{x}_k$ является одной из нижних вершин ломаной $f_k(x)$ и может быть легко вычислена простым перебором этих вершин.

3.1.3. Методы минимизации выпуклых функций. В основе этих методов лежит следующее свойство выпуклых функций: если точки $x, y \in [a, b]$, $a < x < y < b$, то

$$x^* \in \begin{cases} [a, y], & \text{если } f(x) \leq f(y), \\ [x, b], & \text{если } f(x) \geq f(y). \end{cases} \tag{3.1.11}$$

(Строго говоря, из (3.1.11) следует, что если $f(x) = f(y)$, то $x^* \in [x, y]$, однако при численных расчетах точное равенство выполняется крайне редко, поэтому мы не будем выделять данный случай и ограничимся включением (3.1.11).)

Отрезок, содержащий точку минимума, называется ее отрезком локализации. Из (3.1.11) следует, что для уменьшения отрезка локализации выпуклой функции достаточно сравнить между собой ее значения в двух внутренних точках этого отрезка. Отсюда вытекает следующий алгоритм последовательного сжатия отрезка локализации: положим $[a_0, b_0] = [a, b]$ и для $k = 0, 1, \ldots$ построим отрезки $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ по правилу

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, y_k], & \text{если } f(x_k) < f(y_k), \\ [x_k, b_k], & \text{если } f(x_k) \geq f(y_k). \end{cases}$$

Здесь $x_k < y_k$ — внутренние, вообще говоря, произвольные точки отрезка $[a_k, b_k]$. Процедуру сжатия отрезка локализации можно оборвать при выполнении условия $b_k - a_k \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданная точность решения задачи (3.1.1), а в качестве приближенного решения задачи взять произвольную точку $\hat{x}$ последнего отрезка локализации. Рассмотрим два варианта описанного алгоритма.

Метод деления отрезка пополам. В этом методе

$$x_k = \frac{1}{2}[a_k + b_k - \delta], \quad y_k = x_k + \delta,$$

где $\delta > 0$ — достаточно малое число, ограниченное снизу погрешностью представления чисел в ЭВМ, а сверху — заданной точностью решения задачи (3.1.1). Таким образом, точки x_k и y_k отстоят от середины отрезка на величину $\delta/2$, а сам отрезок локализации на каждой итерации уменьшается почти в два раза:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k) + \frac{\delta}{2}.$$

Метод золотого сечения. Здесь в качестве точек x_k и y_k на каждой итерации выбираются точки, задающие золотое сечение отрезка $[a_k, b_k]$. Напомним, что золотым сечением отрезка называется деление его на две неравные части, так что отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей:

$$x_k = a_k + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_k - a_k) \approx a_k + 0{,}382(b_k - a_k), \qquad (3.1.12)$$

$$y_k = a_k + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_k - a_k) \approx a_k + 0{,}618(b_k - a_k). \qquad (3.1.13)$$

Замечательным свойством золотого сечения является то, что точка x_k является одной из точек золотого сечения отрезка $[a_k, y_k]$, а точка y_k — одной из точек золотого сечения отрезка $[x_k, b_k]$. Это означает, что в отрезке $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ уже имеется одна из точек золотого сечения с вычисленным в ней значением функции $f(x)$. Следовательно, на всех итерациях, кроме начальной, для сжатия отрезка локализации достаточно только одного вычисления значения функции.

3.1.4. Минимизация выпуклых дифференцируемых функций. Пусть функция $f(x)$ выпукла и непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Тогда (см. упражнение 3.1.14) для любой точки $x \in [a, b]$

$$x^* \in \begin{cases} [a, x], & \text{если} \quad f'(x) \geq 0, \\ [x, b], & \text{если} \quad f' \leq 0. \end{cases}$$

Случаи $x = a$ и $x = b$ здесь не исключаются, т.е. если $f'(a) \geq 0$, то $x^* = a$, а если $f'(b) \leq 0$, то $x^* = b$; если и $f'(x) = 0$, то, конечно, $x^* = x$. Отсюда с очевидностью вытекает следующий алгоритм сжатия отрезка локализации функции $f(x)$:

1) если $f'(a) \geq 0$ (на практике проверяется условие $f'(a) \geq -\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданная точность), то остановится: $x^* = a$;

2) если $f'(b) \leq 0$ (на практике проверяется условие $f'(b) \leq \varepsilon$), то остановится: $x^* = b$;

3) если $f'(a) < 0$ и $f'(b) > 0$, то положить $[a_0, b_0] = [a, b]$;

4) для $k = 0, 1, \ldots$ выбрать точку $x_k \in \operatorname{int}[a_k, b_k]$ и проверить условие $f'(x_k) = 0$; если это условие выполняется, то остановится: $x^* = x_k$, иначе положить

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, x_k], & \text{если} \quad f'(x_k) > 0, \\ [x_k, b_k], & \text{если} \quad f'(x_k) < 0. \end{cases}$$

На каждой итерации этого алгоритма необходимо также проверять условие $b_k - a_k \le \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 > 0$—заданная точность решения задачи (3.1.1). Впрочем, можно ограничиться и одним условием остановки: $|f'(x_k)| \le \varepsilon$ (точности ε и ε_1 не обязаны быть равны).

В качестве точки x_k на каждой итерации удобно выбирать середину отрезка $[a_k, b_k]$ (метод деления отрезка пополам с вычислением производной) или точку пересечения касательных к функции $f(x)$ в точках a_k и b_k (метод касательных). Нетрудно убедиться, что в методе касательных

$$x_k = a_k + \frac{f(a_k) - f(b_k) + f'(b_k)[b_k - a_k]}{f'(b_k) - f'(a_k)}. \tag{3.1.14}$$

Практика показывает, что метод касательных во многих случаях сходится значительно быстрей метода деления отрезка пополам, но весьма чувствителен к погрешностям в вычислении производной $f'(x)$. Поэтому метод касательных можно применять только в том случае, если производные вычисляются точно, иначе лучше использовать метод деления отрезка пополам, для которого точность вычисления производных не существенна — важен лишь их знак.

3.1.5. Методы полиномиальной аппроксимации. В основе методов, рассматриваемых в этом пункте, лежит простая идея — аппроксимировать функцию $f(x)$ некоторым многочленом, найти его минимум на отрезке $[a, b]$ и точку минимума взять в качестве приближения к решению задачи (3.1.1). Так как нахождение минимума многочлена не составляет труда в том случае, когда его степень не превосходит трех, то в качестве интерполяционного полинома выбирают полином второй или третьей степени. Точность аппроксимации существенно зависит от близости точек, по которым строится аппроксимирующий многочлен, поэтому методы полиномиальной аппроксимации обычно применяются на заключительном этапе поиска минимума — после того, как каким-нибудь другим методом найден достаточно малый отрезок локализации.

Метод квадратичной аппроксимации (метод парабол). Формально этот метод состоит в следующем. Пусть значения функции $f(x)$ в точках $x_1 < x_2 < x_3$ из отрезка a, b равны, соответственно, f_1, f_2, f_3. Через точки плоскости (x_1, f_1), (x_2, f_2) и (x_3, f_3) проведем параболу $\psi(x) = c_0(x - x_2)^2 + c_1(x - x_2)^2 + c_2$. Коэффициенты c_0, c_1 и c_2 легко определяются из соотношений $\psi(x_1) = f_1$, $\psi(x_2) = = f_2$, $\psi(x_3) = f_3$. Точку минимума параболы $\psi(x)$ обозначим через $\bar{x}$. Эту точку можно использовать либо в качестве приближения к решению задачи (3.1.1), либо для построения следующего приближения, например, в соответствии со следующим правилом.

Пусть

$$f_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\},$$

$$x_{\min} = \arg\min\{f_1, f_2, f_3\}.$$

Если разности $f_{\min} - f(\bar{x})$ и $x_{\min} - \bar{x}$ достаточно малы, то в качестве приближенного решения задачи (3.1.1) выбирается та из точек $x_{\min}$ или $\bar{x}$, в которой меньше значение функции $f(x)$. В противном случае берется наилучшая из точек $x_{\min}$ или $\bar{x}$ и две точки по обе стороны от нее. Через эти три точки проводится новая парабола, находится ее минимум и т.д.

Метод кубической аппроксимации. Предположим, что функция $f(x)$ выпукла и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$, $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$. Аппроксимируем функцию $f(x)$ многочленом третьей степени:

$$\psi(x) = c_0(x-a)^3 + c_1(x-a)^2 + c_2(x-a) + c_3,$$

где коэффициенты c_0, c_1, c_2 и c_3 определяются из условий

$$\psi(a) = f(a),\ \psi(b) = f(b),\ \psi'(a) = f'(a),\ \psi'(b) = f'(b).$$

Найдем точку $\bar{x} = \arg\min\limits_{[a,b]} \psi(x)$. Легко проверить, что

$$\bar{x} = a + \alpha(b-a),$$

где

$$\alpha = \frac{z + \omega - f'(a)}{f'(b) - f'(a) + 2\omega}, \quad z = 3\frac{f(a) - f(b)}{b-a} + f'(a) + f'(b),$$

$$\omega = \sqrt{z^2 - f'(a)\cdot f'(b)}.$$

Точка $\bar{x}$ используется для сжатия отрезка локализации также, как и в методе деления отрезка пополам с вычислением производной: если $f'(\bar{x}) < 0$, то новым отрезком локализации является отрезок $[x, b]$, если $f'(\bar{x}) > 0$ — отрезок $[a, x]$.

Упражнения

3.1.1. Пусть функция $f(x) \in C_1[a, b]$. Доказать, что в этом случае она удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$ с константой $L = \max\limits_{t \in [a,b]} |f'(x)|$.

3.1.2. Пусть функция $f(x)$ выпукла и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Доказать, что в этом случае функция удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$ с константой $L = \max \{ |f'(a)|, \ |f'(b)| \}$.

3.1.3. Пусть функция $f(x) = h(x) + g(x)$, где функции $h(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют на отрезке $[a, b]$ условию Липшица с константами L_h и L_g, соответственно. Доказать, что в этом случае $f(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица с константой $L \le L_h + L_g$.

3.1.4. Пусть функция $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен n-й степени. Обозначим

$$g(x) = \sum_{\substack{0 \le i \le n: \\ a_i > 0}} a_i x^i, \quad h(x) = \sum_{\substack{0 \le i \le n: \\ a_i < 0}} |a_i| x^i.$$

Очевидно, что $f(x) = g(x) - h(x)$. Доказать, что если левая граница отрезка $[a, b]$, $a \ge 0$, то $f(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица с константой

$$L \le \max \{ |g'(b) - h'(a)|, \ |g'(a) - h'(b)| \}.$$

3.1.5. Доказать, что если в методе равномерного перебора шаг $h \le 2\varepsilon/L$, где L — константа Липшица из (3.1.4), то справедлива оценка (3.1.5).

3.1.6. Доказать оценку (3.1.5) для метода адаптивного перебора.

3.1.7. С помощью методов равномерного и адаптивного перебора решить следующие задачи:

$$f(x) = e^{-x} \to \min, \quad x \in [0, 3];$$

$$f(x) = -x^4 + \frac{1}{3} x^3 + x^2 + x \to \min, \quad x \in [0, 2];$$

$$f(x) = \max \{\sin x, \cos x\} \to \min, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Точность ε взять равной 10^{-2}. В каждом случае подсчитать потребовавшееся для решения задачи количество вычислений значений функции (узлов сетки). Объяснить полученные результаты.

3.1.8. Сделайте графически пять–шесть итераций метода ломаных в задаче

$$f(x) = \min \{\sin x, \cos x\} \to \min, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Полезно также написать программу метода ломаных (вопросы его реализации см. в ([11, с. 285]) и сравнить его с методами перебора.

3.1.9. Докажите, что для выпуклых на отрезке $[a, b]$ функций выполняется включение (3.1.11).

3.1.10. Выведите формулы (3.1.12) и (3.1.13). Покажите, что в методе золотого сечения длина отрезка локализации $b_k - a_k = (b-a)/p^k$, где $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3.1.11. Решите задачу

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \to \min, \quad x \in [0, 1],$$

с помощью методов деления отрезка пополам и золотого сечения. Точность решения задачи ε взять равной 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}. В каждом случае подсчитайте потребовавшееся для решения задачи количество вычислений значений функции.

3.1.12. Функция $f(x)$ называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на этом отрезке и существуют числа α, β, $a \le \alpha \le \beta \le b$ такие, что

а) $f(x)$ строго монотонно убывает при $a \le x \le \alpha$ (если $a < \alpha$);

б) $f(x)$ строго монотонно возрастает при $\beta \le x \le b$ (если $\beta < b$);

в) $f(x) = f_* = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ при $\alpha \le x \le \beta$, так что

$$[\alpha, \beta] = \arg\min_{[a,b]} f(x).$$

Случаи, когда один или два из отрезков $[a, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, b]$ вырождаются в точку, здесь не исключаются. В частности, если $\alpha = \beta$, то $f(x)$ называется строго унимодальной на отрезке $[a, b]$. Докажите, что если функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a, b]$, точки $x, y \in [a, b]$, $a < x < y < b$, то

$$x^* \in \begin{cases} [a, y], & \text{если } f(x) \le f(y), \\ [x, b], & \text{если } f(x) \ge f(y). \end{cases}$$

3.1.13. Докажите, что выпуклая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ унимодальна на этом отрезке. Строго выпуклая на $[a, b]$ функция строго унимодальна на $[a, b]$.

3.1.14. Пусть функция $f(x)$ выпукла и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда при любом $x \in [a, b]$

$$x^* \in \begin{cases} [a, x], & \text{если } f'(x) \ge 0, \\ [x, b], & \text{если } f'(x) \le 0. \end{cases}$$

Докажите.

3.1.15. Выведите формулу (3.1.14). Докажите, что точка $x_k \in \operatorname{int}[a_k, b_k]$.

3.1.16. Рассмотрите метод парабол. Сформулируйте условия, при которых точка минимума параболы $\psi(x)$ принадлежит отрезку $[x_1, x_3]$.

3.1.17. Решите следующие задачи:

а) $f(x) = \min\{|x^2 - 2|, 1 - x/4\} \to \min, \quad x \in [-2, 2]$;

б) $f(x) = \max \{ |x^2 - 2|, 1 - x/4\} \to \min, \quad x \in [-2, 2]$;
в) $f(x) = 3x^4 + (x-1)^2 \to \min, \quad x \in [0, 4]$;
г) $f(x) = 4x \sin x \to \min, \quad x \in [0, 2\pi]$;
д) $f(x) = 2(x-3)^2 + e^{0,5x^2} \to \min, \quad x \in [0, 3]$.

3.1.18. Одним из способов решения уравнения $f(x) = 0$ является сведение этой задачи к задаче минимизации функции $\varphi(x) = f^2(x)$. Ясно, что если x^* — точка минимума функции $\varphi(x)$, то, если $\varphi(x^*) = 0$, x^* — корень уравнения $f(x)$. В противном случае уравнение $f(x) = 0$ корней не имеет. Используя этот прием, решите уравнения

$$4x^3 - 3x^2 + 2x + e^{x/2} = 0,$$

$$3000 - 100x^2 - 4x^5 - 6x^6 = 0,$$

$$\sin x - e^x + 1 = 0.$$

3.2. Минимизация на простых множествах

Рассмотрим простейшие варианты численных методов поиска экстремума функций многих переменных.

Определение **3.2.1.** Вектор $p \in E^n$ называется направлением спуска дифференцируемой функции $f(x)$ в точке $\bar{x} \in E^n$, если $\langle \nabla f(\bar{x}), p \rangle < 0$.

Из формулы Тейлора первого порядка следует, что

$$f(\bar{x} + \alpha p) - f(\bar{x}) = \alpha \langle \nabla f(\bar{x}), p \rangle + o(\alpha), \quad o(\alpha)/\alpha \to 0 \text{ при } \alpha \to 0.$$

Таким образом, при достаточно малых $\alpha > 0$ функция $f(\bar{x} + \alpha p) < f(\bar{x})$, что и гарантирует убывание функции f при движении вдоль направления p.

Очевидно, что направление антиградиента $p = -\nabla f(\bar{x})$ является направлением спуска в любой точке $\bar{x}$, для которой $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Идея использования этого направления и лежит в основе градиентного метода решения задач безусловной минимизации.

3.2.1. Градиентный метод спуска в задаче безусловной минимизации. Рассмотрим один из простейших вариантов метода, использующий информацию о градиенте целевой функции. Метод применим к решению задачи:

$$f(x) \to \min, \quad x \in E^n,$$

где f — дифференцируемая функция.

Реализация алгоритма начинается с выбора начального приближения x^0. Опишем одну итерацию метода, считая, что приближение x^k найдено:

1) в точке x^k вычисляется $\nabla f(x^k)$;

2) вычисляется шаг $\alpha_k \geq 0$ и полагается

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k \nabla f(x^k).$$

Выбор шага вдоль направления антиградиента является вспомогательной задачей. Укажем наиболее распространенные варианты вычисления α_k ([16, с. 262–264; 42, с. 187]):

а) введем функцию одной переменной

$$f_k(\alpha) = f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)), \quad \alpha \geq 0;$$

$$\alpha_k : f_k(\alpha_k) = \min_{\alpha \geq 0} f_k(\alpha). \tag{3.2.1}$$

б) условие гарантированного убывания:

$$f(x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)) - f(x^k) \leq -\varepsilon\alpha \, \|\nabla f(x^k)\|, \quad \varepsilon \in (0, 1); \tag{3.2.2}$$

в) условие монотонности:

$$f(x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)) < f(x^k).$$

Если функция f непрерывно дифференцируема на E^n, ограничена снизу, а ее градиент удовлетворяет условию Липшица, то последовательность, генерируемая методом, с выбором шагов по правилу (3.2.1) или (3.2.2) является релаксационной, причем

$$\lim_{k \to \infty} \|\nabla f(x^k)\| = 0.$$

Если при этом функция f выпукла, а множество Лебега

$$M(x^0) = \{x \in E^n : f(x) < f(x^0)\}$$

ограничено, то последовательность $\{x^k\}$ — минимизирующая ([16, с. 265, 266; 42, с. 187, 188; 11, с. 44–47]).

Число $\|\nabla f(x^k)\|$ может служить критерием остановки.

Отметим, что рассмотренный метод с выбором шага из условия (3.2.1) часто называют методом скорейшего спуска ([16, 11]) или наискорейшего спуска ([18, 25, 33, 42]). Иногда методом скорейшего спуска называют рассмотренный алгоритм при любых допустимых способах выбора шага, учитывая, что направление антиградиента в точке x задает направление наибыстрейшего убывания функции в этой точке.

Аналогичным образом применяется метод подъема для задачи безусловной максимизации.

3.2.2. Метод условного градиента. Задача поиска экстремума дифференцируемой функции на множествах простейшей структуры. Метод применим для решения задачи

$$f(x) \to \min, \quad x \in X,$$

где X — выпуклое, замкнутое и ограниченное подмножество E^n, функция f дифференцируема на X. Известно ([12; 16, с. 165; 11, с. 63]), что любое локальное решение x^* поставленной задачи удовлетворяет условию $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \ \forall x \in X$. В случае выпуклости $f(x)$ на X это условие является необходимым и достаточным условием глобального минимума.

Кратко опишем простейший вариант метода, выбирая при этом произвольное начальное приближение $x^0 \in X$ и предполагая, что с помощью метода получена точка $x^k \in X$.

1. Решается первая вспомогательная задача (поиск направления спуска) — минимизация линейной функции

$$f_k = \langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle \to \min, \quad x \in X. \tag{3.2.3}$$

Пусть

$$\bar{x}^k = \arg\min_{x \in X} f_k(x).$$

Очевидно, что $f_k(\bar{x}^k) \leq 0$. Если $f_k(\bar{x}^k) = 0$ (на практике обычно проверяется условие $f_k(\bar{x}^k) > -\varepsilon$, где положительное число ε — заранее заданная точность счета), то точка x^k удовлетворяет необходимому условию оптимальности ([12; 16, с. 165; 11, с. 63])

$$\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle \geq 0, \ \forall x \in X, \tag{3.2.4}$$

и реализация алгоритма завершается. При этом, если f — выпуклая на X функция, то x^k — точка глобального минимума.

2. Решается вторая вспомогательная задача метода (поиск шага)—задача минимизации функции одной переменной на отрезке:

$$\alpha_k\colon f(x^k(\alpha_k)) = \min_{\alpha \in [0,1]} f(x^k(\alpha)) = \min_{\alpha \in [0,1]} f(x^k + \alpha(\bar{x}^k - x^k)), \tag{3.2.5}$$

здесь

$$x^k(\alpha) = x^k + \alpha(\bar{x}^k - x^k), \quad \alpha \in [0, 1].$$

3. Полагается $x^{k+1} = x^k(\alpha_k)$ и начинается новая итерация.

Если дополнительно предполагается, что градиент целевой функции удовлетворяет условию Липшица на X, то метод генерирует релаксационную последовательность, сходящуюся в смысле выполнения необходимого условия оптимальности (3.2.4):

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\bar{x}^k) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \rho(x^k, S_*) = 0,$$

$S_* = \{y \in X: \langle \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ для всех $x \in X\}$ — множество стационарных точек задачи.

Если, кроме того, целевая функция выпукла, то последовательность точек, порождаемая методом, является минимизирующей и сходящейся к множеству точек глобального миниума ([16, с. 294–296; 11, с. 69–71]).

Отметим, что теоремы о сходимости остаются справедливыми, если первая вспомогательная задача решается с погрешностью, стремящейся к нулю при $k \to \infty$, а шаг выбирается из условия гарантированного убывания f ([16, с. 294–296; 42, с. 229–231]).

Метод условного градиента целесообразно использовать, если вспомогательная задача минимизации линейной функции на множестве X может быть решена достаточно легко. В частности, если X задано линейными ограничениями типа равенства и неравенства, то (3.2.3) — задача линейного программирования. Довольно просто удается найти экстремум линейной функции на многомерном параллелепипеде, шаре, эллипсоиде, а также некоторых других простейших множествах (см. § 2.4).

3.2.3. Метод проекции градиента. Метод проекции градиента применим для решения задачи

$$f(x) \to \min, \quad x \in X,$$

X — замкнутое выпуклое подмножество E^n, f дифференцируема на X.

Теорема 3.2.1. ([12; 16, с. 192–193; 11, с. 66]). *Пусть множество X выпукло, x^* — точка локального минимума функции f на X, f дифференцируема в точке x^*. Тогда*

$$x^* = P_X(x^* - \alpha \nabla f(x^*)), \ \forall \alpha > 0. \tag{3.2.6}$$

Если, кроме того, функция f выпукла на X, то любая точка x^*, удовлетволяющая (3.2.6), *доставляет глобальный минимум функции f.*

Данная теорема является, фактически, переформулировкой в терминах оператора проецирования условия оптимальности дифференцируемой функции на выпуклом множестве

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \ \forall x \in X.$$

Реализация метода начинается с выбора, вообще говоря, произвольного начального приближения $x^0 \in X$. В простейших вариантах алгоритма приближение x^{k+1} вычисляется при помощи найденной ранее точки x^k по формуле

$$x^{k+1} = P_X(x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2.7}$$

Шаг $\alpha_k \geq 0$ может выбираться из тех же условий, что и в градиентном методе спуска, рассмотренном в п. 3.2.1. Отметим, что сходимость метода удается доказать, предполагая, что целевая функция ограничена снизу на множестве X, градиент удовлетворяет условию Липшица на X с некоторой константой L, а шаг в (3.2.7) выбирается таким образом, что $0 < \alpha_k \leq \bar{\alpha} < 1/L$. В этом случае последовательность точек $\{x^k\}$ релаксационна и сходится к выполнению необходимого условия оптимальности (3.2.6).

Если дополнительно предположить, что множество Лебега $M(x^0) = \{x \in X: f(x) \leq f(x^0)\}$ ограничено, то

$$\rho(x^k, S_*) \to 0, \quad k \to \infty,$$

S_* — множество стационарных точек задачи.

Если функция f выпукла, то последовательность $\{x^k\}$ является минимизирующей и сходящейся к множеству точек глобального минимума ([11, с. 73–76]).

Возможны и более тонкие способы выбора α_k, обеспечивающие сходимость ([16, с. 278; 42, с. 226]).

Метод проекции градиента целесообразно применять в тех случаях, когда вспомогательная операция проецирования точки на множество может быть проведена достаточно просто. Данная задача представляет собой задачу минимизации квадратичной функции:

$$\frac{1}{2} \|x - y\|^2 \to \min, \quad x \in X$$

(см. п. 2.4). Для множеств X сложной структуры прибегают к аппроксимации X, позволяющей в качестве вспомогательной решать задачу квадратичного программирования ([33, с. 217–223]).

3.2.4. Метод Ньютона. Градиентные методы вблизи точки минимума замедляют свою сходимость. Поэтому в окрестности решения иногда целесообразно применение таких методов, которые используют квадратичную часть разложения дифференцируемой функции в ряд Тейлора. Такие методы обычно называют методами второго порядка, ибо они используют информацию о второй производной целевой функции в отличие от градиентных методов — методов первого порядка. Поскольку в малой области квадратичная часть разложения аппроксимирует функцию точнее, чем линейная часть, то естественно ожидать, что методы второго порядка сходятся быстрее, чем методы первого порядка. Предположив дважды непрерывную дифференцируемость функции $f(x)$ в E^n, т.е. $f(\cdot) \in C_2(E^n)$, опишем один из вариантов метода второго порядка.

Пусть $x^0 \in E^n$ задано и с помощью метода вычислено $x^k \in E^n$. В точке $x = x^k$ функцию $f(x)$ аппроксимируем квадратичной функцией:

$$\tilde{f}(x) = f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x^k) [x - x^k], \ x - x^k \rangle.$$

Теперь решим вспомогательную задачу: $\tilde{f}_k(x) \to \min, \quad x \in E^n$. Предположим, что решение $\tilde{x}^k$ этой задачи существует. Очевидно также, что в точке $\tilde{x}^k$ $\nabla f_k(\tilde{x}^k) = 0$. Так как

$$\nabla f_k(x) = \nabla^2 f(x^k) [x - x^k] + \nabla f(x^k),$$

то

$$\tilde{x}^k = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k).$$

Теперь построим

$$x^k(\alpha) = x^k + \alpha [\tilde{x}^k - x^k], \quad \alpha \in [0, 1]$$

и найдем α_k из условия минимума функции $\Phi_k(\alpha) = f(x^k(\alpha))$ по $\alpha \in [0, 1]$: $\Phi_k(\alpha) \to \min$, $\alpha \in [0, 1]$. Следующее приближение ищем по формуле

$$x^{k+1} = x^k(\alpha_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Таким образом,

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k),$$

$$\alpha_k: \Phi_k(\alpha) = f(x^k(\alpha)) \to \min, \ \alpha \in [0, 1], \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Если на каждой итерации метода полагать $\alpha_k = 1$, $k = 0, 1, \ldots$, то он будет совпадать с методом Ньютона решения системы уравнений $\nabla f(x) = 0$.

Каждый шаг метода Ньютона весьма трудоемкий, так как приходится решать задачу минимизации квадратичной функции. Поэтому чаще всего его используют в комбинации с методом скорейшего спуска, в конце итерационного процесса скорейшего спуска, и, конечно, тогда, когда вычисление матрицы $\nabla^2 f(x)$ не представляет особых трудностей. Можно также использовать для вычисления матрицы $\nabla^2 f(x)$ разностные аппроксимации вторых производных.

Упражнения

3.2.1. Для решения градиентным методом задачи указать направление спуска (подъема) из точки x^0:

а) $f(x) = (x_1^2 - x_2)^4 + x_1 x_2 + e^{x_1^2} \to \min$, $x^0 = (0, 1)$;

б) $f(x) = \exp(2 - x_1^4 - x_2^2) + \ln(-x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \to \max$,

$x^0 = (1, 1, 1, 1)$;

в) $f(x) = x_1^4 + \cos x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 (\sin x_4)^2 \to \min$,

x^0 — начало координат.

3.2.2. Для решения методом скорейшего спуска (шаг вычисляется из условия (3.2.1)) найти направление спуска из точки x^0, получить уравнение для величины шага вдоль данного направления:

а) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + e^{x_1 + x_2} \to \min$, $x^0 = (0, 0)$;

б) $f(x) = e^{x_1} + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^4 \to \min$, $x^0 = (0, 1, -1, 0)$.

Выполнить одну итерацию метода скорейшего спуска (подъема) с начальным приближением x^0. Решение проиллюстрировать графически, построив линии уровня целевой функции:

3.2.3. $f(x) = (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 + 5)^2 + 1 \to \min$,

а) $x^0 = (1, 0)$; б) $x^0 = (-5, -5)$; в) $x^0 = (0, 0)$;

3.2.4. $f(x) = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 + 3)^2 \to \min$,

а) $x^0 = (2, 0)$; б) $x^0 = (0, 2)$;

3.2.5. $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 20x_1 + 10x_2 \to \max$, $x^0 = (5, 4)$;

3.2.6. $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 20x_1 + 10x_2 \to \min$, $x^0 = (5, 4)$;

3.2.7. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 + x_2 \to \min$, $x^0 = (0, 0)$.

3.2.8. В задаче

$$f(x) = (2x_1 - x_2)^2 + (x_2 - 2)^4 \to \min, \quad x \in E^2$$

а) найти точку глобального минимума, используя классическое условие оптимальности;

б) выполнить две итерации метода скорейшего спуска, выбрав любое начальное приближение, отличное от найденной точки глобального минимума.

5. Заказ № 1889.

3.2.9. Для решения методом скорейшего спуска задач вычислить направление спуска и шаг вдоль этого направления:

а) $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \to \min, \ x \in E^n,$

A — положительно определенная матрица размерности $n \times n$, вектор $b \in E^n$ и число c заданы;

б) $f(x) = \frac{1}{2}\ \|Ax + b\|^2 \to \min, \ x \in E^n,$

A — заданная матрица размерности $n \times n$, $b \in E^m$ — заданный вектор.

3.2.10. Доказать, что в методе скорейшего спуска, в котором шаг выбирается по правилу (3.2.1), направления спуска на двух последовательных итерациях взаимно ортогональны.

3.2.11. Изложить схему метода условного градиента для задачи максимизации функции.

3.2.12. Для решения методом условного градиента с начальным приближением x^0 найти решение первой вспомогательной задачи — точку $\bar{x}^0$ и получить уравнение для вычисления величины шага α_0:

а) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + e^{x_1+x_2} \to \min,$

$X = \{x \in E^2\colon -2 \le x_1 \le 2, \ -2 \le x_2 \le 2\}, \ x^0 = (0, 0);$

б) $f(x) = e^{x_1} + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \to \min,$

$X = \{x \in E^4\colon \|x\| \le 2\}, \ x^0 = (0, 1, -1, 0).$

3.2.13. Найти точное решение, применив метод условного градиента с начальным приближением x^0. Дать геометрическую иллюстрацию, построив линии уровня целевой функции, множество ограничений и полученные в ходе итерации приближения. Результат проверить, вычислив точное решение аналитическим методом.

а) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 \to \min,$

$X = \{x \in E^2\colon 0 \le x_1 \le 1, \ 0 \le x_2 \le 1\}, \ x^0 = (0, 0);$

б) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \to \min,$

$X = \{x \in E^2\colon x_1 + 2x_2 \le 8, \ 2x_1 - x_2 \le 12, \ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0\},$

$x^0 = (0, 0);$

в) $f(x) = x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 - 4x_1 + x_2 \to \min,$

$X = \{x \in E^2\colon 4 \le x_1 \le 8, \ -5 \le x_2 \le 1\}, x^0 = (6, 0).$

3.2.14. Выполнить одну итерацию метода условного градиента с начальным приближением $x^0 = (0, 1, 1)$:

$$f(x) = 9e^{x_1} + x_1^2 x_2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_2 - x_3 \to \min,$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 2,\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq -1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3.$$

3.2.15. Для решения методом условного градиента получить формулы, позволяющие вычислить $\bar{x}^k$ и шаг α_k:

а) $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \to \min,$

$x \in X = \{x \in E^n\colon |x_i| \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$;

A — положительно определенная матрица размерности $n \times n$, $b \in E^n$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}\ ||Ax + b||^2 \to \min,$

$$x \in X = \left\{x \in E^n\colon \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\right\},$$

A — матрица размерности $m \times n$, $b \in E^m$.

3.2.16. Показать, что метод минимизации вогнутой непрерывно дифференцируемой функции f, в котором в качестве следующего приближения выбирается решение первой вспомогательной задачи ($x^{k+1} = \bar{x}^k$), генерирует релаксационную последовательность.

3.2.17. Изложить схему метода проекции градиента для задачи максимизации функции.

3.2.18. Выполнить две итерации метода проекции градиента с начальным приближением x^0. Параметр α_k выбрать из условия скорейшего спуска (3.2.1). Дать геометрическую иллюстрацию:

а) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 \to \min,$

$X = \{x \in E^2\colon 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\},\ x^0 = (0, 0)$;

б) $f(x) = x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 - 4x_1 + x_2 \to \min,$

$X = \{x \in E^2\colon 4 \leq x_1 \leq 8,\ -5 \leq x_2 \leq 1\},\ x^0 = (6, 0)$.

Примечание. Сравнить с результатами решения упражнений 3.2.13а и 3.2.13в методом условного градиента.

3.2.19. Показать, что в задачах предыдущего примера градиент целевой функции удовлетворяет условию Липшица, найти константу Липшица L и выполнить две итерации метода проекции градиента, выбрав $\alpha_k = 1/(2L)$. Сравнить с результатами упражнения 3.2.18.

Задачи 3.2.20–3.2.29 решить градиентным методом и методом Ньютона. Выбрать следующие значения для точности ε: 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}. Для каждого из методов подсчитайте потребовавшееся для достижения требуемой точности количество итераций. Для метода Ньютона выяснить, как меняется длина шага вдоль направления спуска от итерации к итерации. Реализовать метод Ньютона с разностными аппроксимациями вторых производных.

3.2.20. $f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 \to \min.$

3.2.21. $f(x) = (x_1^2 + 12x_2 - 1)^2 + (49x_1^2 + 49x_2^2 + 84x_1 + 2324x_2 - 681)^2 \to \min.$

3.2.22. $f(x) = e^{-x_1^2-x_2^2}(2x_1^2 + 3x_2^2) \to \min.$

3.2.23. $f(x) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \to \min;\ u_i = c_i - x_1(1 - x_2^i),$ $c_1 = 1{,}5,\ c_2 = 2{,}25,\ c_3 = 2{,}625.$

3.2.24. $f(x) = 100\left[x_3 - \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)^2\right]^2 + (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \to \min.$

3.2.25. $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \to \min.$

3.2.26. $f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4 \to \min.$

3.2.27. $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_1 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 + 10{,}1[(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2] + 19{,}8(x_2 - 1)(x_4 - 1) \to \min.$

3.2.28. $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2 \to \min.$

3.2.29. $f(x) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2 \to \min.$

Решить задачи (3.2.30)–(3.2.36), выбрав подходящий метод.

3.2.30. $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{99}\left\{\exp\left[-\dfrac{(u_i - x_2)^{x_3}}{x_1}\right] - 0{,}01i\right\}^2 \to \min;$

$u_i = 25 + \left(-50\ln\dfrac{i}{100}\right)^{-1{,}5},\ 0{,}1 \le x_1 \le 100,\ 0 \le x_2 \le 25{,}6,$ $0 \le x_3 \le 5.$

3.2.31. $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{10}\{[\ln(x_i - 2)]^2 + [\ln(10 - x_i)]^2\} - \left(\prod\limits_{i=1}^{10} x_i\right)^{0{,}2} \to \min;\ 2{,}001 \le x_i \le 9{,}999,\ i = \overline{1, 10}.$

3.2.32. $f(x) = \sum_{i=1}^{10} x_i \left(c_i + \ln \left(x_i \,/\, \sum_{i=1}^{10} x_i \right) \right) \to \min;$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 + x_{10} - 2 = 0,$

$x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 - 1 = 0,$

$x_3 + x_7 + x_8 + 2x_9 + x_{10} - 1 = 0, \ x_i \ge 0, \ i = \overline{1, 10},$

$c_1 = -6{,}089, \ c_2 = -17{,}164, \ c_3 = -34{,}054, \ c_4 = -5{,}914,$

$c_5 = -24{,}721, \ c_6 = -14{,}986, \ c_7 = -24{,}100, \ c_8 = -10{,}708,$

$c_9 = -26{,}662, \ c_{10} = -22{,}179.$

3.2.33. $f(x) = x_1^{1/4} + (x_2/x_1)^{1/4} + (64/x_2)^{1/4} \to \min;$

$x_1 \ge 1, \ x_2 \ge x_1, \ x_2 \le 64.$

3.2.34. $f(x) = x_1^4 + x_2 \to \min;$

$2x_1^2 + 3x_2 \le 9, \ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$

3.2.35. $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min;$

$x_1 + x_2 \le 3, \ 10x_1 - x_2 \ge 2, \ x_2 \ge 0.$

3.2.36. $f(x) = (x_1 - x_2)^2 + x_2 \to \min;$

$x_1 + x_2 \ge 1, \ x_1 + 2x_2 \le 3, x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$

3.3. Общая задача нелинейного программирования

Рассматривается задача математического программирования:

$$x^*: f(x) \to \min, \ x \in X = \{x \in E^n: x \in \Omega,$$
$$g_i(x) \le 0, \ i = 1, 2, \ldots, r, \ g_i(x) = 0, i = r + 1, \ldots, m, \ m - r < n\}. \tag{3.3.1}$$

Если ввести множество

$$Y = \{x \in E^n: g_i(x) \le 0, \ i = 1, 2, \ldots, r,$$
$$g_i(x) = 0, \ i = r + 1, \ldots, m, \ m - r < n\}, \tag{3.3.2}$$

то поставленную задачу можно записать в виде

$$x^*: f(x) \to \min, \quad x \in X = \Omega \cap Y.$$

Будем предполагать, что множество $\Omega \subset E^n$ такой структуры, при которой осуществима задача минимизации скалярной функции на этом множестве.

3.3.1. Метод штрафных функций. Введем в рассмотрение функции

$$P_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} [g_i^+(x)]^2, \quad P_2(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=r+1}^{m} g_i^2(x), \tag{3.3.4}$$

где $g_i^+(x) = \max\{0, g_i(x)\}$, $i = 1, \ldots, r$ — «срезка» функции $g_i(x)$. Очевидно, что $P_1(x) \geq 0$, $P_2(x) \geq 0$ и функция

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) \tag{3.3.5}$$

обладает свойством $P(x) = 0$, $x \in Y$, $P(x) > 0$, $x \notin Y$. Последнее позволяет интерпретировать функцию $P(x)$ как штраф за нарушение ограничений равенств и неравенств в задаче (3.3.1). Нетрудно также заметить, что штрафная функция вида (3.3.4), (3.3.5) является непрерывной и непрерывно дифференцируемой, если функции $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ — непрерывны и непрерывно дифференцируемы. В этом случае

$$\begin{aligned} \nabla P_1(x) &= \sum_{i=1}^{r} g_i^+(x) \nabla g_i(x), \\ \nabla P_2(x) &= \sum_{i=r+1}^{m} g_i(x) \nabla g_i(x). \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Метод штрафных функций использует последовательность чисел

$$\{\alpha_k\}_1^\infty : \alpha_k > 0, \ \alpha_{k+1} < \alpha_k, \ k = 1, 2, \ldots; \ \lim_{l \to \infty} \alpha_k = 0. \tag{3.3.7}$$

На этой последовательности вводится однопараметрическое семейство функций

$$\Phi_k(x) = f(x) + \frac{1}{\alpha_k} P(x), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.3.8}$$

и для каждого фиксированного α_k находится x^k как решение следующей задачи:

$$x^k: \Phi_k(x) \to \min, \quad x \in \Omega, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.3.9}$$

Предположим, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ решение x^k задачи (3.3.9) существует. Тогда при определенных условиях последовательность $\{x^k\}$, генерируемая методом штрафных функций, будет сходиться к решению задачи (3.3.1) [11, с. 82].

Пример 3.3.1. Рассмотрим задачу

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to \min; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Ее решение — вектор x^* с компонентами $x_i^* = 1/n$, $i = 1, \ldots, n$.

Функция $\Phi_k(x)$ для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2\alpha_k} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right)^2 .$$

Вычисляя градиент функции $\Phi_k(x)$ и приравнивая его нулю, получим, что

$$x_i^k = \frac{1}{n + \alpha_k} \to \frac{1}{n} \text{ при } \alpha_k \to 0.$$

При практическом использовании метода штрафных функций нет необходимости в точном решении задачи (3.3.9) на каждом шаге. Важно лишь то, чтобы при переходе от шага к шагу точность увеличивалась.

Далее, основная сложность реализации метода штрафных функций заключена в неограниченном увеличении штрафного коэффициента $1/\alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots$, которое приводит к усложнению решения задачи (3.3.9). Действительно, с увеличением номера k свойства функции $\Phi_k(x) = f(x) + (1/\alpha_k)P(x)$ могут значительно ухудшаться: эта функция может стать овражной, значения ординаты, как и некоторые координаты $\nabla\Phi_k(x)$, могут быть слишком большими и т.п. В этом отношении иногда бывает предпочтительней одна из модификаций метода штрафных функций, которая называется «методом нагруженных функций».

3.3.2. Метод нагруженных функций. Пусть $P(x)$ — штрафная функция, определенная формулами (3.3.4), (3.3.5). Для некоторого числа α определим однопараметрическое семейство функций $\Phi(x, \alpha)$ вида

$$\Phi(x, \alpha) = P(x) + [f(x) - \alpha]^2, \quad x \in \Omega, \tag{3.3.10}$$

и предположим, что для каждого α разрешима задача минимизации

$$x(\alpha)\colon \Phi(x(\alpha), \alpha) = \min_{x \in \Omega} \Phi(x, \alpha). \tag{3.3.11}$$

Далее обозначим

$$\varphi(\alpha) = \Phi(x(\alpha), \alpha). \tag{3.3.12}$$

Очевидно, что $\varphi(\alpha) \geq 0$. Кроме того (см. [11, с. 84]),

1) если $\bar{x} \in X$ — допустимая точка и $\bar{f} = f(\bar{x})$, то число $\alpha = \bar{f}$ является корнем уравнения

$$\varphi(\alpha) = 0; \tag{3.3.13}$$

2) если $\bar{\alpha}$ — корень уравнения (3.3.13), то $x(\bar{\alpha}) \in X$, $\bar{\alpha} = f(x(\bar{\alpha}))$;

3) если $\alpha = \alpha^* > -\infty$ является наименьшим из корней уравнения (3.3.13), то $x(\alpha^*) = x^*$; и наоборот, если x^* — решение задачи (3.3.1), $f_* = f(x^*) > -\infty$, то число $\alpha^* = f_*$ является наименьшим из корней уравнения (3.3.13).

Таким образом, решение задачи (3.3.1) методом нагруженных функций сводится к нахождению наименьшего из корней уравнения (3.3.13), левая часть которого формируется посредством решения задачи минимизации (3.3.11) для функции вида (3.3.10).

Реализация метода существенно упрощается, если предварительно удается решить две вспомогательные задачи:

$$\tilde{f} = f(\tilde{x}) = \min_{x \in \Omega} f(x), \quad \bar{x}\colon P(\bar{x}) = \min_{x \in \Omega} P(x) = 0.$$

Собственно, $\tilde{f} > -\infty$ есть нижняя грань целевой функции на множестве Ω, а $\bar{x}$ — одна из допустимых точек множества X.

Очевидно, что $\tilde{f} \le f(\bar{x}) = \bar{f}$, причем, если $\tilde{f} = \bar{f}$, то $\bar{x} = x^*$. Поэтому будем считать, что $\tilde{f} < \bar{f}$. Кроме того, $\bar{\alpha} = \bar{f}$ — корень уравнения (3.3.13). Отсюда очевидно, что для решения x^* задачи (3.3.1) справедливо

$$f(x^*) = f_* \in [\tilde{f}, \bar{f}].$$

Таким образом, решение задачи (3.3.1) уже будет сводиться к нахождению наименьшего корня уравнения (3.3.13) на отрезке $[\tilde{f}, \bar{f}]$, $\varphi(\bar{f}) = 0$, $\varphi(\tilde{f}) > 0$, ибо в противном случае $x(\tilde{f}) = x^*$.

В другом варианте метода нагруженных функций, называемом методом параметризации целевой функции, задается произвольное начальное значение параметра α_k, а затем на каждой итерации α_k пересчитывается по одной из формул (см. [42]):

$$\alpha_{k+1} = f(x(\alpha_k)), \quad \alpha_{k+1} = \alpha_k + \sqrt{\varphi(\alpha_k)}, \quad \alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{\varphi(\alpha_k)}{f(x(\alpha_k)) - \alpha_k}.$$

Пример 3.3.2. Рассмотрим задачу

$$f(x) = 3x_1 + x_2 \to \min;$$

$$x_1 + x_2 = 5, \ 0 \le x_1 \le 7, \ 0 \le x_2 \le 4.$$

Решение этой задачи — вектор $x^* = (1, 4)$, $f(x^*) = 7$.

Итерации метода при использовании формулы

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{\varphi(\alpha_k)}{f(x(\alpha_k)) - \alpha_k}$$

приведены в следующей таблице:

k	α_k	$x(\alpha_k)$	$\varphi\alpha_k$	$f(x(\alpha_k))$
1	0	(0; 2,5)	12,5	2,5
2	5	(0,4; 4)	0,4	5,2
3	7	(1; 4)	0	7

3.3.3. Метод множителей Лагранжа. Для задачи (3.3.1) определим функцию Лагранжа в нормальной форме:

$$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \tag{3.3.14}$$

где

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m),$$

$$\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in E^m : \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_r \geq 0\}.$$

***Определение* 3.3.1.** Точку (λ^*, x^*) назовем седловой точкой функции $L(\lambda, x)$ в области $\Lambda \times \Omega$, если

$$L(\lambda, x^*) \leq L(\lambda^*, x^*) \leq L(\lambda^*, x), \quad \lambda \in \Lambda, \quad x \in \Omega.$$

Теоремы, связывающие решение задачи математического програмирования (3.3.1) с седловыми точками функции Лагранжа, обычно называют теоремами Куна–Таккера по имени ученых, получивших первые результаты такого типа.

Теорема 3.3.1. *Если точка* (λ^*, x^*) *является седловой точкой для нормальной функции Лагранжа* (3.3.14) *в области* $\Lambda \times \Omega$, *то* x^* *— решение задачи* (3.3.1).

(Доказательство теоремы см. в [11, с. 94].)

Из теоремы Куна–Таккера следует, что для решения задачи (3.3.1) достаточно найти седловую точку функции Лагранжа. Для этого, очевидно, можно использовать итерационный процесс, на каждом шаге которого осуществляется подъем по λ и спуск по x, например,

$$(\lambda^0, x^0) \in \Lambda \times \Omega \text{ — произвольно}, \tag{3.3.15}$$

$$x^{k+1} = P_\Omega(x^k - \alpha_k L_x(\lambda^k, x^k)), \tag{3.3.16}$$

$$\lambda^{k+1} = P_\Lambda(\lambda^k + \alpha_k L_\lambda(\lambda^k, x^k)) = P_\Lambda(\lambda^k + \alpha_k g(x^k)). \tag{3.3.17}$$

Здесь $P_\Omega(z)$ — проекция точки z на множество Ω, $P_\Lambda(z)$ — проекция точки z на множество Λ, $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$, $L_x(\lambda, x) = \left(\frac{\partial L(\lambda, x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial L(\lambda, x)}{\partial x_n}\right)$, $L_\lambda(\lambda, x) = \left(\frac{\partial L(\lambda, x)}{\partial \lambda_1}, \ldots, \frac{\partial L(\lambda, x)}{\partial \lambda_m}\right) = g(x)$. Заметим, что проецирование на множество Λ осуществляется просто:

$$[P_\Lambda(z)]_i = z_i^+, \quad i = 1, \ldots, r,$$

$$[P_\Lambda(z)]_i = z_i, \quad i = r + 1, \ldots, m.$$

Вместо метода (3.3.16), (3.3.17) можно использовать метод:

$$x^{k+1} \in \Omega; \; L(\lambda^k, x^{k+1}) = \min_{x \in \Omega} L(\lambda^k, x), \tag{3.3.18}$$

$$\lambda^{k+1} = P_\Lambda(\lambda^k + \alpha_k g(x^{k+1})). \tag{3.3.19}$$

К сожалению, методы (3.3.16), (3.3.17) и (3.3.18), (3.3.19) могут и не сходиться. Значительно лучшими свойствами сходимости обладают рассматриваемые ниже методы модифицированных функций Лагранжа.

3.3.4. Методы модифицированных функций Лагранжа. Рассмотрим задачу на условный экстремум:

$$f(x) \to \min; \quad g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3.3.20}$$

Модифицированной функцией Лагранжа для задачи (3.3.20) называется функция

$$M(\lambda, x, K) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \frac{1}{2} K \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x). \tag{3.3.21}$$

Нетрудно видеть, что функция (3.3.21) представляет собой «гибрид» из нормальной функции Лагранжа и штрафной функции. Метод модифицированной функции Лагранжа для задачи (3.3.20) имеет вид:

$$x^{k+1} = \arg\min_x M(\lambda^k, x, K), \tag{3.3.22}$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + K g(x^{k+1}), \tag{3.3.23}$$

где $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$. При не очень жестких предположениях на задачу (3.3.20) и достаточно больших, но фиксированных K метод (3.3.22), (3.3.23) сходится к седловой точке нормальной функции Лагранжа (см., например, [35, с. 214]). На практике метод (3.3.22), (3.3.23) удобно реализовать по схеме метода штрафных функций, задавшись не очень большим значением параметра K (штрафного коэффициента), затем увеличивать его от итерации к итерации.

Для задачи с ограничениями-неравенствами

$$f(x) \to \min; \quad x \in \Omega, \quad g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \qquad (3.3.24)$$

модифицированная функция Лагранжа имеет вид

$$M(\lambda, x, K) = f(x) + \frac{1}{2K} \| [\lambda + Kg(x)]^+ \|^2 - \frac{1}{2K} \|\lambda\|^2.$$

Метод модифицированных функций Лагранжа аналогичен методу (3.3.22),(3.3.23):

$$x^{k+1} = \arg\min_{x \in \Omega} M(\lambda^k, x, K), \qquad (3.3.25)$$

$$\lambda^{k+1} = [\lambda^k + Kg(x^{k+1})]^+ . \qquad (3.3.26)$$

Если Ω — выпуклое множество и функции $g_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, выпуклы и непрерывно дифференцируемы на Ω, то существует такое $\bar{K}$, что при всех $K > \bar{K}$ последовательность (λ^k, x_k), генерируемая методом (3.3.25), (3.3.26), сходится к седловой точке нормальной функции Лагранжа [35, с. 253].

Упражнения

Выберите подходящий метод и решите следующие задачи математического программирования

3.3.1. $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min;$

$x_1 - 2x_2 + 1 = 0, \quad (1/4)x_1^2 - x_2^2 + 1 \ge 0.$

3.3.2. $f(x) = -2x_1 - 3x_2 + 2x_2^2 \to \min;$

$x_1 + 4x_2 - 4 \le 0, \ x_1 + x_2 - 2 \le 0, \ 0 \le x_1 \le 10, \ 0 \le x_2 \le 10.$

3.3.3. $f(x) = 7(x_1 - 6)^2 + 3(x_2 - 4)^2 \to \min;$

$-x_1x_2 + 1 \le 0, \ x_1^2 + x_2^2 - 9 \le 0, \ 0 \le x_1 \le 10, \ 0 \le x_2 \le 10.$

3.3.4. $f(x) = 6(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min;$

$(x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1 \le 0, 3 - x_1 - x_2 \le 0, 0 \le x_1 \le 10, 0 \le x_2 \le 10.$

3.3.5. $f(x) = (1 + x_1)^2 + x_2^2 \to \min;$

$x_1^2 + x_2^2 - x_3 - 4 = 0, \ 16 - x_1^2 - x_2^2 - x_4 = 0, \ -5 \le x_1 \le 20,$
$-5 \le x_2 \le 20, \ x_3 \ge 0, \ x_4 \ge 0.$

3.3.6. $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min;$

$-x_1^2 + x_2 \ge 0, \ -x_1 - x_2 + 2 \ge 0.$

3.3.7. $f(x) = -x_1x_2x_3 \to \min;$

$x_1 + 2(x_2 + x_3) - x_4 = 0,\ 72 - x_1 - 2(x_2 + x_3) - x_5 = 0,$

$0 \le x_1 \le 20,\ 0 \le x_2 \le 11,\ 0 \le x_3 \le 42,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$

3.3.8. $f(x) = \frac{1}{2}(x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_9 - x_5x_9 + x_5x_8 - x_6x_7) \to \min;$

$x = (x_1, \ldots, x_{21}),\ x_3^2 + x_4^2 + x_{10} - 1 = 0,\ x_5^2 + x_6^2 + x_{11} - 1 = 0,$

$x_1^2 + (x_2 - x_9)^2 + x_{12} - 1 = 0,$

$(x_1 - x_5)^2 - (x_2 - x_6)^2 + x_{13} - 1 = 0,$

$(x_1 - x_7)^2 - (x_2 - x_8)^2 + x_{14} - 1 = 0,$

$(x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2 + x_{15} - 1 = 0,$

$(x_3 - x_7)^2 + (x_4 - x_8)^2 - x_{16} - 1 = 0,$

$x_7^2 + (x_8 - x_9)^2 + x_{17} - 1 = 0,\ x_2x_3 - x_1x_4 + x_{18} = 0,$

$-x_3x_9 + x_{19} = 0,\ x_5x_9 + x_{20} = 0,$

$-x_5x_8 + x_6x_7 + x_{21} = 0,\ x_i \ge 0,\ i = 10, 11, \ldots, 21,\ 0 \le x_9 \le 1.$

3.3.9. $f(x) = 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 \to \min;$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0,\ 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0,$

$x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3.$

3.3.10. $f(x) = 75{,}196 - 3{,}8112x_1 + 0{,}12694x_1^2 - 2{,}0567\cdot10^{-3}x_1^3 +$
$+ 1{,}0345\cdot10^{-5}x_1^4 - 6{,}8306x_2 + 0{,}030234x_1x_2 - 1{,}28134\cdot10^{-3}x_2x_1^2 +$
$+ 3{,}5256\cdot10^{-5}x_2x_1^3 - 2{,}266\cdot10^{-7}x_2x_1^4 + 0{,}25645x_2^2 - 3{,}4604\cdot10^{-3}x_2^3 +$
$+ 1{,}3514\cdot10^{-5}x_2^4 - \dfrac{28{,}106}{x_2 + 1} - 5{,}2375\cdot10^{-6}x_1^2x_2^2 - 6{,}3\cdot10^{-8}x_1^3x_2^2 +$
$+ 7\cdot10^{-10}x_1^3x_2^3 + 3{,}4054\cdot10^{-4}x_1x_2^2 - 1{,}6638\cdot10^{-6}x_1x_2^3 -$
$- 2{,}8673 \exp(0{,}0005x_1x_2) \to \max;$

$0 \le x_1 \le 75,\ 0 \le x_2 \le 65,\ x_1x_2 - 700 \ge 0,\ x_2 - 5\left(\dfrac{x_1}{25}\right)^2 \ge 0,$

$(x_2 - 50)^2 - 5(x_1 - 55) \ge 0.$

3.3.11. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 5x_2 \to \min;$

$2x_1^2 + x_2^2 + x_1 \le 8,\ x_1 + x_2 \le 5,\ x_1 \ge 0.$

3.3.12. $f(x) = x_3^2 + x_1x_2 \to \min;$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 2,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3.$

Глава 4

ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

4.1. Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим задачу поиска экстремума функционала

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt \qquad (4.1.1)$$

среди непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$ скалярных функций, принимающих на концах отрезка заданные значения:

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1. \qquad (4.1.2)$$

(Такие функции мы будем в дальнейшем называть допустимыми.) Предполагается, что подынтегральная функция $F = F(x, \dot{x}, t)$ дважды дифференцируема по своим аргументам.

Понятия локального и глобального экстремумов вводятся точно также, как и в общей экстремальной задаче [3, с. 30; 21, с. 11]. Однако в вариационном исчислении существенную роль играет выбор нормы, используемой для оценки близости допустимых функций.

Определение **4.1.1.** Допустимая функция $x^* = x^*(t)$ доставляет слабый локальный минимум (максимум) в задаче (4.1.1), (4.1.2), если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой допустимой функции $x = x(t)$, удовлетворяющей условию

$$\|x - x^*\|_{C_1([t_0,t_1])} =$$
$$= \max\left\{ \max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t) - x^*(t)|,\ \max_{t\in[t_0,t_1]} |\dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)| \right\} \le \varepsilon, \quad (4.1.3)$$

выполняется неравенство

$$J(x^*) \le J(x)\,[J(x^*) \ge J(x)]. \qquad (4.1.4)$$

***Определение* 4.1.2.** Допустимая функция $x^* = x^*(t)$ доставляет сильный локальный минимум (максимум) в задаче (4.1.1), (4.1.2), если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой допустимой функции $x = x(t)$, удовлетворяющей условию

$$\|x - x^*\|_{C([t_0,t_1])} = \max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t) - x^*(t)| \leq \varepsilon, \tag{4.1.5}$$

выполняется соответствующее неравенство из (4.1.4).

Если на некоторой кривой достигается сильный локальный экстремум, то на ней же будет достигаться и слабый экстремум (но не наоборот!). Это вызвано тем, что окрестность функции $x^* = x^*(t)$, определяемая неравенством (4.1.5), содержит в себе (при том же ε) ε-окрестность, удовлетворяющую условию (4.1.3).

Приведем два примера, иллюстрирующих ее содержательный смысл.

Пример 4.1.1. (Задача о кратчайшем расстоянии между двумя точками в плоскости.) Пусть в декартовой системе координат xOt заданы две точки $A(x^0, t_0)$, $B(x^1, t_1)$. Требуется среди всех гладких кривых $x = x(t)$, соединяющих точки A и B, найти такую, по которой расстояние от точки A до точки B будет наименьшим.

Так как дифференциал дуги вдоль любой кривой $x = x(t)$ вычисляется по формуле

$$ds = \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}, \quad \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt},$$

то поставленная задача сводится к минимизации функционала

$$J(x) = \int_T \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\, dt, \quad T = [t_0, t_1]$$

на множестве

$$X = \{x(\cdot) \in C_1(T)\colon\ x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1\}.$$

В данном случае решением задачи будет прямая линия

$$x^* = \frac{x^1 - x^0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + x^0,$$

проходящая через точки A и B. Отсюда и происходит определение прямой линии как кривой кратчайшего расстояния.

Пример 4.1.2. (Задача о брахистохроне.) В июне 1696 г. в журнале «Acta Eruditorum» появилась заметка швейцарского математика И. Бернулли, в которой была поставлена следующая задача. В вертикальной плоскости даны две точки A и B. По какой кривой тяжелая материальная точка скатится из верхней точки за наименьший промежуток времени?

Перейдем к математической постановке задачи о брахистохроне. В декартовой системе координат xOt ось ординат x направим вертикально вниз и поместим точку A в начало координат $A(0, 0)$.

Пусть также заданы координаты $x^1 > 0$, $t_1 > 0$ нижней точки $B(x^1, t_1)$. Теперь предположим, что по некоторой гладкой кривой $x = x(t)$, соединяющей точки A и B, под воздействием силы тяжести скатывается материальная точка M. Будем считать, что начальная скорость падающей точки равна нулю и движение происходит без учета сопротивления. Напомним, что в соответствии с законом Галилея скорость V тела M в точке (x, t) зависит не от формы кривой $x = x(t)$ в интервале $(0, t)$, а лишь от самой ординаты $x(t)$, причем эта скорость равна $\sqrt{2gx}$, т.е.

$$V = \frac{ds}{d\tau} = \sqrt{2gx(t)},$$

где $ds = \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}$ — дифференциал дуги, g — ускорение свободного падения, τ — время. Отсюда

$$d\tau = \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}}{\sqrt{2gx(t)}}.$$

Следовательно, задача о брахистохроне сводится к минимизации функционала

$$J(x) = \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}}{\sqrt{2gx(t)}}\, dt$$

на множестве

$$X = \{x \in C_1([0, t_1]):\ x(0) = 0,\ x(t_1) = x^1\}.$$

Прямая линия, соединяющая точки A и B, здесь уже не является решением задачи. Как можно будет убедиться потом (см. упражнение 4.1.34), решением $x^* = x^*(t)$ будет дуга циклоиды. Эта линия и называется брахистохроной. Практически к этому решению уже пришли строители зданий в тропических странах (буддийские пагоды), где в условиях затяжных дождей быстрейший скат воды с крыши существенно влиял на ее долговечность.

Теорема 4.1.1. (См. [3, с. 59; 13, с. 13; 21, с. 69; 22, с. 21, 22; 11, с. 113].) *Если допустимая функция $x = x(t)$ доставляет слабый экстремум (минимум или максимум) функционалу* (4.1.1) *в простейшей задаче вариационного исчисления, то она удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера*:

$$\frac{\partial F(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}} = 0. \tag{4.1.6}$$

Уравнение Эйлера является и необходимым условием сильного локального экстремума (см. упражнение 4.1.1). Непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению Эйлера с краевыми условиями (4.1.2), называются допустимыми экстремалями задачи.

Наша схема исследования простейшей задачи вариационного исчисления будет сводится к поиску допустимых экстремалей. В некоторых задачах непосредственным исследованием поведения функционала в окрестности подозрительной на экстремум функции удается сделать вывод о том, достигается или нет на рассматриваемой допустимой экстремали минимум или максимум. Необходимое условие слабого экстремума функционала, связанное со знаком второй вариации (усиленное условие Лежандра), можно посмотреть в книгах [3, с. 371–374; 10, с. 72; 13, с. 18, 19; 18, с. 265; 21, с. 129; 22, с. 102]; достаточное условие слабого экстремума — в [3, с. 377; 18, с. 268; 22, с. 115]; условия сильного минимума, связанные с теорией поля экстремалей — в [3, с. 76, 77, 372; 10, с. 86–90; 21, с. 130; 22, с. 149, 150; 45, с. 360].

Уравнение Эйлера в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 F(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}(t) + \frac{\partial^2 F(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial x\, \partial \dot{x}}\dot{x}(t) + \\ + \frac{\partial^2 F(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial t\, \partial \dot{x}} - \frac{\partial F(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial x} = 0.$$

Существование второй производной $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$ не предполагалось в постановке задачи. Однако если для допустимой экстремали $x^* = x^*(t)$ в некоторой внутренней точке $\bar{t}$ отрезка $[t_0, t_1]$ выполнено условие Гильберта (см. [13, с. 16; 18, с. 258])

$$\frac{\partial^2 F(x^*(\bar{t}), \dot{x}^*(\bar{t}), \bar{t})}{\partial \dot{x}^2} \neq 0,$$

то в окрестности данной точки экстремаль дважды дифференцируема.

Пример 4.1.3. Исследовать на экстремум функционал

$$J(x) = \int_0^4 (\dot{x}^2(t) - x(t))\, dt$$

при условиях

$$x(0) = x(4) = 1. \tag{4.1.7}$$

Составляем уравнение Эйлера:

$$2\ddot{x} + 1 = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2.$$

Краевые условия (4.1.7) определяют единственную допустимую экстремаль:

$$x^* = -\frac{t^2}{4} + t + 1.$$

В рассматриваемом примере удается установить, что функция $x^* = x^*(t)$ доставляет глобальный минимум целевому функционалу. По определению глобального минимума можно доказать, что

$$J(x^*) \le J(x)$$

для всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 4]$ функций, $x = x(t)$, удовлетворяющих условиям (4.1.7). Для доказательства удобно ввести функцию $h(t) = x(t) - x^*(t)$ и показать, что

$$J(x^*) \le J(x^* + h)$$

для всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 4]$ функций $h = h(t)$, удовлетворяющих условиям

$$h(0) = h(4) = 0.$$

Действительно,

$$J(x^* + h) = \int_0^4 [(\dot{x}^2 + \dot{h})^2 - x^* - h]\, dt = \int_0^4 [(\dot{x}^*)^2 - x^*]\, dt +$$

$$+ 2\int_0^4 \dot{x}^*\dot{h}\, dt + \int_0^4 \dot{h}^2\, dt - \int_0^4 h\, dt.$$

Применим ко второму интегралу формулу интегрирования по частям с учетом того, что $h(0) = h(4) = 0$. В итоге получим

$$J(x^* + h) = J(x^*) + \int_0^4 \dot{h}^2\, dt \ge J(x^*).$$

Следовательно, функция $x^* = x^*(t)$ доставляет глобальный минимум рассматриваемому функционалу в классе непрерывно дифференцируемых на отрезке [0, 4] функций, принимающих на концах отрезка значения, определяемые условиями (4.1.7). Наименьшее значение функционал

$$J(x^*) = \int_0^4 (0{,}5t^2 - 2t)\,dt = -5\,\frac{1}{3}.$$

Таким образом, задача поиска допустимых экстремалей сводится к решению краевой задачи для (вообще говоря, нелинейного) обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Перечислим те частные случаи, при которых интегрирование уравнения Эйлера упрощается.

1. $F = F(\dot{x}(t))$, т.е. подынтегральная функция зависит явно только от $\dot{x}$. Решениями уравнения Эйлера являются линейные функции (см. [45, с. 301]) $x = C_1 t + C_2$. Константы находятся из краевых условий (4.1.2).

2. $F = F(\dot{x}(t), t)$. Уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F(t, \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}}\right] = 0,$$

а, следовательно, первый интеграл уравнения имеет вид

$$\frac{\partial F(t, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = C. \tag{4.1.8}$$

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка иногда удается разрешить относительно $\dot{x}$. В общем же случае подобные уравнения интегрируются введением параметра r и использованием подстановки $\dot{x} = \varphi(r)$. Если уравнение (4.1.8) удается разрешить относительно t, то часто целесообразно применять подстановку $\dot{x} = r$.

3. $F = F(x(t), \dot{x}(t))$, т.е. подынтегральная функция не зависит явно от переменной интегрирования. В этом случае (см. [22, с. 25; 45, с. 302])

$$\frac{d}{dt}\left[F(x, \dot{x}) - \dot{x}\,\frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}\right] = 0, \tag{4.1.9}$$

а, следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера

$$F - \dot{x}\,\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = C.$$

Данное уравнение первого порядка интегрируется путем разрешения относительно $\dot{x}$ или введением параметра.

Пример 4.1.4. Найти допустимые экстремали в задаче вариационного исчисления

$$J(x) = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + x^2}{\dot{x}}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Записываем первый интеграл уравнения Эйлера:

$$\frac{1 + x^2}{\dot{x}} = C.$$

Отсюда

$$C_1 \operatorname{arctg} x = t + C.$$

Заданным условиям на концах отрезка интегрирования удовлетворяет единственная функция $x^* = \operatorname{tg} t$.

Отметим, что для получения (4.1.9) выделение полной производной по t осуществляется путем умножения обеих частей уравнения Эйлера (4.1.6) на $\dot{x}$. Поэтому уравнение (4.1.9) и исходное уравнение Эйлера (4.1.6) не совпадают полностью (возможно появление «лишних» решений $x(t) \equiv \text{const}$). Подчеркнем также, что в некоторых конкретных задачах не имеет смысла пользоваться указанной формулой для первого интеграла.

Возвратимся к примеру 4.1.3. Согласно (4.1.9) для решений уравнения Эйлера должно выполняться условие

$$\frac{d}{dt}[\dot{x}^2 + x] = 0,$$

или

$$\dot{x}^2 + x = C. \tag{4.1.10}$$

Не говоря уже о том, что интегрирование данного уравнения несколько более трудоемко по сравнению с исходным уравнением Эйлера, заметим, что функция $x(t) \equiv 1$, $t \in [0, 4]$, также является решением (4.1.10), хотя и не удовлетворяет уравнению Эйлера в форме (4.1.6).

4. $F = F(x(t), t)$. Уравнение Эйлера в рассматриваемом варианте превращается в конечное, а не дифференциальное:

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Решение вариационной задачи (в классе непрерывно дифференцируемых функций) может существовать лишь в том исключительном случае, когда кривая, определяемая уравнением Эйлера, проходит через точки (t_0, x^0) и (t_1, x^1).

Пример 4.1.5. Определить значения параметра a, при которых решение задачи

$$\int_0^1 (x(t) - 1)^2 \, dt \to \min, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = a,$$

существует в классе непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций. В рассматриваемом примере уравнение Эйлера:

$x - 1 = 0$. Отсюда $x(t) \equiv 1$, $t \in [0, 1]$. Если $a = 1$, то найденная функция является допустимой и доставляет глобальный минимум функционалу. При $a \neq 1$ допустимых экстремалей в выбранном классе функций нет. Отметим, что при любых значениях параметра существует решение задачи в классе кусочно-непрерывных функций:

$$x^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ a, & t = 1. \end{cases}$$

5. $F = F(x(t), \dot{x}(t), t) = A(t, x) + B(t, x)\dot{x}$, т.е. подынтегральная функция линейна относительно $\dot{x}$. Уравнение Эйлера превращается в конечное:

$$\frac{\partial A(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial B(t, x)}{\partial t} = 0,$$

и, следовательно, справедливы сделанные в предыдущем случае выводы. Однако возможно и вырождение уравнения Эйлера в тождество:

$$\frac{\partial A(t, x)}{\partial x} \equiv \frac{\partial B(t, x)}{\partial t}.$$

В частности, это произойдет, если функция A не зависит от x, а функция B не зависит от t. В этом случае по теореме о независимости интеграла второго рода от пути интегрирования целевой функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \left(A(t, x) + B(t, x)\frac{dx}{dt}\right) dt = \int_{(t_0, x^0)}^{(t_1, x^1)} A(t, x)\, dt + B(t, x)\, dx$$

постоянен на всех допустимых кривых $x = x(t)$.

Пример 4.1.6. Решить задачу вариационного исчисления

$$J(x) = \int_2^6 (x + t\dot{x})\, dt \to \text{extr}, \quad x(2) = 0, \quad x(6) = 1.$$

В данном примере уравнение Эйлера превращается в тождество: $1 = 1$. Представим $J(x)$ в виде

$$J(x) = \int_2^6 (x\, dt + t\, dx) = \int_2^6 d(tx) = 6,$$

т.е. функционал постоянен для всех допустимых функций.

Упражнения

4.1.1. Доказать, что любое необходимое условие слабого экстремума является в то же время необходимым условием сильного экстремума.

4.1.2. Показать, что в задаче вариационного исчисления

$$J(x) = \int_0^{\pi} x^2(1 - \dot{x}^2)\,dt \to \min, \quad x(0) = x(\pi) = 0,$$

функция $x(t) \equiv 0$, $t \in [0, \pi]$ удовлетворяет уравнению Эйлера, доставляет слабый минимум, но не доставляет сильного минимума целевому функционалу.

4.1.3. (Пример Гильберта.) Показать, что в задаче вариационного исчисления

$$J(x) = \int_0^1 t^{2/3}\dot{x}^2\,dt \to \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1,$$

существует единственная функция, которая удовлетворяет уравнению Эйлера, доставляет глобальный минимум функционалу, но не является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$.

4.1.4. Показать, что допустимая экстремаль не доставляет минимума в задаче вариационного исчисления

$$\int_0^5 (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \min, \quad x(0) = x(5) = 0.$$

4.1.5. (Пример Вейерштрасса.) Показать, что не существует гладких решений задачи

$$J(x) = \int_{-1}^{1} t^2\dot{x}^2\,dt \to \min, \quad x(-1) = -1, \quad x(1) = 1.$$

Исходя из вида целевого функционала и краевых условий, найти глобальное решение в классе дифференцируемых почти всюду на отрезке $[-1, 1]$ функций.

Найти допустимые экстремали в задачах поиска экстремума функционала $J(x)$ с заданными условиями на концах:

4.1.6. $J(x) = \int_0^1 \sin\dot{x}\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \pi;$

4.1.7. $J(x) = \int_0^1 \dot{x}^2\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1;$

4.1.8. $J(x) = \int_0^1 \dot{x}^3\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1;$

4.1.9. $J(x) = \int_1^2 t\dot{x}^2\,dt, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 2;$

4.1.10. $J(x) = \int\limits_a^b x\dot{x}\,dt, \quad x(a) = x^0, \quad x(b) = x^1;$

4.1.11. $J(x) = \int\limits_0^1 x\dot{x}^3\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1;$

4.1.12. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x} - 3t^2)^2\,dt, \quad x(0) = x(1) = 0;$

4.1.13. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + 4x^2)\,dt, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = e^2;$

4.1.14. $J(x) = \int\limits_0^\pi (\dot{x} - \cos t)^8\,dt, \quad x(0) = x(\pi) = 0;$

4.1.15. $J(x) = \int\limits_1^2 (2t - x)x\,dt, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 3;$

4.1.16. $J(x) = \int\limits_0^2 (\dot{x}^2 + 6xt)\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 8;$

4.1.17. $J(x) = \int\limits_0^\pi (1/2x^2 + \dot{x}\sin t)\,dt, \quad x(0) = x(\pi) = 1;$

4.1.18. $J(x) = \int\limits_\pi^{2\pi} (x^2 - \dot{x}^2)\,dt, \quad x(\pi) = 1, \quad x(2\pi) = -1;$

4.1.19. $J(x) = \int\limits_0^1 (e^x + t\dot{x})\,dt, \quad x(0) = \pi, \quad x(1) = 2\pi;$

4.1.20. $J(x) = \int\limits_\pi^{2\pi} (\dot{x}^2 - x^2 + 2x\cos t)\,dt, \quad x(\pi) = -1, \; x(2\pi) = 1;$

4.1.21. $J(x) = \int\limits_0^1 (x^2 + \cos t + e^{x+t})^2\,dt, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0;$

4.1.22. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 2tx)\,dt, \quad x(0) = x(1) = 0;$

4.1.23. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - xt^2)\,dt, \quad x(0) = x(1) = 0;$

4.1.24. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x\dot{x} + 12tx)\,dt, \quad x(0) = x(1) = 0;$

4.1.25. $J(x) = \int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - tx)\,dt, \quad x(0) = x(\pi/2) = 0;$

4.1.26. $J(x) = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (x^2 + 6x\sin 2t - \dot{x}^2)\,dt, \quad x(\pi/2) = 0, \ x(\pi) = -1;$

4.1.27. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x} - x + t)\,dt, \quad x(0) = 0, \ x(1) = 2;$

4.1.28. $J(x) = \int\limits_0^1 (5x^4 + t^2\dot{x})\,dt, \quad x(0) = 0, \ x(1) = a;$

где a — произвольный параметр;

4.1.29. $J(x) = \int\limits_0^3 (\dot{x}e^t + 16x^4)\,dt, \quad x(0) = 1/4, \ x(3) = 0;$

4.1.30. $J(x) = \int\limits_0^1 \sqrt{x(1 + \dot{x}^2)}\,dt, \quad x(0) = x(1) = \sqrt{2}/2.$

4.1.31. Показать, что среди всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки плоскости (t_0, x^0) и (t_1, x^1), $t_1 > t_0$, наименьшей длиной обладает отрезок прямой (см. пример 4.1.1).

4.1.32. Найти плоскую кривую, время перемещения по которой из точки $t_0 = 1$, $x^0 = 0$ в точку $t_1 = 2$, $x^1 = 1$ со скоростью $v = t$ является наименьшим.

4.1.33. Предположим, что скорость движения по некоторой кривой $x = x(t)$ из заданной точки (t_0, x^0) в точку (t_1, x^1) является дифференцируемой функцией, зависящей только от $\dot{x}$. Показать, что наименьшее время перемещения может быть достигнуто лишь при движении вдоль прямой, соединяющей эти заданные точки.

4.1.34. (Задача о брахистохроне.) Показать, что допустимой экстремалью в примере 4.1.2 является дуга циклоиды.

4.1.35. (Задача о катеноиде.) Среди гладких линий, соединяющих две точки в положительной полуплоскости, найти ту, дуга которой при вращении относительно оси абсцисс образует поверхность с наименьшей площадью.

4.2. Вариационные задачи с подвижными границами

В предыдущем параграфе была рассмотрена схема поиска допустимых экстремалей функционала (4.1.1) среди гладких кривых, концы которых жестко закреплены условиями (4.1.2). Перейдем к обобщениям простейшей задачи вариационного исчисления, в которых одно или оба условия (4.1.2) заменены на менее жесткие.

Необходимым условием слабого экстремума функционала (4.1.1) при любых граничных условиях является равенство нулю первой вариации функционала. Выражение для первой вариации, подсчитанной для проходящей через точки (t_0, x^0), (t_1, x^1) кривой $x = x(t)$, доставляющей слабый экстремум (4.1.1) и проварьированной кривой, проходящей через $(t_0 + \delta t_0, x^0 + \delta x^0)$, $(t_1 + \delta t_1, x^1 + \delta x^1)$, имеет вид (с учетом того, что функция, доставляющая слабый экстремум, удовлетворяет уравнению Эйлера (см. (4.1.6); [10, с. 58–62; 22, с. 60; 45, с. 331]):

$$\delta I = \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1} \delta x^1 + \left.\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=t_1} \delta t_1 - \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_0} \delta x^0 - \left.\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=t_0} \delta t_0. \quad (4.2.1)$$

В этом выражении функция F и ее производная $\partial F/\partial \dot{x}$ подсчитываются на экстремали $x = x(t)$.

Таким образом, функция, доставляющая слабый экстремум в вариационной задаче с подвижными концами, удовлетворяет уравнению Эйлера и следующим условиям (в зависимости от конкретных требований, которым должны удовлетворять допустимые функции на левом и правом концах).

1. (Задача с естественно граничными условиями.) Отрезок $T = [t_0, t_1]$ задан, концы x^0 и x^1 не закреплены.

Требование равенства нулю первой вариации (4.2.1) при любых вариациях δx^0, δx^1 приводит к следующим краевым условиям для уравнения Эйлера:

$$\left.\frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1} = 0.$$

2. Отрезок $T = [t_0, t_1]$ не фиксирован, концы x^0 и x^1 заданы. Соответствующие условия оптимальности:

$$\left.\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=t_0} = 0, \quad \left.\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=t_1} = 0.$$

3. Отрезок $T = [t_0, t_1]$ не фиксирован, концы x^0 и x^1 не закреплены. Условия оптимальности имеют вид

$$\left.\frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_0} = 0, \quad \left.F(x, \dot{x}, t)\right|_{t=t_0} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1} = 0, \quad \left.F(x, \dot{x}, t)\right|_{t=t_1} = 0.$$

4. Левая и правая граничные точки лежат на заданных кривых $x = \psi(t)$ и $x = \varphi(t)$.

В этом варианте вариации δx^0 и δx^1 зависят соответственно от δt_0 и δt_1. Требование равенства нулю первой вариации функционала с учетом того, что

$$\delta x^0 = \dot{\psi}(t_0)\delta t_0 + o(\delta t_0), \quad \delta x^1 = \dot{\varphi}(t_1)\delta t_1 + o(\delta t_1),$$

приводит к условиям трансверсальности:

$$\begin{aligned} &\left.\left(F + (\dot{\psi} - \dot{x})\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=t_0} = 0, \\ &\left.\left(F + (\dot{\varphi} - \dot{x})\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=t_1} = 0. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Отметим, что условия на левом и правом концах могут принадлежать к различным типам (возможно также, что один из концов жестко закреплен). В этом случае для каждого из концов отрезка интегрирования нужно использовать соответствующую часть условий оптимальности, сформулированных в перечисленных выше вариантах.

Пример 4.2.1. Определить наименьшее расстояние между началом координат и кривой $x = 1/t^2$, $t > 0$, рассматривая данную задачу как задачу вариационного исчисления.

Воспользовавшись известной формулой для длины дуги кривой, определяемой функцией $x = x(t)$, приходим к вариационной задаче:

$$J(x) = \int_0^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\, dt \to \min$$

с закрепленным левым и подвижным правым концами:

$$x(0) = 0, \quad x(t_1) = 1/t^2.$$

Поскольку подынтегральная функция в целевом функционале зависит только от $\dot{x}$, то допустимыми экстремалями могут являться лишь линейные функции

$$x = C_1 t + C_2.$$

Учитывая условия на левом конце, получим $C_2 = 0$. Условие трансверсальности имеет вид

$$\sqrt{1 + C_1^2} + \left(-\frac{2}{t_1^3} - C_1\right)\frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = 0.$$

Отсюда $C_1 = t_1^3/2$. С другой стороны,

$$x(t)\Big|_{t=t_1} = C_1 t_1 = 1/t_1^2.$$

Следовательно,

$$C_1 = \sqrt{2}/2, \quad t_1^* = \sqrt[6]{2}.$$

Рассматриваемая задача имеет решение (задача проецирования точки на замкнутое множество). Поэтому единственная допустимая экстремаль $x^* = \sqrt{2}t/2$ доставляет глобальный минимум целевому функционалу. Искомое расстояние равно значению функционала $J(x^*)$. Заметим, что рассмотренную только что задачу можно решить и другим способом, сформулировав соответствующую задачу математического программирования (задачу проецирования начала координат на кривую $x = 1/t^2$).

Упражнения

Найти допустимые значения экстремали в задачах поиска экстремума функционала $J(x)$ с заданными условиями на концах;

4.2.1. $J(x) = \int\limits_0^{1/2} (x - \dot{x}^2)\, dt, \quad x(0) = 0;$

4.2.2. $J(x) = \int\limits_0^{2} \left(\dot{x}^2 - x - \frac{t^2}{2}\right) dt, \quad x(0) = 0;$

4.2.3. $J(x) = \int\limits_0^{t_1} \left(\dot{x}^2 - x - \frac{t^2}{2}\right) dt, \quad x(0) = 0;$

4.2.4. $J(x) = \int\limits_0^{t_1} \left(\dot{x}^2 - x - \frac{t^2}{2}\right) dt, \quad x(0) = 0, \ x(t_1) = -1;$

4.2.5. $J(x) = \int\limits_0^{t_1} (\dot{x}^2 - x)\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(t_1) = -1;$

4.2.6. $J(x) = \int\limits_{\pi}^{2\pi} (\dot{x}^2 - x^2 + 2x\cos t)\,dt, \quad x(\pi) = -1;$

4.2.7. $J(x) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 4x\sin 2t)\,dt, \quad x(\pi/2) = 0;$

4.2.8. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x + \cos t)\,dt, \quad x(1) = 0;$

4.2.9. $J(x) = \int\limits_{\pi}^{5\pi/4} (\dot{x}^2 - x^2 + e^t)\,dt, \quad x(\pi) = 1;$

4.2.10. $J(x) = \int\limits_{t_0}^{0} \dot{x}^2\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(t_0) = -t_0 - 1, \quad t_0 > 0.$

4.2.11. Показать, что в задаче

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t, x)\sqrt{1 + \dot{x}^2}\,dt \to \mathrm{extr},$$

$$x^0 = \psi(t_0), \ x^1 = \varphi(t_1); \quad g(t_0, x^0) \neq 0, \ g(t_1, x^1) \neq 0,$$

условия трансверсальности (4.2.2) сводятся к условиям ортогональности в соответствующих граничных точках допустимой экстремали и кривых $x = \psi(t)$ и $x = \varphi(t)$.

4.2.12. Найти допустимую экстремаль в задаче

$$J(x) = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{t}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(t_1) = 2 - t_1.$$

4.2.13. Найти наименьшее расстояние от точки $A(2, 1)$ до кривой $x^2 = t + 1$, рассматривая данную задачу как задачу вариационного исчисления.

4.2.14. Найти наименьшее расстояние между параболой $x = t^2$ и прямой $x = t - 10$.

4.2.15. (Задача о брахистохроне с естественно граничным условием.) Пусть в координатной плоскости tOx (ось Ot направлена вправо, ось Ox — вниз) проведена вертикальная прямая L, проходящая через точку $(t_1, 0)$. По какой кривой и в какую точку x^1 должна скатываться тяжелая материальная точка, чтобы, отправляясь с нулевой начальной скоростью из начала координат, под действием силы тяжести (без учета трения) достигнуть L за кратчайшее время.

4.3. Многомерная и связанные задачи вариационного исчисления

Под многомерной задачей вариационного исчисления будем понимать задачу поиска экстремума функционала (4.1.1) среди непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, принимающих на концах отрезка интегрирования заданные значения (4.1.2). (В этих условиях x^0 и x^1 — векторы пространства E^n.) Подынтегральная функция $F(x(t), \dot{x}(t), t)$ является скалярной функцией $(2n + 1)$ переменного, дважды дифференцируемой по своим аргументам. Отметим, что в некоторых пособиях многомерными называются такие вариационные задачи, в которых минимизация или максимизация целевого функционала проводится среди функций многих переменных ([18, с. 250]).

Понятия сильного и слабого локальных экстремумов аналогичны изложенным в § 4.1 с той разницей, что под расстоянием между двумя функциями понимается норма в соответствующем пространстве вектор-функций.

Для получения необходимого условия оптимальности в рассматриваемом случае используют результат, установленный для простейшей задачи вариационного исчисления, варьируя лишь одну из функций $x_j = x_j(t)$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, а остальные функции $x_i = x_i(t)$, $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, оставляя неизменными [11, с. 144].

Теорема 4.3.1. *Если допустимая вектор-функция* $x = x(t)$ *доставляет слабый экстремум функционалу* (4.1.1) *в многомерной задаче вариационного исчисления, то она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Эйлера:*

$$\frac{\partial F(t, x, \dot{x})}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.3.1}$$

Таким образом, проблема поиска допустимых экстремалей в многомерной задаче вариационного исчисления сводится к интегрированию системы n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (4.3.1) с $2n$ краевыми условиями (4.1.2). Как и в простейшей задаче вариационного исчисления, показывается существование вторых производных компонент допустимой экстремали $x = x(t)$, если невырождена матрица

$$\frac{\partial^2 F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}^2}.$$

Пример 4.3.1. Найти допустимые экстремали в задаче вариационного исчисления

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} (\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1)\, dt \to \min,$$

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad x_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$x_1(\pi) = 1, \quad x_2(\pi) = -1, \quad x_3(\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

Составляем систему дифференциальных уравнений Эйлера:

$$2x_2 + 2 = 0,$$

$$2x_1 - 2\ddot{x}_2 = 0,$$

$$2\ddot{x}_3 = 0.$$

Поскольку подынтегральная функция в целевом функционале не зависит от $\dot{x}_1$, первое из уравнений является не дифференциальным, а конечным. Его решением может быть только функция, тождественно равная -1 на всем отрезке интегрирования:

$$x_2(t) \equiv -1, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Данная функция удовлетворяет поставленным краевым условиям. Из второго уравнения

$$x_1(t) = \ddot{x}_2(t) \equiv 0, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Поскольку при $t = \pi$ не выполнено равенство $x_1(\pi) = 1$, то рассматриваемая краевая задача для системы уравнений Эйлера не имеет решения. Следовательно, не существует допустимых экстремалей в классе непрерывно дифференцируемых функций.

В качестве одного из типов вариационных задач на условный экстремум рассмотрим задачу поиска экстремальных значений функционала (4.1.1) среди непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, удовлетворяющих на концах отрезка интегрирования условиям (4.1.2):

$$x(t_0) = x^0, \ x(t_1) = x^1; \quad x^0, \ x^1 \in E^n,$$

а также интегральным ограничениям:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.3.2}$$

Предполагается, что скалярные функции $F(x, \dot{x}, t)$, $f_i(x, \dot{x}, t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, дважды дифференцируемы по своим аргументам, а a_i — заданные числа.

Ограничения (4.3.2) называются изопериметрическими. Название связано с тем, что рассматриваемый класс задач возник из частной задачи о поиске замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей наибольшую площадь (см. упражнение 4.3.21).

Понятия экстремумов, сформулированные выше, остаются справедливыми, если учесть, что допустимыми являются непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функции, удовлетворяющие не только краевым условиям (4.1.2), но и изопериметрическим условиям (4.3.2).

Теорема 4.3.2. (См. [37, с. 77; 21, с. 77, 78; 11, с. 152].) *Пусть допустимая вектор-функция $x = x(t)$ доставляет слабый локальный экстремум в изопериметрической задаче вариационного исчисления. Тогда найдутся множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, не все равные нулю, такие что для лагранжиана*

$$L(\lambda, x, \dot{x}, t) = \lambda_0 F(x, \dot{x}, t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x, \dot{x}, t), \qquad (4.3.3)$$

подсчитанного на функциях $x = x(t)$, выполняется система дифференциальных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial L(\lambda, x, \dot{x}, t)}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\lambda, x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.3.4)$$

Итак, может быть предложена следующая схема поиска допустимых экстремалей в изопериметрической задаче:

1) составляется лагранжиан (4.3.3);

2) выписывается система дифференциальных уравнений Эйлера (4.3.4);

3) допустимые экстремали находятся как решения системы дифференциальных уравнений Эйлера с $2n$ краевыми условиями (4.1.2) при дополнительном требовании выполнения интегральных ограничений (4.3.2).

Часто бывает целесообразно отдельно проанализировать два варианта:

а) $\lambda_0 = 0$. В большинстве задач этот вариант приводит к тривиальности всех множителей Лагранжа;

б) λ_0 — любое отличное от нуля число (например, $\lambda_0 = 1$).

Пример 4.3.2. В настоящее время одной из областей активного применения методов вариационного исчисления является проектирование элементов сверх- и гиперзвуковых летательных аппаратов, обладающих минимальным сопротивлением. Вариационные задачи о поиске тел оптимальной формы имеют давнюю историю (например, аэродинамическая задача Ньютона, решенная им еще до постановки классической задачи о брахистохроне). Рассмотрим простейший пример такого рода [43, с. 87–90].

Предполагается, что плоское симметричное крыло, профиль которого определяется функцией $x = x(t)$, $t \in [0, l]$, $x(0) = x(l) = 0$, обтекается сверхзвуковым потоком газа. Ось Ot совпадает с направлением этого потока. Волновое сопротивление в приближении линейной теории сверхзвукового обтекания определяется формулой:

$$D = \frac{4q}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^l \dot{x}^2(t)\, dt.$$

Здесь число Маха $M > 1$ и скоростной напор невозмущенного течения $q > 0$ являются известными константами, характеризующими свойства потока газа. Необходимо найти профиль крыла заранее заданной площади S, для которого волновое сопротивление минимально. Приходим к задаче минимизации функционала

$$J(x) = \int_0^l \dot{x}^2(t)\, dt \tag{4.3.5}$$

с заданными условиями на концах

$$x(0) = x(l) = 0 \tag{4.3.6}$$

и изопериметрическим условием

$$\int_0^l x(t)\, dt = \frac{S}{2}. \tag{4.3.7}$$

(Здесь учтено, что крыло симметрично относительно оси абсцисс.)

Попытаемся реализовать изложенную выше схему поиска допустимых экстремалей:

1) составляем лагранжиан:

$$L(\lambda, x, \dot{x}, t) = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda x;$$

2) выписываем дифференциальной уравнение Эйлера:

$$2\lambda_0 \ddot{x} - \lambda = 0;$$

3) случай $\lambda_0 = 0$ приводит к тривиальности всех множителей Лагранжа;

4) рассмотрим случай $\lambda_0 = 1$. Общим решением Эйлера

$$\ddot{x} = \lambda/2$$

является функция $x = \frac{\lambda}{4} t^2 + C_1 t + C_2$. Из краевого условия при $t = 0$ находим $C_2 = 0$. Второе из условий (4.3.6) и интегральное ограничение (4.3.7) приводят к алгебраическим уравнениям:

$$\frac{\lambda}{4} l^2 + C_1 l = 0, \quad \lambda l^3 + 6C_1 l = 6S.$$

В итоге получим, что допустимой экстремалью является функция

$$x^* = -\frac{3St^2}{l^3} + \frac{3St}{l^2} = \frac{3St}{l^3}(l - t),$$

т.е. профиль крыла имеет форму дуги параболы.

В примере удается показать, что допустимая экстремаль доставляет глобальный минимум целевому функционалу. Действительно, по определению глобального минимума достаточно установить, что

$$J(x^*) \le J(x^* + h)$$

для всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, l]$ функций $h = h(t)$, удовлетворяющих условиям

$$h(0) = h(l) = 0, \quad \int_0^l h(t)\,dt = 0. \tag{4.3.8}$$

Имеем

$$J(x^* + h) = \int_0^l (\dot{x}^* + \dot{h})^2\,dt = J(x^*) + 2\int_0^l \dot{x}^* h\,dt + \int_0^l \dot{h}^2\,dt.$$

Применим формулу интегрирования по частям с учетом условий (4.3.8):

$$\int_0^l \dot{x}^* \dot{h}\,dt = \int_0^l \ddot{x}^* h\,dt = -\frac{6S}{l^3}\int_0^l h\,dt = 0.$$

Следовательно,

$$J(x^* + h) = J(x^*) + \int_0^1 \dot{h}^2\,dt.$$

Поскольку последнее слагаемое неотрицательно, приходим к выводу о том, что функция $x^* = x^*(t)$ доставляет глобальный минимум в исследуемой задаче вариационного исчисления.

Рассмотрим еще один тип связей.

Пусть на классе гладких вектор-функций $x = x(t)$, $x(t) \in E^n$, $t \in T = [t_0, t_1]$, $x(\cdot) \in C_1^n(T)$ определен функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t)\, dt, \tag{4.3.9}$$

где скалярная функция $F(x, \dot{x}, t)$ $(2n + 1)$-переменного определена и непрерывна по этим переменным со своими частными производными до второго порядка. Дополнительно предположим, что функции связаны соотношениями

$$g_i(x, \dot{x}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad m < n, \tag{4.3.10}$$

где скалярные функции $g_i(x, \dot{x}, t)$ также непрерывны по своим аргументам вместе с частными производными до второго порядка. Граничные условия на функции $x = x(t)$ могут быть любого типа. Мы возьмем

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1 \tag{4.3.11}$$

и будем считать, что они не противоречат связям (4.3.10). Если в связях (4.3.10) отсутствуют производные: $g_i(x, t) = 0$, $i = 1, 2, \ldots,$ $m < n$, то это легко проверить. Ставится задача об отыскании локального минимума функционала (4.3.9) на множестве $X \subset C_1^n(T)$, заданном системой уравнений (4.3.10) (конечных или дифференциальных) и граничными условиями (4.3.11).

Поставленная задача называется связанной задачей вариационного исчисления, или задачей Лагранжа на условный минимум. Ее исследование методом неопределенных множителей было проведено Ж.Лагранжем в 1788 г. Лишь 9 лет спустя, в 1797 г., Лагранж распространил этот метод на исследование задачи на условный минимум функции многих переменных.

Введем функцию Лагранжа

$$L(\lambda, x, \dot{x}, t) = F(x, \dot{x}, t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) g_i(x, \dot{x}, t), \tag{4.3.12}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — функциональные, пока неопределенные множители Лагранжа, $\lambda(\cdot) \in C_1^n(T)$, и функционал Лагранжа

$$L(\lambda, x) = \int_{t_0}^{t_1} L(\lambda, x, \dot{x}, t)\, dt. \tag{4.3.13}$$

Этот функционал определим на множестве

$$Y = \{x(\cdot) \in C_1^n(T),\ \lambda(\cdot) \in C_1^n(T):\ x(t_0) = x^0,\ x(t_1) = x^1\}$$

и поставим задачу

$$L(\lambda, x) \to \min, \quad (\lambda, x) \in Y. \tag{4.3.14}$$

Очевидно, что, если решение (λ^*, x^*) задачи 4.3.14 существует, то оно удовлетворяет дифференциальным и конечным уравнениям Эйлера относительно функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.3.15}$$

Условия в концах $\lambda(t_0)$, $\lambda(t_1)$ отсутствуют, так как $\partial L/\partial\dot{\lambda} = 0$. Отсюда, с учетом второй группы уравнений (4.3.15), говорящей о том, что функции x^* удовлетворяют связям (4.3.10):

$$J(x^*) \le L(\lambda^*, x^*) \le L(\lambda, x), \quad (\lambda, x) \in Y \cap O_\varepsilon(\lambda^*, x^*).$$

Так как $X \subset Y$, то из множества $Y \cap O_\varepsilon(\lambda^*, x^*)$ можно выбрать все элементы $x(\cdot)$, для которых справедливы уравнения связей (4.3.10). Тогда

$$J(x^*) \le J(x), \quad x \in X \cap O_\varepsilon(x^*).$$

Легко заметить, что задачу (4.3.14) можно ослабить, заменив требование минимума по λ на условие стационарности, т.е. искать такую пару $(\lambda^*, x^*) \in Y$, на которой функционал $L(\lambda, x)$ стационарен по λ:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\right|_{(\lambda^*, x^*)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

а по x достигает локального минимума:

$$L(\lambda^*, x^*) \le L(\lambda^*, x), \quad x(\cdot) \in Y_1 \cap O_\varepsilon(x^*),$$

$$Y_1 = \{x(\cdot) \in C_1^n(T)\colon\ x(t_0) = x^0,\ x(t_1) = x^1\}.$$

Из этих рассуждений, носящих характер достаточных условий, следует практический прием решения связанной задачи вариационного исчисления (4.3.9)–(4.3.11). Этот прием заключается в решении системы n-дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial L(\lambda, x, \dot{x}, t)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\lambda, x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.3.16}$$

совместно с системой m-дифференциальных уравнений первого порядка

$$g_i(x, \dot{x}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.3.17}$$

при $2n$ краевых условиях

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.3.18}$$

относительно $n + m$ неизвестных функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Если в условиях (4.3.11) правый конец был бы свободен, то вместо второго условия из (4.3.18) записывалось бы условие в конце:

$$\frac{\partial L(\lambda, x, \dot{x}, t_1)}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Пример 4.3.3. (Задача о геодезической линии.) Между двумя заданными точками A и B на поверхности провести линию кратчайшего расстояния. Эти линии обычно и называют геодезическими линиями. В математической постановке эта задача приводится к отысканию минимума функционала

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}\, dt$$

при условиях: $x_i(t_0) = x_i^0$, $x_i(t_1) = x_i^1$, $i = 1, 2$,

$$g(x_1, x_2, t) = 0, \tag{4.3.19}$$

где (4.3.19) — уравнение, задающее поверхность

$$g(x_1^0, x_2^0, t_0) = 0, \quad g(x_1^1, x_2^1, t_1) = 0.$$

Уравнение Эйлера (4.3.16) для исследуемой задачи нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}, \\ &\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Решив уравнения (4.3.20) совместно с уравнением (4.3.19) и краевыми условиями относительно $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $\lambda = \lambda(t)$ найдем геодезические линии для данной поверхности. Кроме того, из уравнений (4.3.19) и (4.3.20) можно установить одно интересное свойство геодезической линии. Именно в каждой точке геодезической линии направление главной нормали совпадает с нормалью к поверхности.

Действительно, выберем за независимую переменную длину дуги s, положив $ds = \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\, dt$. Тогда уравнения (4.3.20) примут вид

$$\lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{d^2 x_1}{ds^2} \frac{ds}{dt}, \quad \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{d^2 x_2}{ds^2} \frac{ds}{dt}. \tag{4.3.21}$$

Нетрудно убедиться, что справедливо тождество

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 = 1,$$

дифференцируя которое, получим

$$\frac{dt}{ds}\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dx_1}{ds}\frac{d^2 x_1}{ds^2} + \frac{dx_2}{ds}\frac{d^2 x_2}{ds^2} = 0. \tag{4.3.22}$$

Далее, дифференцируя уравнение связи (4.3.19), получим

$$\frac{\partial g}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} = 0. \tag{4.3.23}$$

Умножим уравнения (4.3.21) на dx_1/ds, dx_2/ds соответственно и сложим их. Тогда, воспользовавшись (4.3.22), (4.3.23), будем иметь

$$\lambda \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{d^2 t}{ds^2}\frac{ds}{dt}. \tag{4.3.24}$$

Присоединив уравнение (4.3.24) к уравнениям (4.3.21), получаем, что

$$\frac{d^2 t/ds^2}{\partial g/\partial t} = \frac{d^2 x_1/ds^2}{\partial g/\partial x_1} = \frac{d^2 x_2/ds^2}{\partial g/\partial x_2}.$$

Как известно d^2t/ds^2, d^2x_1/ds^2, d^2x_2/ds^2 пропорциональны косинусам углов главной нормали кривой с осями координат, а $\partial g/\partial t$, $\partial g/\partial x_1$, $\partial g/\partial x_2$ пропорциональны косинусам углов нормали к поверхности.

Упражнения

Найти допустимые экстремали в задачах поиска экстремума функционала $J(x)$:

4.3.1. $J(x) = \int\limits_0^{\pi} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_1x_2 + t^2)\, dt$,

$x_1(0) = x_2(0) = 1,\ x_1(\pi) = x_2(\pi) = -1;$

4.3.2. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + x_1x_2)\,dt,$

$x_1(0) = x_2(0) = 1,\ x_1(1) = e,\ x_2(1) = 1/e;$

4.3.3. $J(x) = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (\dot{x}_1\dot{x}_2 - x_1x_2)\,dt,$

$x_1(\pi/2) = 1,\ x_2(\pi/2) = 0,\ x_1(\pi) = 2,\ x_2(\pi) = -1;$

4.3.4. $J(x) = \int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3)\,dt,$

$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0;\ x_1(\pi/2) = \pi/2,\ x_2(\pi/2) = 0,\quad x_3(\pi/2) =$
$= -\pi/2;$

4.3.5. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + 6tx_1 + 12t^2x_2)\,dt,$

$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1,\ x_1(1) = 2,\ x_2(1) = 3;$

4.3.6. $J(x) = \int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_3^2)\,dt,$

$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0;\ x_1(\pi/2) = 1,\ x_2(\pi/2) = \pi/2,\ x_3(\pi/2) = -1;$

4.3.7. $J(x) = \int\limits_{-1}^{1} (\dot{x}_1^3/3 - \dot{x}_2^2 + 2t\dot{x}_1)\,dt,$

$x_1(-1) = 2,\ x_2(-1) = -1,\ x_1(1) = 0,\ x_2(1) = 1;$

4.3.8. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 4x_1^2)\,dt,$

$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(1) = 1,\ x_2(1) = 0;$

4.3.9. $J(x) = \int\limits_0^{\pi} \dot{x}^2\,dt,$

$x(0) = 1,\ x(\pi) = -1,\ \int\limits_0^{\pi} x\cos t\,dt = \pi/2;$

4.3.10. $J(x) = \int\limits_0^{\pi} \dot{x}^2\,dt,$

$x(0) = 0,\ x(\pi) = 1,\ \int\limits_0^{\pi} x\sin t\,dt = 0;$

4.3.11. $J(x) = \int\limits_0^{\pi} x \sin t \, dt,$

$x(0) = 0, \; x(\pi) = \pi, \; \int\limits_0^{\pi} \dot{x} \, dt = 3\pi/2;$

4.3.12. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + t^4) \, dt,$

$x(0) = x(1) = 0, \; \int\limits_0^1 x^2 \, dt = 2;$

4.3.13. $J(x) = \int\limits_0^1 \dot{x}^2 \, dt,$

$x(0) = 0, \; x(1) = 1/6, \; \int\limits_0^1 xt \, dt = 0, \; \int\limits_0^1 x \, dt = 0;$

4.3.14. $J(x) = \int\limits_0^1 \dot{x}^2 \, dt,$

$x(0) = 0, \; x(1) = e, \; \int\limits_0^1 xe^t \, dt = e^2/2 - e;$

4.3.15. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 4tx_1 - 4x_2^2) \, dt,$

$x_1(0) = x_2(0) = 0, \; x_1(1) = x_2(1) = 1, \; \int\limits_0^1 (\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2 - tx_2) \, dt = 2;$

4.3.16. $J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 4tx_1 - 4x_1) \, dt,$

$x_1(0) = x_2(0) = 0, \; x_1(1) = x_2(1) = 1; \; \int\limits_0^1 (\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2 - t\dot{x}_2) \, dt = 1.$

4.3.17. Показать, что линейные функции $x_1 = C_1 t + C_2$ и $x_2 = C_3 t + C_4$ являются допустимыми экстремалями в задаче

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \, dt \to \min, \; x(t_0) = x^0, \; x(t_1) = x^1.$$

4.3.18. Получить первые интегралы уравнения Эйлера, если в многомерной задаче вариационного исчисления целевой функционал имеет вид

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t)\, dt.$$

4.3.19. Предположим, что в каждой точке пространства, заполненного оптически неоднородной средой, абсолютное значение скорости распространения света является известной функцией координат $v = v(x, y, z)$. Согласно принципу Ферма свет распространяется из одной точки пространства в другую по кривой, для которой время прохождения света является наименьшим. Получить дифференциальные уравнения линий $y = y(x)$, $z = z(x)$ распространения света (уравнения Эйлера соответствующей вариационной задачи).

4.3.20. Найти допустимую экстремаль в примере 4.3.2, если вместо условия (4.3.7), задающего площадь профиля, определен момент инерции контура относительно оси Ot:

$$\int_0^l x^2\, dt = \frac{A}{2}.$$

Данное ограничение определяет жесткость на изгиб или кручение конструкции тонкой оболочки.

4.3.21. Для одной из разновидностей классической изопериметрической задачи: «В верхней полуплоскости найти кривую $x = x(t)$, проходящую через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$, имеющую заданную длину $l = 2$ и ограничивающую вместе с отрезком оси абсцисс $0 \le t \le 1$ фигуру наибольшей площади»:

а) выписать соответствующую формализованную вариационную задачу;

б) показать, что решением может являться лишь дуга окружности;

в) получить уравнение для вычисления множителя Лагранжа, отвечающего изопериметрическому ограничению, и приближенно оценить значение множителя Лагранжа.

Глава 5

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Постановка задач оптимального управления

Пусть управляемый процесс $\xi = \{u, x, t_0, t_1\}$, $t_0 < t_1$, $t_0, t_1 \in \in T \subset E^1$, подчинен системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{5.1.1}$$

Вектор-функция $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))$ называется управлением. Допустимые управления принадлежат классу кусочно-непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций, удовлетворяющих ограничению типа включения:

$$u(t) \in U \subset E^r, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{5.1.2}$$

Вектор-функция $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ называется состоянием (фазовой траекторией) управляемого процесса.

Целью задачи является минимизация функционала

$$J_0(u, t_0, t_1) = \varphi_0(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} F_0(x(t), u(t), t)\, dt \tag{5.1.3}$$

при дополнительных условиях

$$\begin{aligned} &J_i(u, t_0, t_1) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1, \\ &J_i(u, t_0, t_1) = 0, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

где

$$J_i(u, t_0, t_1) = \varphi_i(x, (t_0), x(t_1), t_0, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} F_i(x(t), u(t), t)\, dt,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Система уравнений (5.1.1), определяющая дифференциальную связь между состоянием и управлением, должна выполняться во всех точках непрерывности вектор-функции $u = u(t)$. Управляемый процесс, для которого выполнены все перечисленные выше условия (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4), называется допустимым. Отметим, что в ряде случаев под допустимыми управлениями понимаются вектор-функции, принадлежащие одному из пространств $L_p^r([t_0, t_1])$, $1 \leq p \leq \infty$.

В случае фиксированных моментов t_0 и t_1 рассматриваемая задача называется задачей с закрепленным временем. Если условия (5.1.4) определяют ограничение $x(t_0) = x^0$ для любых допустимых процессов, то левый конец траектории называется закрепленным. Если условия (5.1.4) не налагают никаких ограничений на $x(t_0)$, то левый конец называется свободным. Наконец, если эти условия определяют ограничение вида $x(t_0) \in X_0$, где X_0 — непустое подмножество пространства E^n, не совпадающее с E^n и содержащее более одного элемента, то говорят о подвижном левом конце. Аналогичным образом вводятся понятия закрепленного, свободного и подвижного правого конца.

Целевой функционал (5.1.3) представляет собой сумму терминального функционала $\varphi_0(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1)$ и интегрального слагаемого. Задача оптимального управления с функционалом такого вида называется задачей Больца (Майера–Больца). Ее частными вариантами являются задача Лагранжа — минимизация интегрального функционала и задача Майера, в которой критерием качества служит терминальный функционал. Задача Лагранжа с $F_0 = 1$ называется задачей быстродействия. Целевым функционалом в ней является

$$J_0 = t_1 - t_0.$$

Заметим, что условия (5.1.2), (5.1.4) не являются самыми общими. В приложениях часто встречаются также и более сложные ограничения точечного вида:

$$(u(t), x(t)) \in W(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Пример 5.1.1. (Задача о мягком прилунении космического корабля; см. [30, с. 194–197; 7, с. 114–117].) Теория оптимального управления нашла широкое применение в ракетодинамике. Вывод космических аппаратов на орбиту, маневры в космосе, посадка требуют решения ряда оптимизационных задач, связанных с минимизацией расхода топлива, минимизацией времени выхода в заданную точку траектории и т.п. Именно процессы движения управляемых летательных аппаратов описываются достаточно простыми и, вместе с тем, точными математическими моделями. Наличие хорошо разработанной ранее теории движения ракет позволило быстро и эффективно применить методы оптимального управления к решению ряда проблем в этой актуальной области техники.

Предположим, что космический аппарат, который можно рассматривать как материальную точку, осуществляет мягкую посадку на Луну. Прилунение производится по вертикальной прямой, нормальной к поверхности Луны. Пусть начало координат совпадает с этой поверхностью, координатная ось направлена вертикально вверх. В начальный момент времени $t_0 = 0$ космический корабль, находящийся на известной высоте h, обладает скоростью w_0 и имеет массу m_0. В каждый момент времени t на аппарат действует сила притяжения Луны, направленная вертикально вниз и равная по абсолютной величине $m(t)g_Л$. Здесь $m(t)$ — масса аппарата, $g_Л$ — ускорение свободного падения на Луне, которое мы будем считать постоянным. При включенных двигателях действует сила тяги, направленная вверх и равная $\beta u(t)$, где $u(t)$ — мгновенный расход топлива, $0 \le u(t) \le u_{max}$; β — известный постоянный коэффициент. Связь изменения массы с расходом горючего определяется формулой $\dot{m}(t) = -u(t)$. Требуется найти режим расхода топлива, обеспечивающий нулевую скорость аппарата в точке прилунения и минимальные суммарные затраты топлива. Время посадки заранее не оговаривается.

Перейдем к формализации поставленной задачи как задачи оптимального управления. Роль управляющего воздействия играет скалярная функция $u = u(t)$, стесненная ограничениями типа (5.1.2):

$$0 \le u(t) \le u_{max}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

В качестве вектор-функции, характеризующей состояние процесса, выберем $x = (x_1, x_2, x_3)$. Здесь $x_1(t)$ — высота аппарата в момент t, $x_2(t)$ — скорость, $x_3(t)$ — масса аппарата. Тогда

$$\dot{x}_1 = x_2.$$

Согласно второму закону Ньютона

$$\dot{x}_2 = \frac{\beta u(t)}{x_3} - g_Л.$$

По определению расхода топлива

$$\dot{x}_3 = -u(t).$$

Приведенные три дифференциальные уравнения образуют систему (5.1.1), определяющую дифференциальную связь между состоянием и управлением. Ограничениями (5.1.4) являются начальные условия

$$x_1(0) = h, \ x_2(0) = w_0, \ x_3(0) = m_0$$

и условия, обеспечивающие мягкое прилунение:

$$x_1(t_1) = 0, \ x_2(t_1) = 0.$$

Требуется минимизировать суммарный расход топлива, т.е.

$$J_0(u, t_1) = m_0 - x_3(t_1) \to \min.$$

Этот же функционал можно записать и в интегральном виде:

$$J_0(u, t_1) = \int_0^{t_1} u(t)\, dt.$$

Рассматриваемый пример представляет собой задачу оптимального управления с закрепленным начальным моментом $t_0 = 0$, нефиксированным конечным моментом t_1, закрепленным левым концом траектории (и частично закрепленным правым концом.)

Интересна структура решения (см. [30, с. 195]).

Программа оптимального управления состоит из двух участков: свободное падение до момента $\tilde{t} > 0$ при $u(t) \equiv 0$, полное торможение на отрезке $[\tilde{t}, t_1]$ при $u(t) = u_{max}$.

Пример 5.1.2. (Оптимальное планирование поставки продукции; см. также [34, с. 223–229].) Рассмотрим процесс непрерывного производства и поставки продукции в течение периода времени $T = [t_0, t_1]$. Спрос на продукцию определяется известной функцией $r = r(t)$, $t \in T$.

Несовпадение объема поставки $x(t)$ и потребности $r(t)$ приводит к убыткам. Если $\gamma(t) = x(t) - r(t) < 0$ (имеет место дефицит), то убытки обусловленны неудовлетворенностью спроса и относятся к разряду упущенной выгоды (прибыли, которую можно было бы получить при другом планировании поставок). В случае превышения объема поставок над спросом ($\gamma(t) > 0$) убытки вызваны порчей продукции, дополнительными расходами на хранение, на поиск других потребителей и т.п. Предполагается, что функция потерь $f_1(\gamma)$ — известная зависимость: $f_1(\gamma) = 0$, если $\gamma = 0$; $f_1(\gamma) > 0$, если $\gamma \neq 0$. Дополнительные потери производителей продукции связаны с затратами на перестройку производства при изменении объемов поставки продукции. Эти потери равны нулю при постоянной интенсивности производства ($\dot{x}(t) = 0$). Функция убытков производителя $f_2(\dot{x})$ представляет собой известную зависимость: $f_2(\dot{x}) = 0$, если $\dot{x} = 0$; $f_2(\dot{x}) > 0$, если $\dot{x} \neq 0$. Скорость изменения поставок не может быть произвольной, а находится в заданных пределах:

$$A \le \dot{x}(t) \le B, \quad t \in T. \qquad (5.1.5)$$

Требуется определить характеризующую поставки продукции функцию $x = x(t)$, $t \in T$, для которой сводятся к минимуму суммарные потери, связанные с возможным несовпадением объема поставок и спроса, а также с возможными перестройками производства в течение периода времени T. Считаем, что известно начальное состояние:

$$x(t_0) = x^0.$$

Целевой функционал, определяющий суммарные потери, имеет вид

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} [f_1(x(t) - r(t)) + f_2(\dot{x}(t))]\, dt.$$

Задачу минимизации данного функционала можно рассматривать как задачу вариационного исчисления в классе кусочно-гладких на отрезке T функций с закрепленным левым и свободным правым концами при наличии во всех точках отрезка $[t_0, t_1]$ нестандартного (для вариационного исчисления) ограничения (см. (5.1.5)).

Исследуемую задачу можно интерпретировать как задачу оптимального управления вида (5.1.1)–(5.1.4), введя скалярную функцию управления $u = u(t)$, определяющую динамику изменения объема поставки продукции:

$$\dot{x} = u(t), \quad A \le u(t) \le B, \quad t \in T,$$

$$J_0(u) = \int_{t_0}^{t_1} [f_1(x(t) - r(t)) + f_2(u(t))]\, dt \to \min, \quad x(t_0) = x^0.$$

Согласно приведенной выше классификации, мы пришли к задаче Лагранжа с закрепленным временем, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Отметим, что в примере нас интересует не столько вид оптимального управления, сколько соответствующее этому управлению состояние.

Упражнения

5.1.1. Показать, что задача оптимального управления с целевым функционалом вида (5.1.3) и задача Лагранжа с интегральным функционалом сводятся к задаче Майера с терминальным функционалом.

5.1.2. Пусть в задаче Майера фиксирован момент t_0, правый конец свободен, закреплен левый конец: $x(t_0) = x^0$, а функция $\varphi_0 = \varphi_0(x(t_1), t_1)$ дифференцируема по своим аргументам. Доказать, что задача Майера сводится к задаче Лагранжа.

5.1.3. Тело, которое в дальнейшем будем считать материальной точкой массы m, движется без трения по горизонтальной прямой под действием внешней силы, направленной вдоль данной прямой. В начальный момент времени $t = t_0$ координата тела равна a_0, а его скорость—v_0. Величина действующей силы $u = u(t)$ ограничена сверху некоторым значением:

$$|u(t)| \le L, \quad L > 0.$$

1. Сформулировать следующую задачу как задачу оптимального управления: выбрать функцию $u = u(t)$, $t \ge t_0$, обеспечивающую перевод тела за кратчайшее время из начальной точки в точку с координатой $a = a_1$ $(a_1 > a_0)$. В эту конечную точку тело должно прийти с заданной скоростью v_1.

2. Решить поставленную задачу, если значение конечной скорости v_1 не оговаривается.

5.1.4. (Задача о вертикальном взлете ракеты.) Пусть ракета (например, метеорологическая ракета, зонд и т.п.), которую можно рассматривать как материальную точку, совершает взлет с поверхности Земли по вертикали. Начало координат совпадает с земной поверхностью. Направление координатной оси — вертикально вверх. Начальная скорость ракеты — нулевая. Начальная масса равна m_0. На ракету действуют:

1) сила тяжести, направленная вертикально вниз и равная по абсолютной величине $m(t)g$, где $m(t)$ — масса ракеты в момент времени t;

2) сила тяги, направленная вертикально вверх и равная $\beta u(t)$; $u(t)$ — мгновенный расход топлива, β — известный постоянный коэффициент. В каждый момент времени расход топлива находится в заданных пределах:

$$0 \le u(t) \le u_{\max}.$$

Вследствие сгорания горючего масса ракеты изменяется по закону

$$\dot{m}(t) = -u(t);$$

3) сила лобового сопротивления, равная по абсолютной величине $qv^2(t)$; $v(t)$ — скорость ракеты, q — известная постоянная.

В конечный (не обязательно заданный) момент времени t_1 масса ракеты не может быть меньше массы полезной части аппарата m_1:

$$m(t_1) \geq m_1.$$

Составить математическую модель процесса и сформулировать задачу оптимального управления, целью которой является:

а) достижение максимальной высоты подъема ракеты в заданный момент времени $t = t_1$;

б) (Задача Годдарда.) достижение максимальной высоты подъема с нулевой конечной скоростью (момент t_1 не фиксирован);

в) достижение в заданный момент времени t_1 высоты h с наименьшим расходом топлива;

г) достижение заданной высоты h за минимальное время.

5.1.5. (Задача о максимальном отклонении.) Предположим, что управляемый процесс $\{u, x\}$, где $u = u(t)$ и $x = x(t)$ — скалярные функции, подчинен на отрезке $[t_0, t_1]$ обыкновенному линейному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(t_0) = x^0,$$

a и b — заданные константы, $b > 0$.

Допустимые управления — кусочно-непрерывные функции, стесненные ограничением:

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Найти управление, обеспечивающее наибольшее отклонение состояния в заданный момент t_1 $(t_1 > t_0)$ от начального значения x^0, т.е. максимизировать разность $x(t_1) - x^0$.

5.1.6. Показать, что в задаче оптимального управления

$$\dot{x}_1 = x_1 + u, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 + 2u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$u(t) \in U \subset E^1, \ U \text{ — произвольное множество из } E^1,$$

$$x_1(1) = 1, \ x_2(1) = -1, \ J(u) = \varphi(x(1)) + \int_0^1 F(x, u, t)\, dt \to \min$$

не существует ни одного допустимого процесса.

Примечание. Требуется установить, что ни одно допустимое управление не может перевести систему из точки $x(0) = (0, 0)$ в точку $x(1) = (1, -1)$. В общем случае вопрос о возможности с помощью выбора допустимого управления перевести управляемый объект из одного состояния в другое носит название проблемы управляемости (достаточно элементарно эта проблема исследуется лишь в линейных задачах управления [9]).

5.1.7. Исходя из вида задачи, найти в классе кусочно-непрерывных на соответствующем отрезке функций управление, доставляющее глобальный минимум (в упражнениях д), е) — максимум) функционалу:

а) $\dot{x} = u(t)$, $x(0) = 1$, $|u(t)| \le 1$, $t \in [0, \alpha]$,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\alpha x^2(t)\,dt \to \min;$$

α — произвольный фиксированный момент, $\alpha > 0$;

б) $\dot{x} = u(t)$, $x(0) = 1$, $x(4) = 1$, $|u(t)| \le 1$, $t \in [0, 4]$,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^4 x^2(t)\,dt \to \min;$$

в) $\dot{x} = u^2(t)$, $x(0) = 1$, $x(4) = 1$, $|u(t)| \le 1$, $t \in [0, 4]$,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^4 x^2(t)\,dt \to \min;$$

г) $\dot{x} = u(t)$, $x(0) = 0$, $0 \le u(t) \le \pi$, $t \in [0, 1]$,

$$J(u) = \cos x(1) \to \min;$$

д) $\dot{x} = u^4(t)$, $x(0) = 0$, $u(t) \in \{-1, 0, 2\}$, $t \in [0, 1]$,

$$J(u) = \frac{1}{2}x^2(1) \to \max;$$

е) $\dot{x} = u^4(t)$, $x(0) = 0$, $u(t) \in \{-1, 0, 2\}$, $t \in [0, 1]$,

$$\int_0^1 |u(t)|\,dt \le 1, \quad J(u) = \frac{1}{2}x^2(1) \to \max.$$

5.2. Принцип максимума в задаче оптимального управления со свободным правым концом

Использование одного из фундаментальных результатов современной теории экстремума — принципа максимума — наиболее наглядно иллюстрируется для простейших типов задач оптимального управления. Рассмотрим задачу (5.1.1)–(5.1.4), в которой моменты t_0 и t_1 фиксированы, левый конец траектории закреплен, отсутствуют другие дополнительные условия (5.1.4):

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{5.2.1}$$

$$u(t) \in U \subset E^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{5.2.2}$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t)\,dt \to \min. \tag{5.2.3}$$

Для определенности считаем, что в точках разрыва кусочно-непрерывной функции управления значения $u(t)$ определяются как пределы справа, т.е. $u = u(t)$ — непрерывная справа во всех точках разрыва функция (вообще говоря, способ доопределения не играет существенной роли в рассуждениях). Решение задачи Коши (5.2.1), отвечающее некоторой выбранной управляющей функции, понимается в интегральном смысле:

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau. \tag{5.2.4}$$

(Теоремы существования и единственности типа Каратеодори можно посмотреть, например, в [3, с. 186–201; 16, с. 428–431].) Задачу типа (5.2.1)–(5.2.3) часто называют основной задачей оптимального управления.

5.2.1. Формулировка принципа максимума. Линеаризованный принцип максимума.

Теорема 5.2.1. (Принцип максимума Понтрягина; см., например, [3, с. 87; 13, с. 437; 18, с. 284; 42, с. 300; 36, с. 25, 26, 11, с. 163].) *Пусть в задаче оптимального управления* (5.2.1)–(5.2.3)

1) *вектор-функция $f(x, u, t)$ имеет частные производные по x и непрерывна вместе с этими производными по совокупности своих аргументов на $E^n \times U \times T$;*

2) *функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x с одной максимальной константой на $U \times T$:*

$$\|f(x + \Delta x, u, t) - f(x, u, t)\| \le L\|\Delta x\|, \quad L > 0,$$

для каждого $u \in U$, $t \in T$ и любых $x, x + \Delta x \in E^n$;

3) *скалярные функции $\varphi(x)$ и $F(x, u, t)$ непрерывны вместе со своими частными производными по x соответственно на E^n и $E^n \times U \times T$;*

4) *допустимый процесс $\{u^*, x^*\}$* оптимален.

Тогда выполнено условие максимума:

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t) = \max_{v \in U} H(\psi^*(t), x^*(t), v, t), \quad t_0 \le t < t_1, \tag{5.2.5}$$

где функция H, называемая функцией Понтрягина (Гамильтона–Понтрягина, гамильтонианом), имеет вид

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi(t), f(x, u, t)\rangle - F(x, u, t) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) f_i(x, u, t) - F(x, u, t),$$

а вектор-функция $\psi^* = \psi^*(t)$ определяется из сопряженной задачи

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x} \qquad (5.2.6)$$

при $u = u^*(t)$, $x = x^*(t)$.

Сопряженная задача в покомпонентной форме записи:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\partial F(x, u, t)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial f_j(x, u, t)}{\partial x_i},$$

$$\psi_i(t_i) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Условия 1)–2) теоремы обеспечивают существование и единственность решения в смысле (5.2.4) задачи Коши (5.2.1) для любой допустимой управляющей функции. В случае, когда допустимыми управлениями являются функции, принадлежащие одному из пространств L_p^r $(1 \le p \le \infty)$, (5.2.5) выполняется почти для всех точек отрезка T (при $1 \le p < \infty$ требуется дополнительное условие на степень роста, обеспечивающее принадлежность функции $f(x, u(t), t)$ пространству $L_1^n(T)$; см. [16, с. 430]).

Теорема 5.2.2. (Достаточность принципа максимума; см. [13, с. 42–43; 11,. с. 168, 169].) *Для линейно-выпуклого варианта задачи* (5.2.1)–(5.2.3):

$$f(x, u, t) = A(t)x + f_1(u, t),$$

$$F(x, u, t) = F_1(x, t) + F_2(u, t)$$

(φ, F_1 — выпуклые по x функции), выполнение (5.2.5) *является необходимым и достаточным условием оптимальности процесса $\{u^*, x^*\}$ (функция u^* доставляет глобальный минимум функционалу при выполнении* (5.2.5)*).*

Из необходимого условия максимума дифференцируемой функции на выпуклом множестве следует следующая теорема:

Теорема 5.2.3. (Линеаризованный (дифференциальный) принцип максимума; см. [13, с. 43; 20, с. 30, 31; 11, с. 169, 170].) *Пусть в задаче оптимального управления* (5.2.1)–(5.2.3), *в дополнение к условиям теоремы* 5.2.1, *функции $f(x, u, t)$ и $F(x, u, t)$ дифференцируемы по u, а множество U выпукло.*

Тогда на оптимальном процессе $\{u^*, x^*\}$ справедлив линеаризованный (дифференциальный) принцип максимума:

8. Заказ № 1889.

$$\left\langle \frac{\partial H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t)}{\partial u}, u^*(t) \right\rangle =$$

$$= \max_{v \in U} \left\langle \frac{\partial H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t)}{\partial u}, v \right\rangle, \quad t_0 \le t < t_1.$$

Здесь $\psi^* = \psi^*(t)$ — вычисленное при $u = u^*(t)$, $x = x^*(t)$ решение сопряженной задачи (5.2.6).

5.2.2. Использование принципа максимума для проверки управлений на оптимальность. Предположим, что в задаче оптимального управления (5.2.1)–(5.2.3) некоторое допустимое управление $u = u(t)$ требуется проверить на оптимальность с помощью принципа максимума. Рекомендуемая схема выглядит следующим образом.

1. Вычисляются функции $x = x(t)$ и $\psi = \psi(t)$ — соответствующие проверяемому управлению решения задач Коши (5.2.1) и (5.2.6).

2. Составляется функция

$$W_u(v, t) = H(\psi(t), x(t), v, t) - H(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad v \in U,$$

$$t_0 \le t \le t_1.$$

3. Для каждого момента $t \in [t_0, t_1)$ решается задача максимизации функции $W_u(v, t)$ по $v \in U$:

$$\overline{W}(t) = \max_{v \in U} W_u(v, t).$$

(Предполагается, что для каждого фиксированного $t \in [t_0, t_1)$ данная задача математического программирования может быть решена.)

4. Оценивается знак функции $\overline{W}(t)$. По построению всегда $\overline{W}(t) \ge 0$ для всех $t \in [t_0, t_1)$. Равенство нулю рассматриваемой функции для некоторого t говорит о выполнении принципа максимума в этой точке, поскольку

$$\max_{v \in U} W_u(v, t) = \max_{v \in U} H(\psi(t), x(t), v, t) - H(\psi(t), x(t), u(t), t).$$

Таким образом, если найдутся точки $t \in [t_0, t_1)$, в которых $\overline{W}(t) > 0$, то управление $u = u(t)$ не удовлетворяет принципу максимума, и, следовательно, заведомо не является оптимальным. В случае $\overline{W}(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1)$ проверяемое управление удовлетворяет принципу максимума, т.е. подозрительно на оптимальность. Если при этом, кроме того, задача оптимального управления относится к классу линейно-выпуклых (см. теорему 5.2.2), то проверяемое управление доставляет глобальный минимум функционалу.

Для допустимых управлений, выбираемых из пространств $L_p^r(T)$ принцип максимума не выполнен, если $\overline{W}(t) > 0$ на множестве ненулевой меры из T. Критерием выполнения принципа максимума может служить равенство нулю числа

$$\theta = \int_T \overline{W}(t)\, dt.$$

Иногда отсеять заведомо неоптимальные управления помогает знание свойств функции Понтрягина (гамильтониана) на удовлетворяющих принципу максимума управлениях ([16, с. 455–457; 18, с. 302–304; 20, с. 58–61]).

Теорема 5.2.4. (Свойства гамильтониана.) *Пусть допустимое кусочно-непрерывное управление* $u = u(t)$ *удовлетворяет принципу максимума; функции* $x = x(t)$ *и* $\psi = \psi(t)$ *— соответствующие этому управлению решения прямой* (5.2.1) *и сопряженной* (5.2.6) *задач. Тогда*

1) *гамильтониан* $H(t) = H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ *непрерывен во всех точках* $t \in [t_0, t_1)$ *(см. упражнение* 5.2.3);

2) *в каждой точке непрерывности управления* $u = u(t)$

$$\frac{dH(\psi(t), x(t), u(t), t)}{dt} = \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial t},$$

где в правой части равенства стоит частная производная по t, *входящему явно в функцию Понтрягина до подстановки конкретных значений* $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$;

3) *для автономного (стационарного) варианта* (5.2.1)–(5.2.3), *в котором* $f = f(x, u)$, $F = F(x, u)$ *(т.е. правая часть дифференциальной системы и подынтегральная функция в целевом функционале не зависят явно от* t*) справедливо:*

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) \equiv \text{const}, \quad t_0 \le t \le t_1.$$

Последнее утверждение теоремы непосредственно следует из первых двух.

Невыполнение любого из перечисленных утверждений является достаточным признаком неоптимальности исследуемого управления.

Пример 5.2.1. В задаче

$$\dot{x}_1 = x_2,\ x_1(0) = 1,\ \dot{x}_2 = u,\ x_2(0) = 2,\ \ |u(t)| \le 1,\ t \in [0, 5],$$

$$J(u) = x_1^2(5) + x_2^2(5) \to \min,$$

проверить на оптимальность функцию

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2, \\ -1, & 2 \le t < 5 \end{cases}$$

и вычислить значение целевого функционала, соответствующее данному управлению.

Попытаемся реализовать изложенную выше схему.

1. При вычислении решения исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающего проверяемому управлению, целесообразно начать со второго уравнения системы. Согласно (5.2.4) при $t \in [0, 1)$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t u(\tau)\,d\tau = 2 + \int_0^t 1 \cdot d\tau = 2 + t,$$

при $t \in [1, 2)$

$$x_2(t) = x_2(1) + \int_1^t u(\tau)\,d\tau = (2 + t)\,\big|_{t=1} + \int_1^t 0 \cdot d\tau = 3,$$

при $t \in [2, 5]$

$$x_2(t) = 3 + \int_2^t (-1) \cdot d\tau = 5 - t.$$

Найденные значения функции $x_2 = x_2(t)$ подставляем в правую часть первого уравнения системы. Интегрируем это уравнение на полуинтервале $[0, 1)$ с начальным условием $x_1(0) = 1$:

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t x_2(\tau)\,d\tau = 1 + \int_0^t (2 + \tau)\,d\tau = 1 + 2t + \frac{t^2}{2}, \quad t \in [0,1).$$

Отсюда находим значение $x_1(1) = 3{,}5$, которое является начальным условием для уравнения на полуинтервале $[1, 2)$:

$$x_1(t) = x_1(1) + \int_1^t x_2(\tau)\,d\tau = 3{,}5 + \int_1^t 3 \cdot d\tau = 3t + 0{,}5, \quad t \in [1, 2).$$

И, наконец, при $t \in [2, 5]$

$$x_1(t) = x_1(2) + \int_2^t (5 - \tau)\,d\tau = -\frac{t^2}{2} + 5t - 1{,}5.$$

Итак,

$$x_1(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} + 2t + 1, & t \in [0, 1), \\ 3t + 0{,}5, & t \in [1, 2), \\ -\dfrac{t^2}{2} + 5t - 1{,}5, & t \in [2, 5]; \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} t + 2, & t \in [0, 1), \\ 3, & t \in [1, 2), \\ 5 - t, & t \in [2, 5]. \end{cases}$$

Как и следует из теории, решение исходной системы — непрерывная вектор-функция, почти всюду дифференцируемая на отрезке $[0, 5]$. Точками, в которых производная может не существовать (левая производная не равна правой), являются точки разрыва управления.

Для более сложных систем дифференциальных уравнений, в которых решение не может быть получено сразу в явном виде интегрированием правой части, нужно использовать обычные методы решения дифференциальных уравнений. Уравнения необходимо рассматривать на каждом участке непрерывности функции управления, не забывая пересчитывать начальные условия по мере продвижения к конечной точке отрезка.

Составляем функцию Понтрягина:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Сопряженная задача:

$$\dot\psi_1 = 0, \quad \psi_1(5) = -2x_1(5),$$

$$\dot\psi_2 = -\psi_1, \quad \psi_2(5) = -2x_2(5).$$

Условия Коши для сопряженной системы, отвечающие проверяемому управлению:

$$\psi_1(5) = -22, \quad \psi_2(5) = 0.$$

Соответствующее решение сопряженной системы:

$$\psi_1(t) = -22, \quad \psi_2(t) = 22t - 110, \quad t \in [0, 5].$$

2. $W_u(v, t) = H(\psi, x, v, t) - H(\psi, x, u(t), t) = \psi_2(v - u(t)) =$

$$= \begin{cases} (22t - 110)(v - 1), & t \in [0, 1), \\ (22t - 110)v, & t \in [1, 2), \\ (22t - 110)(v + 1), & t \in [2, 5). \end{cases}$$

3. Задача максимизации по v функции $W_u(v, t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, 5)$ представляет собой задачу поиска максимума линейной функции одной переменной на отрезке

$[-1, 1]$. Решение задачи зависит от знака коэффициента при v. Поскольку при $t \in [0, 5)$ этот коэффициент $(22t - 110)$ отрицателен, то максимум искомой функции достигается при $v = -1$. Следовательно,

$$\overline{W}(t) = \begin{cases} 220 - 44t, & t \in [0, 1), \\ 110 - 22t, & t \in [1, 2), \\ 0, & t \in [2, 5). \end{cases}$$

4. Функция $\overline{W}(t)$ положительна на полуинтервале $[0, 2)$. Поэтому проверяемое удовлетворение не удовлетворяет принципу максимума. Итак, управление $u = u(t)$ заведомо не может быть оптимальным.

Значение функционала, которое требуется подсчитать в задаче, равно

$$J(u) = x_1^2(5) + x_2^2(5) = 11^2 = 121.$$

Отметим, что рассмотренная задача оптимального управления относится к классу линейно-выпуклых. В обозначениях теоремы 5.2.2

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; f_1(u, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \; \varphi(x) = x_1^2 + x_2^2, \; F(x, u, t) \equiv 0.$$

К сделанному выше выводу о неоптимальности управляющей функции можно было прийти, используя теорему 5.2.4. Действительно, функция Понтрягина, подсчитанная на управлении $u = u(t)$ и соответствующих траекториях $x = x(t)$, $\psi = \psi(t)$,

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \begin{cases} -22(t + 2) + 22t - 110 = -154, & t \in [0, 1), \\ -22 \cdot 3 = -66, & t \in [1, 2), \\ -22(5 - t) - 22t + 110 = 0, & t \in [2, 5) \end{cases}$$

не удовлетворяет утверждениям 1), 3) теоремы.

Сделаем заключительное замечание к схеме исследования. При проверке управлений на оптимальность часто требуется знание не всех компонент вектор-функций $x = x(t)$, $\psi = \psi(t)$, а лишь тех из них, которые входят в функцию $W_u(v, t)$. Поэтому в некоторых конкретных задачах иногда удается сократить объем вычислений, интегрируя лишь часть уравнений из (5.2.1) и (5.2.6). (В нашем примере требовалось знание лишь функции $\psi_2 = \psi_2(t)$, соответствующей исследуемому управлению. Но для вычисления этой функции пришлось полностью решить задачи Коши для исходной и сопряженной систем).

5.2.3. Использование принципа максимума для сужения класса управлений, подозрительных на оптимальность. В ряде задач принцип максимума позволяет сузить класс допустимых управлений, подозрительных на оптимальность (т.е. указать, какой тип может иметь оптимальное управление и, напротив, установить, что тот или иной класс функций заведомо не может содержать оптимальных управлений). Например, такое качественное исследование удается провести для линейных по управлению задач следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = g(x, t) + B(x, t)u,\\
&x(t_0) = x^0,\\
&u(t) \in U = \{v \in E^n\colon\ a_j \le v_j \le \beta_j,\ j = 1, 2, \dots, r\},\\
&t \in [t_0, t_1],\\
&J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} [G(x, t) + \langle b(x, t), u\rangle]\, dt \to \min.
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Здесь $B(x, t)$ — матричная функция размерности $n \times r$.

Функция Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi(t), g(x, t)\rangle + \langle B^T(x, t)\ \psi(t), u(t)\rangle - \\ - G(x, t) - \langle b(x, t), u(t)\rangle$$

является линейной по управлению.

Предположив, что в задаче (5.2.7) выполнены все условия теоремы 5.2.1, процесс $\{u^*, x^*\}$ оптимален, выпишем принцип максимума:

$$\langle B^T(x^*, t)\,\psi^*(t) - b(x^*, t), u^*(t)\rangle = \\ = \max_{v \in U} \langle B^T(x^*, t)\psi^*(t) - b(x^*, t), v\rangle,\quad t \in [t_0, t_1),$$

где вектор-функция $\psi^* = \psi^*(t)$ определяется из сопряженной задачи (5.2.6) при $u = u^*(t)$, $x = x^*(t)$.

Таким образом, в каждой точке $t \in [t_0, t_1)$ вектор $u^*(t)$ доставляет максимум линейной по v функции $\langle B^T(x^*, t)\psi^* - b(x^*, t), v\rangle$ на многомерном параллелепипеде U. Следовательно, оптимальное управление может иметь только структуру вида

$$u_j^*(t) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{если } w_j(\psi^*, x^*, t) < 0,\\ \beta_j, & \text{если } w_j(\psi^*, x^*, t) > 0,\\ v,\ v \in [\alpha_j, \beta_j], & \text{если } w_j(\psi^*, x^*, t) = 0, \end{cases}$$

w_j — j-я компонента вектор-функции $w(\psi^*, x^*, t) = B^T(x^*, t)\psi^*(t) - b(x^*, t)$, называемой функцией переключения. Любое управление, структура которого отлична от приведенной выше, заведомо не может быть оптимальным в задаче 5.2.7. Равенство нулю функции переключения говорит о том, что любое допустимое управление удовлетворяет принципу максимума и свидетельствует о вырождении этого условия оптимальности.

5.2.4. Решение линейной задачи оптимального управления с помощью принципа максимума. Рассмотрим линейную по состоянию задачу оптимального управления:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = A(t)x + f_1(u, t),\\
&x(t_0) = x^0,\\
&u(t) \in U \subset E^r, \quad t \in [t_0, t_1],\\
&J(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} [\langle q(t), x(t)\rangle + F_1(u, t)]\, dt \to \min.
\end{aligned}
\tag{5.2.8}
$$

Управление, удовлетворяющее принципу максимума, является в данной задаче оптимальным (теорема 5.2.2).

Функция Понтрягина имеет вид

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A(t)x\rangle + \langle \psi, f_1(u, t)\rangle - \langle q(t), x(t)\rangle - F_1(u, t).$$

Сопряженная задача (5.2.6):

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi + q(t), \quad \psi(t_1) = -c, \tag{5.2.9}$$

Решение сопряженной задачи есть некоторая функция $\psi^* = \psi^*(t)$, которая не зависит от выбора допустимого управления.

Условие максимума (5.2.5) в рассматриваемой задаче:

$$
\begin{aligned}
&\langle \psi^*, A(t)x^*\rangle + \langle \psi^*, f_1(u^*, t)\rangle - \langle q(t), x^*(t)\rangle - F_1(u^*, t) =\\
&\qquad = \max_{v \in U} [\langle \psi^*, A(t)x^*\rangle + \langle \psi^*, f_1(v, t)\rangle - \langle q(t), x^*(t)\rangle - F_1(v, t)],
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&\langle \psi^*(t), f_1(u^*(t), t)\rangle - F_1(u^*(t), t) =\\
&\qquad = \max_{v \in U} [\langle \psi^*(t), f_1(v, t)\rangle - F_1(v, t)], \quad t_0 \le t < t_1.
\end{aligned}
$$

Следовательно, для решения линейной по состоянию задачи оптимального управления может быть предложена следующая схема:

1. Составляется сопряженная задача (5.2.9). Путем интегрирования полученной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка определяется функция $\psi^* = \psi^*(t)$.

2. В каждой точке полуинтервала $[t_0, t_1)$ решается задача математического программирования

$$\langle \psi^*(t), f_1(v, t) \rangle - F_1(v, t) \to \max, \quad v \in U.$$

(оптимальное управление $u^* = u^*(t)$ определяется как вектор-функция, значения которой при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_1)$ доставляют глобальный максимум целевой функции в записанной выше задаче математического програмирования. Отметим возможную неоднозначность — некоторым t могут соответствовать несколько доставляющих максимум значений $u^*(t)$.)

3. Для вычисления отвечающей управлению $u^* = u^*(t)$ вектор-функции состояния и числа $J(u^*)$ — минимума критерия качества, найденная управляющая функция подставляется в правую часть системы дифференциальных уравнений, входящей в (5.2.8).

В более частном варианте задачи, в котором имеет место линейность как по состоянию, так и по управлению, часто удается найти выражение для оптимального управления в явном виде, если множество U имеет достаточно простую структуру (см. упражнения).

Пример 5.2.2. Решить задачу оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = tu_1 - u_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_2 - 2u_3^2, \quad 0 \le t \le 2,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$0 \le u_1(t) \le 2, \quad 0 < |u_2(t)| \le 1, \quad u_3(t) \in \{-4, 0, 1, 3\},$$

$$J(u) = x_2(2) \to \min.$$

Задача является линейной по состоянию. В обозначениях (5.2.8)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_1(u, t) = \begin{pmatrix} tu_1 - u_2 \\ u_2 - 2u_3^2 \end{pmatrix},$$

$$U = [0, 2] \times ([-1, 0) \cup (0, 1]) \times \{-4, 0, 1, 3\} \subset E^3,$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q(t) \equiv 0, \quad F_1(u, t) \equiv 0;$$

функция Понтрягина:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1(tu_1 - u_2) + \psi_2(x_1 + u_2 - 2u_3^2).$$

1. Сопряженная задача

$$\dot\psi_1 = -\psi_2, \quad \psi_1(2) = 0,$$
$$\dot\psi_2 = 0, \quad \psi_2(2) = -1,$$

имеет своими решениями функции

$$\psi_1^* = t - 2, \quad \psi_2^* \equiv -1, \quad t \in [0, 2].$$

2. Оптимальное управление определяется путем решения для каждого фиксированного момента $t \in [0, 2)$ задачи математического програмирования:

$$(t-2)(tv_1 - v_2) - (v_2 - 2v_3^2) \to \max,$$
$$0 \le v_1 \le 2, \quad 0 < |v_2| \le 1, \quad v_3 \in \{-4, 0, 1, 3\}.$$

В силу сепарабельности целевой функции и вида ограничений, накладываемых на компоненты управления, данная задача равносильна следующим:

а) $(t^2 - 2t)v_1 \to \max, \quad 0 \le v_1 \le 2;$

б) $(1 - t)v_2 \to \max, \quad v_2 \in [-1, 0) \cup (0, 1];$

в) $2v_3^2 \to \max, \quad v_3 \in \{-4, 0, 1, 3\}.$

Поскольку $t^2 - 2t < 0$, $t \in (0, 2)$, то

$$u_1^* \equiv 0, \quad t \in [0, 2).$$

(При $t = 0$ принято во внимание предположение о непрерывности справа допустимых управлений.)

Решение задачи определения второй компоненты оптимального управления зависит от знака коэффициента при v_2. Так как $-t + 1 > 0$ для $t \in [0, 1)$, $-t + 1 < 0$, $t \in (1, 2)$, то

$$u_2^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1), \\ -1, & t \in [1, 2). \end{cases}$$

Вообще говоря, значением $u_2^*(1)$ может быть любое число из множества $[-1, 0) \cup (0, 1]$. Поскольку для определенности мы предположили, что компоненты допустимого управления непрерывны справа, то $u_2^*(1) = -1$.

Наконец, решение задачи в) очевидно:

$$u_3^* \equiv -4, \quad t \in [0, 2).$$

Поскольку рассматриваемая задача относится к классу линейно-выпуклых, то найденная нами вектор-функция $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ является оптимальным управлением.

3. Соответствующее оптимальному управлению состояние процесса определяется после подстановки $u^* = u^*(t)$ в правую часть исходной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = -1, \quad x_1(0) = 0, \quad t \in [0, 1).$$

Отсюда

$$x_1^* = -t, \quad t \in [0, 1].$$

Далее,

$$\dot{x}_1 = 1, \quad x_1(1) = -1, \quad t \in [1, 2).$$

Отсюда

$$x_1^* = t - 2, \quad t \in [1, 2],$$

$$\dot{x}_2 = -t - 31, \quad x_2(0) = 0, \quad t \in [0, 1).$$

Имеем

$$x_2^* = -\frac{t^2}{2} - 31t, \quad t \in [0, 1).$$

Наконец,

$$\dot{x}_2 = t - 35, \quad x_2(1) = -31{,}5, \quad t \in [1, 2).$$

Поэтому

$$x_2^* = \frac{t^2}{2} - 35t + 3, \quad t \in [1, 2].$$

Таким образом, компоненты исходной вектор-функции состояния имеют вид

$$x_1^*(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0, 1], \\ t - 2, & t \in [1, 2]; \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} -t^2/2 - 31t, & t \in [0, 1], \\ t^2/2 - 35t + 3, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Оптимальное значение функционала (глобальный минимум):

$$J(u^*) = -65.$$

Пример 5.2.3. Рассмотрим одну из задач оптимального планирования инвестиций.

Пусть $x(t)$ — объем выпуска продукции в момент времени t в стоимостном выражении; $y_1(t)$ — часть выпуска продукции, расходуемая на инвестиции в производство; $y_2(t)$ — часть выпуска, расходуемая на потребление. Известен начальный объем выпуска $x(0) = c > 0$. Предполагается, что прирост выпуска продукции к некоторому моменту времени пропорционален суммарному объему инвестиций, сделанных за все предшествующие промежутки времени. Тогда

$$x(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad y_1(t) \geq 0, \quad y_2(t) \geq 0,$$

$$x(t) = c + \alpha \int_0^t y_1(\tau)\, d\tau,$$

где $\alpha > 0$ — известный параметр.

Целью задачи является поиск такого распределения выпуска продукции $(y_1(t), y_2(t))$ за период времени $t \in [0, t_1]$, при котором максимизируется общий объем потребления за рассматриваемый период времени:

$$\int_0^{t_1} y_2(t)\, dt \to \max.$$

Перейдем к формализации задачи как задачи оптимального управления.

Пусть управление $u(t)$—доля выпуска продукции, направляемая в момент t на инвестиции:

$$u(t) = \frac{y_1(t)}{x(t)} \in [0, 1], \quad t \in [0, t_1].$$

Тогда

$$y_1(t) = u(t) \cdot x(t),$$

$$y_2(t) = x(t) - y_1(t) = x(t)(1 - u(t)),$$

$$x(t) = c + \alpha \int_0^t u(\tau) \cdot x(\tau)\, d\tau. \tag{5.2.10}$$

Дифференцируя (5.2.10) по t и переходя к задаче на минимум, получим

$$\dot{x} = \alpha u x, \quad x(0) = c; \tag{5.2.11}$$

$$u(t) \in [0, 1], \quad t \in [0, t_1];$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} (u(t) - 1)x(t)\, dt \to \min.$$

Решим задачу с помощью принципа максимума. Задача является билинейной в силу наличия произведений вида $u \cdot x$. Поэтому в данном случае нельзя применить схему решения предыдущего примера.

Заметим, что любому допустимому управлению соответствует решение уравнения (5.2.11) следующего вида:

$$x(t) = c \exp \left(\alpha \int_0^t u(\tau)\, d\tau \right);$$

функция Понтрягина:

$$H(\psi, x, u, t) = \alpha \psi u x - (u - 1)x;$$

сопряженная задача:

$$\dot{\psi} = -\alpha\psi u + u - 1, \quad \psi(t_1) = 0. \tag{5.2.12}$$

Оптимальное управление $u^* = u^*(t)$ удовлетворяет условию

$$(\alpha\psi^* - 1)x^* u^* = \max_{v \in V} (\alpha\psi^* - 1)x^* v, \quad t \in [t_0, t_1),$$

где x^* и ψ^* — решения исходной и сопряженной задач (5.2.11), (5.2.12). Структура оптимального управления:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \alpha\psi(t) - 1 > 0, \\ 0, & \alpha\psi(t) - 1 < 0. \end{cases}$$

Таким образом, значение оптимального управления в точке t определяется знаком разности $\alpha\psi(t) - 1$. Поскольку $\psi(t_1) = 0$, то в окрестности точки $t_1 \alpha\psi(t) - 1 = 0$. Начнем интегрирование сопряженного уравнения (5.2.12) из точки t_1, подставив $u(t) = 0$:

$$\dot{\psi} = -1, \quad \psi(t_1) = 0.$$

Имеем

$$\psi(t) = t_1 - t.$$

Найдем корень $\bar{t}$ уравнения

$$\alpha\psi(t) - 1 = 0,$$

подставив вычисленное значение ψ:

$$\alpha(t_1 - t) - 1 = 0,$$

$$\bar{t} = t_1 - 1/\alpha.$$

Возможны два случая.

1) $\bar{t} < 0$, т.е. всюду на отрезке $[0, t_1]$ $\alpha\psi(t) - 1 < 0$. Тогда оптимальным может быть только управление $u^*(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Такая ситуация имеет место, если $t_1 < 1/\alpha$, т.е. если процесс

рассматривается на небольшом промежутке времени. В этом случае не выгодно инвестировать средства в производство, а следует направлять их все на потребление.

2) $\bar{t} \in (0, t_1)$, т.е. $t_1 > 1/\alpha$. Тогда нужно проанализировать две возможные ситуации, которые могут иметь место левее точки $\bar{t}$.

а) $\alpha\psi(t) - 1 > 0, \quad t \in [0, \bar{t})$.

В этом случае $u^* = 1$,

$$\dot{\psi} = -\alpha\psi, \quad \psi(\bar{t}) = t_1 - \bar{t} = 1/\alpha.$$

Тогда

$$\psi(t) = (1/\alpha)e^{\alpha(\bar{t}-t)},$$

и условие

$$\alpha\psi(t) - 1 = e^{\alpha(\bar{t}-t)} - 1 > 0$$

выполнено для всех $t \in [0, \bar{t})$.

б) $\alpha\psi(t) - 1 < 0, \quad t < \bar{t}. \qquad (5.2.13)$

Тогда $u^* = 0$,

$$\dot{\psi} = -1, \quad \psi(\bar{t}) = 1/\alpha, \quad \psi(t) = 1/\alpha + \bar{t} - t.$$

Но $\alpha\psi(t) - 1 = \alpha(\bar{t} - t) > 0$ при $t < \bar{t}$, что противоречит предположению (5.2.13).

Таким образом, оптимальное управление может иметь только следующую структуру:

$$u^*(t) \equiv 0, \quad t \in [0, t_1], \text{ если } t_1 < 1/\alpha$$

или

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1 - 1/\alpha), \\ 0, & t \in [t_1 - 1/\alpha, t_1] \text{ в случе } t_1 > 1/\alpha. \end{cases}$$

Итак, при достаточно большой продолжительности процесса необходимо в первую часть времени тратить все средства на инвестиции в производство, а в оставшееся время направлять все средства на потребление.

5.2.5. Краевая задача принципа максимума. Предположим, что в задаче оптимального управления (5.2.1)–(5.2.3) удается выразить из условия максимума функцию $u = u(\psi, x, t)$:

$$H(\psi, x, u(\psi, x, t), t) = \max_{v \in U} H(\psi, x, v, t).$$

Подставляя найденную функцию вместо управления в исходную (5.2.1) и сопряженную (5.2.6) системы, получим краевую задачу для системы $2n$ дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u(\psi, x, t), t),$$

$$\dot{\psi} = -\left.\frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x}\right|_{u=u(\psi,x,t)}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$x(t_0) = x^0, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x}.$$

Данная задача обычно называется краевой задачей принципа максимума. Если ее решениями являются функции $\bar{x} = \bar{x}(t)$ и $\bar{\psi} = \bar{\psi}(t)$, то управление $\bar{u} = u(\bar{\psi}, \bar{x}, t)$ удовлетворяет принципу максимума и, следовательно, подозрительно на оптимальность.

Заметим, что условие максимума часто выделяет многозначное отображение $u(\psi, x, t)$. Далее, в силу возможной разрывности функций $u(\psi, x, t)$ по ψ и x, правые части уравнений, входящих в краевую задачу, могут быть также разрывны по ψ и x. Эти обстоятельства нередко приводят к значительным трудностям при решении краевой задачи.

Предложенная в предыдущем пункте схема решения линейной по состоянию задачи оптимального управления, фактически, может рассматриваться как пример реализации краевой задачи. Линейность по состоянии привела к тому, что краевая задача расщепилась на две задачи Коши для сопряженной и исходной систем.

Пример 5.2.4. Решить сведением к краевой задаче принципа максимума

$$\dot{x} = tu, \quad x(0) = 0,$$

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [0, 1],$$

$$J(u) = x^2(1) + \int_0^1 u^2(t)\,dt \to \min;$$

функция Понтрягина:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi t u - u^2;$$

сопряженная задача:

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(1) = -2x(1).$$

Из условия минимума гамильтониана определяем

$$u(\psi, x, t) = \begin{cases} \psi t/2, & |\psi(t)\cdot t| \le 2, \\ -1, & \psi(t)\cdot t < -2, \\ 1, & \psi(t)\cdot t > 2. \end{cases}$$

Решением сопряженной задачи является функция $\psi(t) \equiv -2x(1)$, $t \in [0, 1]$. Воспользовавшись тем, что

$$x(1) = \int_0^1 u(t)\,dt$$

и учитывая ограничения на управление, получим

$$|x(1)| \le 1, \text{ т.е. } |\psi(t)\cdot t| \le 2, \quad t \in [0, 1].$$

Окончательно приходим к краевой задаче:

$$\dot{x} = \psi t/2, \quad \dot{\psi} = 0,$$

$$x(0) = 0, \quad \psi(1) = -2x(1).$$

Отсюда

$$\dot{x} = -x(1)t, \quad x(0) = 0,$$

т.е.

$$x(t) = -x(1)t^2/2.$$

При $t = 1$ должно выполняться равенство

$$x(1) = -x(1)/2,$$

что возможно лишь при $x(1) = 0$.

Таким образом,

$$x^* \equiv 0, \quad \psi^* \equiv 0, \quad u^* \equiv 0, \quad t \in [0, 1].$$

Поскольку рассматриваемая задача — линейно-выпуклая, то управление $u^* = u^*(t)$ оптимально. Глобальный минимум функционала равен

$$J(u^*) = 0.$$

В разобранном примере сведение к краевой задаче было осуществлено лишь для того, чтобы проиллюстрировать этот подход к решению задач оптимального управления. Ясно, что полученный результат очевиден и может быть найден непосредственным анализом вида задачи. В этом же примере изменим теперь критерий качества.

Пример 5.2.5. Решить сведением к краевой задаче принципа максимума

$$\dot{x} = tu, \quad x(0) = 0,$$

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [0, 1],$$

$$J(u) = x^2(1) - \int_0^1 u^2(t)\,dt \to \min;$$

функция Понтрягина:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi tu + u^2.$$

Сопряженная задача — та же, что и в примере 5.2.3. Из условия максимума имеем

$$u(\psi, x, t) = \begin{cases} 1, & \psi(t)\cdot t > 0, \\ -1, & \psi(t)\cdot t < 0, \\ \pm 1, & \psi(t)\cdot t = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\psi(1) \equiv -2x(1)$ проанализируем три варианта:

а) $x(1) < 0$. Тогда $\psi(t) > 0$, $u(t) \equiv 1$, $t \in [0, 1)$, но этому управлению соответствует состояние $x(t) = t^2/2$, т.е. $x(1) > 0$. Следовательно, данный вариант невозможен;

б) $x(t) > 0$. Аналогично предыдущему имеем $\psi(t) < 0$; $u(t) \equiv -1$, $t \in [0, 1)$, $x(t) = -t^2/2$, $x(1) < 0$, вариант невозможен;

в) $x(1) = 0$. Принципу максимума удовлетворяет любое кусочно-непрерывное управление, принимающее в каждой точке полуинтервала $[0, 1)$ значение 1, либо -1, для которого соответствующее значение состояния $x(1) = 0$. Так как задача — линейно-выпуклая, то такое управление оптимально.

Очевидно, что оптимальных управлений бесконечное множество. Например, глобальный минимум доставляют критерию качества функции

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right); \end{cases} \qquad u(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right); \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right], \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right], \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right], \\ 1, & t \in \left[\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, 1\right]; \end{cases} \text{ и т.п.}$$

Глобальный минимум функционала:

$$J(u^*) = x^{*2}(1) - \int_0^1 u^{*2}\, dt = -\int_0^1 dt = -1.$$

9. Заказ № 1889.

Упражнения

5.2.1. Пусть выполнены условия теоремы 5.2.3, и, кроме того, вектор $u^*(t)$ при каждом $t \in [t_0, t_1)$ является внутренней точкой множества U. Показать, что необходимым условием оптимальности процесса $\{u^*, x^*\}$ является

$$\frac{\partial}{\partial u} H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t) = 0, \quad t_0 \le t < t_1,$$

где ψ^* — вычисленное при $u = u^*(t)$, $x = x^*(t)$ решение сопряженной задачи (5.2.6).

5.2.2. Предположим, что в задаче оптимального управления (5.2.1)–(5.2.3) множество U выпукло, а система дифференциальных уравнений и интегральная часть функционала линейны относительно управления, т.е.

$$f(x, u, t) = g(x, t) + B(x, t)u,$$

$$F(x, u, t) = G(x, t) + \langle b(x, t), u\rangle.$$

Показать, что в этом случае принцип максимума совпадает по форме с линеаризованным принципом максимума.

5.2.3. Пусть управление $u = u(t)$ удовлетворяет принципу максимума в задаче оптмимального управления (5.2.1)–(5.2.3), функции $x = x(t)$ и $\psi = \psi(t)$ — соответствующие этому управлению решения задач Коши для исходной и сопряженной систем ((5.2.1) и (5.2.6)). Показать, что гамильтониан $H(t) = H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ непрерывен для всех $t \in [t_0, t_1)$.

5.2.4. При выполнении условий на параметры задачи оптимального управления (5.2.1)–(5.2.3), сформулированных в теореме 5.2.3, из принципа максимума всегда следует линеаризованный принцип максимума. Привести пример, иллюстрирующий несправедливость обратного утверждения.

5.2.5. Показать существенность выпуклости множества U в условиях теоремы 5.2.3. В задаче оптимального управления

$$\dot{x} = u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u^2,$$

$$u(t) \in \{-1, 1\}, \quad t \in [0, 1],$$

$$J(u) = x_2(1) \to \min$$

установить, что функция $u(t) \equiv 1$ удовлетворяет принципу максимума, но для этого управления линеаризованный принцип максимума не выполнен. (Отметим, что данное управление не только удовлетворяет принципу максимума, но и является оптимальным.)

5.2.6. Уточнить структуру оптимального управления в линейной по управлению задаче (5.2.7), если

а) множество U — r-мерный шар:

$U = \{v \in E^r\colon \ \|v\| \le L, \quad L > 0\}$;

б) множество U — r-мерный симплекс:

$$U = \left\{v \in E^r\colon \sum_{i=1}^{r} v_i = 1, \quad v_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r\right\}$$

5.2.7. Проверить с помощью принципа максимума на оптимальность управления, найденные в упражнениях 5.1.7 а,в,г,д.

В следующих задачах проверить на оптимальность управления $u = u(t)$:

5.2.8. $\dot{x} = u, \ x(0) = 1, \ |u(t)| \le 2, \ t \in [0, 1]$,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(t)\,dt \to \min,$$

а) $u(t) \equiv -1, \ t \in [0, 1]$;

б) $u(t) \equiv -2, \ t \in [0, 1]$;

в) $u(t) = \begin{cases} -2, & t \in [0, 1/2), \\ 0, & t \in [1/2, 1]; \end{cases}$

5.2.9. $\dot{x} = u, \ x(0) = 1, \ |u(t)| \le 1, \ t \in [0, \pi/2]$,

$$J(u) = \int_0^{\pi/2} x \cos t\,dt \to \min,$$

а) $u(t) \equiv 1, \ t \in [0, \pi/2]$; б) $u(t) \equiv -1, \ t \in [0, \pi/2]$;

5.2.10. $\dot{x} = u, \ x(0) = 0, \ |u(t)| \le 2, \ t \in [0, \pi/2]$,

$$J(u) = \int_0^{\pi/4} (u^2 - x^2 - 6x \sin 2t)\,dt \to \min,$$

а) $u(t) \equiv 2, \ t \in [0, \pi/4]$; б) $u(t) = \cos 2t$;

5.2.11. $\dot{x} = xu, \ x(0) = 1, \ |u(t)| \le 10, \ t \in [0, 2]$,

$J(u) = \ln x(2) \to \min$;

а) $u(t) \equiv 10, \ t \in [0, 2]$; б) $u(t) \equiv 1, \ t \in [0, 2]$;

5.2.12. $\dot{x} = xu, \ x(0) = 1, \ 0 \le u(t) \le 1, \ t \in [0, 2]$,

$$J(u) = \frac{1}{4}x^4(2) \to \min, \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [0, 2];$$

5.2.13. $\dot{x}_1 = tu, \ \dot{x}_2 = x_1 u, \ x_1(0) = x_2(0) = 0, \ |u(t)| \le 1$,

$t \in [0, 1], \ J(u) = -x_2(1) \to \min$,

а) $u(t) = t$; б) $u(t) \equiv 1, \ t \in [0, 1]$;

5.2.14. $\dot{x}_1 = ux_2, \ x_1(0) = 0, \ \dot{x}_2 = u, \ x_2(0) = 1, \ |u(t)| \le 1$,

$t \in [0, 1], \ J(u) = -2x_1(1) + 3x_2(1) \to \min$,

а) $u(t) \equiv 1, \ t \in [0, 1]$; б) $u(t) \equiv 0, \ t \in [0, 1]$;

5.2.15.

$\dot{x}_1 = x_2 + u^2,\ \dot{x}_2 = x_1,\ x_1(0) = x_2(0) = 1,,$

$|u(t)| \le 1,\ t \in [0, 1],\ J(u) = x_1(1) + x_2(1) \to \min,$

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1/2), \\ 1, & t \in [1/2, 1); \end{cases}$$

5.2.16. $\dot{x}_1 = u,\ x_1(0) = 1,\ \dot{x}_2 = x_1^2,\ x_2(0) = 0,$

$|u(t)| \le 1,\ t \in [0, 1],\ J(u) = x_2(1) \to \min,$

а) $u(t) \equiv -1,\ t \in [0, 1]$; б) $u(t) = t^2$;

5.2.17. $\dot{x}_1 = -x_2 u_1,\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u_2,\ \dot{x}_3 = u_2,\ t \in [0, \pi],$

$x_i(0) = 0,\ i = 1, 2, 3,$

$u(t) \in U = \{v \in E^2:\ v_1^2 + v_2^2 = 1\},$

$J(u) = x_2(\pi) + x_3(\pi) \to \min,$

$u_1(t) \equiv \sqrt{2}/2,\ u_2(t) \equiv \sqrt{2}/2,\ t \in [0, \pi].$

5.2.18. Воспользовавшись принципом максимума, решить сформулированную в упражнении 5.1.5. задачу о максимальном отклонении.

5.2.19. Применить принцип максимума к решению задач упражнений 5.1.7.

5.2.20. В линейной по состоянию и управлению задаче

$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f_1(t),\ x(t_0) = x^0,$

$u(t) \in U \subset E^r,\ t \in [t_0, t_1],$

$$J(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} [\langle q(t), x(t)\rangle + \langle b(t), u(t)\rangle + g(t)]\, dt \to \min,$$

получить формулы, позволяющие в явном виде выразить оптимальное управление через элементы матричной функции $B(t)$, вектор-функции $b(t)$ и компоненты ψ^* решения сопряженной задачи (5.2.9), независящей от выбора допустимого управления, если

а) множество U — r-мерный параллелепипед:

$U = \{v \in E^r:\ \alpha_j \le v_j \le \beta_j,\quad j = 1, 2, \ldots, r\}$;

б) множество U — r-мерный куб:

$U = \{v \in R^r:\ |v_j| \le L,\ L > 0,\quad j = 1, 2, \ldots, r\}.$

в) множество U — r-мерный шар:

$U = \{v \in E^r:\ \|v - \alpha\| \le L,\ L > 0\}$;

α — фиксированный вектор из E^r.

5.2.21. Для следующих задач сформулировать принцип максимума, уточнить структуру оптимального управления и провести редукцию к краевой задаче принципа максимума:

а) $\dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2 + x_3 u_1$, $\dot{x}_2 = \cos x_1 + \ln x_2 + u_2$,

$$\dot{x}_3 = x_1 + u_1 \ln x_2, \quad x_i(0) = x_1^0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$|u_j(t)| \le 1, \quad j = 1, 2; \quad t \in [0, 1],$$

$$J(u) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{3} (x_i(t) - N_i(t))^2 \, dt \to \min,$$

N_i — заданные функции;

б) $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$, $x_1(0) = x_1^0$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u^2(t)$, $x_2(0) = x_2^0$,

$$0 \le u(t) \le 1, \quad t \in [0, 1], \quad J(u) = x_1(1) e^{x_2(1)} + \int_0^1 u(t) \, dt \to \min;$$

в) $\dot{x}_1 = x_1 x_2 + x_3 u$, $\dot{x}_2 = x_1 - x_2$, $\dot{x}_3 = u$, $x_i(0) = x_i^0$, $i = 1, 2, 3$,

$$\alpha \le u(t) \le \beta, \quad t \in [0, 1], \quad J(u) = \int_0^1 [x_1^2(t) + x_2^2(t)] \, dt \to \min.$$

Применить принцип максимума для решения следующих задач оптимального управления:

5.2.22. $\dot{x} = u$, $x(1) = 5$, $-3 \le u(t) \le 1$, $t \in [1, 2]$,

$$J(u) = \int_1^2 [x(t) + u(t)] \, dt \to \min;$$

5.2.23. $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $|u(t)| \le 1$, $t \in [0, 2]$,

$$J(u) = x(2) + \int_0^2 [x(t) + u^2(t)] \, dt \to \min;$$

5.2.24. $\dot{x}_1 = x_2$, $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_2 = x_1 + u(t)$, $x_2(0) = 1$,

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [0, 1], \quad J(u) = x_1(1) + x_2(1) \to \min;$$

5.2.25. $\dot{x}_1 = x_2$, $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_2 = x_1 + u^2(t)$, $x_2(0) = 1$,

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [0, 1], \quad J(u) = x_1(1) + x_2(1) \to \min;$$

5.2.26. $\dot{x}_1 = -x_2 + u_1^2$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_2 = x_1 + 2u_2$, $x_2(0) = 1$,

$$u_1(t) \in \{-1, 0, 2\}, \quad -1 \le u_2(t) \le 2, \quad t \in [0, \pi],$$

$$J(u) = x_2(\pi) + \int_0^\pi u_2(t) \, dt \to \min;$$

5.2.27. $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + 2tu$, $\dot{x}_3 = u$, $x_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3$,

$$-1 \le u(t) \le 4, \quad t \in [0, \pi], \quad J(u) = x_2(\pi) + x_3(\pi) \to \min;$$

5.2.28. $\dot{x}_1 = u_1 - u_2$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_2 = x_1 + 2u_2 + u_3$, $x_2(0) = 0$,

$u_1^2(t) + u_3^2(t) \leq 1$, $|u_2(t)| = 1$, $t \in [0, 1]$,

$J(u) = x_2(1) \to \min$;

5.2.29. $\dot{x} = u(t)$, $x(0) = 1$, $|u(t)| \leq 1$, $t \in [0, 1]$,

$J(u) = \sin x(1) \to \min$;

5.2.30. $\dot{x} = u(t)$, $x(0) = 0$, $0 \leq u(t) \leq \pi$, $t \in [0, 1]$,

$J(u) = \cos x(1) \to \min$;

5.2.31. $\dot{x} = u^4(t)$, $x(0) = 0$, $u(t) \in \{-1, 0, 2\}$, $t \in [0, 1]$,

$J(u) = \frac{1}{2} x^2(1) \to \max$;

5.2.32. $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u(t)$, $|u(t)| \leq 1$, $t \in [0, 1]$,

$J(u) = x_1^2(1) \to \min$;

а) $x_1(0) = x_2(0) = 0$; б) $x_1(0) = x_2(0) = -1$; в) $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$;

5.2.33. $\dot{x} = u(t)$, $x(0) = x^0$, $|u(t)| \leq 1$, $t \in [0, 1]$,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)]\,dt \to \min.$$

5.2.34. $\dot{x} = u(t)$, $x(0) = 0$, $u(t) \in E^1$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$J(u) = \int_0^{\pi/4} [u^2(t) - x^2(t) - 6x(t)\sin 2t]\,dt \to \min;$$

5.2.35. $\dot{x} = (2u - 1)x$, $x(0) = 1$, $0 \leq u(t) \leq 1$, $t \in [0, t_1]$,

$$J(u) = \int_0^{t_1} [u(t) - 1]\,x(t)\,dt \to \min,$$

а) $t_1 = 0{,}5$; б) $t_1 = 1$.

5.2.36. $\dot{x} = 2u$, $x(0) = x^0$, $u(t) \in E^1$, $t \in [0, t_1]$,

$$J(u) = \int_0^{t_1} [-x_1^2 + u^2(t)]\,dt \to \min,$$

x^0 и t_1 —заданные числа, $t_1 > 0$, $t_1 \leq \frac{\pi n}{\sqrt{2}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

5.3. Итерационные процессы принципа максимума

Принцип максимума является основой для построения сходящихся итерационных методов решения задач оптимального управления. Остановимся на одном из простейших вариантов таких методов [13, с. 51–56].

Предположим, что в задаче оптимального управления (5.2.1)–(5.2.3) известно некоторое начальное приближение — допустимое управление $u^0 = u^0(t)$ и с помощью описываемой процедуры найдена функция $u^k = u^k(t)$. Опишем k-ю итерацию алгоритма.

1. Вычисляются соответствующие управлению $u^k = u^k(t)$ решения исходной и сопряженной задач — функции $x^k = x^k(t)$ и $\psi^k = \psi^k(t)$, а также значение функционала $J(u^k)$.

2. Как и в изложенной выше схеме проверки управлений на оптимальность, составляется функция

$$W_k(v, t) = H(\psi^k(t), x^k(t), v, t) - H(\psi^k(t), x^k(t), u^k(t), t),$$

$$v \in U, \quad t_0 \le t \le t_1.$$

3. Для каждого фиксированного $t \in [t_0, t_1)$ решается вспомогательная задача математического программирования:

$$\bar{u}^k(t)\colon\ \overline{W}_k(t) = W_k(\bar{u}_k(t), t) = \max_{v \in U} W_k(v, t).$$

Если $\overline{W}_k(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1)$, то управление $u^k = u^k(t)$ удовлетворяет принципу максимума, и реализация метода прекращается.

4. Из решения задачи одномерной (глобальной) максимизации находится точка $\tau^k \in T$ такая, что

$$\overline{W}_k(\tau_k) = \max_{t_0 \le t < t_1} \overline{W}_k(t).$$

Можно считать, что $\overline{W}_k(\tau_k) > 0$, поскольку, если $\overline{W}_k(\tau_k) = 0$, то для управления $u^k = u^k(t)$ принцип максимума выполнен.

5. Пусть t_0^k и t_1^k — ближайшие слева и справа к τ_k точки разрыва функции $\overline{W}_k(t)$. Строится однопараметрическое семейство множеств:

$$T_k(\varepsilon) = [\tau_k - \varepsilon(\tau_k - t_0^k), \quad \tau_k + \varepsilon(t_1^k - \tau_k)), \quad \varepsilon \in [0, 1]$$

и семейство управлений

$$u_\varepsilon^k(t) = \begin{cases} \bar u^k(t), & t \in T_k(\varepsilon), \\ u^k(t), & t \in [t_0, t_1) \setminus T_k(\varepsilon). \end{cases}$$

6. Ищется

$$\varepsilon_k\colon\ J(u^k_{\varepsilon_k}) = \min_{\varepsilon \in [0,1]} J(u^k_\varepsilon),$$

и следующее приближение определяется формулой:

$$u^{k+1}(t) = u^k_{\varepsilon_k}(t).$$

На этом очередная k-я итерация метода завершается.

Пусть в рассматриваемой задаче (5.2.1)–(5.2.3) выполнены предположения теоремы 5.2.1; множество U компактно; функционал $J(u)$ ограничен снизу на множестве допустимых управлений; вектор-функции $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial H/\partial x$ удовлетворяют условию Липшица по x с одной максимальной константой на всех допустимых наборах $\{u, x, \psi\}$; функция $\overline{W}_u(t) = \max\limits_{v \in U} H[(\psi(t), x(t), v, t) - H(\psi(t), x(t), u(t), t)]$ удовлетворяет условию Липшица на всех допустимых процессах и на каждом интервале непрерывности с одной максимальной константой; расстояние между любыми точками разрыва функции $\overline{W}_u(t)$ для всех допустимых процессов не меньше некоторого положительного числа. Тогда генерируемая методом последовательность управлений строго релаксационна и сходится в смысле

$$\lim_{k\to\infty} \overline{W}_k(\tau_k) = 0.$$

В линейно-выпуклом варианте задачи последовательность $\{u^k\}$, кроме того, является минимизирующей при условии существования оптимального управления в классе кусочно-непрерывных функций [13, с. 53–56].

Приведем пример, иллюстрирующий применение метода в задаче, в которой структура оптимального управления очевидна. Пример интересен тем, что оптимальное управление является особым на участке ненулевой меры — на этом участке принцип максимума вырождается.

Определение 5.3.1. Допустимое управление $u = u(t)$ называется особым на множестве положительной лебеговой меры $\Omega \subset T$, если на отвечающих этому управлению состоянии $x = x(t)$ и решении сопряженной задачи $\psi = \psi(t)$ выполняется

$$\Delta_v H(\psi, x, u, t) = H(\psi(t), x(t), v, t) - H(\psi(t), x(t), u(t), t) \equiv 0,$$

$$t \in \Omega, \quad v \in U.$$

С необходимым условием оптимальности особых управлений можно познакомиться в книгах [11, с. 184–191; 19].

Пример 5.3.1. Выполним одну итерацию изложенной выше процедуры в задаче:

$$\dot{x} = u,\ x(0) = 1,\ |\, u(t)\, | \le 1,\ t \in [0, 2],\ J(u) = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2(t)\, dt \to \min,$$

с начальным приближением $u^0(t) \equiv 1$.

Прежде всего заметим, что из вида задачи очевидно оптимальное управление

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Соответствующее $u^*(t)$ состояние процесса

$$x^*(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Этот результат легко проверить с помощью принципа максимума:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi u - x^2/2.$$

Сопряженная задача:

$$\dot{\psi} = x, \quad \psi(2) = 0.$$

Решение сопряженной задачи, отвечающее $u^*(t)$:

$$\psi^*(t) = \begin{cases} -t^2/2 + t - 1/2, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

$$W_{u^*}(v, t) = \begin{cases} (-t^2/2 + t - 1/2)(v + 1), & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Отсюда видно, что управление $u^* = u^*(t)$ является особым на отрезке $[1, 2]$. Поскольку $-t^2/2 + t - 1/2 < 0$ при $t \in [0, 1)$, то

$$\overline{W}(t) = \max_{v \in U} W_{u^*}(v, t) \equiv 0,$$

т.е. управление $u^*(t)$ удовлетворяет принципу максимума. С учетом того, что рассматриваемая задача является линейно-выпуклой, можно сделать вывод об оптимальности функции $u^* = u^*(t)$.

Выполним одну итерацию метода согласно приведенной выше схеме.

1. Управлению $u^0(t) \equiv 1$ соответствуют $x^0(t) = t + 2$, $\psi^0(t) = t^2/2 + t - 4$ и $J(u^0) = 4\frac{1}{3}$.

2. $W_0(v, t) = \psi^0(t)(v-1) = (t^2/2 + t - 4)(v-1)$.

3. Так как $\psi^0(t) < 0$ при $t \in [0, 2)$, решением задачи максимизации функции $W_0(v, t)$ по v при каждом фиксированном $t \in [0, 2)$ является

$$\overline{u}^0(t) \equiv -1, \quad t \in [0, 2).$$

При этом

$$\overline{W}_0 = -2\psi^0(t) = -t^2 - 2t + 8 > 0, \quad t \in [0, 2).$$

4. Максимум функции $\overline{W}_0(t)$ на полуинтервале $[0, 2)$ достигается в точке $\tau_0 = 0$.

5. Функция $\overline{W}_0(t)$ непрерывна на $[0, 2)$. Поэтому $t_0^0 = 0$, $t_1^0 = 2$, $T_0(\varepsilon) = [0, 2\varepsilon)$,

$$u_\varepsilon^0(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 2\varepsilon, \\ 1, & 2\varepsilon \le t < 2, \quad \varepsilon \in [0, 1]. \end{cases}$$

6. Вычислим $\Phi_0(\varepsilon) = J(u_\varepsilon^0)$. Найдем для этого соответствующее управлениям u_ε^0 состояния x_ε^0: $x_\varepsilon^0(t) = 1 - t$, $t \in [0, 2\varepsilon]$. При $t \in [2\varepsilon, 2]$ состояние x_ε^0 определяется из задачи Коши:

$$\dot{x} = 1, \quad x(2\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon.$$

Следовательно, $x_\varepsilon^0 = t + 1 - 4\varepsilon$. Итак,

$$\Phi_0(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^2 [x_\varepsilon^0(t)]^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\varepsilon} (1-t)^2\,dt + \frac{1}{2}\int_{2\varepsilon}^2 (t + 1 - 4\varepsilon)^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\,[(3 - 4\varepsilon)^3 - 2(1 - 2\varepsilon)^3].$$

По теореме Вейерштрасса глобальный минимум непрерывной функции $\Phi_0(\varepsilon)$ на отрезке $[0,1]$ достигается. Точками глобального минимума могут являться либо корни алгебраического уравнения $d\Phi_0(\varepsilon)/d\varepsilon = 0$, либо концы отрезка. Приравнивая нулю первую производную функции $\Phi_0(\varepsilon)$, получим уравнение

$$3\varepsilon^2 - 5\varepsilon + 2 = 0,$$

имеющее своими корнями числа $\overline{\varepsilon} = 1$, $\widetilde{\varepsilon} = 2/3$. Сравнивая значения $\Phi_0(1)$, $\Phi_0(2/3)$ и $\Phi_0(0) = J(u^0)$, приходим к выводу о том, что точкой глобального минимума является $\varepsilon_0 = 2/3$. Следующее приближение имеет вид

$$u^1(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 4/3, \\ 1, & 4/3 \le t \le 2; \end{cases}$$

$$J(u^1) = \Phi_0(2/3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{27}$$

на этом одна итерация метода завершена. Интересна вторая итерация. Соответствующие управлению $u^1(t)$ состояние и решение сопряженной задачи:

$$x^1(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0, 4/3], \\ t - 5/3, & t \in [4/3, 4]; \end{cases}$$

$$\psi^1(t) = \begin{cases} -t^2/2 + t - 4/9, & t \in [0, 4/3], \\ t^2/2 - 5t/3 + 4/3, & t \in [4/3, 2]. \end{cases}$$

Вспомогательное управление

$$\bar{u}^1(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 2/3, \\ 1, & 2/3 \le t < 4/3, \\ -1, & 4/3 \le t < 2. \end{cases}$$

Функция

$$\overline{W}_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2/3, \\ 2\psi^1(t), & 2/3 \le t < 4/3, \\ -2\psi^1(t), & 4/3 \le t < 2 \end{cases}$$

является непрерывной и достигает глобального максимума в двух точках $\bar{\tau}_1 = 1$, $\tilde{\tau}_1 = 5/3$. Решение задачи одномерной минимизации по ε приводит для первой точки к управлению (проверьте!)

$$u^2(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 11/12, \\ 1, & 11/12 \le t < 13/12, \\ -1, & 13/12 \le t < 4/3, \\ 1, & 4/3 \le t < 2. \end{cases}$$

Используя в качестве точки τ_1 вторую точку $\tilde{\tau}_1 = 5/3$, получим (проверьте!):

$$u^2(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t < 4/3, \\ -1, & 4/3 \le t < 27/15, \\ 1, & 27/15 \le t < 2. \end{cases}$$

Дальнейшая реализация алгоритма приводит к росту числа точек переключения управления на отрезке $[1, 2]$ и «пилообразному» виду графика функции состояния на этом отрезке (значение целевого функционала на каждой итерации уменьшается). Это связано с тем, что на участке $[1, 2]$ оптимальное управление является особым. Выяснив структуру возможного особого процесса, часто удается улучшить сходимость метода, выбрав соответствующим образом начальное приближение (см. упражнение 5.3.1).

Предположим теперь, что в примере 5.3.1 ограничения на управления «точечные»: $u(t) \in \{-1, +1\}$, что не противоречит условиям, при которых справедлив принцип максимума. Легко заметить, что управление с бесконечным числом переключений на отрезке $[1, 2]$, приводящее к «пилообразному» графику функции состояния на этом отрезке и есть «обобщенное» оптимальное управление или, так называемый, «скользящий» режим. Наконец, при приведенных в примере 5.3.1 выпуклых ограничениях: $-1 \le u(t) \le +1$ простая модификация метода

$$u^k_{\varepsilon\alpha}(t) = \begin{cases} \bar{u}^k(t), & t \in T_k(\varepsilon),\ \varepsilon \in [0, 1], \\ u^k + \alpha[\bar{u}^k - u^k(t)], & t \in [t_0, t_1) \backslash T_k(\varepsilon),\ \alpha \in [0, 1], \end{cases}$$

$$(\varepsilon_k \alpha_k):\ J\left(u^k_{\varepsilon_k \alpha_k}\right) = \min_{\varepsilon\alpha \in [0,1]} J(u^k_{\varepsilon\alpha})$$

позволит решить пример 5.3.1 при $u^0(t) = 1$ за одну итерацию (проверьте!).

Подробнее о такой двухпараметрической модификации метода можно прочесть в [11, с. 225].

Для изучения других численных методов оптимального управления, в частности, основанных на принципе максимума алгоритмов, градиентных процедур и т.п. можно рекомендовать книги [14, 41, 40, 44].

Рассмотрим другую модификацию алгоритма, использующего ту же идею. Пусть на k-м шаге итерационного процесса имеется допустимое управление $u^k(t)$, $t \in T$, $k = 0, 1, \ldots$ Найдем соответствующие ему решения $x^k(t)$, $\psi^k(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ фазовой и сопряженной систем.

Образуем вспомогательное управление $\bar{u}^k(t)$ по правилу

$$\bar{u}^k(t) = \arg\max_{v \in U} W_k(v, t), \quad t \in [t_0, t_1).$$

Сформируем функцию

$$\overline{W}_k(t) = W_k(\bar{u}^k(t), t) \ge 0, \quad t \in [t_0, t_1).$$

Если $\overline{W}_k(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1)$, то управление $u^k(t)$ удовлетворяет принципу максимума, и метод прекращает свою работу.

Определим крайние значения этой функции

$$\lambda_{\min} = \inf_{t\in[t_0,t_1)} \overline{W}_k(t), \quad \lambda_{\max} = \sup_{t\in[t_0,t_1)} \overline{W}_k(t).$$

Построим λ-параметрическое семейство управлений:

$$u_\lambda^k(t) = \begin{cases} u^k(t), & \overline{W}_k(t) < \lambda, \\ \bar{u}^k(t), & \overline{W}_k(t) \ge \lambda, \quad t \in [t_0, t_1). \end{cases}$$

Тогда очередное $(k+1)$-е приближение образуем по правилу

$$u^{k+1}(t) = u_{\lambda_k}^k(t), \quad t \in [t_0, t_1),$$

где значение λ_k является решением задачи одномерной оптимизации

$$J(u_\lambda^k) \to \min, \quad \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}].$$

Пример 5.3.2.

$$J(u) = 3x(2) + \int_0^2 x(t)(u(t) + 3)\,dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = -2, \quad |u(t)| \le 2.$$

Провести одну итерацию метода для управления $u^0(t) = 1$.

Р е ш е н и е. Выпишем функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \psi u - x(u + 3)$$

и сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = u + 3, \quad \psi(2) = -3.$$

Найдем решение фазового уравнения, соответствующего управлению x^0

$$x^0(t) = t - 2, \quad t \in T$$

и сопряженную траекторию

$$\psi^0(t) = 4t - 11, \quad t \in T.$$

Образуем функцию

$$W_0(v, t) = (3t - 9)(v - 1), \quad t \in T.$$

Отсюда,

$$\bar{u}^0(t) = \arg\max_{|v|\le 2} W_0(v, t) = \arg\max_{|v|\le 2} (3t - 9)(v - 1) = -2, \ t \in T,$$

$$\overline{W}_0(t) = 27 - 9t.$$

Отметим, что $\overline{W}_0(t) > 0$, $0 \le t \le 2$. Следовательно, управление u^0 не удовлетворяет принципу максимума.

Найдем крайние значения функции $\overline{W}_0(t)$

$$\lambda_{\min} = 9, \quad \lambda_{\max} = 27$$

и образуем λ-параметрическое семейство:

$$u^0_\lambda(t) = \begin{cases} 1, & \overline{W}_0(t) < \lambda, \\ -2, & \overline{W}_0(t) \ge \lambda, \end{cases}$$

при $\lambda \in [9; 18]$, $0 \le t \le 2$.

Следовательно,

$$u^0_\lambda(t) = \begin{cases} -2, & 0 \le t < \tau(\lambda), \\ 1, & \tau(\lambda) \le t \le 2, \end{cases}$$

где $\tau(\lambda) \in [0; 2]$ — единственный корень уравнения $\overline{W}_0(t) = \lambda$ на $[0; 2]$. Понятно, что в данном случае имеет место взаимно-однозначное соответствие $\lambda \Leftrightarrow \tau(\lambda)$, $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, $\tau(\lambda) \in [0; 2]$ (функция $\overline{W}_0(t)$ монотонно убывает на $[0; 2]$). Поэтому имется возможность от параметра λ перейти к параметру τ и образовать τ-параметрическое семейство управлений

$$u^0_\tau(t) = \begin{cases} -2, & 0 \le t < \tau, \\ 1, & \tau \le t \le 2, \end{cases}$$

где $\tau \in [0, 2]$. При этом следующее приближение определяется по правилу

$$u^1(t) = u^0_{\tau_0}(t), \quad 0 \le t \le 2,$$

где τ_0 — решение задачи $J(u^0_\tau) \to \min$, $0 \le \tau \le 2$.

Найдем явное представление для функционала $J(u^0_\tau)$ через параметр τ. С этой целью подсчитаем траекторию $x^0_\tau(t) = x(t, u^0_\tau)$, $t \in T$.

Решая задачу Коши на отрезке $[0, \tau]$

$$\dot{x} = -2, \quad x(0) = -2,$$

определим траекторию

$$x^0_\tau(t) = -2t - 2, \quad 0 \le t \le \tau.$$

Далее, проинтегрируем уравнение $\dot{x} = 1$, $x(\tau) = -2\tau - 2$. В результате получим

$$x_\tau^0(t) = t - 3\tau - 2, \quad \tau \le t \le 2.$$

Подсчитаем функционал

$$J(u_\tau^0) = 3x_\tau^0(2) + \int_0^2 x_\tau^0(t)(u_\tau^0(t) + 3)\,dt =$$

$$= -9\tau - 2\int_0^\tau (t+1)\,dt + 4\int_\tau^2 (t - 3\tau - 2)\,dt = 9\tau^2 - 27\tau - 8.$$

Решим задачу параметрического поиска

$$9\tau^2 - 27\tau - 8 \to \min, \quad 0 \le \tau \le 2.$$

Это задача минимизации выпуклой функции на отрезке. Найдем стационарную точку

$$18\tau - 27 = 0.$$

Отсюда, $\tau_0 = 3/2$. Следовательно,

$$u^1(t) = \begin{cases} -2, & 0 \le t < 3/2, \\ 1, & 3/2 \le t \le 2. \end{cases}$$

Заметим, что при такой модификации алгоритма могут возникнуть трудности с задачей параметрической оптимизации, если функция $\overline{W}_k(t) > 0$ имеет участки постоянного значения: $\overline{W}_k(t) \equiv \mathrm{const}$, $t \in T_k \subset T$, $\mathrm{mes}\, T_k > 0$. Тогда в эти участки надо вписывать однопараметрическое семейство множеств $T_k(\varepsilon)$.

Предложенные алгоритмы построения итерационных процессов принципа максимума будем в дальнейшем называть методами игольчатой линеаризации.

Упражнения

5.3.1. Показать, что метод улучшения допустимых управлений, использованный в примере 5.3.1, приводит в этом примере к точному решению за одну итерацию, если в качестве начального приближения выбрать функцию $u^0(t) \equiv 0$.

В следующих задачах провести одну итерацию метода игольчатой линеаризации:

5.3.2. $J(u) = -4x(3) - \frac{1}{2}x^2(3) + \int_0^3 u(t)(4x(t) - t)\,dt \to \min,$

$\dot{x} = u, \ x(0) = 0,$

$|u| \le 1, \quad u^0(t) = 0, \ t \in [0, 3].$

5.3.3. $J(u) = -x_1(3) + 4x_2(3) \to \min,$

$\dot{x}_1 = (x_2 + 1)u,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = 2u - 1,\ x_2(0) = 1,$

$0 \le u \le 2,\ u^0(t) = 1,\ t \in [0, 3].$

5.3.4. $J(u) = x_1(3) + 4x_2(3) + 2x_3(3) \to \min,$

$\dot{x}_1 = -6x_2,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = -u,\ x_2(0) = 7,$

$\dot{x}_3 = ux_2,\ x_3(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u^0(t) = 1,\ t \in [0, 3].$

5.3.5. $J(u) = 8x_1(4) + 3x_2(4) - 4\int\limits_0^4 x_1(t)u(t)\,dt \to \min,$

$\dot{x}_1 = -u,\ x_1(0) = -5,\ \dot{x}_2 = x_1,\ x_2(0) = 0,$

$|u| \le 2,\ u^0(t) = 1,\ t \in [0, 4].$

5.3.6. $J(u) = -2x(2) - \int\limits_0^2 x(t)(u(t) - 2)\,dt \to \min,$

$\dot{x} = 2u,\ x(0) = 1,$

$0 \le u \le 2,\ u^0(t) = 1,\ t \in [0, 2].$

5.3.7. $J(u) = -5x(1) + \int\limits_0^1 x(t)(u(t) + 1)\,dt \to \min,$

$\dot{x} = u,\ x(0) = 1,$

$-3 \le u \le -1,\ u^0(t) = -2,\ t \in [0, 1].$

5.3.8. $J(u) = x_1^2(3) + x_2(3) \to \min,$

$\dot{x}_1 = u,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = x_1,\ x_2(0) = -1,$

$|u| \le 1,\ u^0(t) = 0,\ t \in [0, 3].$

5.3.9. $J(u) = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2(t) + 2(t - 2)u(t)\,dt \to \min\right),$

$\dot{x} = u,\ x(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u^0(t) = 0,\ t \in [0, 2].$

5.3.10. $J(u) = \int\limits_0^1 x(t)(u(t) - 1)\,dt \to \min,$

$\dot{x} = u,\ x(0) = 1,$

$|u| \le 1,\ u^0(t) = 0,\ t \in [0, 1].$

5.3.11. $J(u) = x_3(1) \to \min,$

$\dot{x}_1 = x_2,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = u,\ x_2(0) = 0,$

$\dot{x}_3 = ux_1,\ x_3(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u^0(t) = 1,\ t \in [0, 1].$

5.4. Методы прямой релаксации в линейной задаче оптимального управления

Рассмотрим линейный вариант задачи (5.2.1)–(5.2.3)

$$\varphi(x) = \langle c, x\rangle, \tag{5.4.1}$$

$$f(x, u, t) = (A_0(t) + uA(t))x + b(t)u + c(t), \tag{5.4.2}$$

$$F(x, u, t) = \langle a_0(t) + ua(t), x\rangle + b_0(t)u + c_0(t), \tag{5.4.3}$$

$$u^- \le u(t) \le u^+, \quad t \in T. \tag{5.4.4}$$

Здесь $A_0(t)$, $A(t)$ — $(n \times n)$-матричные функции, $a_0(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — n-мерные вектор-функции, $b_0(t)$, $c_0(t)$ — скалярные функции, $c \in E^n$.

Таким образом, задача линейна по x и по u. При этом управление является одномерным с областью значений $U = [u^-; u^+]$ (двустороннее ограничение).

Важно отметить, что правые части систем (5.1.1) и подынтегральные функции в целевом функционале (5.1.3) содержат слагаемые вида ux. Поэтому данный тип задачи не относится к классу линейно-выпуклых задач оптимального управления, для которых принцип максимума является достаточным условием оптимальности (теорема 5.2.2). Для решения задач такого вида обычно применяются общие методы решения нелинейных задач оптимального управления. В данном параграфе предлагаются специальные процедуры, основанные на возможности получения в задаче точных формул приращения целевого функционала [4, 24].

Функция Понтрягина в задаче (5.4.1)–(5.4.4) имеет следующую структуру по управлению

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + H_u(\psi, x, t)u.$$

Введем обозначение для коэффициента при u:

$$g(\psi, x, t) = H_u(\psi, x, t)$$

и определим экстремальное управление с помощью условия максимума

$$u^*(\psi, x, t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi, x, v, t).$$

Следовательно,

$$u^*(\psi, x, t) = \begin{cases} u^-, & g(\psi, x, t) < 0, \\ u^+, & g(\psi, x, t) > 0. \end{cases} \tag{5.4.5}$$

Если $g(\psi, x, t) = 0$, то экстремальное управление определяется неоднозначно:

$$u^*(\psi, x, t) \in [u^-, u^+].$$

В частности, если $U = [-l, l]$, $l > 0$ (модульное ограничение на управление), то

$$u^*(\psi, x, t) = l \cdot \operatorname{sign} g(\psi, x, t).$$

Назовем функцию $g(\psi, x, t)$ функцией переключения управления.

Укажем способы релаксации допустимых управлений в задаче (5.4.1)–(5.4.4). Задача релаксации состоит в том, что по заданному управлению u требуется найти допустимое управление v со свойством

$$J(v) \le J(u).$$

Первая процедура релаксации (*x-процедура*). Пусть задано допустимое управление $u(t)$, $t \in T$. Найдем решение $\psi(t, u)$, $t \in T$, сопряженной системы. Сформируем функцию переключения.

$$g_1(x, t) = g(\psi(t, u), x, t). \tag{5.4.6}$$

Найдем решение $x(t)$, $t \in T$, фазовой системы с управлением $u = u^*$ вида (5.4.5):

$$\dot{x} = A_0(t)x + (A(t)x + b(t))u^*(\psi(t, u), x, t) + c(t), \quad x(t_0) = x^0. \tag{5.4.7}$$

Построим управление

$$v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T. \tag{5.4.8}$$

Процедура закончена. Полученное управление обладает свойством релаксации: $J(v) \le J(u)$. Отметим, что $x(t) = x(t, v)$.

Описанная процедура позволяет сделать заключение о стационарности управления $u(t)$.

Условие стационарности: если $v(t) = u(t)$, $t \in T$, то управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума.

Введем множество $T_{u,v} = \{t \in T\colon\ u(t) \ne v(t)\}$.

Условие нестационарности: если $\operatorname{mes} T_{u,v} > 0$ для любого управления $v(t)$ на выходе процедуры релаксации, то управление $u(t)$ не удовлетворяет принципу максимума.

Укажем условия, при которых имеет место строгая релаксация: $J(v) < J(u)$. Для этого обратимся к системе (5.4.7), с помощью которой ищется траектория $x(t) = x(t, v)$. Данная система, в силу (5.4.5) является разрывной, т.е. ее правая часть разрывна по совокупности (x, t), причем равенство $g_1(x, t) = 0$ — уравнение поверхности разрыва в пространстве E^{n+1}.

***Определение* 5.4.1.** Решение $x(t)$, $t \in T$, системы (5.4.7) называется особым режимом на промежутке $T_0 = [\tau_0, \tau_1]$, $\tau_0 < \tau_1$, если $g_1(x(t), t) = 0$, $t \in T_0$.

Для поиска управления $v(t)$, порождающего особый режим, необходимо продифференцировать тождество $g_1(x(t), t) = 0$ по времени (возможно, не один раз) и решить полученное уравнение относительно управления v с последующей проверкой на выполнение ограничений.

Образуем множества

$$T_1 = \{t \in T\colon\ g_1(x(t, v), t) \neq 0\}, \qquad T_+ = T_1 \cap T_{u,v}$$

и сформируем следующее условие.

Условие строгой релаксации: если $\operatorname{mes} T_+ > 0$, то $J(v) < J(u)$, при этом

$$J(v) = J(u) - \int_T g_1(x(t, v), t)(v(t) - u(t))\, dt,$$

$$g_1(x(t, v), t)(v(t) - u(t)) > 0, \quad t \in T_+.$$

Иными словами, строгая релаксация гарантируется, если решение $x(t, v)$ фазовой системы (5.4.7) имеет неособый участок ($g_1(x(t, v), t) \neq 0$), на котором управления $u(t)$ и $v(t)$ не совпадают.

Следствие: если решение $x(t, v)$ является особым режимом на T ($\operatorname{mes} T_+ = 0$), то $J(v) = J(u)$.

Пример 5.4.1

$$J(u) = -x_1(2) + 2x_2(2) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u, \ x_1(0) = 1, \ \dot{x}_2 = ux_1, \ x_2(0) = 0, \ |u(t)| \le 2.$$

Применить к управлению $u(t) = t$, $t \in T$, x-процедуру релаксации.

Решение. Построим функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 u + \psi_2 u x_1.$$

Сформируем функцию переключения

$$g(\psi, x, t) = \psi_1 + \psi_2 x_1 \tag{5.4.9}$$

и выпишем экстремальное управление

$$u^*(\psi, x, t) = 2 \operatorname{sign} g(\psi, x, t).$$

Составим сопряженную систему

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 u, \quad \psi_1(2) = 1, \ \dot{\psi}_2 = 0, \ \psi_2(2) = -2$$

и найдем ее решение, соответствующее исходному управлению $u(t)$

$$\psi_1(t, u) = t^2 - 3, \quad \psi_2(t, u) = -2, \quad 0 \le t \le 2.$$

Подставим найденное решение в соотношение (5.4.9)

$$g_1(x, t) = t^2 - 3 - 2x_1.$$

Определим систему для поиска траектории $x(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u^*(\psi(t, u), x, t), \ x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 u^*(\psi(t, u), x, t), \ x_2(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Для интегрирования системы (5.4.10) найдем знак функции g_1 при $t = t_0 = 0$:

$$g_1(x, t)\,|_{t=0} = g_1(x(0), 0) = -3 - 2x_1(0) = -5 < 0.$$

Следовательно, $u^*(\psi(t, u), x, t)\,|_{t=0} = -2$. Поэтому решение $x(t)$ системы (5.4.10) определяем из задачи Коши

$$\dot{x}_1 = -2, \ x_1(0) = 1,$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1, \ x_2(0) = 0.$$

Отсюда

$$x_1(t) = 1 - 2t, \ x_2(t) = 2t^2 - 2t, \ t \ge 0. \tag{5.4.11}$$

Далее, необходимо определить знак функции переключения на T при подстановке в нее траектории $x(t)$:

$$g_1(x(t), t) = t^2 - 3 - 2x_1(t) = t^2 + 4t - 5 = (t - 1)(t + 5) < 0, \quad 0 \le t < 1. \tag{5.4.12}$$

Это означает, что

$$v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t) = -2, \ 0 \le t < 1.$$

Итак, траектория $x(t)$ при $t \in [0, 1)$ лежит в области $g_1(x, t) < 0$. Поскольку $g_1(x(t), t)\,|_{t=1} = 0$, а знак нуля не определен, то для интегрирования системы (5.4.10) на отрезке $[1, 2]$ проведем следующие рассуждения.

Возможны три случая для решения $x(t)$, $t > 1$:

1) $g_1(x(t), t) < 0$;

2) $g_1(x(t), t) > 0$;

3) $g_1(x(t), t) = 0$ (особый режим).

Проведем анализ этих ситуаций.

1.Этот случай проверяется элементарно. Действительно, нам необходимо найти решение системы (5.4.10) при $u^* = -2$ для $t \in [1, 2]$. Но оно уже найдено (см. (5.4.11)), причем, в силу (5.4.12) $g_1(x(t), t) > 0, \ t > 1$. Получили противоречие, т.е. случай $g_1(x(t), t) < 0, \ t > 0$, невозможен.

2. Пусть $g_1(x(t), t) > 0, \ t > 1$. Проинтегрируем фазовую систему (5.4.10) при $u^* = 2$ с начальными условиями

$$x_1(1) = -1, \ x_2(1) = 0,$$

полученными из (5.4.11) при $t = 1$. В результате

$$x_1(t) = 2t - 3, \ x_2(t) = 2t^2 - 6t + 4.$$

Подставим найденное решение в функцию переключения и определим ее знак при $t > 1$:

$$g_1(x(t), t) = t^3 - 3 - 4t + 6 = (t - 3)(t - 1) < 0, \ 1 < t \leq 2,$$

что противоречит предположению $g_1(x(t), t) > 0, \ t > 1$.

3. Рассмотрим ситуацию, когда $g_1(x(t), t) = 0, \ 1 < t \leq 2$. Проверим возможность выполнения этого тождества с помощью операции дифференцирования по t:

$$\frac{d}{dt} g_1(x(t), t) = 2t - 2\dot{x}_1(t) = 2t - 2v = 0.$$

Отсюда получаем управление $v(t) = t, \ 1 \leq t \leq 2$, порождающее особый режим. Оно является допустимым, следовательно, особый режим существует. Соответствующую траекторию $x_1(t, v)$ можно найти из условия

$$g_1(x(t), t) = t^2 - 3 - 2x_1(t, v) = 0,$$

т.е. $x_1(t, v) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{3}{2}, \ 1 \leq t \leq 2.$

Итак, управление $v(t)$ на выходе x-процедуры имеет вид

$$v(t) = \begin{cases} -2, & 0 \leq t < 1, \\ t, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Сделаем выводы по результатам решения:

1) поскольку $T_{u,v} = [0, 1)$, то управление $u(t)$ не стационарно;

2) поскольку $T_+ = [0, 1)$, то $J(v) < J(u)$.

Опишем симметричный (относительно пары (ψ, x) вариант процедуры (5.4.6)–(5.4.8)).

Вторая процедура релаксации (*ψ-процедура*). По заданному допустимому управлению $u(t)$, $t \in T$, найдем фазовую траекторию $x(t, u)$, $t \in T$. Образуем функцию переключения

$$g_2(\psi, t) = g(\psi, x(t, u), t), \quad t \in T.$$

Подсчитаем решение $\psi(t)$ сопряженной системы при $u = u^*$. Положим

$$v(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t), \quad t \in T.$$

Процедура закончена. Полученное управление $v(t)$ обладает свойством релаксации: $J(v) \le J(u)$.

Анализ возможностей улучшения в ψ-процедуре проводится в полной аналогии с x-процедурой.

Приведем пример, иллюстрирующий применение ψ-процедуры.

Пример 5.4.2

$$J(u) = x_3(1) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \ x_1(0) = 0, \ \dot{x}_2 = u, \ x_2(0) = 0,$$

$$\dot{x}_3 = ux_1, \ x_3(0) = 0, \ |u(t)| \le 1.$$

Применить к управлению $u(t) = 1$, $t \in T$ ψ-процедуру улучшения.

Решение. Выпишем основные объекты, необходимые для проведения улучшения:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 u x_1,$$

$$g(\psi, x, t) = \psi_2 + \psi_3 x_1, \quad u^*(\psi, x, t) = \operatorname{sign} g(\psi, x, t).$$

Составим сопряженную систему:

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_3 u, \ \psi_1(1) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1, \ \psi_2(1) = 0,$$

$$\dot{\psi}_3 = 0, \ \psi_3(1) = -1.$$

Найдем соответствующую исходному управлению фазовую траекторию

$$x_1(t, u) = \frac{1}{2} t^2, \ x_2(t, u) = t, \ x_3(t, u) = \frac{1}{6} t^3,$$

и пересчитаем функцию переключения

$$g_2(\psi, t) = \psi_2 - \frac{1}{2} t^2.$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что уравнение для ψ_3 не зависит от управления, причем $\psi_3(t) = -1$, $t \in T$.

Образуем систему для вычисления траектории $\psi(t)$, $t \le 1$:

$$\dot\psi_1 = u^*(\psi, x(t, u), t), \ \psi_1(0) = 1,$$
$$\dot\psi_2 = -\psi_1, \ \psi_2(1) = 0. \qquad (5.4.13)$$

Поскольку интегрирование этой системы ведется в обратном времени (от t_1 к t_0), то необходимо определить знак функции g_2 при $t = t_1 = 1$

$$g_2(\psi, t)\,\big|_{t=1} = \psi_2(1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Следовательно, $u^*(\psi, x(t, u), t)\,\big|_{t=1} = -1$. В силу этого имеем задачу Коши

$$\dot\psi_1 = -1, \ \psi_1(1) = 1,$$
$$\dot\psi_2 = -\psi_1, \ \psi_2(1) = 0.$$

Ее решение: $\psi_1(t) = 1 - t$, $\psi_2(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$, $t \le 1$. Проверим смену знака функции g_2 на $[0, 1]$:

$$g_2(\psi(t), t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2} - t < 0, \ \frac{1}{2} < t \le 1.$$

Это означает, что

$$v(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t) = -1, \ \frac{1}{2} < t \le 1,$$

причем

$$\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \ \psi_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}. \qquad (5.4.14)$$

Возможны три случая поведения решения $\psi(t)$ системы (5.4.13) при $t < 1/2$.

Случай 1. Пусть $g_2(\psi(t), t) < 0$, $t < 1/2$. Данная ситуация невозможна, поскольку $g_2(\psi(t), t) = 1/2 - t > 0$, $t < 1/2$.

Случай 2. Пусть $g_2(\psi(t), t) > 0$,$t < 1/2$. Решая сопряженную систему (5.4.13) при $u^* = 1$ с начальными условиями (5.4.14), получим

$$\psi_1(t) = t, \ \psi_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}, \ t \le \frac{1}{2}.$$

Тогда,

$$g_2(\psi(t), t) = \frac{1}{4} - t^2 = \left(\frac{1}{2} - t\right)\left(\frac{1}{2} + t\right) > 0, \ t < \frac{1}{2}.$$

Иными словами, предположение о знаке функции g_2 выполнено, т.е. мы нашли решение $\psi(t)$ системы (5.4.13) на $[0, 1/2)$. При этом

$$v(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t) = 1, \ 0 \le t < \frac{1}{2}.$$

Случай 3. Пусть траектория $\psi(t)$ является особым режимом при $t < 1/2$, т.е. $g_2(\psi(t), t) = 0$, $t < 1/2$. Найдем производную

$$\frac{d}{dt} g_2(\psi(t), t) = \dot{\psi}_2(t) - t = -\psi_1(t) - t = 0.$$

Проверим это условие в точке $t = 1/2$: $-\psi_1(1/2) - 1/2 = -1 \ne 0$. Следовательно, особый режим не возможен.

Итак, на выходе процедуры имеем единственное управление

$$v(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1/2, \\ -1, & 1/2 < t \le 1. \end{cases}$$

Подведем итог.

1. Поскольку $v(t) \ne u(t), 0 \le t < 1/2$, управление $u(t)$ не удовлетворяет принципу максимума;

2. поскольку $T_+ = [0, 1/2)$, строгая релаксация гарантирована: $J(v) < J(u)$.

Упражнения

В следующих задачах применить к заданному управлению $u(t)$ x-процедуру улучшения:

5.4.1. $J(u) = x_1(3) + 4x_2(3) + 2\int\limits_0^3 x_2(t)u(t)\,dt \to \min,$

$\dot{x}_1 = 6x_2, \ x_1(0) = 0, \ \dot{x}_2 = -u, \ x_2(0) = 7,$

$|u| \le 1, \ u(t) = 0, \ t \in [0, 3];$

5.4.2. $J(u) = x(4) - \frac{1}{2}\int\limits_0^4 x(t)\left(u(t) - \frac{3}{4}\right) dt \to \min,$

$\dot{x} = u, \ x(0) = -5,$

$|u| \le 1, \ u(t) = 1/4, \ t \in [0, 4];$

5.4.3. $J(u) = x_1(2) - 4x_2(2) - 3x_3(2) \to \min,$

$\dot{x}_1 = -4x_3, \ x_1(0) = 0, \ \dot{x}_2 = x_3 u, \ x_2(0) = 0,$

$\dot{x}_3 = -u, \ x_3(0) = 1,$

$|u| \le 1, \ u(t) = \begin{cases} -3/4, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t \le 2; \end{cases}$

5.4.4. $J(u) = 4x(3) - \int\limits_0^3 x(t)(u(t) + 1)\, dt \to \min,$

$\dot{x} = -u, \; x(0) = 2/3,$

$|u| \le 1, \; u(t) = \begin{cases} -1/3, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t \le 3; \end{cases}$

5.4.5. $J(u) = -14x(8) + \int\limits_0^8 x(t)(1 + u(t))\, dt \to \min,$

$\dot{x} = -u, \; x(0) = 2,$

$|u| \le 3, \; u(t) = \begin{cases} 3, & 0 \le t < 2, \\ -3, & 2 \le t \le 8; \end{cases}$

5.4.6. $J(u) = \frac{4}{3} x(2) + 4 \int\limits_0^2 x(t)\left(1 - \frac{1}{2} u(t)\right) dt \to \min,$

$\dot{x} = -3u, \; x(0) = 1,$

$|u| \le 5, \; u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ 5, & 1 \le t \le 2; \end{cases}$

5.4.7. $J(u) = x_1(1) - \frac{1}{2} x_2(1) \to \min,$

$\dot{x}_1 = u, \; x_1(0) = 1/2, \; \dot{x}_2 = 2ux_1, \; x_2(0) = 0,$

$|u| \le 1, \; u(t) = 1/2, \; t \in [0, 1];$

5.4.8. $J(u) = 2x_1(3) - 2x_2(3) - \int\limits_0^3 x_1(t)\, dt \to \min,$

$\dot{x}_1 = -3u, \; x_1(0) = -1/2, \; \dot{x}_2 = ux_1, \; x_2(0) = 0,$

$|u| \le 1, \; u(t) = -1/4, \; t \in [0, 3];$

5.4.9. $J(u) = -2x_1(2) - 3x_2(2) \to \min,$

$\dot{x}_1 = ux_2, \; x_1(0) = 0, \; \dot{x}_2 = u, \; x_2(0) = 1,$

$|u| \le 1, \; u(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t \le 2; \end{cases}$

5.4.10. $J(u) = x_1(2) - 2x_2(2) \to \min,$

$\dot{x}_1 = u_1 x_2, \; x_1(0) = 1, \; \dot{x}_2 = u_1 + u_2, \; x_2(0) = -7/2,$

$|u_1| \le 2, \; u_2 \in [0, 3], \; u(t) = (1/2; 0).$

В следующих задачах к заданному управлению $u(t)$ применить ψ-процедуру улучшения:

5.4.11. $J(u) = 3x(2) - \int\limits_0^2 x(t)(u(t) + 2)\, dt \to \min,$

$\dot{x} = -u, \; x(0) = 1/2,$

$|u| \le 1, \; u(t) = 1/2, \; t \in [0, 2];$

5.4.12. $J(u) = 2x_1(2) + x_2(2) + 2\int_0^2 x_2(t)u(t)\,dt \to \min,$

$\dot{x}_1 = x_2,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = -u,\ x_2(0) = 3,$

$|u| \le 1,\ u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t \le 2; \end{cases}$

5.4.13. $J(u) = 5x(4) + 5\int_0^4 \left(\frac{1}{5}u(t) + 1\right) dt \to \min,$

$\dot{x} = u,\ x(0) = -5,$

$|u| \le 5,\ u(t) = \begin{cases} -5, & 0 \le t < 2, \\ 0, & 2 \le t \le 4; \end{cases}$

5.4.14. $J(u) = -2x_1(2) + x_2(2) - 4x_3(2) \to \min,$

$\dot{x}_1 = -u,\ x_1(0) = 1,\ \dot{x}_2 = x_1 u,\ x_2(0) = 0,$

$\dot{x}_3 = x_1,\ x_3(0) = 0,$

$|u| \le 3,\ u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t \le 2; \end{cases}$

5.4.15. $J(u) = 2x(3) - \int_0^3 x(t)(u(t) + 1)\,dt \to \min,$

$\dot{x} = 2u,\ x(0) = 1,$

$|u| \le 2,\ u(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t \le 3; \end{cases}$

5.4.16. $J(u) = x(3) - \int_0^3 x(t)u(t)\,dt \to \min,$

$\dot{x} = u,\ x(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t \le 3; \end{cases}$

5.4.17. $J(u) = 4x_1(1) - x_2(1) \to \min,$

$\dot{x}_1 = ux_2,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = u,\ x_2(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u(t) = 0,\ t \in [0, 1];$

5.4.18. $J(u) = \int_0^1 x(t)(u(t) - 1)\,dt \to \min,$

$\dot{x} = u,\ x(0) = 1,$

$|u| \le 1,\ u(t) = -1,\ t \in [0, 1];$

5.4.19. $J(u) = 2x_1(2) - x_2(2) \to \min,$

$\dot{x}_1 = \frac{1}{2}x_2 u,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = 3u,\ x_2(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u(t) = 1/2,\ t \in [0, 2];$

5.4.20. $J(u) = \frac{2}{3} x_1(3) - x_2(3) \to \min,$
$\dot{x}_1 = 5u,\ x_1(0) = 1,\ \dot{x}_2 = 2ux_1,\ x_2(0) = 0,$
$|u| \le 1,\ u(t) = 0,\ t \in T.$

5.5. Градиентные методы

Продолжим изучение задачи оптимального управления (5.2.1)–(5.2.3). Дополнительно к предыдущему предположим, что функции $f(x, u, t)$ и $F(x, u, t)$ дифференцируемы по u, а множество U выпукло. Напомним, что в этом случае на оптимальном процессе $\{u^*, x^*\}$ справедлив дифференциальный принцип максимума (теорема 5.2.3):

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in U} \langle H_u(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t), v\rangle,\quad t \in T.$$

Опишем методы последовательных приближений для поиска управлений, удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума в задаче (5.2.1)–(5.2.3).

Методы используют информацию о градиенте H_u функции Понтрягина и применяются, фактически, для решения конечномерных задач максимизации гамильтониана в точках отрезка T. Этим и объясняется название данного параграфа. Необходимо пояснить, что возможно также применение градиентных методов к решению задачи минимизации функционала на элементах пространств $L_2^r(T)$ или $L_\infty^r(T)$. Однако данный подход требует дополнительных предположений на параметры задачи [15] и в рамках данного пособия не рассматривается. Тем более такого рода подход структурно приводит к методам, аналогичным изложенным выше.

5.5.1. Метод условного градиента. Пусть на k-м шаге итерационного процесса ($k = 0, 1, \ldots$) имеется допустимое управление $u^k(t)$ с соответствующими фазовой и сопряженной траекториями $x^k(t)$, $\psi^k(t)$, $t \in T$. Определим вспомогательное управление $\bar{u}^k(t)$, $t \in T$, как решение задачи

$$\bar{u}^k(t) = \arg\max_{u \in U} \langle H_u(\psi^k(t), x^k(t), u^k(t), t), v\rangle.$$

Подсчитаем величину

$$\delta_1(u^k) = \int_T \langle H_u(\psi^k(t), x^k(t), u^k(t), t), \bar{u}^k(t) - u^k(t)\rangle\, dt \ge 0.$$

Если $\delta_1(u^k) = 0$, то управление u^k удовлетворяет дифференциальному принципу максимума.

Рассмотрим основной случай: $\delta_1(u^k) > 0$. Образуем α-параметрическое семейство управлений (выпуклую комбинацию управлений u^k и $\bar{u}^k$)

$$u^k_\alpha(t) = u^k(t) + \alpha(\bar{u}^k(t) - u^k(t)), \quad t \in T, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Тогда, очередное $(k+1)$-е приближение ищется в виде

$$u^{k+1}(t) = u^k_{\alpha_k}(t), \quad t \in T,$$

где α_k — решение задачи одномерного поиска

$$J(u^k_\alpha) \to \min, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Пример 5.5.1.

$$J(u) = -\frac{1}{2}x(2) + \int_0^2 (x^2(t) - u^2(t))\,dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad |u(t)| \le 1.$$

Провести одну итерацию метода условного градиента для управления

$$u^0(t) \equiv 0, \quad t \in T.$$

Р е ш е н и е. Составим функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \psi u - x^2 + u^2$$

и найдем ее производную по управлению

$$H_u = \psi + 2u.$$

Образуем сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = 2x, \quad \psi(2) = \frac{1}{2}.$$

Найдем фазовую и сопряженную траектории

$$x^0(t) = 0, \quad \psi^0(t) = \frac{1}{2}, \quad t \in T.$$

Сформируем вспомогательное управление

$$\bar{u}^0 = \arg\max_{|v| \le 1}(v/2) = 1, \quad t \in T.$$

Подсчитаем величину

$$\delta_1(u^0) = \frac{1}{2}\int_0^2 dt = 1 > 0.$$

Определим α-параметрическое семейство управлений

$$u^0_\alpha = \alpha, \ 0 \le \alpha \le 1, \ t \in T.$$

Тогда $u^1(t) = u^0_{\alpha_0}(t) = \alpha_0$, где значение α_0 является решением задачи

$$J(u^0_\alpha) \to \min, \ 0 \le \alpha \le 1.$$

Найдем представление для функционала $J(u^0_\alpha)$. С этой целью решим задачу Коши

$$\dot{x} = \alpha, \quad x(0) = 0.$$

Ее решение имеет вид $x^0_\alpha(t) = \alpha t$, $t \in T$. Тогда

$$J(u^0_\alpha) = -\frac{1}{2} x^0_\alpha(2) + \int_0^2 [(x^0_\alpha(t))^2 - (u^0_\alpha(t))^2]\, dt =$$

$$= -\alpha + \int_0^2 (\alpha^2 t^2 - \alpha^2)\, dt = \frac{2}{3}\alpha^2 - \alpha.$$

Сформируем задачу параметрического поиска

$$\frac{2}{3}\alpha^2 - \alpha \to \min, \ 0 \le \alpha \le 1.$$

Это задача минимизации выпуклой функции на отрезке. Найдем стационарную точку

$$\frac{4}{3}\alpha - 1 = 0.$$

Отсюда, $\alpha_0 = 3/4$, $u^1(t) \equiv 3/4$, $t \in T$.

5.5.2. Метод проекции градиента. Пусть на k-м шаге итерационного процесса имеется допустимое управление $u^k(t)$, $t \in T$, $k = 0, 1, \ldots$ Найдем соответствующие решения $x^k(t)$, $\psi^k(t)$, $t \in T$, фазовой и сопряженной задач. Образуем вспомогательное управление $\bar{u}^k(t)$ по правилу

$$\bar{u}^k(t) = P_U(u(t) + H_u(\psi^k(t), x^k(t), u^k(t), t), \ t \in T.$$

Здесь P_U — оператор проецирования на множество U в евклидовой метрике. Подсчитаем величину

$$\delta_1(u^k) = \int_T \langle H_u(\psi^k(t), x^k(t), u^k(t), t), \bar{u}^k(t) - u^k(t)\rangle\, dt \ge 0.$$

Если $\delta_1(u^k) = 0$, то управление u^k удовлетворяет дифференциальному принципу максимума. В этом случае метод прекращает свою работу.

Пусть $\delta_1(u^k) > 0$. Сформируем α-параметрическое семейство управлений:

$$u^k_\alpha(t) = u^k(t) + \alpha(\bar{u}^k(t) - u^k(t)), \quad t \in T, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Очередное $(k + 1)$-е приближение определим следующим образом:

$$u^{k+1}(t) = u^k_{\alpha_k}(t), \qquad t \in T,$$

где параметр α_k является решением задачи одномерной оптимизации

$$J(u^k_\alpha) \to \min, \qquad \alpha \in [0, 1].$$

Пример 5.5.2.

$$J(u) = -2x(1) - \int_0^1 x(t)(3u(t) + 1)\,dt \to \min,$$

$$\dot{x} = -u, \quad x(0) = 1, \quad |u(t)| \le 1.$$

Провести одну итерацию метода проекции градиента для управления $u^0(t) = 0$, $t \in T$.

Р е ш е н и е. Функция Понтрягина в данном случае имеет вид

$$H(\psi, x, u, t) = -\psi u + 3xu + x,$$

причем $H_u = 3x - \psi$. Запишем сопряженную задачу

$$\dot{\psi} = -3u - 1, \quad \psi(1) = 2.$$

Найдем фазовую и сопряженную траектории, соответствующие управлению u^0:

$$x^0(t) = 1, \quad \psi^0(t) = 3 - t, \quad t \in T.$$

Сформируем задачу поиска вспомогательного управления

$$\bar{u}^0 = P_{|u| \le 1}(t), \quad t \in T.$$

Тогда $\bar{u}^0(t) = t$. Подсчитаем величину

$$\delta_1(u^0) = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3} > 0.$$

Образуем α-параметрическое семейство управлений:

$$u_\alpha^0 = \alpha t, \ 0 \le \alpha \le 1, \ t \in T.$$

При этом следующее приближение определяется по правилу

$$u^1(t) = u_{\alpha_0}^0(t) = \alpha_0 t, \quad t \in T,$$

где α_0 — решение задачи $J(u_\alpha^0) \to \min$, $0 \le \alpha <= 1$.

Найдем явное представление для функционала $J(u_\alpha^0)$ через параметр α. С этой целью подсчитаем траекторию $x_\alpha^0(t)$, $t \in T$, решая задачу Коши

$$\dot{x} = -\alpha t, \ x(0) = 1.$$

Тогда, $x_\alpha^0(t) = 1 - \frac{1}{2}\alpha t^2$. В результате получаем

$$J(u_\alpha^0) = -2x_\alpha^0(1) - \int_0^1 x_\alpha^0(t)(3u_\alpha^0(t) + 1)\,dt =$$

$$= \alpha - 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha t^2\right)(3\alpha t + 1)\,dt = \frac{2}{8}\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha - 3.$$

Поставим задачу на поиск параметра α_0:

$$\frac{3}{8}\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha - 3 \to \min, \ 0 \le \alpha \le 1.$$

Отсюда, $\alpha_0 = 4/9$. Запишем итоговый ответ: $u^1(t) = (4/9)t$, $t \in [0, 1]$.

Упражнения

В следующих задачах провести одну итерацию метода условного градиента:

5.5.1. $J(u) = -3x_1(4) + x_2(4) + \int_0^4 x_1(t)u(t)\,dt \to \min$,

$$\dot{x}_1 = 4u, \ x_1(0) = 4, \ \dot{x}_2 = \frac{1}{4}x_1, \ x_2(0) = 0,$$

$$|u| \le 1, \ u^0(t) = -1/4, \ t \in [0, 4];$$

5.5.2. $J(u) = \frac{1}{2}x_2(1) + 2x_3(1) \to \min$,

$$\dot{x}_1 = u, \ x_1(0) = 0, \ \dot{x}_2 = x_1^2, \ x_2(0) = 0,$$

$\dot{x}_3 = (t-2)u,\ x_3(0) = 0,$

$-1 \le u \le 2,\ u^0(t) = 0,\ t \in [0, 1];$

5.5.3. $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2(t) + 2u^2(t))\,dt \to \min,$

$\dot{x} = 2u,\ x(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u^0(t) = 1,\ t \in [0, 1];$

5.5.4. $J(u) = \frac{1}{2}x_1^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x_2^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \min,$

$\dot{x}_1 = x_2,\ x_1(0) = 1,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u,\ x_2(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u^0(t) = 0,\ t \in [0, \pi/2];$

5.5.5. $J(u) = 4x(2) + \int_0^2 x(t)(u(t) - 2)\,dt \to \min,$

$\dot{x} = 2u,\ x(0) = 0,$

$-1 \le u \le 3,\ u^0(t) = 1,\ t \in [0, 2];$

5.5.6. $J(u) = 4x(3) + 3\int_0^3 x(t)(u(t) + 1)\,dt \to \min,$

$\dot{x} = u,\ x(0) = 0,$

$1 \le u \le 3,\ u^0(t) = 2,\ t \in [0, 3];$

5.5.7. $J(u) = -6x_1(4) + x_2(4) + 2\int_0^4 x_1(t)\,dt \to \min,$

$\dot{x}_1 = 3u,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = x_1 u,\ x_2(0) = 0,$

$|u| \le 2,\ u^0 = -1,\ t \in [0, 4];$

5.5.8. $J(u) = \int_0^1 x(t)(u(t) - 1)\,dt \to \min,$

$\dot{x} = u,\ x(0) = 1,$

$|u| \le 1,\ u^0 = 1,\ t \in [0, 1];$

5.5.9. $J(u) = x_1(1) + x_2(1) \to \min,$

$\dot{x}_1 = u,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = 2ux_1,\ x_2(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u^0(t) = 0,\ t \in [0, 1];$

5.5.10. $J(u) = x_3(1) \to \min,$

$\dot{x}_1 = x_2,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = u,\ x_2(0) = 0,$

$\dot{x}_3 = ux_1,\ x_3(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u^0(t) = 1,\ t \in [0, 1].$

В следующих задачах провести одну итерацию метода проекции градиента:

5.5.11. $J(u) = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2(t) - 2(t+2)u(t)\right) dt \to \min,$

$\dot{x} = u,\ x(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u^0(t) = 0,\ t \in [0, 2];$

5.5.12. $J(u) = 4x_1(3) - x_2(3) + x_3(3) \to \min,$

$\dot{x}_1 = -3u,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = 2x_1 u,\ x_2(0) = 0,$

$\dot{x}_3 = 6x_1,\ x_3(0) = 0,$

$-3 \le u \le 1,\ u^0(t) = -2,\ t \in [0, 3];$

5.5.13. $J(u) = 4x(3) - \int\limits_0^3 x(t)(u(t)+1)\, dt \to \min,$

$\dot{x} = -u,\ x(0) = 0,$

$2 \le u \le 4,\ u^0(t) = 3,\ t \in [0, 3];$

5.5.14. $J(u) = -2x_1(2) + x_2(2) - 4\int\limits_0^2 x_1(t)u(t)\, dt \to \min,$

$\dot{x}_1 = -u,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = 4x_1,\ x_2(0) = 0,$

$|u| \le 3,\ u^0(t) = -1,\ t \in [0, 2];$

5.5.15. $J(u) = \frac{3}{2}x^2(2) - \int\limits_0^2 x(t)u(t)\, dt \to \min,$

$\dot{x} = u + 1,\ x(0) = -1,$

$-2 \le u \le 0,\ u^0(t) = -1,\ t \in [0, 2];$

5.5.16. $J(u) = x(2) + 2\int\limits_0^2 x(t)(u(t)+1)\, dt \to \min,$

$\dot{x} = -u,\ x(0) = 0,$

$|u| \le 2,\ u^0(t) = 1,\ t \in [0, 2];$

5.5.17. $J(u) = 3x_1(4) - x_2(4) + 6\int\limits_0^4 x_2(t)u(t)\, dt \to \min,$

$\dot{x}_1 = x_2 u,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = 2u,\ x_2(0) = 0,$

$|u| \le 1,\ u^0(t) = 1,\ t \in [0, 4].$

11. Заказ № 1889.

5.6. Задача оптимального управления с дополнительными функциональными ограничениями. Принцип максимума и вариационное исчисление

Рассмотрим более общий по сравнению с (5.2.1)–(5.2.3) класс задач оптимального управления:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t),\ x(t_0) = x^0, \tag{5.6.1}$$

$$u(t) \in U \subset E^r,\ t \in T = [t_0, t_1], \tag{5.6.2}$$

$$J_0(u) \to \min, \tag{5.6.3}$$

$$J_i(u) \le 0,\ i = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$J_i(u) = 0,\ i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m, \tag{5.6.4}$$

где

$$J_i(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F_i(x(t), u(t), t)\, dt,\ i = 0, 1, \ldots, m.$$

Как и ранее,предполагается, что моменты t_0 и t_1 фиксированы, левый конец траектории закреплен. Допустимые процессы состоят из пары вектор-функций $\{u, x\}$, $u = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))$, $x = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, удовлетворяющих (5.6.1), (5.6.2), (5.6.4). Допустимые управления выбираются из пространства кусочно-непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций. Решение задач Коши (5.6.1) понимается в интегральном смысле (5.2.4) (или в смысле выполнения равенства из (5.6.1) во всех точках непрерывности по t правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений).

Теорема 5.6.1. (Принцип максимума Понтрягина; см., например, [3, с. 320, 321; 16, с. 437; 21, с. 92, 93; 42, с. 300; 11, с. 193].) *Пусть в задаче оптимального управления* (5.6.1)–(5.6.4)

1) *вектор-функция* $f(x, u, t)$ *имеет частные производные по* x *и непрерывна вместе с этими производными по совокупности своих аргументов на* $E^n \times U \times T$;

2) *функция* $f(x, u, t)$ *удовлетворяет условию Липшица по* x *с одной максимальной константой на* $U \times T$:

$$\|f(x + \Delta x, u, t) - f(x, u, t)\| \le L\|\Delta x\|,\ L > 0,$$

для каждого $u \in U$, $t \in T$ и любых x, $x + \Delta x \in E^n$;

3) *скалярные функции* $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *непрерывны на* E^n *вместе со своими частными производными по* x, *а скалярные функции* $F_i(x, u, t)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *непрерывны на* $E^n \times U \times T$ *вместе со своими частными производными по* x;

4) *допустимый процесс* $\{u^*, x^*\}$ оптимален.

Тогда существует число λ_0^* *и вектор* $\lambda^* \in E^m$ *такие, что выполняются условия*:

а) *нетривиальности*: $\lambda_0^{*2} + \|\lambda^*\|^2 > 0$, *т.е. хотя бы один из множителей* $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ *отличен от нуля;*

б) *неотрицательности*: $\lambda_0^* \geq 0$, $\lambda_i^* \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m_1$, *т.е. множители, отвечающие целевому функционалу и функциональным ограничениям-неравенствам, неотрицательны*;

в) *дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_i^* J_i(u^*) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1; \tag{5.6.5}$$

г) *максимума функции Понтрягина*:

$$H(\lambda_0^*, \lambda^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t) =$$

$$= \max_{v \in U} H(\lambda_0^*, \lambda^*, \psi^*(t), x^*(t), v, t), \quad t_0 \leq t < t_1. \tag{5.6.6}$$

Здесь функция Понтрягина имеет вид

$$H(\lambda_0, \lambda, \psi, x, u, t) = \langle \psi(t), f(x, u, t)\rangle - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i F_i(x, u, t),$$

а вектор-функция $\psi^* = \psi^*(t)$ *определяется из сопряженной задачи*:

$$\dot\psi(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(\lambda_0, \lambda, \psi, x, u, t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad \psi(t_1) =$$

$$= -\sum_{i=0}^{m} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_i(x(t_1)) \tag{5.6.7}$$

при $u = u^*(t)$, $x = x^*(t)$, $\lambda_0 = \lambda_0^*$, $\lambda = \lambda^*$.

Теорема 5.6.2. (Достаточность принципа максимума.) *Для линейно-выпуклого варианта задачи* (5.6.1)–(5.6.4):

$$f(x, u, t) = A(t)x + f_1(u, t),$$

$$\varphi_i(x(t_1)) = \langle c^i, x(t_1)\rangle, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m,$$

$$F_i(x, u, t) = Q_i(x, t) + G_i(u, t), \; i = 0, 1, \ldots, m_1,$$

$$F_i(x, u, t) = \langle q^i(t), x(t)\rangle + G_i(u, t), \; i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m,$$

где φ_i, Q_i, $i = 0, 1, \ldots, m_1$ *— выпуклые по* x *функции, из существования набора множителей Лагранжа* $\{\lambda_0^*, \lambda^*\}$, $\lambda_0^* > 0$ *и допустимого процесса* $\{u^*, x^*\}$, *для которых выполняются утверждения* а)–г) *теоремы* 5.6.1, *следует, что функция* u^* *доставляет глобальный минимум в задаче* (5.6.1)–(5.6.4).

Доказательство данного утверждения в учебной литературе встречается довольно редко.

Приведем один из способов доказательства, использующий теорему 5.2.2.

Данный способ интересен тем, что он в какой-то мере иллюстрирует основную идею Лагранжа о связи между задачей на условный экстремум некоторой целевой функции (функционала) и задачей на безусловный экстремум функции (функционала) Лагранжа.

Предположим, что в линейно-выпуклом варианте задачи (5.6.1)–(5.6.4) выполнены предположения теоремы 5.6.2.

Рассмотрим задачу:

$$J(u) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^* J_i(u) \to \min,$$

$$\dot{x} = A(t)x + f_1(u, t), \; x(t_0) = x^0, \tag{5.6.8}$$

$$u(t) \in U, \; t \in [t_0, t_1].$$

Здесь

$$J(u) = \sum_{i=0}^{m_1} \lambda_i^* \varphi_i(x(t_1)) + \sum_{i=m_1+1}^{m} \lambda_i^* \langle c, x(t_1)\rangle +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=0}^{m_1} \lambda_i^* Q_i(x, t) + \sum_{i=m_1+1}^{m} \lambda_i^* \langle q_i(t), x(t)\rangle + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^* G_i(u, t) \right] dt.$$

Задача (5.6.8) представляет собой линейно-выпуклую задачу оптимального управления со свободным правым концом (при обосновании выпуклости соответствующих функций нужно учесть неотрицательность множителей λ_i^*, $i = 0, 1, \ldots, m_1$).

Процесс $\{u^*, x^*\}$ является допустимым в (5.6.8). Покажем, что этот процесс удовлетворяет принципу максимума в задаче (5.6.8). Действительно, функция Понтрягина

$$\widetilde{H}(\widetilde{\psi}, x, u, t) = \langle \widetilde{\psi}(t), A(t)x + f_1(u, t)\rangle -$$

$$- \sum_{i=0}^{m_1} \lambda_i^* [Q_i(x, t) + G_i(u, t)] - \sum_{i=m_1+1}^{m} \lambda_i^* [\langle q_i(t), x(t)\rangle + G_i(u, t)]$$

и вектор-функция $\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}(t)$, являющаяся решением соответствующей сопряженной задачи, совпадают с функцией Понтрягина и решением сопряженной задачи рассматриваемого варианта (5.6.1)–(5.6.4) при $\lambda_0 = \lambda_0^*$, $\lambda = \lambda^*$. Поэтому из условия максимума (5.6.6) следует, что управление u^* удовлетворяет принципу максимума в задаче (5.6.8). По теореме 5.2.2 это управление оптимально, т.е.

$$J(u^*) \le J(u)$$

для допустимых в (5.6.8) функций $u = u(t)$. Так как $J_i(u^*) = 0$, $i = m_1 + 1, m_2 + 2, \ldots, m$, и в силу условий дополняющей нежесткости (5.6.5), справедливо:

$$\lambda_0^* J_0(u^*) = J(u^*).$$

Итак,

$$\lambda_0^* J_0(u^*) \le \lambda_0^* J_0(u) + \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* J_i(u) + \sum_{i=m_1+1}^{m} \lambda_i^* J_i(u).$$

Учтем, наконец, что множество допустимых управлений в задаче (5.6.8) содержит в себе множество допустимых управлений исходной задачи; для допустимых управлений в рассматриваемом линейно-выпуклом варианте (5.6.1)–(5.6.4)

$$J_i(u) = 0,\ i = m_1 + 1, m_2 + 2, \ldots, m;\ \lambda_i^* J_i(u) \le 0,\ i = 1, 2, \ldots, m_1;$$

и учтем также тот факт, что $\lambda_0 > 0$.

В результате имеем

$$J_0(u^*) \le J_0(u)$$

для всех допустимых управляющих воздействий в анализируемом линейно-выпуклом варианте (5.6.1)-(5.6.4), что и требовалось доказать.

Из необходимого условия максимума дифференцируемой функции на выпуклом множестве следует следующая теорема.

Теорема 5.6.3. (Линеаризованный (дифференциальный) принцип максимума.) *Пусть в задаче оптимального управления* (5.6.1)–(5.6.4), *в дополнение к условиям теоремы* 5.6.1, *функции* $f(x, u, t)$ и $F_i(x, u, t)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *дифференцируемы, а множество* U *выпукло. Тогда для оптимального процесса* $\{u^*, x^*\}$ *существует набор множителей Лагранжа* $\{\lambda_0^*, \lambda^*\}$ *такой, что справедливы утверждения* а), б), в) *теоремы* 5.6.1 *и условие максимума:*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u} H(\lambda_0^*, \lambda^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t), u^*(t) \right\rangle =$$

$$= \max_{v \in U} \left\langle \frac{\partial}{\partial u} H(\lambda_0^*, \lambda^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t), v \right\rangle, \quad t_0 \le t < t_1.$$

Здесь $\psi^* = \psi^*(t)$ — *вычисленное при* $u = u^*(t)$, $x = x^*(t)$, $\lambda_0 = \lambda_0^*$, $\lambda = \lambda^*$ решение сопряженной задачи (5.6.7).

Как и для задач, рассмотренных в предыдущем параграфе, перечисленные теоремы во многих случаях позволяют проверить на оптимальность управление, провести качественное исследование структуры оптимального управления, а иногда и найти решение задач. Однако появление в условиях оптимальности множителей Лагранжа нередко значительно затрудняет использование принципа максимума и его следствий.

Пример 5.6.1. В задаче оптимального управления

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 1, \quad x(2) = 1,$$

$$|u(t)| \le 1. \quad t \in [0, 2],$$

$$J_0(u) = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2(t)\, dt \to \min,$$

проверить на оптимальность функцию $u(t) \equiv 0$, $t \in [0, 2]$.

Прежде всего отметим, что проверяемое управление является допустимым, поскольку $|u(t)| \le 1$ для всех $t \in [0, 2]$, функция $u = u(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 2]$, а соответствующая фазовая траектория $x(t) \equiv 1$, $t \in [0, 2]$, удовлетворяет ограничению на правом конце ($x(2) = 1$). В данном случае функция Понтрягина

$$H = \psi u - \frac{\lambda_0}{2} x^2.$$

Сопряженная задача:

$$\dot{\psi} = \lambda_0 x, \quad \psi(2) = -\lambda_1.$$

Решение сопряженной задачи, соответствующее проверяемому управлению: $\psi(t) = \lambda_0(t-2) - \lambda_1$. Как и в задачах математического программирования, имеет смысл проанализировать два возможных варианта:

а) $\lambda_0 = 0$; тогда $\psi(t) \equiv -\lambda_1$. Составляем функцию

$$W_u(\lambda, v, t) = H(\lambda_0, \lambda, \psi, x, v, t) - H(\lambda_0, \lambda, \psi, x, u, t) =$$
$$= -\lambda_1(v-u) = -\lambda_1 v.$$

Решение задачи максимизации функции $W_u(\lambda, v, t)$ по $v \in U$ при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_1)$ имеет вид

$$\overline{W}(\lambda, t) = |\lambda_1| > 0,$$

так как $\lambda_1 \neq 0$ в силу условия нетривиальности множителей Лагранжа. Следовательно, если $\lambda_0 = 0$, то проверяемое управление не удовлетворяет условию максимума (5.6.6) ни при каком $\lambda_1 \neq 0$;

б) λ_0 — любое положительное число, например, $\lambda_0 = 1$, тогда

$$\psi(t) = t - 2 - \lambda_1,$$

$$\overline{W}_u(\lambda, v, t) = (t - 2 - \lambda_1)v,$$

$$\overline{W}(\lambda, t) = |t - 2 - \lambda_1| > 0$$

для всех $t \in [0, 2)$ за исключением, быть может, единственной точки $t = 2 + \lambda_1$, если $-2 \le \lambda_1 < 0$.

Таким образом, ни для какого нетривиального набора множителей $\{\lambda_0, \lambda_1\}$ проверяемая функция $u(t) \equiv 0$ не удовлетворяет (5.6.6). Поэтому исследуемое управление заведомо не может являться оптимальным.

Отметим, что задача, рассмотренная в примере, относится к классу линейно-выпуклых, т.е. принцип максимума в ней — необходимое и достаточное условие оптимальности. Оптимальное управление имеет следующую структуру:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \psi^*(t) > 0, \\ -1, & \psi^*(t) < 0, \\ v, & v \in [-1, 1], \ \psi^*(t) = 0. \end{cases}$$

Пример 5.6.2. Воспользовавшись принципом максимума, найти управление, доставляющее минимум функционалу

$$\int_0^t x_2(t)\,dt$$

при условиях

$$\dot{x}_1 = u,\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_2 = x_1,\ x_2(0) = 0,\ x_1(1) = 0,$$

$$|u(t)| = 1,\ t \in [0, 1].$$

В применяемых нами обозначениях

$$J_0(u) = \int_0^1 x_2(t)\,dt,\ J_1(u) = x_1(1),$$

$$U = \{-1, 1\};$$

функция Понтрягина:

$$H = \psi_1 u + \psi_2 x_1 - \lambda_0 x_2;$$

сопряженная задача:

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2,\ \psi_1(1) = -\lambda_1,$$

$$\dot{\psi}_2 = \lambda_0,\ \psi_2(1) = 0.$$

Из условия максимума следует, что оптимальное управление может иметь только следующий вид:

$$u^*(t) = \operatorname{sign} \psi_1^*(t).$$

Проанализируем отдельно два случая:

а) $\lambda_0 = 0$; тогда $\psi_1(t) \equiv -\lambda_1$, причем $\lambda_1 \neq 0$ в силу условия нетривиальности множителей Лагранжа. Условию максимума могут удовлетворять лишь управление $u(t) \equiv 1$, либо $u(t) \equiv -1$, $t \in [0, 1)$. Ни одно из этих управлений не является допустимым, поскольку соответствующее этим управлениям значение $x_1(1)$ отлично от нуля;

б) $\lambda_0 = 1$; тогда

$$\psi_1(t) = -\frac{(t-1)^2}{2} - \lambda_1.$$

Если $\lambda_1 \geq 0$ или $\lambda_1 < -1/4$, то функция $\psi_1(t)$ имеет постоянный знак на $[0, 1)$, и удовлетворяющих принципу максимума допустимых управлений не существует. При других значениях λ_1 возможно существование лишь одной точки $\tau \in [0, 1)$ переключения знака $\psi_1(t)$, причем из вида $\psi_1(t)$ следует, что условию максимума может удовлетворять лишь управление

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau), \\ 1, & t \in [\tau, 1). \end{cases}$$

Точку τ находим из условия:

$$x_1(1) = \int_0^1 u(t)\, dt = 0.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1/2), \\ 1, & t \in [1/2, 1) \end{cases}$$

удовлетворяет условию максимума (5.6.6) при $\lambda_1^* = -1/8$. В рассматриваемом примере выполнены условия теоремы 5.6.2. Поэтому управление u^* доставляет глобальный минимум функционалу. Соответствующие компоненты вектора фазовых траекторий:

$$x_1^*(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0, 1/2], \\ t-1, & t \in [1/2, 1]; \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} -t^2, & t \in [0, 1/2], \\ t^2/2 - t + 1/8, & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Минимальное значение функционала

$$J_0(u^*) = \int_0^1 x_2^*(t)\, dt = -5/24.$$

В заключение этой главы остановимся на связи, существующей между принципом максимума и вариационным исчислением. Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления — задачу поиска кусочно-гладких на отрезке $T = [t_0, t_1]$ скалярных функций $x = x(t)$, принимающих на концах отрезка заданные значения

$$x(t_0) = x^0, \ x(t_1) = x^1; \quad x^0, x^1 \in E^1$$

и доставляющих минимум функционалу

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt.$$

Обозначив $\dot{x} = u$, приходим к задаче оптимального управления:

$$\dot{x} = u(t), \ t \in [t_0, t_1], \ x(t_0) = x^0, \ u(t) \in E^1,$$

$$J_0(u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t)\, dt \to \min,$$

$$J_1(u) = x(t_1) - x^1 = 0.$$

В исследуемой задаче функция Понтрягина

$$H = \psi(t)u(t) - \lambda_0 F(x(t), u(t), t),$$

сопряженная задача:

$$\dot\psi(t) = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x} F(x, u, t), \quad \psi(t_1) = -\lambda_1.$$

Из линеаризованного принципа максимума следует, что для оптимального управления $u^* = u^*(t)$ и соответствующего ему состояния $x^* = x^*(t)$ существуют не равные нулю одновременно числа λ_0^* и λ^* такие, что

$$\frac{\partial}{\partial u} H(\lambda_0^*, \lambda^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1),$$

где $\psi^* = \psi^*(t)$ — соответствующее решение сопряженной задачи. Используя представление

$$\psi(t) = \psi(t_1) + \int_{t_1}^{t} \dot\psi(\tau)\, d\tau = -\lambda_1 - \int_{t}^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} F(x, u, \tau)\, d\tau,$$

делаем вывод о том, что допустимая экстремаль $x^* = x^*(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial \dot x} F(x^*, \dot x^*, t) = -\frac{\lambda_1^*}{\lambda_0^*} - \int_{t}^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} F(x^*, \dot x^*, \tau)\, d\tau.$$

Отсюда дифференцированием обеих частей по t приходим к классическому уравнению Эйлера (4.1.6).

Необходимые условия оптимальности, использующиеся для многомерных и изопериметрических задач вариационного исчисления, также могут быть получены как следствие принципа максимума. Из принципа максимума могут быть выведены и другие классические условия экстремума, обычно рассматриваемые в курсах вариационного исчисления (условия Лежандра,Якоби, Вейерштрасса; см. [3, с. 370–377; 16, с. 485–489; 18, с. 309–311]).

Упражнения

5.6.1. Проверить с помощью принципа максимума на оптимальность управления, найденные в упражнениях 5.1.7 б,в,е.

5.6.2. Для следующих задач сформулировать принцип максимума и уточнить структуру оптимального управления:

а) $\dot{x}_1 = x_1x_2 + x_3u,\ x_1(0) = x_1^0,$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2,\ x_2(0) = x_2^0,\ \dot{x}_3 = u,\ x_3(0) = x_3^0,$$
$$\alpha \le u(t) \le \beta,\ t \in [0, 1],\ x_1(1) = x_2(1) = x_3(1) = 0,$$
$$J(u) = \int_0^1 [x_1^2(t) + u^2(t)]\,dt \to \min;$$

б) $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x^0,\ t \in [t_0, t_1],$

$$|u_i(t)| \le 1,\ i = 1, 2, \ldots, r,\ x(t_1) = x^1,$$
$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{r} |u_i(t)|\,dt \to \min;$$

здесь A и B — заданные матрицы размерности соответственно $n \times n$ и $n \times r$; x^0 и x^1 — заданные векторы из E^n; моменты t_0 и t_1 закреплены;

в) $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x^0,\ t \in [t_0, t_1],$

$$|u_i(t)| \le 1,\ i = 1, 2, \ldots, r,\ x(t_1) = x^1,$$
$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2\,dt \to \min;$$

здесь A и B — заданные матрицы размерности соответственно $n \times n$ и $n \times r$; x^0 и x^1 — заданные векторы из E^n; моменты t_0 и t_1 закреплены.

Воспользовавшись принципом максимума, проверить на оптимальность управления $u = u(t)$ в задачах 5.6.3, 5.6.4.

5.6.3. $\dot{x} = u(t),\ t \in [0, 1],\ x(0) = 1,\ u(t) \in E^1,$

$$J(u) = \int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)]\,dt \to \min, \quad x(1) = e^{-1};$$

а) $u(t) \equiv 0,\ t \in [0, 1];$

б) $u(t) = -e^{-t};$

5.6.4. $\dot{x} = u(t),\ t \in [0, \pi],\ x(0) = 1,\ |u(t)| \le 1,$

$$\int_0^\pi x \cos t \, dt = \frac{\pi}{2}, \quad x(\pi) = 1,$$

$$J(u) = \int_0^\pi u^2(t) \, dt \to \min; \quad u(t) = -\sin t.$$

5.6.5. Применить принцип максимума к решению задач оптимального управления:

а) $\dot{x}_1 = x_2, \ x_1(0) = 0, \ \dot{x}_2 = u, \ x_2(0) = 0,$

$|u(t)| \le 2, \ t \in [0, 2], \ x_2(2) = 0,$

$$J(u) = \int_0^2 x(t) \, dt \to \min;$$

б) $\dot{x} = \cos u(t), \ x(0) = 0, \ |u(t)| \le \pi/2, \ t \in [0, 1], \ x(1) = 1,$

$$J(u) = \int_0^1 \sin u(t) \, dt \to \min;$$

в) $\dot{x} = u(t), \ x(0) = 0, \ u(t) \in E^1, \ t \in [0, 1], \ x(1) = 0,$

$$J(u) = \int_0^1 [u^2(t) + 2tu^4(t) - 4x(t)u^3(t)] \, dt \to \min.$$

5.6.6. Воспользовавшись линеаризованным принципом максимума, получить необходимые условия оптимальности в форме соответствующих уравнений Эйлера для

а) многомерной задачи вариационного исчисления;

б) изопериметрической задачи вариационного исчисления;

в) задачи вариационного исчисления с функционалом, зависящим от производных высших порядков:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t), t) \, dt \to \min,$$

$$x^{(k)}(t_0) = x_k^0, \ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$x^{(k)}(t_1) = x_k^1,$$

$x(t)$ — скалярная функция, x_k^0 и x_k^1 — заданные числа.

5.6.7. Применить принцип максимума для решения следующих задач вариационного исчисления:

а) $\int_0^2 (\dot{x}^2 - x + t^2) \, dt \to \min, \ x(0) = 0;$

б) $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x + \cos t)\, dt \to \min,\ \ x(1) = 0;$

в) $\int\limits_0^{1/2} (x - \dot{x}^2)\, dt \to \min,\ \ x(0) = 0;$

г) $x^2(1) + \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + 2tx)\, dt \to \min,\ \ x(0) = 1;$

д) $x_1^2(2) + x_2^2(2) + \int\limits_1^2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + x_2^2)\, dt \to \min,$

$x_1(1) = 1,\ \ x_2(1) = 0;$

е) $\int\limits_\pi^{5\pi/4} (\dot{x}^2 - x^2 + e^t)\, dt \to \min,\ \ x(\pi) = 1.$

Глава 6

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В предыдущей главе основным объектом исследования был управляемый процесс (u, x), где управление $u = u(t)$ и состояние $x = x(t)$ являлись функциями одной независимой переменной или одного параметра t (во многих случаях это время). Связь между состоянием и управлением задавалась системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Задачи оптимизации в таких системах наиболее полно изучены — собственно, теория оптимального управления и возникла как теория управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений (теория управления системами с сосредоточенным параметром).

Однако во многих прикладных проблемах техники, естествознания, экономики и т.п. суть объектов такова, что их характеристики имеют не только временную, но и пространственную протяженность. Отсюда состояние, как и управление, таких объектов необходимо задавать не только в каждый момент времени t, но и в каждой точке s той геометрической области S физического пространства определенной размерности, которую занимает данный объект. Отсюда мы приходим к управляемому процессу $\{u, x\}$, где управление $u = u(t)$ и состояние $x = x(t)$, $t \in T \subset E^m$, являются функциями многих независимых переменных $t = (t_1, \ldots, t_m)$. Связь между состоянием и управлением в этом случае уже может задаваться системой уравнений с частными производными. Системы такого типа обычно называют системами с распределенными параметрами. Задачи оптимизации в таких системах имеют тот же смысл, как и в системах с сосредоточенным параметром.

Разработка теории и методов решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами является более сложной проблемой, нежели аналогичная для систем с сосредоточенным параметром. Прежде всего, это связано с тем, что класс уравнений с частными производными значительно более широк, чем класс обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отсюда вряд ли существует реальная возможность объединения этих различных по природе и свойствам решений процессов в некоторую общую математическую модель. Поэтому исследование задач оптимального управления системами с распределенными параметрами существенно привязано к конкретным типам задач, причем эта конкретность, в основном, определяется типом системы уравнений с частными производными, связывающей состояние и управление.

В то же время существуют и некоторые общие моменты, общие положения, характерные для всех задач оптимизации в системах с распределенными параметрами. Зная эти положения, исследователь сможет значительно облегчить свою работу. Эти общие положения или общую схему исследования задачи оптимального управления уравнениями с частными производными мы представляем читателю в первом параграфе. Во втором параграфе мы приведем примеры конкретных задач.

6.1. Общая схема исследования задачи

Пусть $t \in E^m$ — независимые переменные, и в некоторой области $T \subset E^m$ связь между управлением $u = u(t)$, $u(t) \in \in U \subset E^r$ и состоянием $x = x(t)$, $x(t) \in E^n$ задана системой n-дифференциальных уравнений с частными производными:

$$Dx = f(x, Rx, u, t). \tag{6.1.1}$$

Здесь $Dx = (D_1x_1, \ldots, D_nx_n)$, где D_ix_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — какая-то частная производная от $x_i(t)$ по переменным t_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, Rx — остальные частные производные: $Rx = Rx(t) \in E^p$, векторфункция f непрерывна по своим переменным вместе с частными производными по x и Rx. Для системы (6.1.1) на заданной границе T_0 области T определим начально-граничные условия

$$D_0x(T_0) = a^0(t) \tag{6.1.2}$$

и предположим существование и единственность решения задачи (6.1.1), (6.1.2) в определенном смысле для каждого выбранного допустимого кусочно-непрерывного управления $u = u(t)$. Понятно, что D_0 — некоторый заданный дифференциальный оператор, $a^0 = a^0(t)$ — известные функции. Пусть также T_1 — заданная граница области T, и решение $x(T_1)$ задачи (6.1.1), (6.1.2) может быть погружено в гильбертово пространство, например, E^n или $L_2^n(T_1)$. На решениях задачи (6.1.1), (6.1.2) определим функционал

$$J(u) = \varphi(x(T_1)) + \int_T F(x, Rx, u, t)\, dt, \tag{6.1.3}$$

где φ — непрерывный и дифференцируемый функционал, определенный на элементах гильбертова пространства, F — скалярная функция, непрерывная по своим аргументам вместе с частными производными по x и Rx.

Ставится задача минимизации функционала (6.1.3), определенного на решениях системы (6.1.1), (6.1.2) по допустимым управлениям $u = u(t)$, $u(t) \in U$, $t \in T$. Переходим к описанию общей схемы.

Прежде всего формируем сопряженную задачу. Для этого вводим в рассмотрение скалярную функцию, аналогичную функции Понтрягина:

$$H(\psi, x, Rx, u, t) = \langle \psi(t), f(x, Rx, u, t)\rangle - F(x, Rx, u, t).$$

Для сокращения записи примем следующее обозначение: $H(\cdots t) = H(\psi, x, Rx, u, t)$. Напомним, что для приращений

$$\Delta\varphi(x(T_1)) = \varphi(x(T_1) + \Delta x(T_1)) - \varphi(x(T_1)),$$

$$\Delta_{\tilde{x}R\tilde{x}} H(\cdots t) = H(\psi, x + \Delta x, Rx + \Delta Rx, u, t) - H(\psi, x, Rx, u, t),$$

$$\tilde{x} = x + \Delta x,$$

справедливо

$$\Delta\varphi(x(T_1)) = \langle \nabla\varphi(x(T_1)), \Delta x(T_1)\rangle + o_\varphi(\|\Delta x(T_1)\|),$$

$$\Delta_{\tilde{x}R\tilde{x}} H(\cdots t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} H(\cdots t), \Delta x(t)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial Rx} H(\cdots t), \Delta Rx(t)\right\rangle + o_H(\|\Delta x(t), \Delta Rx(t)\|).$$

Теперь (и это самое главное) найдем такие вектор-функции

$$H_D(\cdots t) = H_D(\psi, x, Rx, u, t),\quad \varphi_D(\cdot t) = \varphi_D(x(T_1), t), \tag{6.1.4}$$

для которых справедливы следующие равенства:

$$\int_T \langle H_D(\cdots t), \Delta Dx(t)\rangle\, dt = \int_T \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x} H(\cdots t), \Delta x(t)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial Rx} H(\cdots t), \Delta Rx(t)\right\rangle\right] dt,$$

$$\int_T \langle \varphi_D(\cdot t), \Delta Dx(t)\rangle\, dt = \langle \nabla\varphi(x(T_1)), \Delta x(T_1)\rangle. \tag{6.1.5}$$

Заметим, что иногда для вычисления функций (6.1.4) с помощью равенств (6.1.5) необходимо функцию $\psi = \psi(t)$ подчинить определенным граничным условиям

$$L\psi(\tilde{T}) = 0, \tag{6..6}$$

где $\tilde{T}$ — часть границы области T, L — известный оператор.

Выполнив эти операции, мы подчиняем сопряженные функции сопряженным (в общем виде интегро-дифференциальным) уравнениям

$$\psi(t) = -\varphi_D(\cdot, t) + H_D(\cdots t). \qquad (6.1.7)$$

Совершенно понятно, что далее для заданного управления $u = u(t)$ и соответствующего ему решения $x = x(t, u)$ системы (6.1.1), (6.1.2), нужно обосновать существование и единственность решения $\psi = \psi(t, u)$ сопряженной задачи (6.1.7), (6.1.6). В этом случае на двух допустимых процессах — базовом: $\{u^0;\ x^0 = x(t, u^0)\}$ и варьируемом: $\{u = u^0 + \Delta u;\ x = x(t, u) = x^0(t) + \Delta x(t)\}$ — формула приращения целевого функционала (6.1.3) на решениях системы (6.1.1), (6.1.2) может быть представлена в следующем виде:

$$J(u) - J(u^0) = -\int_T \Delta_u H(\psi(t, u^0), x, Rx, u^0(t), t)\, dt +$$

$$+ o_\varphi(\|\Delta x(T_1)\|) - \int_T o_H(\|\Delta x(t), \Delta Rx(t)\|)\, dt. \qquad (6.1.8)$$

Здесь $\Delta_u H$ — частное приращение:

$$\Delta_u H(\psi(t, u^0), x, Rx, u^0(t), t) =$$

$$= H(\psi(t, u^0), x, Rx, u(t), t) - H(\psi(t, u^0), x, Rx, u^0(t), t),$$

а интеграл от него во многих задачах является главным членом в формуле приращения (6.1.8). Для обоснования этого последнего утверждения, а, фактически, для получения необходимого условия оптимальности типа принципа максимума и применения итерационных процессов принципа максимума нужно формулу приращения (6.1.8) рассмотреть на аналоге игольчатой вариации. Для этого варьируемое управление $u = u(t)$ возьмем в виде

$$u(t) = u_\varepsilon^0 = \begin{cases} v \in U, & t \in T_0(\varepsilon) \subset T,\ \varepsilon \in [0, 1], \\ u^0(t), & t \in T \backslash T_0(\varepsilon), \end{cases} \qquad (6.1.9)$$

где форму области игольчатого варьирования $T_0(\varepsilon) \subset T$: $\operatorname{mes} T_0(\varepsilon) = \alpha \cdot \varepsilon$, $\alpha = \mathrm{const} \le \operatorname{mes} T$, $T_0(\varepsilon) \to \tau \in T$ при $\varepsilon \to 0$, подберем так, чтобы

$$J(u_\varepsilon^0) - J(u^0) = -\Delta_v H(\psi(\tau, u^0), x(\tau, u^0), Rx(\tau, u^0), u^0(\tau), \tau)\alpha \cdot \varepsilon +$$

$$+ o(\varepsilon),\ \tau \in T,\ v \in U. \qquad (6.1.10)$$

Заметим, что после построения сопряженной задачи операция оценки приращения состояния $\Delta x(t)$, $\Delta Rx(t)$ через приращение

12. Заказ № 1889.

управления $\Delta u(t)$, лежащая в основе перехода от формулы (6.1.8) к формуле (6.1.10), является самой трудоемкой операцией. Более того, можно привести (и мы приведем) примеры реальных систем (6.1.1), где переход от общей формулы приращения (6.1.8) к частной (6.1.10) вообще невозможен ни при какой форме области игольчатого варьирования.

Если же это возможно, то на оптимальном процессе $\{u^0;\ x^0 = x(t, u^0),\ \psi^0 = \psi(t, u^0)\}$ справедливо необходимое условие оптимальности в форме, аналогичной принципу максимума Л.С.Понтрягина:

$$\Delta_v H(\psi^0, x^0, Rx^0, u^0, t) \le 0, \quad v \in U, \quad t \in T. \tag{6.1.11}$$

В линейно-выпуклом варианте задачи (6.1.1)–(6.1.3):

$$\begin{gathered} Dx = A(t)x + B(t)Rx + d(u, t), \quad D_0x(T_0) = a^0(t), \\ J(u) = \varphi(x(T_1)) + \int_T [F_1(x, Rx, t) + F_2(u, t)]\, dt, \end{gathered} \tag{6.1.12}$$

$\varphi(x)$ — выпуклый функционал, $F_1(x, Rx, t)$ — выпуклая по x и Rx функция, принцип максимума (6.1.11) является необходимым и достаточным условием оптимальности. Далее, предположим разрешимость условия максимума

$$\bar{u}^0(t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi^0, x^0, Rx^0, v, t),$$

и в управлении $u = u^0_\varepsilon(t)$ (формула (6.1.9)) положим $v = \bar{u}^0(t)$. После этого итерационный процесс принципа максимума, ориентированный на решение задачи (6.1.1)–(6.1.3), по форме записи и реализации ничем не отличается от итерационного процесса, описанного в § 5.3.

Далее, формула приращения (6.1.8) позволяет выделить тот класс задач (6.1.1)–(6.1.3), для которых можно реализовать идею точной прямой релаксации (см. § 5.4).

Пусть в задаче (6.1.1)–(6.1.3) система (6.1.1) — линейная по состоянию с управляемыми коэффициентами:

$$f = A(u, t)x + B(u, t)Rx + d(u, t), \tag{6.1.13}$$

функционал $\varphi(x(T_1))$ вогнут, функция $F(x, Rx, u, t)$ вогнута по x, Rx для всех $u \in U$, $t \in T$. В этом случае $o_\varphi(\|\Delta x(T_1)\|) \le 0$,

$$o_H(\|\Delta x(t), \Delta Rx(t)\|) = -o_F(\|\Delta x(t), \Delta Rx(t)\|),$$

причем $o_F(\|\Delta x(t), \Delta Rx(t)\|) \le 0$. Подчеркнем, что в таком линейно-вогнутом варианте задачи (6.1.1)–(6.1.3), даже если φ и F линейны по x, Rx, принцип максимума (6.1.11) — только необходимое условие оптимальности. Для варианта (6.1.13) исследуемой задачи формула приращения (6.1.8) примет вид неравенства

$$J(u) - J(u^0) \le -\int_T \Delta_u H(\psi(t, u^0), x, Rx, u^0(t), t)\, dt. \qquad (6.1.14)$$

Теперь предположив разрешимость условия максимума для произвольных x, Rx:

$$\bar{u}^0(x, Rx, t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi(t, u^0), x, Rx, v, t),$$

найдем решение $\bar{x}^0 = \bar{x}^0(t)$ уже нелинейной и, возможно, с разрывной правой частью задачи

$$Dx = A(\bar{u}^0(x, Rx, t), t)x + B(\bar{u}^0(x, Rx, t), t)Rx +$$
$$+ d(\bar{u}^0(x, Rx, t), t), \quad D_0x(T) = a^0(t) \qquad (6.1.15)$$

и вычислим допустимое управление

$$\bar{u}^0(t) = \bar{u}^0(\bar{x}^0(t), R\bar{x}^0(t), t).$$

Тогда

$$\Delta_{\bar{u}^0} H(\psi(t, u^0), \bar{x}^0(t), R\bar{x}^0(t), u^0(t), t) \ge 0$$

и, если $\bar{u}^0(t) \ne u^0(t) > 0$, $t \in T_0$, $\operatorname{mes} T_0 > 0$, то $\Delta_{\bar{u}^0} H(\cdots t) > 0$, $t \in T_0$. Отсюда в силу неравенства (6.1.14)

$$J(\bar{u}^0) < J(u^0).$$

Точная релаксация обеспечена. Если же $\bar{u}^0(t) = u^0(t)$, то в тех задачах (6.1.13), где можно обосновать необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума (6.1.11), управление $u^0 = u^0(t)$ удовлетворяет принципу максимума.

Заметим, что построение релаксационной последовательности управлений $\{u^k\}$, $u^{k+1} = \bar{u}^k(t)$, $J(u^{k+1}) \le J(u^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, возможно и для таких задач (6.1.13), для которых получена только формула приращения (6.1.8), т.е. практически построена только сопряженная задача. Понятно, что вся сложность реализации такого релаксационного процесса погружена в решение задачи (6.1.15).

6.2. Примеры задач оптимального управления с распределенными параметрами

Здесь мы приведем несколько примеров задач оптимизации в системах уравнений с частными производными и в этих примерах покажем, как строить сопряженную задачу. Как мы видели в предыдущем параграфе, этой операции достаточно для построения формулы приращения и, следовательно, достаточно для организации итерационного релаксационного процесса в линейно-вогнутом варианте (6.1.13) рассматриваемой задачи. Оценки приращения состояния на игольчатой вариации управления, позволяющие перейти к формуле приращения (6.1.10) и в конечном счете сформулировать необходимое условие оптимальности типа поточечного условия максимума (6.1.11), требуют отдельной техники, знания качественных свойств управляемой системы, и здесь не приводятся.

Пример 6.2.1. Прежде всего из общей схемы § 6.1 построим сопряженную задачу для основной задачи оптимального управления в обыкновенных дифференциальных уравнениях:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U,$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x, u, t)\, dt.$$

Здесь в обозначениях общей схемы: $Dx = \dot{x}$, $m = 1$, $\Gamma_0 = t_0$, $D_0 = I$, $a^0(t) = x^0$, $T_1 = t_1$, $x(t_1) \in E^n$, $R = 0$, равенства (6.1.5) имеют вид

$$\int_T \langle H_D(\cdots t), \Delta\dot{x}(t)\rangle\, dt = \int_T \left\langle \frac{\partial}{\partial x} H(\cdots t), \Delta x(t)\right\rangle dt,$$

$$\int_T \langle \varphi_D(\cdot\,, t), \Delta\dot{x}(t)\rangle\, dt = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x(t_1)), \Delta x(t_1)\right\rangle dt.$$

Так как

$$\int_T \left\langle \frac{\partial}{\partial x} H(\cdots t), \Delta x(t)\right\rangle dt = \int_T \left\langle -\frac{d}{dt}\int_t^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} H(\cdots \tau)\, d\tau, \Delta x(t)\right\rangle dt =$$

$$= -\left\langle \int_t^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} H(\cdots \tau)\, d\tau, \Delta x(t)\right\rangle \Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1} + \int_T \left\langle \int_t^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} H(\cdots \tau)\, d\tau, \Delta\dot{x}(t)\right\rangle dt,$$

то в силу $\Delta x(t_0) = 0$

$$\int\limits_T \langle H_D(\cdots t), \Delta\dot{x}(t)\rangle\, dt = \int\limits_T \left\langle \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} H(\cdots \tau)\, d\tau, \Delta\dot{x}(t)\right\rangle dt.$$

Отсюда

$$H_D(\cdots t) = \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} H(\cdots \tau)\, d\tau.$$

Далее опять же в силу $\Delta x(t_0) = 0$

$$\int\limits_T \langle \varphi_D(\cdot t), \Delta\dot{x}(t)\rangle\, dt = \int\limits_T \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x(t_1)), \Delta\dot{x}(t)\right\rangle dt,$$

т.е.

$$D_D(\cdot t) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x(t_1)).$$

Итак сопряженная система имеет вид

$$\psi(t) = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x(t_1)) + \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} H(\psi, x, u, \tau)\, d\tau.$$

В этой задаче возможен переход от интегрального вида сопряженной системы к дифференциальному

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial}{\partial x} H(\psi, x, u, t), \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x(t_1)).$$

Пример 6.2.2. Рассмотрим задачу оптимального управления системой Гурса–Дарбу. Эта задача имеет многочисленные приложения при управлении процессами сушки воздушным потоком, сорбции и десорбции газов и др. Она является одной из первых задач оптимизации в системах с распределенными параметрами, где А.И. Егоровым было получено необходимое условие оптимальности типа поточечного условия максимума. Задача формулируется следующим образом. Пусть $t = (s, t) \in E^2$, $T = P = S \times T = [s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$,

$$x_{st} = f(x, x_s, x_t, u, s, t), \tag{6.2.1}$$

$$x(s_0, t) = a^1(t), \ x(s, t_0) = a^2(s), \ a^1(t_0) = a^2(s_0), \tag{6.2.2}$$

$$u(s, t) \in U, \ (s, t) \in P,$$

$$J(u) = \varphi(x(s_1, t_1)) + \int\limits_P F(x, x_s, x_t, u, s, t)\, ds\, dt.$$

Здесь x_s, x_t, x_{st} — символы частного дифференцирования функции x по s и t; вектор-функция f и скалярные функции φ, F непрерывны по совокупности своих аргументов вместе с частными производными по x, x_s, x_t, причем вектор-функция f удовлетворяет неравенству Липшица по x, x_s, x_t с одной константой в любой замкнутой области переменных $u \in U$, $(s, t) \in P$; $a^1(t)$, $a^2(s)$ — непрерывные и кусочно-дифференцируемые на T, S вектор-функции. При выполнении этих условий каждое допустимое измеримое управление $u = u(s, t)$ порождает единственное абсолютно-непрерывное решение $x = x(s, t, u)$ системы Дарбу (6.2.1) с начально-граничными условиями Гурса (6.2.2), определенное на P. Свойство непрерывности решения обосновывает корректность включения в функционал $J(u)$ терминальной части $\varphi(x(s_1, t_1))$. Производные x_s, x_t решения $x = x(s, t, u)$ задачи (6.2.1), (6.2.2) могут иметь разрывы первого рода лишь на характеристиках системы (6.2.1), параллельных координатным осям. В обозначениях общей схемы $Dx = x_{st}$,

$$Rx = (x_s, x_t),\ \Gamma_0 = \{(s, t)\colon [s_0, t] \times [s, t_0],\ s \in S,\ t \in T\},$$

$$\Gamma_1 = (s_1, t_1),\ x(s_1, t_1) \in E^n.$$

Равенства (6.1.5) имеют вид

$$\int_P \langle H_D(\cdots s, t), \Delta x_{st}(s, t)\rangle\, ds\, dt =$$

$$= \int_P \left\langle \frac{\partial}{\partial x} H(\cdots s, t), \Delta x(s, t)\right\rangle ds\, dt +$$

$$+ \int_P \left\langle \frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, t), \Delta x_s(s, t)\right\rangle ds\, dt +$$

$$+ \int_P \left\langle \frac{\partial}{\partial x_t} H(\cdots s, t), \Delta x_t(s, t)\right\rangle ds\, dt, \tag{6.2.3}$$

$$\int_P \langle \varphi_D(\cdot s, t), \Delta x_{st}(s, t)\rangle\, ds\, dt = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x(s_1, t_1)), \Delta x(s_1, t_1)\right\rangle,$$

причем $\Delta x(s_0, t) = \Delta x(s, t_0) = 0$, и, следовательно, $\Delta x_t(s_0, t) = \Delta x_s(s, t_0) = 0$. Для примера преобразуем второе слагаемое в правой части равенства (6.2.3):

$$\int\limits_P \left\langle \frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, t), \Delta x_s(s, t) \right\rangle ds\, dt =$$

$$= -\int\limits_{s_0}^{s_1} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{d}{dt} \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, \tau)\, d\tau, \Delta x_s(s, t) \right\rangle ds\, dt =$$

$$= -\int\limits_{s_0}^{s_1} \left\langle \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, \tau), \Delta x_s(s, t) \right\rangle_{t=t_0}^{t=t_1} ds +$$

$$+ \int\limits_{s_0}^{s_1} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, \tau), \Delta x_{st}(s, t) \right\rangle ds\, dt.$$

Остальное предоставляем проделать читателю. В результате получим сопряженную систему интегральных уравнений:

$$\psi(s, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x(s_1, t_1)) + \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial}{\partial x_s} H(\psi, x, x_s, x_\tau, u, s, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_s^{s_1} \frac{\partial}{\partial x_t} H(\psi, x, x_\xi, x_t, u, \xi, t)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_s^{s_1} \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} H(\psi, x, x_\xi, x_\tau, \xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \qquad (6.2.4)$$

Интегральные уравнения (6.2.4) линейны относительно неизвестных функций $\psi = \psi(s, t)$ и в силу кусочной непрерывности (измеримости) управлений и производных x_s, x_t имеют разрывные коэффициенты. Можно показать, что кусочно-непрерывные (измеримые) решения $\psi = \psi(s, t)$ системы (6.2.4) существуют и единственны на всем прямоугольнике P, и линиями разрыва решения могут быть лишь характеристики системы (6.2.1), параллельные координатным осям. Отсюда переход к дифференциальному виду сопряженной задачи (6.2.4) путем дифференцирования по s и t не корректен, ибо не корректны операции дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial s}\dfrac{\partial H}{\partial x_s}$, $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial H}{\partial x_t}$.

Фактически, здесь проиллюстрирован тот факт, что сопряженная функция определена в том же классе функций, что и правые части системы (6.2.1) и переход к симметричной дифференциальной записи сопряженной системы не всегда возможен. Иначе говоря, совпадение аналитических свойств решений исходной и сопряженной задачи, характерное для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, нетипично для задач оптимизации в системах с распределенными параметрами.

Наконец, в функционал $J(u)$, определенный на решениях задачи (6.2.1), (6.2.2), могут также входить показатели качества управляемого процесса, заданные на границах области P, например,

$$\int_{s_0}^{s_1} \varphi_1(x, x_s, s, t_1)\, ds.$$

В этом случае удобнее путем расширения пространства состояния

$$x_{n+1}(s, t) = \int_{s_0}^{s} \varphi_1(x, x_s, \xi, t)\, d\xi,$$

$$x_{n+1}(s_0, t) = 0,$$

$$x_{n+1}(s, t_0) = \int_{s_0}^{s} \varphi_1(a^2(\xi), a^2(\xi), \xi, t_0)\, d\xi,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t} x_{n+1}(s, t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, x_t \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s}, f \right\rangle$$

включить этот показатель качества $x_{n+1}(s_1, t_1)$ в терминальную часть функционала $J(u)$.

В рассматриваемой задаче переход от формулы приращения (6.1.8) к формуле (6.1.10) возможен при $T_0(\varepsilon) = P_0(\varepsilon) = [\xi - \sqrt{\varepsilon}, \xi] \times [\tau - \sqrt{\varepsilon}, \tau] \subset P$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$. Следовательно, здесь можно сформулировать необходимое условие оптимальности типа (6.1.11). Этот результат открывает путь построения итерационных процессов принципа максимума.

Замечание. Пусть в рассматриваемой задаче присутствуют сосредоточенные управления: $u = u(t)$ или $u = u(s)$, или же оба типа $u = (u^1(s), u^2(t))$. Такие задачи также имеют приложения. Однако в этих задачах уже нельзя перейти от формулы (6.1.8) (которая и в этом случае имеет место) к формуле (6.1.11). Здесь остается только путь прямой точной релаксации для линейно-вогнутого варианта задачи.

Пример 6.2.3. Рассмотрим задачу оптимального управления канонической (по определению Р.Куранта) системой гиперболических уравнений первого порядка:

$$
\begin{aligned}
& z(s, t) \in E^{n_1}, \;\; y(s, t) \in E^{n_2}, \;\; n_1 + n_2 = n, \\
& z_s = f^{(1)}(z, y, u, s, t), \;\; y_t = f^{(2)}(z, y, u, s, t), \\
& (s, t) \in S \times T = P, \;\; S = [s_0, s_1], \;\; T = [t_0, t_1], \\
& z(s_0, t) = a^{(1)}(t), \;\; t \in T, \\
& y(s, t_0) = a^{(2)}(s), \;\; s \in S, \\
& u(s, t) \in U, \;\; (s, t) \in P,
\end{aligned}
\tag{6.2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
J(u) = \int_T \varphi_1(z(s_1, t), t)\, dt + \int_S \varphi_2(y(s, t_1), s)\, ds + \\
+ \iint_P F(z, y, u, s, t)\, ds\, dt \to \min.
\end{aligned}
\tag{6.2.6}
$$

Задача (6.2.5), (6.2.6) имеет многочисленные приложения в процессах управления химическими реакторами, в процессах оптимизации квазистационарных каталитических процессов химического производства. Введем стандартные предположения:

1) вектор-функции $f^{(i)}$, $i = 1, 2$, непрерывны по совокупности своих аргументов вместе с частными производными по z и y и удовлетворяют неравенствам Липшица по z, y с одной константой для всех $u \in U$, $(s, t) \in P$;

2) скалярные функции φ_1, φ_1, F непрерывны по своим аргументам вместе с частными производными по z, y.

При этих предположениях каждое допустимое, измеримое управление $u = u(s, t)$ порождает единственное измеримое решение $(z = z(s, t, u)$, $y = y(s, t, u)$, $x = x(s, t, u) \in E^n)$ задачи (6.2.5), причем функции $z(s, t)\,[y(s, t)]$ абсолютно непрерывны по $s\,[t]$ в каждом $t\,[s]$. Выбор терминальной части (φ_1, φ_2) в функционале (6.2.6) обусловлен указанными аналитическими свойствами решения $x = (z, y)$. В обозначениях операторной схемы $Dx = (z_s, y_t)$, $Rx = 0$,

$$\Gamma_1 = \{(s, t) \in P\colon\ s = s_1, \qquad = t_1 \quad \in S\}, \;\; z(s_1, \cdot) \in L_2^{n_1}(T),$$

$$\Gamma_0 = \{(s, t) \in P\colon\ s = s_0, t \qquad t = t_0, s \in S\},$$

$$y(\cdot, t_1) \in L_2^{n_2}(s), \;\; D_0 = I.$$

Для рассматриваемой задачи необходимое условие оптимальности типа поточечного условия максимума функции

$$H(\psi, x, u, s, t) = \langle \psi^{(1)}(s, t), f^{(1)}(x, u, s, t)\rangle +$$
$$+ \langle \psi^{(2)}(s, t), f^{(2)}(x, u, s, t)\rangle - F(x, u, s, t),$$
$$\psi = (\psi^{(1)}(s, t) \in E^{n_1}, \psi^{(2)}(s, t) \in E^{n_2})$$

получено Г.А.Островским и Ю.М.Волиным. Предлагаем читателю получить вид сопряженной задачи и обосновать переход от интегральной формы к дифференциальной:

$$\psi_s^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial z} H(\cdots s, t), \quad \psi_t^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial y} H(\cdots s, t),$$

$$\psi^{(1)}(s_1, t) = -\frac{\partial}{\partial z}\varphi_1(z(s_1, t), t), \quad \psi^{(2)}(s, t_1) = -\frac{\partial}{\partial y}\varphi_2(y(s, t_1), s).$$

Пример 6.2.4. Задачи оптимального управления системой параболических уравнений возникают при изучении управляемых процессов теплопроводности, диффузии, фильтрации и др. Пусть связь между состоянием $x = x(s, t) \in E^n$ и управлением $u = u(s, t)$, $u(s, t) \in E^r$ в области $P = S \times T$, $S = [s_0, s_1]$, $T = [t_0, t_1]$ задана системой дифференциальных уравнений с частными производными следующего вида:

$$x_t = f(x, x_s, x_{ss}, u, s, t). \tag{6.2.7}$$

Для системы (6.2.7) определим начально-граничные условия:

$$\begin{aligned} &x(s, t_0) = x^0(s), \quad s \in S, \\ &x_s(s_0, t) = a^0(t), \quad t \in T, \\ &x_s(s_1, t) = a^1(t), \quad t \in T. \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

Допустим, что для любого допустимого, даже обладающего любыми степенями гладкости управления $u = u(s, t)$, $u(s, t) \in U$, задача (6.2.7), (6.2.8) разрешима. Мы приведем примеры таких задач, где обосновывается существование и единственность обобщенного решения для измеримых, существенно ограниченных управлений. Определим на решениях системы (6.2.7), (6.2.8) функционал

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s, t_1), s)\, ds + \iint_P F(x, x_s, x_{ss}, u, s, t)\, ds\, dt \to \min \tag{6.2.9}$$

и для задачи (6.2.7)–(6.2.9) построим сопряженную задачу, в результате чего мы будем иметь формулу приращения (6.1.8). Здесь в обозначениях операторной схемы $Dx = x_t$, $Rx = (x_s, x_{ss})$

$$\Gamma_0 = \{(s, t) \in P\colon\ s \in S,\ t = t_0;\ s = s_0,\ t \in T;\ s = s_1,\ t \in T\},$$

$$D_0 = (x, x_s, x_{ss}),\ \Gamma_1 = \{(s, t) \in P\colon\ s \in S,\ t = t_1\},\ x(\cdot, t_1) \in L_2^n(S).$$

Равенства (6.1.15) имеют вид

$$\iint\limits_P \langle H_D(\cdots s, t), x_t(s, t)\rangle\, ds\, dt =$$

$$= \iint\limits_P \left\langle \frac{\partial}{\partial x} H(\cdots s, t), \Delta x(s, t)\right\rangle ds\, dt +$$

$$+ \iint\limits_P \left\langle \frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, t), \Delta x_s(s, t)\right\rangle ds\, dt +$$

$$+ \iint\limits_P \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{ss}} H(\cdots s, t), \Delta x_{ss}(s, t)\right\rangle ds\, dt,$$

$$\iint\limits_P \langle \varphi_D(\cdot, s, t), x_t(s, t)\rangle\, ds\, dt = \int\limits_S \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x(s, t_1), s), \Delta x(s, t_1)\right\rangle ds.$$

Отсюда с учетом того, что $\Delta x(s, t_0) \equiv 0$, $\Delta x_s(s_0, t) \equiv 0$, $\Delta x_s(s_1, t) \equiv 0$,

$$\varphi_D(\cdot, s, t) = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x(s, t_1), s).$$

Для вычисления $H_D(\cdots s, t)$ нужно провести операции подобно приведенной ниже

$$\iint\limits_P \left\langle \frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, t), \Delta x_s(s, t)\right\rangle ds\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, t), \Delta x_s(s, t)\right\rangle dt\, \Bigg|_{s=s_0}^{s=s_1} -$$

$$- \iint\limits_P \left\langle \frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, t), \Delta x(s, t)\right\rangle ds\, dt =$$

$$= \iint\limits_P \left\langle \frac{d}{dt}\int\limits_t^{t_1} \frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, \tau)\, d\tau, \Delta x(s, t)\right\rangle ds\, dt =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s_1} \left\langle \int\limits_t^{t_1} \frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, \tau)\, d\tau, \Delta x(s, t)\right\rangle ds\, dt\, \Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1} -$$

$$-\iint\limits_P \left\langle \int\limits_t^{t_1} \frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, \tau)\, d\tau,\ \Delta x_t(s, t) \right\rangle ds\, dt =$$

$$= -\iint\limits_P \left\langle \int\limits_t^{t_1} \frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, \tau)\, d\tau,\ \Delta x_t(s, t) \right\rangle ds\, dt.$$

Предоставляем остальные операции провести читателю. В результате сопряженная система примет вид

$$\psi_t = -\frac{\partial}{\partial x} H(\psi, x, x_s, x_{ss}, u, s, t) + \frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial x_s} H(\cdots s, t) - \\ - \frac{d^2}{ds^2}\frac{\partial}{\partial x_{ss}} H(\cdots s, t), \tag{6.2.10}$$

$$\psi(s, t_1) = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x(s, t_1), s).$$

Далее функция $\psi = \psi(s, t)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$\frac{\partial}{\partial x_s} H(\psi, x, x_s, x_{ss}, u, s, t)\Big|_{s=s_0}^{s=s_1} = 0,\quad \frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial x_{ss}} H(\cdots s, t)\Big|_{s=s_0}^{s=s_1} = 0. \tag{6.2.11}$$

Рассмотрим частный класс приведенной задачи, а именно, классическую задачу теплопроводности [15]:

$$x_t = b^2 x_{ss} + f(u, s, t),\ (s, t) \in P = S \times T,$$

$$x(s, t_0) = x^0(s),\ x_s(s_0, t) = a^0(t),\ x_s(s_1, t) = a^1(t),$$

$$J(u) = \int\limits_S \varphi(x(s, t_1), s)\, ds \to \min.$$

Здесь каждое измеримое управление $u = u(s, t)$, $u(s, t) \in U$, порождает решение краевой задачи в некотором обобщенном смысле. (см., например, [29]). Для этой задачи сопряженная задача (6.2.10), (6.2.11) примет вид

$$\psi_t = -b^2\psi_{ss},\ \psi(s, t_1) = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x(s, t_1), s),$$

$$\psi_s(s_1, t) = 0,\ \psi_s(s_0, t) = 0,$$

симметричный исходной.

В заключение отметим, что даже простые приведенные примеры задач оптимального управления с распределенными параметрами показывают сложность изучения этих проблем, которая в основном определяется сложностью обоснования существования и единственности решения начально-граничных задач при выбранном управлении. Даже решив эти вопросы для основной задачи, мы должны снова их ставить для обоснования решения сопряженной задачи. Только тогда мы будем уверены в справедливости формулы приращения (6.1.8), которая открывает путь построения релаксационных процедур в линейно-вогнутом варианте (6.1.13). Что же касается необходимых условий оптимальности и итерационных процессов принципа максимума, то здесь нужно пройти через еще более сложные вещи, связанные с оценкой приращения состояния, вызванные игольчатой или в крайнем случае классической вариацией управления. Увы, здесь нам не всегда хватает аппарата качественной теории систем с распределенными параметрами, хотя потребности физики и техники иногда требуют решения задач оптимального управления системами уравнений с частными производными, которые еще не подвергнуты исчерпывающему теоретическому исследованию.

На этом пути нам иногда поможет изложенная здесь общая схема получения формулы приращения (6.1.8) с выписыванием сопряженной задачи.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Глава 1

1.1.12. а) выпукла на E^4;

в) вогнута на E^3_+;

д) вогнута на E^3;

е) вогнута на E^3_-;

ж) выпукла на E^3;

и) не является ни выпуклой, ни вогнутой на E^2;

к) не является ни выпуклой, ни вогнутой на E^2;

л) Решение. Вычислим градиент функции f:

$$\nabla f(x) = (4x_1 + x_2 - 6x_3,\ 2x_2 + x_1,\ 4x_3 - 6x_1).$$

Матрица вторых производных имеет вид $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Главные угловые миноры: $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 7 > 0$, $\Delta_3 = -44 < 0$. Миноры нечетного порядка (Δ_1 и Δ_3) имеют разные знаки. Поэтому матрица вторых производных знаконеопределена, а функция не является ни выпуклой, ни вогнутой;

м) выпукла на E^3.

1.1.13. а) условия не выполнены;

б) условия не выполнены;

в) выполнены основные гипотезы;

г) условия не выполнены;

д) выполнены ослабленные гипотезы;

е) выполнены основные гипотезы.

1.2.4. а) глобальный минимум функции $f(x)$ $\min f(x) = 1$ достигается в точках $(-1, 0, 0)$ и $(1, 0, 0)$; точек максимума нет; $\sup f(x) = +\infty$;

б) глобальные экстремумы: $\max f(x) = 1$ и $\min f(x) = 0$; точки минимума: $x^k = \pi + \pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $x^l = -\pi/2 - \pi l$, $l =$

$= 0, 1, 2, \ldots$; точки максимума: $x^m = \pi/2 + \pi m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; $x^n = -\pi n$, $n = \; = 0, 1, 2, \ldots$;

д) максимумов и минимумов нет; $\sup f(x) = +\infty$, $\inf f(x) = -\infty$.

1.2.5. а) Указание. Положив $\lambda = -1$, приходим к выводу о том, что любая задача максимизации может быть сведена к задаче минимизации и наоборот. Поэтому основные теоретические рассуждения могут проводиться лишь, например, для задачи на минимум.

г) Указание. Для доказательства свойства можно представить функцию $f(x)$ в виде $f = \varphi + (f - \varphi)$ и применить предыдущее свойство к сумме функций $\varphi + (f - \varphi)$.

е) Решение. Доказательство неравенства можно начать с очевидного двойного неравенства::

$$\inf_{y \in Y} f(x, y) \le f(x, y) \le \sup_{x \in X} f(x, y) \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

После этого воспользуемся тем, что функция $\varphi(x) = \inf\limits_{y \in Y} f(x, y)$ при произвольном $x \in X$ является нижней границей для $g(y) = \sup\limits_{x \in X} f(x, y)$ и, следовательно, не превосходит наибольшей из нижних границ этой функции:

$$\varphi(x) \le \inf_{y \in Y} g(y) \quad \forall x \in X.$$

По определению верхней границы число $\inf\limits_{y \in Y} g(y)$ есть верхняя граница для функции $\varphi(x)$ на множестве X. Поэтому, $\sup\limits_{x \in X} \varphi(x) \le \inf\limits_{y \in Y} g(y)$. А это и есть неравенство минимакса, если вспомнить, что́ обозначили через $\varphi(x)$ и $g(y)$.

и) Указание. Сначала доказать, что число $K = \max\limits_{1 \le i < n} \sup\limits_{x \in X_i} f(x)$ является верхней границей для функции $f(x)$ на множестве X. После этого предположить, что максимум достигается для некоторого индекса j, т.е. $K = \sup\limits_{x \in X_j} f(x)$. Применить определение супремума функции f на множестве X_j.

1.2.7. Указание. Воспользоваться определением минимума. Пусть $x^* = \arg\min\limits_{x \in X} f(x)$. Отсюда следует, что $f(x) \ge f(x^*)$ для всех $x \in X$ и, в частности, для точек вида $x = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$. Учитывая вид функции $f(x)$, получим, что

$$x_i^* = \arg\min_{x_i \in X_i} f_i(x_i)$$

Аналогично доказывается обратное.

1.3.2. Указание. В данной задаче множество точек глобального минимума состоит из единственной точки $x^* = 0$; $\min\limits_{x \in X} f(x) = \inf\limits_{x \in X} f(x)$. Последовательность является минимизирующей, но не сходится к множеству точек глобального минимума.

1.3.3. Указание. Рассмотреть множество Лебега $M(y)$ при $y = 0$.

1.3.6. а) Указание. Подпоследовательности $\{x^{2k}\}$ и $\{x^{2k+1}\}$ сходятся к точкам глобального минимума $\bar{x} = -\pi$ и $\bar{\bar{x}} = \pi$.

б) Указание. Невозможно выделить ни одну подпоследовательность, сходящуюся к конкретной точке глобального минимума.

1.3.7. Подпоследовательность сходится к множеству точек глобального максимума.

Глава 2

2.1.1. $\arg\min\limits_{x \in E^3} f(x) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$, $\min\limits_{x \in E^3} f(x) = -\frac{4}{3}$; глобальный минимум.

2.1.2. $\arg\max\limits_{x \in E^2} f(x) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$, $\max\limits_{x \in E^2} f(x) = \frac{1}{3}$; глобальный максимум.

2.1.3. $\arg\max\limits_{x \in E^2} f(x) = (4, 4)$, $\max\limits_{x \in E^2} f(x) = 22$.

2.1.4. Точек экстремума нет.

2.1.5. Точек экстремума нет.

2.1.6. Точек экстремума нет, так как матрица вторых производных знаконеопределена в критической точке.

2.1.7. Решение. $\nabla f(x) = (4x_1 - x_2 + 2x_3, 3x_2^2 - x_1 - 1{,}2x_1 + 2x_3)$. Подозрительными на экстремум являются две точки $\bar{x} = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\bar{\bar{x}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$;

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6x_2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

а. Матрица вторых производных знаконеопределена в точке $\bar{x}$, поэтому эта точка не является точкой экстремума.

б. Матрица вторых производных положительно определена в точке $\bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{x}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \arg\min\limits_{x \in E^3} f(x)$; минимум локальный, так как $f(0, x_2, 0) = x_2^3 - x_2 \to -\infty$, $x_2 \to -\infty$; $\inf\limits_{x \in E^3} f(x) = -\infty$, точек максимума нет, $\sup\limits_{x \in E^3} f(x) = +\infty$.

2.1.10. Точек экстремума нет.

2.1.14. $\arg\max\limits_{x \in E^2} f(x) = (0, 0)$, $\max\limits_{x \in E^2} f(x) = 1$; максимум глобальный; точек минимума нет; $\inf\limits_{x \in E^2} f(x) = 0$.

2.1.16. $\arg\min\limits_{x \in E^2} f(x) = (1, 1)$, $\min\limits_{x \in E^2} f(x) = -2$; точка глобального минимума (доказывается по определению); подозрительная на локальный минимум точка (0, 0) не является точкой экстремума.

2.1.22. б) $\arg\max\limits_{x \in E^2} f(x) = (-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6})$,

$\arg\min\limits_{x \in E^2} f(x) = (-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6})$.

2.1.25. Координаты точки минимума — средние арифметические соответствующих координат точек y^i.

2.1.26. б) Указание. В процессе решения обосновать невырожденность матрицы A^TA.

2.2.1. а) $\arg\max f(x) = (1, 3)$, $\max f(x) = 3$; глобальный максимум;

б) $\arg\max f(x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\max f(x) = e^{1/4}$; глобальный максимум;

г) $\arg\min f(x) = (-1, 1, 0)$, $\min f(x) = 0$; глобальный минимум;

з) точек экстремума нет (прямая $x_1 - x_2 = 10$ параллельна асимптоте гиперболы).

2.2.2. а) (1, 0) — точка глобального минимума; (0, 1) — точка локального минимума; $(1/\sqrt[3]{28}, 3/\sqrt[3]{28})$ — точка локального максимума.

г) Указание. При решении системы алгебраических уравнений рассматривать соответствующие уравнения как квадратные для x_1 или x_2, в которых множитель Лагранжа является параметром.

2.2.3. в) Указание. В процессе решения обосновать невырожденность матрицы $AG^{-1}A^T$.

2.2.4. Указание. Выписать уравнения правила множителей Лагранжа, подставить координаты исследуемой точки. Показать существование множителя Лагранжа, для которого уравнения обращаются в тождество. Исследовать матрицу вторых производных функции Лагранжа.

2.2.5. а) (0, 0) — единственная допустимая точка задачи, являющаяся анормальной точкой экстремума;

б) (0, 0) — точка глобального минимума, являющаяся анормальной точкой экстремума.

2.2.6. Необходимо исследовать разные варианты;

а) p — нечетное, q — нечетное; точек экстремума нет;

б) p — нечетное, q — четное, $x^* = (0, 0)$ — точка глобального максимума;

в) p — четное, q — нечетное; точек экстремума нет;

г) р — четное, q — четное. $x^* = (0, 0)$ — единственная допустимая точка.

2.2.7. Указание. Сравните с упражнением 2.1.22.

2.2.12. Указание. Вписанный в круг треугольник однозначно определяется (с точностью до поворота вокруг центра круга) заданием величин углов, образованных отрезками, соединяющими центр круга с вершинами треугольника. Выразить искомую площадь через данные величины, учитывая, что их сумма равна 360°.

2.2.13. Указание. В рассматриваемой задаче пирамида однозначно определяется заданием проекции вершины на плоскость основания.

2.3.1. а) $\arg\max f(x) = (1, 1)$, $\max f(x) = 1$; глобальный максимум; точек минимума нет.

2.3.3. а) (0, 0) — точка глобального минимума.

2.3.8. Указание. Воспользоваться тем, что x^* — точка минимума линейной функции $\left\langle \frac{\partial}{\partial x} L(\lambda_0^*, \lambda^*, x^*), x \right\rangle$ на множестве Ω.

2.3.9. а) $\arg\min f(x) = (3, 2)$, $\min f(x) = -11$; глобальный минимум, точек максимума нет, $\sup f(x) = +\infty$;

в) $\arg\min f(x) = (2, 3)$, $\min f(x) = 0$; $\arg\max f(x) = (9, 0)$, $\max f(x) = 58$;

д) $\arg\max f(x) = (3, 4)$, $\max f(x) = 25$.

2.3.10. а) (−2, −40, −36) — точка глобального минимума.

2.3.12. $x^* = (1, 3)$, $\max u(x) = \sqrt{3}$, предельные полезности $M_1 = \sqrt{3}/2$, $M_2 = 1/2\sqrt{3}$.

2.4.1. Указание. Пример можно решить, воспользовавшись теоремой об экстремуме сепарабельной функции.

2.4.2. Указание. Можно воспользоваться теоремой об экстремуме сепарабельной функции.

2.4.3. Точка минимума $x^* = r - \frac{lc}{\|c\|}$.

Указание. Задача легко решается из геометрических соображений (при этом нужно проверить, что найденные точки действительно являются экстремальными) или с помощью правила множителей Лагранжа.

2.4.4. $x_i^* = \dfrac{-c_i\sqrt{l}}{\alpha_i^2\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2/\alpha_j^2}}$, если все числа α_i отличны от нуля.

2.4.5. Решение находится перебором угловых точек симплекса, т.е. точек вида $x^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $x^2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, x^n = (0, 0, \dots, 1)$. Решение достигается в той точке x_i, для которой выполняется условие $c_i = \min\limits_{j=1,2,\dots,n} c_j$

2.4.7. $x^* = A^{-1}(b - \delta c)$, $\delta = \sqrt{\dfrac{2r^2 + \langle A^{-1}b, b\rangle}{\langle A^{-1}c, c\rangle}}$.

2.4.9 –2.4.11. Указание. Задачи можно решить, воспользовавшись теоремой об экстремуме сепарабельной функции.

2.4.12. $p = r + l\dfrac{y - r}{\|y - r\|}$, если $y \notin X$.

2.4.14. $p = y - \dfrac{\langle b, y\rangle - \gamma}{\|c\|^2} \cdot c$.

2.4.15. Указание. Воспользоваться результатом упражнения 2.4.14.

2.4.16. $A'[A \cdot A']^{-1}(b - Ay)$.

Глава 3

3.1.1. Указание. Воспользоваться формулой конечных приращений.

3.1.2. Указание. Воспользоваться свойством производной выпуклой функции:

$$f'(a) \le f'(x) \le f'(b), \quad x \in [a, b].$$

3.1.4. Указание. Производные $g'(x)$ и $h'(x)$ неотрицательны и монотонно возрастают на отрезке $[a, b]$. Отсюда

$$g'(a) - h'(b) \le f'(x) \le g'(b) - h'(a), \quad x \in [a, b].$$

3.1.5. Указание. Доказательство см. в [11, с. 279].

3.1.6. Указание. Доказательство см. в [11, с. 280].

3.1.16. Если выполняются условия:

$$f_3 - f_2 \ge 0,\ f_1 - f_2 \ge 0,\ (f_3 - f_2) + (f_1 - f_2) > 0,$$

то

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \le \bar{x} \le \frac{1}{2}(x_2 + x_3).$$

3.1.17. а) две точки минимума: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$; б) $x^* = 1{,}61$; в) $x^* = 0{,}45$; г) $x^* = 4{,}9$; д) $x^* = 1{,}59$.

3.2.3. $x^* = (1, -5)$. При решении примеров а), б) первая итерация приводит в точку глобального минимума.

3.2.4. $x^* = (2, -3)$. При решении примера а) первая итерация приводит в точку глобального минимума.

3.2.5. $x^* = (10, 5)$.

3.2.6. Точек минимума нет.

3.2.7. $x^* = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}\right)$.

3.2.8. $x^* = (1, 2)$.

3.2.9. а) $\alpha_k = \dfrac{\|\nabla f(x^k)\|^2}{\langle A\nabla f(x^k), \nabla f(x^k)\rangle}$.

3.2.10. Указание. Выписать необходимое условие оптимальности функции $f_k(\alpha)$ в точке α_k.

3.2.13. а) $x^* = (1, 1)$; б) $x^* = (1, 1)$.

Решение. $\nabla f(x) = (2x_1 - 2, 4x_2 - 4)$.

Первая вспомогательная задача метода условного градиента имеет вид

$$-2x_1 - 4x_2 \to \min, \quad x \in X.$$

Данная задача является задачей линейного программирования. Ее решение — любая точка отрезка, соединяющего $(0, 4)$ и $(6{,}4; 0{,}8)$. Выбрав в качестве $\bar{x}^0 = (0, 4)$, получим $x^0(\alpha) = (0, 4\alpha)$, $f(x^0(\alpha)) = 32\alpha^2 - 16\alpha$. Решение второй вспомогательной задачи

$$32\alpha^2 - 16\alpha \to \min, \quad \alpha \in [0, 1]$$

дает $\alpha_0 = 1/4$, $x_1 = (0, 1)$, $\Theta_0 = \langle \nabla f(x^0), \bar{x}^0 - x^0\rangle = -16 < 0$. Следующая итерация приводит в точку глобального минимума.

в) $x^* = (4, -2)$.

3.2.14. Решение. Первая вспомогательная задача имеет вид

$$9x_1 + 7x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \ge 2,$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 \ge -1, \quad x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Решить данную задачу линейного программирования можно, перейдя к двойственной задаче, решение которой легко определяется графическим методом. Двойственная задача:

$$2y_1 - y_2 \to \max,$$

$$-y_1 + 3y_2 \le 9,\ y_1 + y_2 \le 7,$$

$$y_1 - y_2 \le 3,\ y \ge 0,\ y_2 \ge 0,$$

$$y^* = (5, 2).$$

Соответствующее решение исходной задачи можно вычислить, воспользовавшись условиями дополняющей нежесткости:

$$\bar{x}^0 = (0, 1/2, 3/2).$$

Уравнение отрезка, соединяющего точки x^0 и $\bar{x}^0$ имеет вид

$$x^0(\alpha) = (0;\ 1 - 0{,}5\alpha;\ 1 + 0{,}5\alpha),\ \alpha \in [0, 1].$$

Решение второй вспомогательной задачи

$$f(x^0(\alpha)) = \frac{3}{4}\alpha^2 - 2\alpha + 7 \to \min,\ \alpha \in [0, 1]$$

дает $\alpha_0 = 1$.

Следующее приближение: $x^1 = \bar{x}^0 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

3.2.15. б) Указание. Воспользоваться решением упражнения 2.4.5.

3.2.16. Указание. Применить критерий вогнутости дважды непрерывно дифференцируемой функции (см., например, [16, с. 124; 42, с. 89; 25]).

3.2.18. б) Результат первой итерации — точка $x^1 = (4; -0{,}6)$. Округленные координаты точки, полученной на второй итерации $x^2 = (2; -0{,}95)$.

3.2.20. Две точки минимумума: $x^1 = (3, 2)$ $x^2 = (3{,}58443; -1{,}84813)$.

3.2.21. $x^* = (-21{,}0226653; -36{,}7660090)$. Точка локального минимума: $\bar{x} = (0{,}285881; 0{,}27936)$, $f(\bar{x}) = 5{,}9225$.

3.2.22. Две точки минимума: $x^1 = (0, 1)$, $x^2 = (0, -1)$.

3.2.23. $x^* = (3, 1/2)$.

3.2.24. $x^0 = (-1{,}2; 2; 0)$, $x^* = (1; 1; 1)$.

3.2.25. $x^0 = (-1{,}2; 1)$, $x^*(1; 1)$ — функция Розенброка.

3.2.26. $x^0 = (-3, -1, 0, 1)$, $x^*(0, 0, 0, 0)$ — функция Пауэлла.

3.2.27. $x^0 = (-3, -1, -3, -1)$, $x^*(1, 1, 1, 1)$ — функция Вуда.

3.2.28. $x^0 = (-1{,}2; 1)$, $x^* = (1; 1)$.

3.2.29. $x^0 = (-1{,}2; 1)$, $x^* = (1; 1)$.

3.2.30. $x^0 = (100; 12{,}5; 3)$, $x^* = (50; 25; 1{,}5)$.

3.2.31. $x_i^0 = 9$, $i = 1, 2, \ldots, 10$, $x_i^* = 9{,}351$, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

3.3.1. $x^0 = (2, 2)$, $x^* = (0{,}823; 0{,}911)$.

3.3.2. $x^0 = (0, 0)$, $x^* = (1{,}75; 0{,}25)$.

3.3.3. $x^0 = (0, 0)$, $x^* = (2{,}79554; 1{,}08854)$.

3.3.4. $x^0 = (0, 0)$, $x^* = (5; 1{,}25)$.

3.3.5. $x^0 = (5, 4, 0, 0)$, $x^* = (-2, 0, 0, 12)$, вектор множителей Лагранжа $\lambda^* = (-0{,}5; 0)$.

3.3.6. $x^0 = (2, 2)$, $x^* = (1; 1)$.

3.3.7. $x^0 = (1, 1, 1, 0, 0)$, $x^* = (20, 11, 15, 0, 72)$, $\lambda^* = (0, -110)$.

3.3.8. $x^0 = (0{,}433; 0{,}25; 0{,}433; 0{,}75; -0{,}433; 0{,}75; -0{,}433; 0{,}25; 1; 0; \ldots; 0)$, $f(x^*) = 0$.

3.3.9. $x^0 = (2, 2, 2)$, $x^* = (3{,}512; 0{,}217; 3{,}552)$.

3.3.10. $x^0 = (90, 10)$, $x^* = (75, 65)$.

3.3.11. $x^* = (0{,}5; 2{,}5)$.

3.3.12. $x^* = (2, 0, 0)$.

Глава 4

4.1.2. Указание. Рассмотреть значения функционала на фунциях

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx,$$

где n — натуральные числа.

4.1.4. Указание. Вместе с допустимой экстремалью рассмотреть, например, функции $x = Kt(t - 5)$.

4.1.6. $x^*(t) = \pi \cdot t$.

4.1.7. $x^*(t) = t$.

4.1.8. $x^*(t) = t$.

4.1.9. $x^*(t) = \dfrac{\ln t}{\ln 2} + 1$.

4.1.10. Решение. Поскольку подынтегральная функция не зависит явно от t, можно воспользоваться формулой (4.1.9). Уравнение Эйлера превращается в тождество:

$$x\dot{x} - x\dot{x} = 0.$$

Вычислим целевой функционал интегрированием по частям, положив $u = x$, $dv = \dot{x}dt$:

$$J(x) = x^2\Big|_{t=a}^{b} - J(x).$$

Отсюда

$$J(x) = \frac{1}{2}\,[(x^1)^2 - (x^0)^2] = \text{const}.$$

Таким образом, целевой функционал постоянен для любых допустимых функций, и экстремальная задача теряет смысл. Формально, любая допустимая функция, удовлетворяющая краевым условиям, доставляет как минимум, так и максимум функционалу.

4.1.12. $x^*(t) = t^3 - t$.

4.1.13. $x^* = e^{2t}$.

Указание. Несмотря на специальный вид подынтегральной функции, в данной задаче удобно непосредственно применить уравнение Эйлера.

4.1.14. $x^*(t) = \sin t$; глобальный минимум.

4.1.15. Не существует допустимых экстремалей в классе непрерывно дифференцируемых (и даже непрерывных) функций.

4.1.16. $x^* = \frac{1}{2}t^3 + t + 2$.

4.1.17. Допустимых экстремалей нет.

4.1.18. $x^*(t) = c_2 \sin t - \cos t$, c_2 — произвольный параметр.

4.1.19. Допустимых экстремалей нет.

4.1.20. $x^*(t) = \cos t + \frac{1}{2}\,t\cdot\sin t + c\cdot\sin t$, где c — произвольное число.

4.1.21. Допустимых экстремалей нет.

4.1.22. $x^*(t) = \dfrac{e^{t+1}}{e^2 - 1} - \dfrac{e^{1-t}}{e^2 - 1} - t$.

4.1.23. $x^*(t) = \frac{1}{24}(t - t^4)$.

4.1.24. $x^*(t) = t^3 - t$.

4.1.25. $x^*(t) = \frac{\pi}{4}\sin t - \frac{t}{2}$.

4.1.26. $x^*(t) = \cos t + \sin 2t$.

4.1.28. $x^*(t) = \sqrt[3]{t/10}$, если $a = 1/\sqrt[3]{10}$. При остальных значениях параметра a нет допустимых экстремалей в классе непрерывно дифференцируемых функций.

4.1.34. Указание. При интегрировании уравнения Эйлера можно воспользоваться тригонометрической подстановкой $\dot{x} = \operatorname{tg}\varphi$ или $\dot{x} = \operatorname{ctg}\varphi$.

4.1.35. Указание. При интегрировании уравнения Эйлера можно воспользоваться подстановкой $\dot{x} = \operatorname{sh}\varphi$.

4.2.1. $x^*(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t$. Минимум в задаче не существует.

Указание. Показать, что в данном примере не существует функции, доставляющей глобальный минимум функционалу.

4.2.2. $x^*(t) = -\frac{1}{4}t^2 + t$.

4.2.6. Решение. Уравнение Эйлера:

$2\ddot{x} = -2x + 2\cos t$, т.е. $\ddot{x} + x = \cos t$.

Решение данного неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами ищем как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения рассматриваемого неоднородного уравнения:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + (t/2)\sin t.$$

Учитывая условие $x(\pi) = -1$, получим $c_1 = 1$. Вторую константу определяем из условия

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t=2\pi} = 2\dot{x}\Big|_{t=2\pi} = 0.$$

$c_2 = -\pi$, $x^*(t) = \cos t + \sin t(t/2 - \pi)$.

4.2.7. $x^*(t) = \frac{2}{3}\sin 2t$.

4.2.8. $x^*(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}$.

4.2.9. $x^*(t) = \sin t - \cos t$.

4.2.12. Указание. Можно воспользоваться результатом предыдущего упражнения.

4.3.1. $x_1^*(t) = x_2^*(t) = \cos t + c_4 \sin t$, c_4 — произвольный параметр.

4.3.2. $x_1^*(t) = e^t$, $x_2^* = e^{-t}$.

4.3.3. $x_1^*(t) = \sin t - 2\cos t$, $x_2^*(t) = \cos t$.

4.3.4. $x_1^*(t) = t$, $x_2^*(t) = 0$, $x_3^*(t) = -t$.

4.3.5. $x_1^*(t) = t^4 + t$, $x_2^*(t) = t^3 + t + 1$.

4.3.6. $x_1^*(t) = \sin t$, $x_2^*(t) = t$, $x_3^*(t) = -\sin t$.

4.3.9. $x^*(t) = \cos t$.

4.3.10. $x^*(t) = \frac{(t - 2\sin t)}{\pi}$.

4.3.11. Две допустимых экстремали:

$\bar{x}(t) = -\sin t + t$, $\bar{\bar{x}}(t) = \sin t + t$.

Глава 5

5.1.1. У к а з а н и е. Ввести новую компоненту вектор-функции состояния:

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} F_0(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau.$$

5.1.2. У к а з а н и е. Воспользоваться формулой

$$\varphi_0(x(t_1), t_1) = \varphi_0(x(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\varphi(x(t), t)}{dt}\, dt.$$

5.1.4. Р е ш е н и е. По аналогии с примером 5.1.1 введем вектор функцию состояния процесса $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, где $x_1(t)$ — координата (высота) ракеты в момент t; $x_2(t)$ — скорость ракеты; $x_3(t)$ — масса ракеты. Тогда дифференциальные уравнения связи между вектор-функцией процесса и скалярной функцией-управлением имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = \frac{1}{x_3}(\beta u(t) - qx_2^2) - g, \ \dot{x}_3 = -u(t).$$

Начальные условия:

$$x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 0, \ x_3(0) = m_0.$$

Ограничения

$$0 \le u(t) \le u_{\max}, \quad t \in [0, t_1], \ x_3(t_1) \ge m_1.$$

Последнее ограничение может быть записано в интегральном виде:

$$\int_{t_0}^{t_1} u(t)\, dt \le m_0 - m_1.$$

Цель задачи определяется одним из следующих функционалов:

а) $x_1(t_1) = \int_0^{t_1} x_2(t)\, dt \to \max$, момент t_1 задан;

б) $x_1(t_1) \to \max$ при условии $x_2(t_1) = 0$, момент t_1 не фиксирован.

5.1.5. $u^*(t) \equiv 1$, $t \in [t_0, t_1]$. У к а з а н и е. Воспользоваться известным из теории обыкновенных дифференциальных уравнений результатом, позволяющим выразить в квадратурах решение задачи Коши для неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка (см., например, [26, с. 19, 20]).

5.1.7. а) $u^*(t) \equiv -1$, если $\alpha \le 1$;

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in (1, \alpha], \text{ если } \alpha > 1; \end{cases}$$

б) $u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1), \\ 0, & t \in [1, 3), \\ 1, & t \in [3, 4]; \end{cases}$

в) $u^*(t) \equiv 0$;

г) $u^*(t) \equiv \pi$;

д) $u^*(t) \equiv 2$;

5.2.3. Указание. Для двух произвольных точек t, $t + \Delta t$, принадлежащих полуинтервалу $[t_0, t_1)$, можно воспользоваться неравенствами:

$$H(t) = H(\psi(t), x(t), u(t), t) \ge H(\psi(t), x(t), u(t + \Delta t), t),$$

$$H(t + \Delta t) = H(\psi(t + \Delta t), x(t + \Delta t), u(t + \Delta t), t + \Delta t) \ge$$
$$\ge H(\psi(t + \Delta t), x(t + \Delta t), u(t), t + \Delta t),$$

а затем оценить сверху и снизу разность $H(t + \Delta t) - H(t)$ и перейти к пределу при $\Delta t \to 0$, учитывая, что $x = x(t)$ и $\psi = \psi(t)$ — непрерывные функции.

5.2.4. Указание. Достаточно рассмотреть удовлетворяющую условиям теоремы 5.2.3 задачу, в которой заведомо неоптимальное управление удовлетворяет линеаризованному принципу максимума, но не удовлетворяет принципу максимума. Проанализировать, например, управление $u(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$ в задаче:

$$\dot{x} = u(t), \quad x(t_0) = x^0,$$

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} u^3(t)\, dt \to \min.$$

5.2.8. а) не является оптимальным; б) не является оптимальным; в) доставляет глобальный минимум функционалу.

5.2.12. Не является оптимальным.

5.2.13. а) не является оптимальным; б) подозрительно на оптимальность.

5.2.22. $u^*(t) \equiv -3$; задача линейно-выпуклая.

5.2.23. $u^*(t) = \begin{cases} (t-3)/2, & t \in [0, 1], \\ -1, & t \in (1, 2]; \end{cases}$ задача линейно-выпуклая.

5.2.27. $u^*(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t \le \pi/3, \\ -1, & \pi/3 < t \le \pi. \end{cases}$

5.2.33. Указание. Можно воспользоваться тем, что $|\psi(t)| < 1$ в некоторой окрестности точки $t = 1$.

5.2.35. Указание. В данной задаче гамильтониан линеен по u. Из вида исходной и сопряженной систем следует, что производная по независимому аргументу t от коэффициента при управлении в гамильтониане отрицательна. Следовательно, оптимальное управление может иметь лишь следующую структуру:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < t_*, \\ 0, & t_* \le t \le t_1. \end{cases}$$

Выразить значение целевого функционала как функцию аргумента t_* и найти t_* из условия минимума этой функции.

5.3.2. $u^1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 5/4, \\ 1, & 5/4 \le t \le 3. \end{cases}$

5.3.3. $u^1(t) = 0,\ t \in T.$

5.3.4. $u^1(t) = -1,\ t \in T.$

5.3.5. $u^1(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 32/15, \\ -2, & 32/15 \le t \le 4. \end{cases}$

5.3.6. $u^1(t) = 2,\ t \in T.$

5.3.7. $u^1(t) = -1,\ t \in T.$

5.4.1. $v(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2, \\ -1, & 2 \le t \le 3. \end{cases}$

5.4.2. $v(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 2, \\ -1/2, & 2 \le t \le 4. \end{cases}$

5.4.3. $v(t) = \begin{cases} 1/4, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$

5.4.4. $v(t) = \begin{cases} 2/3, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t \le 3. \end{cases}$

5.4.5. $v(t) = -3,\ t \in T.$

5.4.6. $v(t) = \begin{cases} -2, & 0 \le t < 1, \\ 3, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$

5.4.7. $v^1(t) = 1,\ v^2(t) = -1,\ v^3(t) = 1/2,\ t \in T.$

5.4.11. $v(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$

5.4.12. $v(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$

5.4.13. $v(t) = \begin{cases} -5, & 0 \le t < 3, \\ 5, & 3 \le t \le 4. \end{cases}$

5.4.14. $v(t) = -3,\ t \in T.$

5.4.15. $v(t) = -2,\ t \in T.$

5.4.16. $v^1(t) = 1,\ v^2(t) = -1,\ t \in T,$

$$v^3(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t \le 3, \end{cases} \quad v^4(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2, \\ 0, & 1 \le t \le 3. \end{cases}$$

5.5.1. $u^1(t) = 3/8.$

5.5.2. $u^1(t) = 2,\ t \in T.$

5.5.3. $u^1(t) = 0,\ t \in T.$

5.5.4. $u^1(t) = 1/2,\ t \in T.$

5.5.5. $u^1(t) = -1,\ t \in T.$

5.5.6. $u^1(t) = 1,\ t \in T.$

5.5.7. $u^1(t) = 1/2,\ t \in T.$

5.5.11. $u^1(t) = 1,\ t \in T.$

5.5.12. $u^1(t) = 1,\ t \in T.$

5.5.13. $u^1(t) = 2,\ t \in T.$

5.5.14. $u^1(t) = 1/4,\ t \in T.$

5.5.15. $u^1(t) = \begin{cases} \dfrac{11}{27}t - 1, & 0 \le t < 1, \\ -\dfrac{16}{27}, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$

5.6.6. в) Указание. Обозначить

$$x_1 = x,\ \dot{x}_1 = x_2,\ \ldots,\ \dot{x}_n = u.$$

Необходимое условие оптимальности носит название уравнения Эйлера–Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}\right) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах.—М.: Высш. школа, 1986.—319 с.

2. *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации.—М.: Наука, 1984.—288 с.

3. *Алексеев В.М., Тихомиров В.*М., *Фомин С.В.*Оптимальное управление.—М.: Наука, 1979.—432 с.

4. *Антоник В.Г.* Вычислительные методы оптимального управления.—Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1995.—69 с.

5. *Аргучинцев А.В.* Методы оптимизации. Ч. 1. Математическое программирование.—Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1993.—48 с.

6. *Аргучинцев А.В.* Методы оптимизации. Ч. 2. Вариационное исчисление и оптимальное управление.—Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1993.—83 с.

7. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления.—М.: Высш. школа, 1989.—447 с.

8. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях.—М.: Наука, 1991.—448 с.

9. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление линейными системами.—Иркутск: Изд- во Иркут. ун-та, 1982.—116 с.

10. *Васильев В.В.* Тринадцать лекций по основам вариационного исчисления.—Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1989.—104 с.

11. *Васильев О.В.* Лекции по методам оптимизации.—Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994.—344 с.

12. *Васильев О.В.* Методы оптимизации в конечномерных пространствах.—Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1979.—90 с.

13. *Васильев О.В.* Методы оптимизации в функциональных пространствах.—Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1979.—117 с.

14. *Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А.* Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление.—Новосибирск: Наука, 1990.—151 с.

15. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач.—М.: Наука, 1981.—400 с.

16. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач.—М.: Наука, 1988.—552 с.

17. *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.—416 с.

18. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Методы оптимизации.—Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1981.—350 с.

19. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления.—М.: Наука, 1973.—256 с.

20. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления.—Минск: Наука и техника, 1974.—272 с.

21. *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Краткий курс теории экстремальных задач.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.—204 с.

22. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление.—М.: Физматгиз, 1961.—228 с.

23. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу.—М.: Наука, 1977.—528 с.

24. *Захарченко В.С., Срочко В.А.* Метод приращений для решения квадратичных задач оптимального управления //Изв. РАН. Теория и системы управления.—1995.—№ 6.—С. 145–154.

25. *Карманов Б.Г.* Математическое программирование.—М.: Наука, 1986.—288 с.

26. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.—М.: Наука, 1986.—272 с.

27. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И.* Вариационное исчисление.—М.: Наука, 1973.—192 с.

28. *Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И.* Высшая математика. Математическое программирование.—Минск: Выш. школа, 1994.—286 с.

29. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—408 с.

30. *Летов А.М.* Математическая теория процессов управления.—М.: Наука, 1981.—256 с.

31. Методы оптимизации: Сборник задач /Под ред. Э.Г. Альбрехта.—Свердловск: Изд-во Уральск. ун-та, 1988.—96 с.

32. Модели управления природными ресурсами /Под ред. В.И. Гурмана.—М.: Наука, 1981.—264 с.

33. *Моисеев Н.Н.*, *Иванилов Ю.П.*, *Столярова Е.М.* Методы оптимизации.—М.: Наука, 1978.—352 с.

34. Основы теории оптимального управления /Под ред. В.Ф. Кротова.—М.: Высш. школа, 1990.—430 с.

35. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию.—М.: Наука, 1983.—384 с.

36. *Понтрягин Л.С.*, *Болтянский В.Г.*, *Гамкрелидзе Р.В.*, *Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов.—М.: Наука, 1983.—392 с.

37. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление.—М.: Наука, 1992.—576 с.

38. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование /А.В.Кузнецов, В.А.Сакович, Н.И.Холод и др.—Минск: Выш. школа, 1995.—382 с.

39. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения /Под ред. А.В.Ефимова.—М.: Наука, 1990.—304 с.

40. *Срочко В.А.* Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления.—Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1989.—160 с.

41. *Срочко В.А.* Вычислительные методы оптимального управления.—Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1982.—110 с.

42. *Сухарев А.Г.*, *Тимохов А.В.*, *Федоров В.В.* Курс методов оптимизации.—М.: Наука, 1986.—328 с.

43. Теория оптимальных аэродинамических форм /Под ред. А.Миеле.-М.: Мир, 1969.—508 с.

44. *Тятюшкин А.И.* Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем.—Новосибирск: Наука, 1992.—193 с.

45. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.—М.: Наука, 1965.—424 с.

46. Vasiliev O.V. Optimization methods.—Atlanta: World Federation Publishers Company INC, 1996.—276 p.

Учебное пособие

ВАСИЛЬЕВ Олег Владимирович
АРГУЧИНЦЕВ Александр Валерьевич

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Редактор *Д. А. Миртова*
Компьютерная верстка *Л. Т. Варьяш*

ЛР № 071930 от 06.07.99.
Подписано в печать 18.11.99. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13. Уч.-изд. л. 13.
Тираж 1000 экз. Заказ № 1889.

Издательская фирма "Физико-математическая литература".
117864, г. Москва, ул. Профсоюзная, 90.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в Чебоксарской типографии № 1.
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15.

ISBN 5-9221-0006-8

9785922100069