А.В. АРГУЧИНЦЕВ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

А.В. АРГУЧИНЦЕВ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 517.977
ББК 22.193

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 06-01-14013д

Аргучинцев А. В. **Оптимальное управление гиперболическими системами.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 168 с. — ISBN 978-5-9221-0765-8.

В книге рассматриваются задачи оптимизации систем полулинейных гиперболических уравнений при различных формах управляемых начально-краевых условий. Доказаны неклассические условия оптимальности граничных и стартовых управляющих воздействий, принадлежащих разным функциональным классам. Предложен новый подход к исследованию задач в нетрадиционном классе гладких допустимых управлений. Построены и обоснованы эффективные методы решения задач. Приведены результаты численных расчетов.

Для специалистов в области системного анализа, теории и методов оптимального управления дифференциальными уравнениями с частными производными, обратных задач математической физики, прикладных оптимизационных задач экологии, экономики и техники, а также для аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-9221-0765-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие системного анализа прикладных объектов приводит к необходимости изучения задач управления и оптимизации в системах сложной структуры, к которым, в частности, относятся дифференциальные уравнения с частными производными.

Общепризнанно, что проблема получения условий оптимальности и построения эффективных методов оптимизации в системах с распределенными параметрами является значительно более сложной по сравнению с аналогичной проблемой в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Причины этого заключаются, в частности, в разнообразии классов уравнений и систем с частными производными, типов начально-краевых условий, в необходимости перехода к обобщенным решениям уравнений и систем в условиях разрывности управляющих воздействий и т.д. В силу этого наибольшее число работ по исследованию моделей управления распределенными системами направлено на изучение конкретных классов задач оптимального управления и на поиск общих приемов и методов анализа таких задач (см. монографии и обзоры А.Г.Бутковского, О.В.Васильева, Ф.П.Васильева, В.А.Дыхты, А.И.Егорова, К.А.Лурье, А.И.Москаленко, М.М.Новоженова, Д.А.Овсянникова, Т.К.Сиразетдинова, В.А.Срочко, В.И.Сумина, М.И.Сумина, А.В.Фурсикова, N.U.Ahmed, H.O.Fattorini, J.-L.Lions, X.Li, K.L.Teo, S.Tzafestas, J.Yong и др. [24, 25, 32, 36, 37, 38, 65, 68, 69, 88, 99, 100, 101, 103, 121, 122, 126, 128, 129, 130, 148, 168, 173, 190, 192, 222, 234, 249, 251]).

Кратко охарактеризуем наиболее важные направления исследований в области оптимального управления системами дифференциальных уравнений с частными производными.

Одним из основных направлений остается *получение необходимых* и, если возможно, *достаточных условий оптимальности*. Разнообразие классов задач оптимального управления распределенными системами стимулировало выделение некоторых общих моделей оптимизации, охватывающих достаточно широкие классы задач оптимального управления и допускающих применение универсальных (абстрактных) методов и схем. В этом направлении наиболее плодотворными оказались:

• *выпуклые модели оптимизации* и, соответственно, аппарат выпуклого анализа (монографии И.Экланда, Р.Темам, П.П.Мосолова, В.П.Мясникова [124, 194]);

• *общий принцип Лагранжа* для локально выпуклых и аппроксимативно выпуклых задач, основу которого заложили работы А.Я.Дубовицкого, А.А.Милютина [53, 55], А.Д.Иоффе, В.М.Тихомирова [82] и их последователей. В качестве примеров реализации этого принципа отметим монографии [99, 101, 114, 192]. Примечательно, что если обычно расшифровка принципа Лагранжа приводит к получению принципа максимума, то в [114, 190] комбинация абстрактного метода с модифицированным методом v–вариаций позволила получить существенно более сильные условия оптимальности вида вариационного принципа максимума;

• *функционально-операторные модели* оптимизации в функциональных пространствах [27, 63, 111, 139, 159, 167, 168, 184, 195, 196, 198, 207, 209]. Отметим, в частности, развиваемые нижегородской школой модели управления вольтерровыми операторными уравнениями [139, 167, 168]. Эти подходы охватывают довольно широкий класс управляемых начально-краевых задач (обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с запаздыванием, гиперболические уравнения первого и второго порядка, интегро-дифференциальные уравнения переноса);

• *модели управления функционально-интегральными уравнениями* в пространствах C и L_p, как в монографии Дж. Варги [26] или исследованиях С.А.Чуканова, представленных в главе 6 книги [14] (в этих исследованиях, кстати, развита схема получения принципа максимума, основанная на методе вариаций скольжения, тесно связанных с расширением задач оптимального управления [81]).

Охарактеризуем теперь подходы к *достаточным условиям оптимальности* распределенных систем, не касаясь классов линейно-выпуклых и выпуклых задач, в которых принцип максимума и методы двойственности естественным образом приводят к необходимым и достаточным условиям оптимальности.

Во-первых, отметим работы по обращению принципа максимума в достаточное условие оптимальности путем некоторого его усиления. В подавляющем большинстве они базируются на простом общем факте: если в задаче с ограничениями допустимый процесс удовлетворяет принципу Лагранжа в нормальной форме и, кроме того, при некотором наборе множителей лагранжиан задачи имеет минимум на данном процессе, то этот процесс оптимален. К этому направлению относятся, например, достаточные условия, которые предложены в работах В.И.Плотникова и его учеников [126, 138], в основном, для параболических управляемых систем; условия [219, 242] для некоторой "канонической" модели оптимального управления системой первого порядка. Результаты этого типа относятся к случаю нормальной экстремали и требуют условия вогнутости функции Понтрягина по паре "состояние – управление" или вогнутости функции Гамильтона по состоянию, а также некоторых усиленных условий трансверсальности. В указанных допущениях характеризуемые результаты можно довольно просто получить, отправляясь и от достаточных условий оптимальности В.Ф.Кротова [48, 49, 132] с использованием линейной вспомогательной функции, порожденной решением сопряженной задачи.

В ряде приложений, особенно при исследовании эколого-экономических и социальных систем [242], характеризуемые достаточные условия оказались полезными. В целом же, они, конечно, ограничены по сфере применимости и не случайно в последнее время подверглись существенной модификации даже на уровне задач оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями [57, 58]. Наиболее существенный момент этой модификации можно интерпретировать как использование произвольного семейства линейных (по состоянию) функций типа Кротова и, как следствие, отказ от условий вогнутости функций Понтрягина и Гамильтона.

Далее необходимо отметить метод динамического программирования Р.Беллмана [67, 99, 148] и уже упоминавшиеся условия В.Ф.Кротова. Хотя применение этих подходов в полной общности сталкивается с серьезными трудностями – необходимостью решения дифференциальных уравнений в частных функциональных производных (в методе Беллмана) или соответствующего дифференциального неравенства (в методе Кротова), – тем не менее в ряде прикладных моделей они оказались эффективными.

Наконец, выделим еще одно направление – достаточные условия совместной оптимальности (метод нелинейных отображений). Этот подход использует идеологию общего метода сравнения в динамике систем [112] и, применительно к распределенным системам, развивался в работах А.И.Москаленко [121, 122]. Данным методом удалось исследовать большое число прикладных моделей системного анализа. В подавляющем большинстве эти модели оказались вырожденными задачами оптимального управления (по терминологии В.И.Гурмана [48]), в которых решение реализуется на минимизирующих последовательностях, что связано с отсутствием минимали в стандартных классах управления.

Отметим, что какие-либо конкретные реализации всех упомянутых достаточных условий оптимальности применительно к классам задач, рассматриваемым в данной работе, автору неизвестны. Подход к получению достаточного условия оптимальности на основе анализа функционала Лагранжа реализован в первой главе этой книги.

Подавляющим большинством исследователей задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами изучаются в предположении, что для каждого допустимого управляющего воздействия существует единственное соответствующее ему состояние процесса, являющееся решением (понимаемом в том или ином смысле) дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений. Лишь весьма ограниченное число работ посвящено исследованию задач управления, в которых нарушено указанное предположение корректности (монографии Ж.-Л.Лионса [101], А.И.Москаленко [121], А.В.Фурсикова [192]).

Проблема существования оптимального управления продолжает занимать одно из центральных мест в теории оптимального управления процессами с распределенными параметрами. Большинство авторов исследуют её в предположении выпуклости множества допустимых управлений и выпуклости по управлению функций в целевом функционале

[99, 192, 198]. Теоремы существования для эволюционного уравнения первого порядка и отдельных типов гиперболических уравнений без общепринятых предположений выпуклости доказаны в [185, 186, 223, 247].

В то же время, в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами отсутствие оптимального управления не является редким событием [26, 173, 197]. Направление, связанное с разработкой *методов субоптимального управления*, активно развивается, в частности, в связи с конструктивным использованием вариационного принципа Экланда [194, 221]. Среди работ в этом направлении укажем [171, 172, 173, 174, 238].

Весьма небольшое число работ посвящено вопросам *многокритериальной оптимизации* в задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами (см., например, [160, 161]).

Одним из важнейших направлений исследования задач оптимального управления является построение *численных методов* решения задач оптимального управления.

В первую очередь, выделим методы, основанные на принципе максимума Понтрягина. Первоисточником соответствующего класса методов в задачах оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений является метод последовательных приближений И.А.Крылова, Ф.Л.Черноусько [90, 91], который заложил основу для процедур игольчатого варьирования. Дальнейшие исследования в этом направлении привели к эффективным процедурам варьирования управления, которые позволили обеспечить свойство монотонности метода по функционалу и обосновать сходимость последовательных приближений по невязке принципа максимума (работы Р.Габасова, Ф.М.Кирилловой [43], Н.Е.Кирина [87], А.А.Любушина, Ф.Л.Черноусько [104, 105, 106], О.В.Васильева, В.А.Срочко, В.А.Терлецкого, А.И.Тятюшкина [28, 32, 34, 187], D.Mayne, E.Polak [237], K.Teo, L.Yeo [248]).

В результате сложился комплекс алгоритмов игольчатого варьирования с единой операцией поиска вспомогательного управления (направление спуска) из условия максимума функции Понтрягина. Определенный итог этому направлению исследований подведен в работах В.А.Срочко [153, 155], где обоснован оптимальный (в смысле наискорейшего спуска) способ варьирования управлений в методах, основанных на принципе максимума.

В работах [11, 32] предложен общий подход к построению методов игольчатого варьирования. Структура итерационных процессов практически не зависит от типа управляемых систем. Допустимость применения определяется возможностью получения необходимых условий оптимальности вида принципа максимума Понтрягина и обеспечивающих сходимость оценок остаточных членов в формулах приращения целевых функционалов.

В последние годы В.А.Срочко и его учениками [2, 3, 73, 156, 157, 158] предложен новый подход к построению методов улучшения, основанный на нестандартных аппроксимациях целевого функционала и конструктивных процедурах варьирования управлений. Поскольку реализация методов существенным образом связана с интегрированием разрывных по состоянию систем дифференциальных уравнений, их распространение на задачи оптимизации системами с распределенными параметрами представляет сложную проблему. Один из возможных подходов предложен в главе 1 настоящей работы.

Следующую группу методов составляют градиентные процедуры оптимального управления, использующие классический способ слабого варьирования управлений. В задачах оптимального управления уравнениями с частными производными эти методы развивались, например в

[198, 218]. На наш взгляд, методы игольчатого варьирования имеют следующие преимущества:

– необязательность предположения о дифференцируемости параметров задачи по управлению (в отличие от градиентных процедур);

– допустимость достаточно общих (например, невыпуклых) ограничений на управляющие воздействия;

– отсутствие краевой задачи принципа максимума;

– возможность комбинации с градиентными методами.

К недостаткам методов игольчатого варьирования следует отнести скачкообразный характер варьирования, что в процессе итераций может привести к неограниченному накоплению точек (поверхностей) разрыва управления.

В работах [188, 189] предложена мультиметодная технология решения задач оптимального управления. Современные операционные системы позволяют обеспечить решение задачи путем организации параллельных вычислительных потоков для одновременного проведения расчетов несколькими итерационными методами. После нахождения очередного приближения каждый из методов оценивается, например, по полученному приращению функционала и выбирается наиболее эффективный метод для продолжения оптимизации. Полученное этим методом приближение передается остальным методам в качестве начального для выполнения следующей итерации. На наш взгляд, применение данного подхода к задачам оптимизации систем с распределенными параметрами пока что требует серьезных затрат вычислительных ресурсов.

Отметим также общие методы спуска в абстрактных задачах, имеющих в качестве аналогов соответствующие методы математического программирования (см., например, [37, 227]).

Конечно-разностный подход в задачах оптимального управления [60] в настоящее время находит весьма ограниченное применение в уравнениях с частными производными (см., например, [61]). Недостатком подхода является то, что, по-существу, вся теория оптимального управления, связанная с непрерывными моделями, остается в стороне.

Среди "прямых" методов в задачах оптимального управления дифференциальными уравнениями с частными производными, не использующих условия оптимальности, можно выделить также применение аппарата асимптотического анализа [85, 86].

В целом, справедлив вывод о недостаточной развитости эффективных методов решения задач оптимального управления в системах с распределенными параметрами.

Анализ современного состояния теории и методов оптимального управления в уравнениях с частными производными позволяет выделить следующие характерные черты.

Во-первых, теория оптимального управления в системах с распределенными параметрами развивалась как обобщение теории оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Отсюда, в частности, возникает традиционное распределенное управление, входящее в правые части систем; отсюда же вытекают и попытки прямого распространения на задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами традиционных методов исследования. Не отрицая практическую важность и значимость анализа подобных задач, отметим вместе с тем техническую сложность реализации распределенных управлений (в каждой точке пространства и в каждый момент времени) и актуальность исследования другого типа задач – при сосредоточенном управлении, входящем в начально-краевые условия дифференциальных уравнений. Меньшее число независимых переменных у управляющих функций по сравнению с функциями состояния технически упрощает реализацию управлений, но, с другой стороны, часто требует применения новых подходов, отличных от обобщений результатов, получаемых в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. В обыкновенных дифференциальных уравнениях отсутствует аналог отмеченного выше уменьшения числа независимых переменных у функций управления, так как уменьшение размерности сводит задачу к конечномерной. Последнее время значительно повысился интерес к изучению составных задач управления, в которых технологический, природный или экономический процесс описывается дифференциальными уравнениями разного типа в разных областях изменения независимых переменных, либо начально-краевые условия определяются из управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений на границе области [45, 66, 230] .

Во-вторых, в системах обыкновенных дифференциальных уравнений для учета поточечных (амплитудных) ограничений на управления совершенно естественно расширять класс допустимых управляющих функций до измеримых и ограниченных по единственной независимой переменной. Действительно, кусочно-непрерывные управления как функции одной переменной, технически реализуются также легко, как и непрерывные функции. Кроме того, существуют хорошо известные обобщения классических теорем существования и единственности решения задач Коши на класс измеримых правых частей систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В уравнениях с частными производными такое расширение класса допустимых управлений вызывает дополнительные трудности, связанные с технической сложностью реализации измеримых управляющих функций многих переменных и необходимостью перехода к обобщенным решениям дифференциальных уравнений. К тому же, во многих случаях управления по смыслу являются функциями той или иной степени гладкости.

В частности, одним из достаточно распространенных приемов решения обратных задач математической физики является сведение этих задач к задачам оптимального управления. Управляющими воздействиями можно считать определяемые коэффициенты, элементы правых частей или начально-краевых условий уравнений с частными производными. Однако в ряде реальных проблем неизвестные параметры являются гладкими функциями. Это требование вытекает из физической сути исследуемых задач. Вместе с тем, достаточно мощные методы оптимального управления, основанные на использовании принципа максимума Л.С.Понтрягина, его следствий и модификаций, ориентированы на классы разрывных управлений.

Другим интересным типом задач, для которого характерно требование гладкости управлений, являются обратные задачи оптимального управления. В настоящее время наряду с обратными задачами восстановления допустимого управления по известной (полученной в результате наблюдений) траектории [131], активно исследуются проблемы восстановления параметров управляемых систем, для которых заранее заданный процесс является оптимальным [11, 31, 251]. При этом в целом ряде случаев определяемые параметры (элементы матриц коэффициентов, правых частей и т.п.) являются гладкими функциями.

Таким образом, актуальной является проблема разработки методов решения задач оптимального управления в классе гладких управляющих воздействий, с учетом таких ограничений на управления, которые характерны для обратных задач математической физики.

Наконец, в качестве третьей характерной особенности отметим чисто теоретическую направленность многих работ в области оптимального управления дифференциальными уравнениями с частными производными. Многие авторы ограничиваются получением условий оптимальности того или иного вида и, в лучшем случае, теоретическими схемами методов.

Объектом исследования в данной книге являются задачи оптимального управления системами полулинейных гиперболических уравнений первого порядка. Этот выбор вызван, с одной стороны, многочисленными приложениями подобных задач, а с другой стороны, наличием удобного математического аппарата (характеристики, интегральные представления решений и т.п.) для этого класса уравнений. К рассматриваемым системам сводятся классическое гиперболическое уравнение второго порядка, а также системы Гурса-Дарбу и канонические системы первого порядка с двумя ортогональными семействами характеристик [32, 95]. В рамках данных систем описываются явления возбуждения и распространения волн, кристаллооптика и электромагнитные колебания [42, 95, 145, 183, 211, 240, 243], динамика популяций, распространение эпидемий и наркотиков [199, 200, 208, 213, 215, 216, 224, 225, 235, 236], ряд химико-технологических процессов [133, 134, 252].

Довольно большим числом авторов исследовались задачи в указанном классе систем для случая распределенных управлений, входящих в правые части систем.

Задача оптимального управления гиперболической системой типа Гурса-Дарбу была исследована с точки зрения получения условия оптимальности типа принципа максимума А.И.Егоровым в [62], который позже [64] обобщил результаты на системы более общего вида и применил их к решению некоторых задач теории инвариантности. По-видимому, впервые задачи оптимального управления для полулинейных и квазилинейных одномерных гиперболических систем, а также для многомерных линейных систем и одного многомерного квазилинейного уравнения были подробно исследованы Т.К. Сиразетдиновым в монографии [148]. Необходимое условие оптимальности типа принципа максимума получено в этой работе при условии существования и единственности непрерывного решения систем для любого допустимого управляющего воздействия. Однако для этого даже в одномерном линейном случае приходится предполагать, что управление не терпит разрывов вдоль характеристик системы. Достаточно жестким, на наш взгляд, является также предположение о существовании почти всюду классических производных вектора состояния по независимым аргументам в условиях разрывности управлений.

В [32, 33, 176] получены необходимые условия оптимальности первого порядка типа поточечного принципа максимума Л.С. Понтрягина для распределенных управлений, построен метод поиска управлений, удовлетворяющих необходимому условию оптимальности. Срочко В.А. [32, 151, 152, 153] получено неклассическое условие оптимальности для задач в специальных классах гиперболических уравнений (каноническая система первого порядка и система Гурса-Дарбу) с двумя семействами ортогональных характеристик и распределенными управлениями. На основе вариаций управления, отличных от нуля в окрестностях характеристик системы, в данных работах было доказано, что оптимальное для исходной задачи распределенное управление доставляет максимум функционалам в двух задачах оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений, определенных на характеристиках того или иного семейства. Полученное необходимое условие оптимальности, названное *вариационным принципом максимума*, оказалось более сильным, чем классический принцип максимума. Заметим, что по-видимому, впервые для той же задачи, что и в [151], аналогичный результат был получен в [133] путем расшифровки условия оптимальности для модели оптимального управления дифференциальной системой в банаховом пространстве. Однако авторы этой работы не придали полученному условию оптимальности самостоятельного значения, а использовали его как вспомогательное на пути к доказательству классического принципа максимума. Отметим также, что на зависимость необходимых условий оптимальности в гиперболических системах от вида вариации управления указывается в [103]. В [32] доказан вариационный принцип максимума в полулинейных гиперболических системах с распределенными управлениями. В [178] этот же результат получен с помощью более общей техники, применимой и для многомерных гиперболических систем. Авторы [20, 21, 190] на основе модификации метода [55] установили справедливость вариационного принципа максимума для задач управления гиперболическими системами с дополнительными функциональными ограничениями, а также нефиксированной границей рассматриваемой области.

Не очень большое число исследователей занимались проблемами граничных управлений в рассматриваемых системах. Прежде всего, отметим, что для задач с управляемыми начально-краевыми условиями, заданными в виде конечномерных связей, несправедлив аналог классического принципа максимума Л.С.Понтрягина [253]. В [214, 218] установлена справедливость дифференциального линеаризованного принципа максимума как необходимого условия оптимальности граничных управлений в гиперболических системах первого порядка. Ряд работ посвящен исследованию задач управления граничными условиями в классических гиперболических уравнениях второго порядка, описывающих колебательные процессы. В [74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 143, 144] получены аналитические представления для граничных управлений, обеспечивающих перевод системы, описываемой простейшим волновым уравнением, в заданное состояние. В статьях [39, 142, 212] предложен метод решения задач управляемости для гиперболических уравнений второго порядка с управляемыми краевыми условиями первого, второго и третьего рода и общих гиперболических уравнениях законов сохранения.

Целью настоящей работы является развитие теории и методов системного анализа и оптимального управления объектами, описываемыми системами полулинейных гиперболических уравнений первого порядка; получение неклассических условий оптимальности граничных и стартовых управлений в этих системах; исследование задач оптимизации в сложных системах, когда начально-краевые условия гиперболических систем определяются из управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений; построение новых итерационных методов улучшения допустимых управлений; оценка эффективности методов путем проведения численных экспериментов для прикладных экологических задач.

Методы исследования основаны на использовании неклассических формул приращения целевых функционалов; нестандартных вариаций, обеспечивающих гладкость допустимых управлений. В работе использован аппарат современного математического анализа и численных методов.

Укажем существенные отличия предлагаемой монографии.

1) С единых позиций проведено исследование нескольких типов допустимых вариаций управления, приводящих к различным необходимым условиям оптимальности и итерационным методам решения задачи оптимального управления в классах ограниченных и измеримых, а также гладких управлений. Предлагаемые подходы носят конструктивный характер: получение условий оптимальности является не самоцелью, а этапом на пути построения эффективных вычислительных алгоритмов.

2) По-видимому, впервые доказано, что в задаче с граничным управлением (глава 2) возможно сильное (игольчатое) варьирование, а не только

слабое, что считалось с тех пор, как была установлена невозможность перенесения на данную задачу классического принципа максимума.

3) Предложен новый подход к исследованию задач в нетрадиционном классе гладких допустимых управлений. Основные преимущества подхода: достаточно общий вид вариации, сохранение гладкости, автоматическое выполнение ограничений, конструктивность в смысле построения численных методов.

4) Результаты исследований проиллюстрированы на примере ряда прикладных задач: обратные задачи возбуждения гравитационных волн (цунами), динамика популяций. Численные эксперименты привели к выводам, которые трудно или невозможно было предугадать путем чисто теоретических рассуждений (вид начального приближения, необходимость применения сильно осциллирующих начальных приближений в задаче с поточечными ограничениями на управляющие воздействия и т.п.).

Монография состоит из введения, пяти глав и заключения.

В первой главе рассмотрена задача оптимального управления гиперболической системой, в которой начально-краевые условия определяются из управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Допустимые управления выбираются из класса ограниченных и измеримых функций. Основная цель этой главы – применение идей неклассических точных (без остаточного члена) формул приращения, разработанных в [2, 156, 157] для задач оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

В начале главы для исследуемого класса задач показана справедливость поточечного принципа максимума. Полученный результат является достаточно прогнозируемым, поскольку в силу дифференциальной связи на границе приращение состояния, вызванное игольчатой вариацией управления, мало в норме пространства непрерывных функций. Доказательство проводится методом, основанным на анализе формулы приращения целевого функционала. Данный метод носит конструктивный характер, так как позволяет не только получить необходимое условие оптимальности, но и обосновать возможность применения эффективных процедур последовательных приближений, разработанных в Иркутском университете под руководством профессора О.В.Васильева. Приведен краткий обзор вариантов процедур последовательных приближений, различающихся способами построения областей игольчатого варьирования. Доказано утверждение о достаточности принципа максимума, основанное на анализе лагранжиана задачи.

Значительно более нестандартным результатам посвящена вторая часть главы. Рассмотрен вариант линейной гиперболической системы и линейной управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с зависящими от управления коэффициентами при фазовых переменных. Последнее обстоятельство является причиной того, что конечномерный принцип максимума не будет являться достаточным условием оптимальности даже в случае линейного целевого функционала. Соответственно, исходя из теории основанных на принципе максимума методов последовательных приближений, для решения подобных задач необходимо применять общий подход, разработанный для нелинейных задач. Этот подход приводит к итерационному процессу, на каждой итерации которого возникает необходимость неоднократного интегрирования системы гиперболических уравнений.

Вместе с тем, для исследуемого класса задач оказалось весьма эффективным использование неклассических формул приращения целевого функционала [2, 3, 11, 156]. Формулы приращения справедливы для двух произвольных допустимых процессов и не содержат остаточных членов.

Для случая линейного целевого функционала получены два симметричных варианта формул приращения. Оба варианта позволили свести исходную задачу оптимального управления к значительно более простой задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформулированы и доказаны соответствующие необходимые и достаточные условия оптимальности. Эти условия носят вариационный, а не конечномерный характер. Поэтому по аналогии с [20, 21, 32, 56, 151, 152, 153] они названы вариационными принципами максимума. На основе условий оптимальности предложена редукция исходной задачи оптимального управления к более простым задачам оптимизации в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом гиперболическую систему необходимо проинтегрировать всего лишь два раза - в начале процесса (после выбора начального допустимого управления) и в самом его конце.

Исследование случая квадратичного целевого функционала привело к двум уже несимметричным результатам. Неклассические формулы приращения второго порядка позволили в одном случае свести исходную задачу к задаче минимизации квадратичного функционала в системе обыкновенных дифференциальных уравнений, а во втором случае – к задаче минимизации линейного функционала в системе обыкновенных дифференциальных уравнений большей размерности.

Во второй главе задача оптимального управления начально-краевыми условиями полулинейной гиперболической системы рассматривается при более традиционной конечномерной форме связи между компонентами вектора состояния на границе и управлением. В этом случае несправедлив аналог классического принципа максимума Л.С.Понтрягина [253]. Попытка исследования данной задачи с помощью анализа формулы приращения целевого функционала привела к неклассическому условию оптимальности. Приращение функционала проанализировано на обычной игольчатой вариации сосредоточенного на границе исследуемой области управления. Данная вариация вызывает такое возмущение состояния процесса, часть которого не удается оценить через меру области игольчатого варьирования в некоторых "узких" полосках, вытянутых вдоль характеристик. Установлено, что оптимальное граничное управление почти в каждой точке границы является решением задачи управления начальными условиями специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, построенной на характеристиках исходной гиперболической системы. Формально эта задача является задачей математического программирования. Однако результат назван вариационным принципом максимума, поскольку в идейном плане он близок к вариационному принципу максимума, установленному в [32, 151, 152, 153] для гиперболических уравнений с двумя ортогональными семействами характеристик и распределенными управлениями. В данной работе показано, что вариационный принцип максимума является более сильным условием оптимальности по сравнению с дифференциальным принципом максимума, доказанным, например, в [214] при более жестких предположениях на параметры задачи. Предложен итерационный метод, основанный на полученном условии оптимальности.

В третьей главе задача оптимального управления начально-краевыми условиями полулинейной гиперболической системы первого порядка исследована в классе гладких управляющих воздействий при конечномерной связи между компонентами вектора состояния на границе области и управлением. Рассмотрена одна из наиболее общих форм задания краевых условий. Предполагается, что гладкие управления стеснены поточечными (амплитудными) или интегральными ограничениями. Именно такой класс функций характерен для обратных задач математической физики.

На основе исследования формул приращения целевого функционала в классе слабых вариаций допустимых гладких управлений получено базовое необходимое условие оптимальности вариационного типа. С целью конструирования методов решения задач применены специальные вариации управлений, обеспечивающие гладкость допустимых функций и выполнение соответствующих ограничений.

Идея замены независимых переменных, лежащая в основе предлагаемого подхода, содержится еще в работах М.В.Остроградского [98], где классическая вариация Лагранжа была дополнена гладкой вариацией независимых переменных. Л.Е.Забелло использовал в [71, 72] "внутренние вариации" для получения необходимых условий оптимальности в задаче оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием. С.Ф.Морозов, В.И.Плотников, В.И.Сумин применяли в работах [118, 119] "вариации сдвига" в комбинации с игольчатым варьированием для задач оптимального управления процессами переноса, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями. Однако, ни один из перечисленных авторов не занимался построением вариаций, сохраняющих гладкость управляющих функций. Отметим также, что авторы всех указанных выше работ ограничились лишь получением условий оптимальности и не ставили перед собой задачу конструирования численных методов.

Применение в настоящей работе неклассических вариаций привело в рассматриваемом классе задач к новым условиям оптимальности. На базе доказанных необходимых условий оптимальности предложены конструктивные варианты методов улучшения допустимых управлений, обоснованы утверждения о сходимости. Отметим, что предлагаемый подход может быть применен для достаточно широкого класса задач оптимального управления системами дифференциальных уравнений с частными производными.

В четвертой главе рассмотрена одна из задач управления популяцией, распределенной по возрасту. Процесс описывается дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка и нестандартным краевым условием, задающим плотность распределения только что родившихся членов популяции. Управляющая функция, подчиненная интегральному ограничению типа равенства и условию неотрицательности, задает возрастное распределение рожающих особей. На основе методики главы 3 построена специальная вариация допустимого управления, обеспечивающая выполнение ограничений. Получено неклассическое необходимое условие оптимальности, которое является основой численного метода решения задачи оптимального управления. Приведены результаты численного эксперимента.

В заключительной, пятой главе проведена численная реализация методов, теоретические схемы которых описаны в главе 3. В качестве иллюстративного примера выбрана обратная задача восстановления начального профиля гравитационной волны по известным данным наблюдений в конечный момент времени. Проведена интерпретация этой обратной задачи математической физики как задачи оптимального управления в классе гладких управляющих воздействий, подчиненных амплитудным ограничениям или вытекающим из законов сохранения интегральным ограничениям. Численные расчеты проводились на алгоритмическом языке C++ с использованием системы MATLAB 5.2/6.1. Для численного интегрирования прямой и сопряженной задач предложена специальная характеристическая неявная разностная схема. Специфика задачи позволила построить прямоугольную характеристическую разностную сетку. Результаты численных экспериментов при различных входных данных, начальных приближениях и видах ограничений проиллюстрированы серией таблиц и рисунков. Проведен анализ влияния выбора начального приближения на сходимость методов.

С точки зрения автора, предлагаемые методы и подходы открывают новые возможности для эффективного решения прикладных задач оптимального управления системами дифференциальных уравнений с частными производными.

В работе используется следующая система обозначений и ссылок. Все векторы в формулах считаются столбцевыми. Для записи скалярного произведения двух n-мерных векторов x и y применяются угловые скобки: $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. В каждой главе формулы, утверждения, теоремы и т.д. имеют двойную нумерацию: первое число – номер пункта, второе – порядковый номер формулы, утверждения, теоремы и т.д. в этом пункте. Такая двойная нумерация используется внутри главы. При ссылках на формулы из другой главы применяется тройная нумерация: первое число – номер главы, второе – номер пункта в этой главе, третье – номер формулы в этом пункте. Список литературы в алфавитном порядке вынесен в конец работы.

Научные результаты, включенные в монографию, получены автором при работе в качестве исполнителя по следующим проектам:

– инициативные научные проекты РФФИ 94-01-01559, 96-01-00359, 99-01-00400, 02-01-00243, 05-01-00187;

– проекты международного конкурса РФФИ-Белорусского фонда фундаментальных исследований 00-01-81130-Бел2000, 2000-2001 гг.; 02-01-81001-Бел2002, 2002-2004 гг.;

– проект регионального конкурса РФФИ-Камчатка 97-01-96011-п "Исследование обратной проблемы прогнозирования волн цунами методами оптимального управления", 1997-1999 гг.;

– программа "Университеты России"(проекты 990345, 2000-2001 гг.; УР03.01.008, 2002-2003 гг.; ур.03.01.002, 2004 г.; ур.03.01.064, 2005 г.);

– грант Президента РФ для молодых российских ученых МД-989.2005.1.

Автор посвящает эту работу памяти основателя иркутской школы оптимального управления, первого заведующего кафедрой методов оптимизации Иркутского государственного университета профессора О.В.Васильева, скоропостижно скончавшегося 24 октября 2002 г. Олег Владимирович Васильев инициировал исследования автора в области задач оптимального управления системами с распределенными параметрами, оказывал постоянную поддержку своими советами и вниманием.

Автор считает своим долгом поблагодарить заведующего кафедрой математики Байкальского государственного университета экономики и права профессора В.А.Дыхту, взявшего на себя труд прочесть первоначальную рукопись работы и сделавшего целый ряд конструктивных предложений по ее изменению. Автор признателен директору Института математики и экономики, заведующему кафедрой вычислительной математики и механики Иркутского государственного университета профессору В.А. Срочко, доценту кафедры методов оптимизации Иркутского госуниверситета В.А. Терлецкому за многочисленные обсуждения и полезные замечания.

Глава 1

ОПТИМИЗАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ НА ГРАНИЦЕ

Рассматривается задача оптимального управления гиперболической системой, в которой начально-краевые условия определяются из управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Допустимые управления выбираются из класса ограниченных и измеримых функций. Для исследуемого класса задач показана справедливость поточечного принципа максимума. Методом, основанным на анализе лагранжиана задачи, получены условия, при которых принцип максимума является достаточным условием оптимальности. Обоснована возможность применения эффективных процедур последовательных приближений, разработанных в Иркутском университете. Приведен краткий обзор вариантов процедур последовательных приближений, различающихся способами построения областей игольчатого варьирования.

Исследуется вариант линейной гиперболической системы и линейной управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с зависящими от управления коэффициентами при фазовых переменных. Получены два симметричных варианта неклассических точных (без остаточного члена) формул приращения критерия качества. На их основе доказаны необходимые и достаточные условия оптимальности вариационного типа и осуществлена редукция исходной задачи к значительно более простым задачам оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Исследование случая квадратичного целевого функционала привело к двум уже несимметричным результатам. Неклассические формулы приращения второго порядка позволили в одном случае свести исходную задачу к задаче минимизации квадратичного функционала в системе обыкновенных дифференциальных уравнений, а во втором случае – к задаче минимизации линейного функционала в системе обыкновенных дифференциальных уравнений большей размерности.

1.1. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Объектом исследования во всей книге являются задачи оптимизации в системах полулинейных гиперболических уравнений первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \tag{1.1}$$

$$(s,t) \in \Pi = (s_0, s_1) \times (t_0, t_1).$$

В дальнейшем будем использовать также следующие обозначения: $S = [s_0, s_1]$, $T = [t_0, t_1]$, $\bar{\Pi} = [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] = S \times T$. Предполагается, что $x = x(s,t)$ – n-мерная вектор-функция. Будем считать, что система (1.1) записана в инвариантном виде, то есть матрица коэффициентов $A(s,t)$ является диагональной. С помощью линейного невырожденного преобразования переменных произвольная система полулинейных гиперболических уравнений может быть сведена к инвариантной форме [145]. Дополнительно предполагаем, что диагональные элементы $a_i = a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы коэффициентов знакопостоянны в рассматриваемой области:

$$a_i(s,t) \; > \; 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1;$$

$$a_i(s,t) \; = \; 0, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2;$$

$$a_i(s,t) \; < \; 0, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, n.$$

Составим две диагональные подматрицы: $A^+(s,t)$ размерности $m_1 \times m_1$ и $A^-(s,t)$ размерности $(n - m_2) \times (n - m_2)$ из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы A соответственно. Из вектора состояния $x = x(s,t)$ выделим два подвектора: $x^+ = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_1})$ и $x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \ldots, x_n)$, соответствующих положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы A.

Задачи оптимизации будут рассматриваться для граничных и стартовых управлений, входящих в начально-краевые условия системы (1.1) при различных формах связи между компонентами вектора состояния и управляющими воздействиями на границе области Π.

Прежде чем переходить к постановке задач оптимального управления нам потребуется описать используемое понятие обобщенного решения начально-краевых задач.

При фиксированных значениях управляющих воздействий наиболее общая форма постановки начально-краевых условий, к которой сводятся все виды начально-краевых условий, рассматриваемые в данной работе, имеет вид

$$x(s, t_0) = p(s), \quad s \in S, \tag{1.2}$$

$$x^+(s_0, t) = M(t)x^-(s_0, t) + g^{(1)}(t), \quad t \in T,$$

$$x^-(s_1, t) = N(t)x^+(s_1, t) + g^{(2)}(t), \quad t \in T. \tag{1.3}$$

Здесь $M(t)$ и $N(t)$ – прямоугольные матрицы размерности $m_1 \times (n - m_2)$ и $(n - m_2) \times m_1$ соответственно.

Предположений, которые мы будем накладывать на параметры задач оптимального управления, недостаточно для существования не только классического (непрерывного и непрерывно дифференцируемого) решения задачи (1.1)–(1.3) [145], но и для существования обобщенного решения из класса $W_2^1(\Pi)$ [141, 149].

В основу понятия обобщенного решения могут быть положены различные подходы: интегральные законы сохранения, методы искусственной вязкости, способ предельного перехода в разностных аппроксимациях, аппарат теории обобщенных функций, понятие потенциала решений и др. [1, 44, 46, 89, 110, 111, 115, 135, 145, 226, 241]. Однако, с точки зрения используемых в данной работе методов исследования задач оптимального управления, наиболее приемлем излагаемый ниже подход к понятию обобщенного решения.

Введем в рассмотрение характеристики гиперболического оператора, определяемые из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{ds}{dt} = a_i(s,t), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Для того чтобы однозначно зафиксировать характеристику достаточно указать точку $(\eta, \alpha) \in \bar{\Pi}$, через которую она проходит. Поэтому далее для решений уравнений (1.4) примем следующее обозначение $s = s^{(i)}(\eta, \alpha; t)$. Очевидно, что $s^{(i)}(\eta, \alpha; \alpha) = \eta$. В силу гладкости $a_i(s,t)$ такие функции существуют, единственны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Pi}$. Таким образом, каждое уравнение (1.4) порождает в $\bar{\Pi}$ семейство интегральных кривых $s = s^{(i)}(\eta, \alpha; t)$, которое и называется i–ым семейством характеристик гиперболической системы (1.1).

Определение 1.1. *Обобщенной производной по Соболеву вектор-функции $x(s,t) \in L_{1,loc}(\Pi)$ (локально суммируемой в Π) по полю направлений, задаваемому семейством интегральных кривых системы*

(1.4), называется вектор-функция $D_A x(s,t) \in L_{1,loc}(\Pi)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\iint\limits_{\Pi} \langle x, r_t + (Ar)_s \rangle \, ds\, dt = -\iint\limits_{\Pi} \langle D_A x, r \rangle \, ds\, dt$$

для любой непрерывно дифференцируемой и финитной в $\bar{\Pi}$ n–мерной вектор-функции $r(s,t)$.

Отметим, что если функция $x(s,t)$ непрерывно дифференцируема в $\bar{\Pi}$, то у нее существует и обобщенная производная $D_A x = x_t + Ax_s$, i –ая компонента которой фактически представляет собой обычную производную вдоль i–ой характеристической кривой. Такой же вид имеет и обобщенная производная функции $x \in W_2^1(\Pi)$.

Обозначим через $H^A(\Pi)$ гильбертово пространство функций x из $L_2(\Pi)$, обладающих обобщенной производной $D_A x$ из $L_2(\Pi)$, со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle_{H^A(\Pi)} = \iint\limits_{\Pi} \left(\langle x, y \rangle + \langle D_A x, D_A y \rangle \right) ds\, dt.$$

Пространства такого типа были введены В.С.Владимировым в работе [41]. Их свойства изучались в работах [120, 141]. Отметим, в частности, что множество $C_1(\bar{\Pi})$ непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Pi}$ функций всюду плотно в $H^A(\Pi)$.

Определение 1.2. *Под обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) будем понимать функцию $x \in H^A(\Pi)$, удовлетворяющую почти всюду в Π системе дифференциальных уравнений*

$$D_A x = f(x,s,t) \tag{1.5}$$

и имеющую следы $x|_{t=t_0}$, $x|_{s=s_0}$, $x|_{s=s_1}$, удовлетворяющие условиям (1.2), (1.3).

В работе [141] доказано существование и единственность обобщенного решения в классе $H^A(\Pi)$ при следующих предположениях.

1) Диагональные элементы $a_i(s,t)$ матрицы $A(s,t)$ непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Pi}$.

2) Элементы матриц $M(t)$ и $N(t)$ в (1.3) непрерывны на отрезке T.

3) $p \in L_2(s_0,s_1)$, $\;g^{(1)} \in L_2(t_0,t_1)$, $\;g^{(2)} \in L_2(t_0,t_1)$.

4) Функция $f(x,s,t)$ для всех $x \in E^n$ квадратично суммируема по (s,t) на Π и для почти всех $(s,t) \in \Pi$ удовлетворяет условию Липшица по x с константой, не зависящей от выбора $x \in E^n$ и $(s,t) \in \Pi$.

5) Функция f для каждого $R > 0$ непрерывна по t в среднем квадратичном на Π равностепенно относительно множества функций $z \in L_2(\Pi)$, $\|z\|_{L_2(\Pi)} \leq R$, то есть для каждого $R > 0$ величина

$$\max_{\|z\|_{L_2(\Pi)} \leq R} \; \max_{|\alpha| \leq \gamma} \iint\limits_{\Pi} \|f(z(s,t),s,t+\alpha) - f(z(s,t),s,t)\|^2_{E^n}\, ds\, dt$$

стремится к нулю при $\gamma \longrightarrow 0$.

Для доказательства существования решения в [141] используется метод аппроксимации входных данных $p, g^{(1)}, g^{(2)}, f, M(t), N(t)$ последовательностями более гладких функций с тем, чтобы отвечающие им решения x^n принадлежали классу $W_2^1(\Pi)$. Решение из $H^A(\Pi)$ получается как предел последовательности x^n в пространстве $H^A(\Pi)$. Отметим, что необходимость условия 5, по-видимому, связана только с техникой доказательства теоремы существования.

Работы [110, 111, 117, 179, 180] позволяют сформулировать теорему существования и единственности обобщенного решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) при входных данных из пространств L_∞.

Зафиксируем точку $(s,t) \in \Pi$ и выпустим из нее все характеристики $\xi = s^{(i)}(s,t;\tau)$, $\quad i = 1,2,\ldots,n$. Пусть $(\xi^{(i)}(s,t),\, \tau^{(i)}(s,t))$ – начальные точки характеристик, то есть принадлежащие границе прямоугольника Π точки, для которых при увеличении параметра τ характеристики попадают внутрь области Π. Соответственно, пусть $(\bar{\xi}^{(i)}(s,t), \bar{\tau}^{(i)}(s,t))$ – конечные точки характеристик, а $T_i(s,t) = [\tau^{(i)}(s,t), \bar{\tau}^{(i)}(s,t)]$. Обозначим через $A_\infty(\Pi)$ пространство n–мерных вектор-функций $x \in L_\infty(\Pi)$, которые можно так исправить на множестве нулевой меры, что после этого для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ функция $x_i(s^{(i)}(s,t;\tau),\tau)$ абсолютно непрерывна по τ на $T_i(s,t)$ и обладает обобщенной по Соболеву производной

$$D_i x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \tau} \in L_\infty(T_i(s,t))$$

вдоль характеристик i-го семейства.

Теорема 1.1 ([110, 111, 117, 179, 180]). *Пусть в начально-краевой задаче (1.1)–(1.3)*

1) диагональные элементы $a_i(s,t)$ матрицы $A(s,t)$ непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Pi}$;

2) элементы матриц $M(t)$, $N(t)$ непрерывны на отрезке T;

3) $p \in L_\infty(S)$, $g^{(1)} \in L_\infty(T)$, $g^{(2)} \in L_\infty(T)$;

4) $f(x,.,.) \in L_\infty(\Pi)$ при фиксированных $x \in E^n$;

5) существуют неубывающие функции $K_1(\beta)$ и $K_2(\beta)$ действительного переменного β, такие, что для любого множества $X_\beta = \{x \in E^n : \|x\|_{E^n} < \beta\}$, $\beta < \infty$ при почти всех $(s,t) \in \Pi$ справедливы оценки

$$\|f(x,s,t)\| \le K_1(\beta) < \infty; \quad \|f_x(x,s,t)\| \le K_2(\beta) < \infty \tag{1.6}$$

(нормы в (1.6) – евклидовы).

Тогда существует единственная функция $x \in A_\infty(\Pi)$, которая:

а) имеет в Π обобщенную производную

$$D_A x = (D_1 x_1, D_2 x_2, \ldots, D_n x_n);$$

б) удовлетворяет почти всюду в Π системе дифференциальных уравнений (1.5);

в) имеет следы $x|_{t=t_0} \in L_\infty(S)$, $x|_{s=s_0} \in L_\infty(T)$, $x|_{s=s_1} \in L_\infty(T)$, *удовлетворяющие условиям (1.2), (1.3);*

г) имеет следы $x|_{t=\bar{t}} \in L_\infty(S)$, $x|_{s=\bar{s}} \in L_\infty(T)$ *соответственно для всех* $\bar{t} \in T$, $\bar{s} \in S$*;*

д) удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$x_i(s,t) = x_i(\xi^{(i)}(s,t), \tau^{(i)}(s,t)) + \int\limits_{\tau^{(i)}(s,t)}^{t} f_i(x(\xi,\tau),\xi,\tau)|_{\xi=s^{(i)}(s,t;\tau)}\, d\tau \quad (1.7)$$

$$(s,t) \in \Pi; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отметим, что бесконечномерная система интегральных уравнений (1.7) сама может использоваться для введения понятия обобщенного решения [32, 145, 176, 180]. Если система (1.1) имеет классическое (непрерывное и непрерывно дифференцируемое решение), то к (1.7) приходим простым интегрированием уравнений (1.1) на отрезках $[\tau^{(i)}, t]$ вдоль соответствующих характеристик $\xi = s^{(i)}(s,t;\tau)$. Обратно, непосредственным дифференцированием гладких решений (1.7) можно получить (1.1). Таким образом, дифференциальная (1.1) и интегральная (1.7) системы эквивалентны в том случае, если они имеют классическое (непрерывное и непрерывно дифференцируемое) в Π решение $x = x(s,t)$.

В данной книге интегральное представление (1.7) решения будет требоваться, главным образом, для получения оценок возмущений состояния процесса, вызванных вариациями управления того или иного вида.

При получении условий оптимальности нам потребуется также обобщенный вариант формулы интегрирования по частям.

Теорема 1.2 ([141, 180]). *Пусть* x *и* y *– произвольные функции пространства* $A_\infty(\Pi)$, $\partial\Pi$ *– граница прямоугольника* Π*. Тогда*

$$\iint\limits_{\Pi} \langle y(s,t), D_A x(s,t) \rangle \, ds\, dt =$$

$$= \int\limits_{\partial\Pi} \langle y(s,t), x(s,t)\rangle\, ds - \langle y(s,t), A(s,t)x(s,t)\rangle\, dt -$$
$$- \iint\limits_{\Pi} \langle D_A y(s,t) + A_s(s,t)y(s,t), x(s,t)\rangle\; ds\, dt. \quad (1.8)$$

1.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для системы гиперболических уравнений (1.1) рассмотрим управляемые начально-краевые условия. Для простоты будем считать, что условия при $t = t_0$ и $s = s_1$ фиксированы:

$$x(s,t_0) = x^0(s), \quad s \in S, \quad (2.1)$$

$$x^-(s_1,t) = q(t), \quad t \in T. \quad (2.2)$$

Краевые условия на другой боковой границе ($s = s_0$) прямоугольника определяются из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x^+(s_0,t)}{\partial t} = g(x^+(s_0,t), u(t), t), \;\; t \in T,$$
$$x^+(s_0,t_0) = \left(x^0(s_0)\right)^+. \quad (2.3)$$

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых на отрезке T r-мерных вектор-функций $u = u(t)$, удовлетворяющих почти всюду на этом отрезке ограничению типа включения

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (2.4)$$

где U – компакт из пространства E^r.

Целью задачи оптимального управления является минимизация функционала

$$J(u) = \int\limits_S \varphi(x(s,t_1), s)\, ds + \iint\limits_{\Pi} F(x,s,t)\, ds\, dt, \quad (2.5)$$

определенного на решениях задачи (1.1), (2.1)–(2.3) при допустимых управлениях, удовлетворяющих условию (2.4).

Таким образом, для вычисления вектор-функции состояния, соответствующей некоторому фиксированному управлению $u = u(t)$, необходимо:

– подставить управление u в правую часть системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3) и решить соответствующую задачу Коши для определения $x^+(s_0, t)$;

– решить первую краевую задачу для системы (1.1) с известными значениями $x^+(s_0,t),\ t \in T;\quad x(s,t_0),\ s \in S;\quad x^-(s_1,t),\ t \in T$; фактически, мы имеем частный случай условий (1.2)–(1.3) с $M(t) = 0,\ N(t) = 0;$ компоненты функции x закрепляются в начальных точках ("точках входа") характеристик.

Задачу оптимального управления (1.1), (2.1)–(2.5) рассмотрим при следующих предположениях:

1) диагональные элементы матрицы A непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Pi}$;

2) вектор-функции $x^0(s)$ и $q(t)$ непрерывны соответственно на S и T и удовлетворяют условию согласования:

$$q(t_0) = \left(x^0(s_1)\right)^- ;$$

3) вектор-функции $f(x,s,t)$, $g(x^+,u,t)$ и скалярные функции $\varphi(x,s)$, $F(x,s,t)$ непрерывны по своим аргументам и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по x соответственно на $E^n \times S \times T$, $E^{m_1} \times U \times T,\ E^n \times S,\ E^n \times S \times T$.

Отметим, что краевые условия, определяемые из системы уравнений (2.3), являются абсолютно непрерывными на T функциями. В рассматриваемом случае для любого допустимого управления существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи (1.1), (2.1)–(2.3) из класса непрерывных в Π функций, обладающее обобщенной производной $D_A x = (D_1 x_1, D_2 x_2, \ldots, D_n x_n)$, каждая компонента которой $D_i x_i$ непрерывна вдоль соответствующего i–го семейства характеристик [145, 95]. Таким образом, каждая компонента $x_i = x_i(s,t)$ обобщенного решения x непрерывно дифференцируема вдоль любой характеристики i–го семейства характеристик.

Заметим также, что предположение 3 данного пункта на вектор-функцию $f(x,s,t)$ является значительно более жестким, чем предположение 5 теоремы 1.1. Это требуется для обоснования сходимости метода решения задачи оптимального управления, изложенного в пункте 1.5 настоящей главы.

Пару функций $\{u, x\}$ будем называть *допустимым процессом*, если управление $u = u(t)$ допустимо, а $x = x(s,t)$ – соответствующее данному управлению обобщенное решение задачи (1.1), (2.1)–(2.3).

1.3. ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА

Исследование задачи оптимального управления (1.1), (2.1)–(2.5) проведем с использованием различных вариантов формулы приращения целевого функционала на двух допустимых процессах $\{u, x\}$ и $\{\tilde{u} = u + \Delta u, \quad \tilde{x} = x + \Delta x\}$. Ставший уже классическим метод приращений Л.И.Розоноэра [146] позволяет получить в рассматриваемой задаче необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Л.С.Понтрягина. При доказательстве существенна локальность формулы приращения – остаточные члены оцениваются через величину, характеризующую малость меры области игольчатого варьирования управления. Для двух частных случаев рассматриваемой задачи в ходе дальнейшего изложения будут получены нестандартные точные (без остаточных членов) формулы приращения.

Начнем с классического варианта формулы приращения. Обозначим $\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u)$. Очевидно, что

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \Delta\varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \iint\limits_\Pi \Delta F(x,s,t)\,ds\,dt. \tag{3.1}$$

Функция $\Delta x = \Delta x(s,t)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$D_A \Delta x = \Delta f(x,s,t), \quad (s,t) \in \Pi; \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} \Delta x(s,t_0) = 0, \ \ s \in S; \qquad \Delta x^-(s_1,t) = 0, \quad t \in T; \\ \Delta x_t^+(s_0,t) = \Delta g(x^+(s_0,t),u(t),t), \quad t \in T, \\ \Delta x^+(s_0,t_0) = 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь

$$\Delta f(x,s,t) = f(\tilde{x},s,t) - f(x,s,t),$$

$$\Delta g(x^+(s_0,t),u(t),t) = g(\tilde{x}^+(s_0,t),\tilde{u}(t),t) - g(x^+(s_0,t),u(t),t).$$

Проделаем ряд достаточно стандартных операций, обычно используемых при выводе необходимых условий оптимальности первого порядка. В формуле (3.1)

— добавим нулевые слагаемые

$$\int\limits_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t) - \Delta g(x^+(s_0,t),u(t),t)\rangle\,dt$$

и

$$\int\limits_\Pi\int \langle \psi(s,t), D_A\Delta x - \Delta f(x,s,t)\rangle\,ds\,dt,$$

где $\psi(s,t) = (\psi_1(s,t),\psi_2(s,t),\ldots,\psi_n(s,t))$; $p(t) = (p_1(t),p_2(t),\ldots,p_{m_1}(t))$ – некоторые, пока неопределенные вектор-функции, имеющие такие же аналитические свойства, как и функции $(s,t) \to x(s,t)$, $t \to x^+(s_0,t)$ соответственно; эта операция равносильна введению функции Лагранжа в рассматриваемой экстремальной задаче;

— применим формулы интегрирования по частям к слагаемым

$$\int\limits_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t)\rangle\, dt, \quad \iint\limits_\Pi \langle \psi(s,t), D_A \Delta x\rangle\, ds\, dt;$$

при этом обобщенная формула интегрирования по частям (1.8) для второго интеграла будет иметь следующий вид:

$$\iint\limits_\Pi \langle \psi(s,t), D_A \Delta x\rangle\, ds\, dt =$$

$$= \int\limits_S \left(\langle \psi(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\rangle - \langle \psi(s,t_0), \Delta x(s,t_0)\rangle\right) ds -$$

$$- \int\limits_T \left(\langle \psi(s_0,t), A(s_0,t)\Delta x(s_0,t)\rangle - \langle \psi(s_1,t), A(s_1,t)\Delta x(s_1,t)\rangle\right) dt -$$

$$- \iint\limits_\Pi \langle D_A\psi + A_s(s,t)\psi(s,t), \Delta x(s,t)\rangle\, ds\, dt, \tag{3.4}$$

— введем функции Понтрягина

$$H(\psi,x,s,t) = \langle \psi(s,t), f(x,s,t)\rangle - F(x,s,t),$$

$$h(p,x^+,u,t) = \langle p(t), g(x^+(s_0,t), u(t), t)\rangle;$$

— представим приращение $\Delta\varphi(x,s)$ по формуле Тейлора первого порядка;

— заметив, что

$$\Delta h(p,x^+,u,t) = \Delta_{\tilde u} h(p,x^+,u,t) + \Delta_{\tilde x^+} h(p,x^+,\tilde u,t),$$

представим приращения $\Delta_{\tilde x^+} h(p,x^+,\tilde u,t)$ и $\Delta H(\psi,x,s,t) = H(\psi,\tilde x,s,t) - H(\psi,x,s,t)$ также по формуле Тейлора первого порядка, выделив линейную часть относительно приращения состояния процесса;

— потребуем, чтобы вектор-функции $\psi = \psi(s,t)$ и $p = p(t)$ являлись решениями следующей сопряженной задачи (условие стационарности функции Лагранжа по состоянию):

$$D_A\psi + A_s(s,t)\psi = -H_x(\psi, x, s, t), \quad (s,t) \in \Pi,$$

$$\psi(s,t_1) = -\varphi_x(x(s,t_1), s), \quad s \in S, \tag{3.5}$$

$$\psi^-(s_0,t) = 0, \quad \psi^+(s_1,t) = 0, \quad t \in T;$$

$$\dot p = -h_x(p, x^+(s_0,t), u, t) - A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), \quad t \in T,$$

$$p(t_1) = 0. \tag{3.6}$$

Тогда формула приращения примет вид

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \Delta_{\tilde u} h(p(t), x^+(s_0,t), u(t), t)\, dt + \eta, \tag{3.7}$$

где

$$\begin{gathered}\eta = \int\limits_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)\, ds - \int\limits_T \big[o_h(\|\Delta x^+(s_0,t)\|) + \\ + \langle \Delta_{\tilde u} h_{x^+}(p(t), x^+(s_0,t), u(t), t), \Delta x^+(s_0,t)\rangle\big]\, dt - \\ - \iint\limits_\Pi o_H(\|\Delta x(s,t)\|)\, ds\, dt.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Покажем, что при выполнении (3.2) справедлива оценка

$$\gamma(t) = \max_{(\xi,\tau)\in\Pi(t)} \|\Delta x(\xi,\tau)\| \le K \int\limits_T \|\Delta_{\tilde u} g(x^+(s_0,t), u(t), t)\|\, dt, \tag{3.9}$$

$$\Pi(t) = \left\{(\xi,\tau) \in \bar\Pi : \ \ \tau \le t\right\}.$$

Для этого рассмотрим интегральный вариант (1.7) системы (1.1)

$$\Delta x_i(s,t) = \Delta x_i(\xi^{(i)}(s,t), \tau^{(i)}(s,t)) + \int\limits_{\tau^{(i)}(s)}^{t} \Delta f_i(x(\xi,\tau), \xi, \tau)\Big|_{\xi = s^{(i)}(s,t;\tau)} d\tau, \tag{3.10}$$

где $(\xi^{(i)}(s,t), \tau^{(i)}(s,t))$ – начальная точка характеристики $\xi = s^{(i)}(s,t;\tau)$, и введем обозначение

$$\gamma^+(t) = \max_{t_0 \le \tau \le t} \|\Delta x^+(s_0,\tau)\|. \tag{3.11}$$

Так как правые части системы (3.2) удовлетворяют условию Липшица по x с некоторой константой $L > 0$, то с учетом (3.10), (3.11) и условий $\Delta x^-(s_1,t) = 0, \quad \Delta x^-(s,t_0) = 0$, имеем оценки

$$|\Delta x_i(s,t)| \le \gamma^+(t) + L \int\limits_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\,d\tau, \quad i = 1,2,\dots,m_1;$$

$$|\Delta x_i(s,t)| \le L \int\limits_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\,d\tau, \quad i = m_2+1, m_2+2,\dots,n.$$

Правые части этих неравенств не зависят от номеров i и от переменной s, поэтому справедливо неравенство

$$\gamma(t) \le \sqrt{n}\,\gamma^+(t) + L\sqrt{n} \int\limits_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\,d\tau. \tag{3.12}$$

Далее, из (3.3) следует, что

$$\|\Delta x^+(s_0,t)\| \le L_1 \int\limits_{t_0}^{t} \|\Delta x^+(s_0,\tau)\|\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \|\Delta_{\tilde{u}} g(x^+(s_0,\tau), u(\tau), \tau)\|\,d\tau,$$

где L_1 – константа Липшица для функции $g(x^+, u, t)$. Из этого неравенства получим

$$\gamma^+(t) \le L_1 \int\limits_{t_0}^{t} \gamma^+(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \|\Delta_{\tilde{u}} g(x^+(s_0,\tau), u(\tau), \tau)\|\,d\tau.$$

Отсюда по лемме Гронуолла – Беллмана имеем

$$\gamma^+(t) \le L_2 \int\limits_{t_0}^{t} \|\Delta_{\tilde{u}} g(x^+(s_0,\tau), u(\tau), \tau)\|\,d\tau, \qquad L_2 = e^{L_1 (t_1 - t_0)}.$$

Подставим это неравенство в (3.12) и повторно применим лемму Гронуолла – Беллмана. В результате получим искомую оценку (3.9), в которой

$$K = \sqrt{n}\, L_2\, e^{(\sqrt{n}\, L(t_1 - t_0))}.$$

Формула приращения (3.7)–(3.8) и оценка приращения состояния (3.9) представляют собой удобные промежуточные результаты при доказательстве принципа максимума и обосновании сходимости методов поиска управлений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности.

1.4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Рассмотрим формулу приращения целевого функционала на игольчатой вариации допустимого управления. В качестве параметров вариации выберем точку $\tau \in (t_0, t_1]$, число $\varepsilon \in (0, \tau - t_0]$, вектор $\bar{u} \in U$. Отрезок варьирования $(\tau - \varepsilon, \tau]$ целиком лежит в T. Игольчатую вариацию управления $u = u(t)$ зададим в виде:

$$\Delta u(t) = \begin{cases} \bar{u} - u(t), & t \in (\tau - \varepsilon, \tau], \\ 0, & t \in T \setminus (\tau - \varepsilon, \tau]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Воспользуемся формулой (3.9) для оценки приращения состояния, вызванного данной вариацией управления, и оценим остаточный член (3.8) в формуле (3.7) следующим образом:

$$| \, \eta \, | \le \left| \int\limits_S o(\varepsilon) ds \right| + \left| \int\limits_T o(\varepsilon) dt \right| + \left| \iint\limits_\Pi o(\varepsilon)\, ds\, dt \right| +$$

$$+ \int\limits_{\tau - \varepsilon}^{\tau} \|\Delta_{\tilde{u}} g_{x^+}(x^+(s_0, t), u(t), t)\| \cdot \|p(t)\| \cdot \|\Delta x^+(s_0, t)\|\, dt.$$

Поскольку функции $g_{x^+}(x^+(s_0, t), u(t), t)$ и $p(t)$ ограничены на отрезке T, то можно сделать вывод о том, что

$$\eta \sim o(\varepsilon).$$

Тогда окончательный вариант формулы приращения функционала на игольчатой вариации управления (4.1) имеет вид

$$\Delta J(u) = J(u+\Delta u) - J(u) =$$
$$= -\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \Delta_{\tilde{u}} h(p(t), x^{+}(s_0,t), u(t), t)\, dt + o(\varepsilon). \qquad (4.2)$$

Полученная формула позволяет сформулировать необходимое условие оптимальности первого порядка типа классического принципа максимума Л.С.Понтрягина.

Теорема 4.1. *Пусть $\{u^*, x^*\}$ – оптимальный процесс в задаче (1.1), (2.1)–(2.5). Тогда этот процесс удовлетворяет почти всюду на T условию максимума*

$$h(p^*(t), x^{+*}(s_0,t), u^*(t), t) = \max_{u\in U} h(p^*(t), x^{+*}(s_0,t), u, t), \qquad (4.3)$$

где $p^*(t)$ – решение сопряженной задачи (3.5)–(3.6) при $x = x^*(s,t)$, $u = u^*(t)$.

Замечание 4.1. Для простоты изложения предполагалось, что краевые условия на правой боковой границе прямоугольника Π фиксированы. Аналогичные результаты могут быть получены для задач, в которых краевые условия на правом конце также определяются из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x_t^-(s_1,t) = q(x^-(s_1,t), w(t), t), \quad t\in T,$$
$$x^-(s_1,t_0) = [x^0(s_1)]^-,$$
$$w(t)\in W, \quad t\in T.$$

Замечание 4.2. С учетом результатов работы [32] для задачи (1.1), (2.1)–(2.5), в которой правые части системы (1.1) содержат распределенные управления, принцип максимума нетрудно распространить на случай распределенного управления и получить дополнительное поточечное условие максимума функции H.

Рассмотрим линейно-выпуклый вариант задачи оптимального управления (1.1), (2.1)–(2.5), в котором правые части систем (1.1) и (2.3) линейны по состоянию:

$$f(x,s,t) = B(s,t)\,x + d(s,t),$$

$$g(x^+(s_0,t),u(t),t) = G(t)x^+(s_0,t) + \bar{g}(u(t),t),$$

а функции $F(x,s,t)$, $\varphi(x,s)$ выпуклы по x.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Для линейно-выпуклого варианта задачи оптимального управления (1.1), (2.1)–(2.5) условие максимума (4.3) является необходимым и достаточным условием оптимальности процесса $\{u^*,x^*\}$.*

Доказательство этого утверждения очевидно: достаточно рассмотреть формулу приращения (3.7) на процессе, удовлетворяющем условию максимума и воспользоваться тем, что остаточный член (3.8) в этой формуле неотрицателен в силу сделанных предположений.

Эти довольно стандартные для теории оптимального управления достаточные условия можно существенно расширить по сфере применимости, если воспользоваться предложенным в [57] подходом к обращению принципа максимума. [1]

Предположим, что допустимый процесс $\{u^*,x^*\}$ удовлетворяет *усиленным условиям принципа максимума* в исходной нелинейной задаче (1.1),(2.1)– (2.5).

Условие МН. *Для почти всех $(s,t)\in\bar{\Pi}$ вектор $x^*(s,t)$ является решением задачи*

$$H(\psi^*(s,t),x,s,t) - \langle H_x(\psi^*(s,t),x^*(s,t),s,t),x\rangle \to \max, \quad x\in E^n.$$

[1]Автор признателен профессору В.А.Дыхте, обратившему внимание на эту возможность получения более тонких достаточных условий оптимальности в форме принципа максимума.

Условие Mh. *Для почти всех* $t \in T$ *пара векторов* $(u^*(t), x^{*^+}(s_0, t))$ *является решением задачи*

$$h(p^*(t), x^+, u, t) - \left\langle h_x(p^*(t), x^{*^+}(s_0, t), u^*(t), t), x^+ \right\rangle \to \max,$$

$$x^+ \in E^{m_1}, \quad u \in U.$$

Условие MB (граничное условие). *Для почти всех* $s \in S$ *вектор* $x^*(s, t_1)$ *является решением задачи*

$$\varphi(x, s) + \langle \psi(s, t_1), x \rangle \to \min, \quad x \in E^n.$$

Здесь предполагается, что $\psi^*(s, t), p^*(t)$ – решения сопряженных задач (3.5), (3.6) при $x = x^*(s, t), \ \ u = u^*(t)$.

Заметим, что из условия Mh следует выполнение принципа максимума (4.3) на рассматриваемом процессе. Достаточно воспользоваться произвольностью $x^+ \in E^{m_1}$ и положить $x^+ = x^{*^+}(s_0, t)$.

Теорема 4.3. *Если допустимый процесс* $\{u^*, x^*\}$ *удовлетворяет условиям MH, Mh и MB, то он оптимален в рассматриваемой задаче.*

Доказательство. Рассмотрим лагранжиан задачи (1.1),(2.1)– (2.5) в естественной форме:

$$L(x, u, \psi^*, p^*) = J(u) + \iint\limits_{\Pi} \langle \psi^*(s, t), D_A x - f(x, s, t) \rangle \, ds \, dt +$$

$$+ \int\limits_T \left\langle p^*(t), \dot{x}^+(s_0, t) - g(x^+(s_0, t), u, t) \right\rangle \, dt.$$

На любом допустимом процессе он совпадает с $J(u)$, а с помощью интегрирования по частям L легко можно преобразовать к следующему виду:

$$L(x, u, \psi^*, p^*) = \int\limits_S \left[\varphi(x(s, t_1), s) + \langle \psi^*(s, t_1), x(s, t_1) \rangle \right] ds -$$

$$-\int\limits_T \left[h(p^*(t), x^+(s_0,t), u(t), t) + \left\langle \dot{p}^*(t), x^+(s_0,t)\right\rangle\right] dt-$$

$$-\iint\limits_{\Pi} \left[H(\psi^*(s,t), x(s,t), s, t) + \langle D_A\psi^* + A_s(s,t)\psi^*(s,t), x(s,t)\rangle\right] ds\,dt+$$

$$+\left\langle p^*(t_1), x^+(s_0,t_1)\right\rangle - \left\langle p^*(t_0), x^+(s_0,t_0)\right\rangle -$$

$$-\int\limits_S \langle\psi^*(s,t_0), x(s,t_0)\rangle\, ds + \int\limits_T \left[\langle\psi^*(s_1,t), A(s_1,t)x(s_1,t)\rangle -\right.$$

$$\left.- \langle\psi^*(s_0,t), A(s_0,t)x(s_0,t)\rangle\right] dt.$$

Воспользуемся тем, что функции $\psi^*(s,t)$ и $p^*(t)$ являются решениями сопряженных задач (3.5), (3.6). В последнем интеграле каждое из скалярных произведений представим в виде суммы

$$\langle\psi^*, Ax\rangle = \left\langle \psi^{*^+}, A^+x^+\right\rangle + \left\langle \psi^{*^-}, A^-x^-\right\rangle.$$

Окончательно имеем

$$L(x,u,\psi^*,p^*) = \int\limits_S \left[\varphi(x(s,t_1),s) + \langle\psi^*(s,t_1), x(s,t_1)\rangle\right] ds-$$

$$-\int\limits_T \left[h(p^*(t), x^+(s_0,t), u(t), t) - \left\langle h_x(p^*(t), x^{*^+}(s_0,t), u^*(t), t), x^+(s_0,t)\right\rangle\right] dt-$$

$$-\iint\limits_{\Pi} \left[H(\psi^*(s,t), x(s,t), s, t) - \langle H_x(\psi^*(s,t), x^*(s,t), s, t), x\rangle\right] ds\,dt-$$

$$-\left\langle p^*(t_0), (x^0(s_0))^+\right\rangle - \int\limits_S \left\langle\psi^*(s,t_0), x^0(s)\right\rangle ds+$$

$$+\int\limits_T \left\langle \psi^{*^-}(s_1,t), A^-(s_1,t)q(t)\right\rangle dt.$$

В этом представлении три последних слагаемых на всех допустимых процессах совпадают, а выполнение усиленных условий максимума гарантирует, что сумма трех первых слагаемых достигает минимума на тройке функций $(u^*(t), x^*(s,t), x^{*^+}(s_0,t))$, если эту сумму рассматривать на всевозможных тройках функций $(u(t), x(s,t), x^+(s_0,t))$ со свойствами компонент допустимых процессов (даже без учета дифференциальных связей задачи). Отсюда, с учетом равенства $L = J$ на допустимых процессах, и вытекает справедливость теоремы.

Замечание 4.3. В действительности, мы здесь использовали подход из [57] не в полной общности, ибо, как отмечалось во введении, наиболее гибкие достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума используют целое множество решений сопряженной системы, не обязательно удовлетворяющих условиям трансверсальности. В приведенной версии теорему 4.3 можно интерпретировать как подходящим образом адаптированные достаточные условия В.Ф.Кротова [48, 49, 57, 132], в которых используется пара линейных по состоянию ($x(s,t)$ и $x^+(s_0,t)$) вспомогательных функций типа Кротова. Отметим также, что достаточные условия теоремы 4.3 не используют предположений вогнутости функций Понтрягина H, h по состоянию и управлению (или предположений вогнутости соответствующих гамильтонианов по состоянию), как того требует получение достаточных условий по схеме работы [219]. Как следствие, полученные в настоящей работе условия являются более гибкими.

1.5. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Изложенные выше результаты: формула приращения целевого функционала (3.7)– (3.8), оценка с помощью неравенства (3.9) остаточного члена в этой формуле через меру области игольчатого варьирования и, наконец, поточечный принцип максимума (4.3), позволяют использовать в рассматриваемой задаче итерационные методы последовательных приближений, разработанные для задач оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений [28, 30, 32, 34, 87, 90, 91, 104, 105, 106, 113, 127, 177, 237]. При этом для всех сходящихся модификаций методов, применение которых возможно в рассматриваемой задаче, используются стандартные конструкции следующего вида:

$$w_u(v,t) = \Delta_v h(p(t), x^+(s_0,t), u(t), t) =$$

$$= h(p(t), x^+(s_0,t), v(t), t) - h(p(t), x^+(s_0,t), u(t), t),$$

$$\bar{u}(t): \ w_u(\bar{u}(t),t) = \max_{v\in U} w_u(v,t), \tag{5.1}$$

$$\bar{w}_u(t) = w_u(\bar{u}(t),t) \geq 0, \quad t \in T, \tag{5.2}$$

$$\theta_u = \frac{1}{(t_1 - t_0)} \int_T \bar{w}_u(t)\, dt. \tag{5.3}$$

Очевидно, если $\theta_u = 0$, то допустимое управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума. На базе управления $u(t)$ строится однопараметрическое семейство управлений

$$u_\varepsilon(t) = u(t) + \chi_\varepsilon(t)(\bar{u}(t) - u(t)), \quad t \in T, \tag{5.4}$$

где $\chi_\varepsilon(t) \in L_\infty(T)$ – функция варьирования, принимающая лишь два значения 0 или 1:

$$\chi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \in T_u(\varepsilon), \\ 0, & t \in T \setminus T_u(\varepsilon). \end{cases}$$

Здесь $T_u(\varepsilon)$ – однопараметрическое семейство множеств из отрезка T, мера которых линейно зависит от $\varepsilon \in [0,1]$.

Возможность улучшения управления, не удовлетворяющего принципу максимума, основана на неравенстве

$$J(u_\varepsilon) - J(u) \leq -\int_{T_u(\varepsilon)} \bar{w}_u(t)dt + M\,\varepsilon^{1+\gamma},$$

которое может быть получено при предположении, что

$$\Delta J(u) \leq -\int_{T_u(\varepsilon)} \Delta_{u_\varepsilon} h(p(t), x^+(s_0,t), u(t), t)dt + M \cdot \varepsilon^{1+\gamma}, \tag{5.5}$$

$$M \geq 0, \quad \gamma > 0.$$

Утверждение 5.1. *Пусть в дополнение к предположениям на входные данные задачи оптимального управления (1.1), (2.1)–(2.5), сформулированным в пункте 1.2, функции* $f_x(x, s, t)$, $\varphi_x(x(s, t_1), s)$, $F_x(x, s, t)$, $g_x(x^+(s_0, t), u(t), t)$ *удовлетворяют условию Липшица по* x *с некоторыми константами, не зависящими от выбора допустимого процесса и переменных* (s, t). *Тогда для любых допустимых управлений* $u(t)$ *и* $u_\varepsilon(t)$ *вида (5.4) неравенство (5.5) выполняется при* $\gamma = 1$.

Доказательство. Рассмотрим приращение функционала $J(u_\varepsilon) - J(u)$. Обозначим $x_\varepsilon = x_\varepsilon(s, t)$ решение задачи (1.1), (2.1)–(2.3) при управлении $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t)$, $\Delta x(s, t) = x_\varepsilon(s, t) - x(s, t)$.

Тогда для остаточного члена (3.8) справедливы следующие представления:

$$o_\varphi(\|\Delta x(s, t_1)\|) = \langle \varphi_x(x + \theta_1 \Delta x, s) - \varphi_x(x(s, t_1), s), \Delta x(s, t_1) \rangle,$$

$$o_h(\|\Delta x^+(s_0, t)\|) = \langle h_{x^+}(p(t), x^+ + \theta_2 \Delta x^+, u_\varepsilon(t), t) -$$

$$- h_{x^+}(p(t), x^+(s_0, t), u_\varepsilon(t), t), \Delta x^+(s_0, t) \rangle,$$

$$o_H(\|\Delta x(s, t)\|) = \langle H_x(\psi, x + \theta_3 \Delta x, s, t) - H_x(\psi, x, s, t), \Delta x(s, t) \rangle,$$

$$0 \le \theta_i \le 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Применим условия Липшица и воспользуемся тем, что функция $p(t)$ ограничена на T. В результате получим оценку остаточного члена (3.8) в формуле приращения

$$|\eta| \le M \, \varepsilon^2,$$

где константа M не зависит от выбора допустимых процессов $\{u, x\}$ и $\{u_\varepsilon, x_\varepsilon\}$. Тем самым установлена справедливость доказываемого утверждения.

В зависимости от способов выбора параметра ε, могут быть предложены два варианта метода.

Пусть задано начальное приближение из класса допустимых функций $u^0 = u^0(t)$. Опишем k–ую итерацию метода, то есть переход от $u^k(t)$ к $u^{k+1}(t),\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

<u>Шаг 1.</u> По управлению u^k найдем функции $x^{+^k}(s_0, t)$ и $p^k(t)$, являющиеся решениями задач (2.3) и (3.5)–(3.6).

<u>Шаг 2.</u> Решив вспомогательную задачу (5.1) при $x^+ = x^{+^k}(s_0, t)$, $p = p^k(t)$, найдем управление $\bar{u}^k = \bar{u}^k(t)$.

<u>Шаг 3.</u> По управлению $\bar{u}^k(t)$, воспользовавшись формулами (5.2), (5.3), вычислим функцию $\bar{w}_k(t)$ и среднее значение этой функции – число θ_k. Если $\theta_k = 0$, то управление u^k удовлетворяет конечномерному принципу максимума, и решение задачи данным методом прекращается. Если же $\theta_k > 0$, то строим семейство управлений u^k_ε по правилу (5.4), в котором $\bar{u} = \bar{u}^k$, $T_u(\varepsilon) = T_k(\varepsilon)$.

<u>Шаг 4.</u> В первом варианте метода параметр ε_k определяется как решение задачи одномерной минимизации

$$J(u^k_{\varepsilon_k}) = \min_{\varepsilon \in [0,1]} J(u^k_\varepsilon);$$

во втором варианте метода шаг определяется из менее жесткого условия:

$$\varepsilon_k = \delta^l, \quad l = 0, 1, \ldots,$$

$$J(u^k_{\delta^l}) - J(u^k) \le -\frac{N_k\, \theta_k^\sigma\, \gamma}{\gamma + 1}\, \delta^l. \tag{5.6}$$

Здесь $\delta \in (0, 1)$ – фиксированное число, являющееся параметром метода; l – минимальный номер, при котором справедливо неравенство (5.6); N_k и σ – положительные числа, определяемые способом построения областей варьирования $T_k(\varepsilon)$. Второй способ часто бывает удобнее при практической реализации метода.

Итерация метода завершается выбором в качестве следующего приближения управления $u^{k+1} = u^k_{\varepsilon_k}$.

Результаты исследования данного метода на сходимость аналогичны результатам, полученным в работах [30, 32, 34, 113, 177], и могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть в задаче оптимального управления (1.1), (2.1)–(2.5):*

1) справедливо неравенство (5.5);

2) функционал $J(u)$ ограничен снизу на множестве допустимых управлений;

3) области игольчатого варьирования $T_k(\varepsilon)$ подобраны таким образом, что на каждом шаге метода выполнено неравенство

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)} \bar{w}_k(t)dt \geq N_k\, \theta_k^{\sigma}\, \varepsilon, \quad \varepsilon \in [0,1], \tag{5.7}$$

$$N_k \geq N > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \sigma \geq 1.$$

Тогда при произвольном допустимом начальном приближении $u^0 = u^0(t)$ последовательность управлений, генерируемая методом, является релаксационной и сходится в смысле

$$\theta_k \to 0, \quad k \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство (5.5), положив $u = u^k$, $u_\varepsilon = u_\varepsilon^k$, $T_u(\varepsilon) = T_k(\varepsilon)$. Усилив это неравенство за счет (5.7), будем иметь

$$J(u_\varepsilon^k) - J(u) \leq -\int\limits_{T_k(\varepsilon)} \bar{w}_k(t)\, dt + M\, \varepsilon^{1+\gamma} \leq$$

$$\leq -N_k\, \theta_k^{\sigma}\, \varepsilon + M\, \varepsilon^{1+\gamma}. \tag{5.8}$$

Функция $r_k(\varepsilon) = -N_k \theta_k^{\sigma} \varepsilon + M\, \varepsilon^{1+\gamma}$ является выпуклой функцией положительного аргумента ε и достигает глобального минимума в точке

$$\varepsilon_k^* = \left(\frac{N_k\, \theta_k^{\sigma}}{M\,(1+\gamma)} \right)^{1/\gamma}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки (0,0) и $(\varepsilon_k^*, r_k(\varepsilon_k^*))$, имеет вид

$$z_k(\varepsilon) = -\frac{N_k\,\theta_k^\sigma\,\gamma}{1+\gamma}\cdot\varepsilon.$$

Воспользовавшись тем, что хорда, стягивающая две точки графика выпуклой функции, лежит не ниже графика этой функции, усиливаем (5.8):

$$J(u_\varepsilon^k) - J(u) \le -\frac{N_k\,\theta_k^\sigma\,\gamma}{1+\gamma}\,\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_k^*] \bigcap (0,1].$$

Рассмотрим первый вариант метода, когда величина ε_k в шаге 4 метода выбирается как решение задачи одномерной минимизации. Тогда

$$J(u^{k+1}) - J(u^k) \le -\frac{N_k\,\theta_k^\sigma\,\gamma}{1+\gamma}\,\min\{1, \varepsilon_k^*\}. \tag{5.9}$$

Отсюда сразу следует релаксационность метода: $J(u^{k+1}) \le J(u^k)$. Из ограниченности снизу целевого функционала вытекает сходимость

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\left[J(u^{k+1}) - J(u^k)\right] = 0.$$

Переходя в (5.9) к пределу при $k \longrightarrow \infty$, получим

$$\theta_k \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty.$$

Для второго варианта выбора ε_k на шаге 4 метода изменения в доказательстве незначительны. Поскольку l – минимальный номер, при котором справедливо (5.6), то для $(l-1)$ это неравенство не выполнено. Данный случай возможен лишь, если

$$\delta^{l-1} > \min\{1, \varepsilon_k^*\},$$

а, следовательно,

$$\delta^l > \delta\,\min\{1, \varepsilon_k^*\}.$$

Подставляя это неравенство в (5.6), имеем

$$J(u_\varepsilon^k) - J(u) \le -\delta\,\frac{N_k\,\theta_k^\sigma\,\gamma}{1+\gamma}\,\min\{1, \varepsilon_k^*\}.$$

Данное неравенство отличается от(5.9) лишь постоянным множителем δ в правой части, что не влияет на дальнейшие рассуждения.

Тем самым теорема 5.1 доказана.

Различные модификации метода отличаются способами построения множеств $T_k(\varepsilon)$, для которых выполняется неравенство (5.7). Дадим краткий обзор этих способов.

В [28, 113] предложено строить множество $T_k(\varepsilon)$ в виде объединения однопараметрического семейства отрезков, вписанных во множество

$$\Omega_k(\beta) = \{t \in T: \ \bar{w}_k(t) \geq \beta\, \theta_k\},$$

где $\beta \in (0,1]$ – параметр метода. В статье [28] впервые сформулировано неравенство, определяющее множество $T_k(\varepsilon)$ в виде, менее общем, чем (5.7)

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)} \bar{w}_k(t)\, dt \geq N\, \theta_k\, \varepsilon. \tag{5.10}$$

Это неравенство справедливо либо при предположении, что существует константа $h > 0$, не зависящая от номера итерации, при котором для объединения отрезков $T_k(1) \subset \Omega_k(\beta)$ выполняется условие $mes T_k(1) \geq h$, либо в случае, если функции $\bar{w}_k(t)$ ограничены сверху [32, 177].

В статье [177] приведен способ построения областей варьирования $T_k(\varepsilon)$ путем выделения отрезков невозрастания и неубывания функции $\bar{w}_k(t)$. Идея такой модификации метода была высказана в [34].

В [104] предложена схема метода с двумерной внутренней задачей. В качестве областей варьирования выбиралось двухпараметрическое семейство множеств

$$T_k(\tau, \varepsilon) = [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon] \cap T, \quad \tau \in T.$$

В [105] реализовано распараллеливание двухпараметрической задачи.

Авторы работы [237] рассмотрели аксиоматический путь построения множеств $T_k(\varepsilon)$. При этом выполнение аксиом, изложенных в работе, влечет выполнение определяющего неравенства (5.7). Обратное выполняется не всегда.

Определенное завершение этим исследованиям подведено в работах В.А. Срочко [153, 155], где обоснован оптимальный способ варьирования управлений с точки зрения выбора функции $\chi_\varepsilon(t)$ в (5.4), обеспечивающего наискорейшее убывание целевого функционала. Меру множества варьирования $\varepsilon\,(t_1 - t_0)$ зададим в виде ограничения

$$\int\limits_T \chi_\varepsilon(t)\,dt = \varepsilon\,(t_1 - t_0), \quad \varepsilon \in [0,1]. \tag{5.11}$$

Из формулы приращения целевого функционала (3.7)–(3.8) и оценки остаточного члена, полученной на основе неравенства (3.9), следует, что

$$J(u_\varepsilon) - J(u) = \delta J(u, u_\varepsilon, \chi_\varepsilon) + o(\varepsilon),$$

где вариация

$$\delta J(u, u_\varepsilon, \chi_\varepsilon) = -\int\limits_T \chi_\varepsilon(t)\,\Delta_{u_\varepsilon} h(p(t), x^+(s_0,t), u(t), t)\,dt \tag{5.12}$$

имеет порядок ε. В [153, 155] рассмотрена задача на минимум (5.12) по $\bar{u} \in U$, $\chi_\varepsilon = \chi_\varepsilon(t)$, служащих параметрами игольчатой вариации (5.4). Решением этой задачи являются функция $\bar{u} = \bar{u}(t)$, удовлетворяющая (5.1), и характеристическая функция, определяемая из условия

$$\chi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \bar{w}_u(t) < \lambda, \\ 1, & \bar{w}_u(t) > \lambda, \\ 0 \text{ или } 1, & \bar{w}_u(t) = \lambda. \end{cases}$$

Здесь λ – множитель Лагранжа, определяемый из уравнения (5.11), которое, как показано в [153], разрешимо при любых ε из отрезка $[0,1]$. Полученное семейство множеств варьирования удовлетворяет определяющему неравенству в форме (5.10).

Заметим, что аналитическое решение уравнения (5.11) в общем случае невозможно. Поэтому применение изложенного выше результата при практическом решении большинства задач носит характер рекомендации направленного перебора по параметру $\lambda \in [\operatorname{ess}\inf_{t\in T} \bar{w}(t),\ \operatorname{ess}\sup_{t\in T} \bar{w}(t)]$ управлений

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} u(t), & \bar{w}_u(t) < \lambda, \\ \bar{u}(t), & \bar{w}_u(t) > \lambda, \\ u(t) \text{ или } \bar{u}(t), & \bar{w}_u(t) = \lambda. \end{cases}$$

Отметим также, что в рассмотренной задаче возможно также применение алгоритмов улучшения, основанных на конструктивном использовании достаточных условий оптимальности в форме В.Ф.Кротова [17].

Таким образом, для решения задачи оптимального управления (1.1), (2.1)– (2.5) можно применять весь набор достаточно эффективных методов, разработанных для задач оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.6. ВАРИАЦИОННЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ, ЛИНЕЙНЫХ ПО СОСТОЯНИЮ

Полученный выше принцип максимума является достаточно прогнозируемым в задаче (1.1), (2.1)– (2.5). Игольчатая вариация управления, благодаря дифференциальной связи на границе, вызывает малое по норме пространства $C(T)$ возмущение начального состояния, которое затем распространяется по области П. К значительно более полным и нестандартным результатам приводит рассмотрение частного класса задач типа (1.1), (2.1)– (2.5) с линейными по состоянию правыми частями дифференциальных уравнений и зависящими от управления коэффициентами при фазовых переменных. Последнее обстоятельство является причиной того, что в задаче даже в случае линейного целевого функционала не будут выполнены условия достаточности принципа максимума, сформулированные в теореме 4.2. Неэффективными здесь оказываются и достаточные условия теоремы 4.3. Кроме того, применение для такой задачи общих алгоритмов пункта 1.5 приводит к итерационному процессу, на каждом шаге которого необходимо неоднократно интегрировать системы гиперболических уравнений.

Ниже для такой, в целом, нелинейной задачи оптимизации доказываются необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности в форме вариационного принципа максимума. Доказательство базируется на двух нестандартных точных (без остаточного члена) формулах приращения целевого функционала, использующих проварьированное фазовое состояние системы или решение сопряженной задачи. Следствием вариационного принципа максимума являются два варианта редукции распределенной задачи к задаче оптимального управления обыкновенными динамическими системами.

1.6.1. Постановка задачи. Пусть в задаче (1.1), (2.1)– (2.5) функции $f(x(s,t),s,t)$, $\varphi(x(s,t_1),s)$, $g(x^+(s_0,t),u(t),t)$ и $F(x,s,t)$ линейны по состоянию:

$$f(x,s,t) = B(s,t)x + d(s,t),$$

$$g(x^+(s_0,t),u,t) = C(u(t),t)x^+(s_0,t) + b(u(t),t),$$

$$\varphi(x(s,t_1),s) = \langle c(s), x(s,t_1)\rangle,$$

$$F(x,s,t) = \langle b_0(s,t), x(s,t)\rangle.$$

Здесь $B(s,t)$ и $C(u(t),t)$ – матричные функции размерности $n \times n$ и $m_1 \times m_1$ соответственно; $d(s,t)$, $c(s)$, $b_0(s,t)$ – n - мерные, $b(u,t)$ – m_1 - мерная вектор-функции. Тогда получим следующую задачу оптимального управления:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = B(s,t)x + d(s,t), \tag{6.1}$$

$$(s,t) \in \Pi = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1];$$

$$x(s, t_0) = x^0(s), \quad s \in S; \tag{6.2}$$

$$x^-(s_1, t) = q(t), \quad t \in T; \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial x^+(s_0, t)}{\partial t} = C(u(t), t) x^+(s_0, t) + b(u(t), t), \quad t \in T; \tag{6.4}$$

$$x^+(s_0, t_0) = \left(x^0(s_0)\right)^+;$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad U \subset E^r; \tag{6.5}$$

$$J(u) = \int\limits_S \langle c(s), x(s, t_1)\rangle\, ds + \iint\limits_\Pi \langle b_0(s,t), x(s,t)\rangle\, ds\, dt. \tag{6.6}$$

Задача (6.1)– (6.6) рассматривается в предположениях пункта 1.2.

Рассматриваемая задача не относится к классу линейно-выпуклых задач, для которых в силу теоремы 4.2 принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности

Нетрудно убедиться, что для задачи (6.1)– (6.6) тривиально выполняются условия MH и MB теоремы 4.3, однако условие Mh, вообще говоря, не выполнено.

1.6.2. Вариационные принципы максимума. Построим отличный от классического точный вариант формулы приращения целевого функционала. Рассмотрим два допустимых процесса $\{u, x = x(s,t,u)\}$, $\{\tilde{u} = u + \Delta u,\ \tilde{x} = x(s,t,\tilde{u}) = x + \Delta x\}$. Тогда система для приращений состояния имеет вид

$$D_A \Delta x = B(s,t)\Delta x, \quad (s,t) \in \Pi; \tag{6.7}$$

$$\Delta x(s, t_0) = 0, \quad s \in S; \quad \Delta x^-(s_1, t) = 0, \quad t \in T.$$

$$\Delta x_t^+(s_0, t) = C(\tilde{u}(t), t)\tilde{x}^+(s_0, t) - C(u(t), t) x^+(s_0, t) -$$

$$-\Delta b(u(t), t), \quad t \in T, \tag{6.8}$$

$$\Delta x^+(s_0, t_0) = 0,$$

где $\Delta b(u(t),t) = b(\tilde u(t),t) - b(u(t),t)$.

Преобразуем правую часть формулы (6.8), используя представление

$$C(\tilde u,t)\,\tilde x^+(s_0,t) - C(u,t)\,x^+(s_0,t) =$$

$$= \Delta_{\tilde u} C(u(t),t)\tilde x^+(s_0,t) + C(u(t),t)\Delta x^+(s_0,t) \qquad (6.9)$$

и с учетом (6.7) получим формулу приращения целевого функционала

$$\Delta J(u) = J(\tilde u) - J(u) = \int\limits_S \langle c(s), \Delta x(s,t_1)\rangle\, ds +$$

$$+ \iint\limits_\Pi \langle \psi(s,t), D_A\Delta x - B(s,t)\Delta x(s,t)\rangle\, ds\, dt +$$

$$+ \iint\limits_\Pi \langle b_0(s,t), \Delta x(s,t)\rangle\, ds\, dt + \int\limits_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t) -$$

$$-\Delta_{\tilde u} C(u(t),t)\tilde x^+(s_0,t) - C(u(t),t)\Delta x^+(s_0,t) -$$

$$-\Delta b(u(t),t)\rangle\, dt, \qquad (6.10)$$

где $\psi(s,t) = (\psi_1(s,t), \psi_2(s,t), \ldots, \psi_n(s,t))$; $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_{m_1}(t))$ – пока произвольные вектор-функции, имеющие такие же аналитические свойства, как и функции $(s,t) \to x(s,t)$, $\ t \to x^+(s_0,t)$ соответственно.

В (6.10) применим к слагаемым

$$\int\limits_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t)\rangle\, dt; \quad \iint\limits_\Pi \langle \psi(s,t), D_A\Delta x\rangle\, ds\, dt$$

обычную и обобщенную (1.8) формулы интегрирования по частям соответственно. Получим

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \langle c(s), \Delta x(s,t_1)\rangle\, ds + \int\limits_S \langle \psi(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\rangle\, ds -$$

$$- \iint\limits_\Pi \langle D_A\psi + A_s\psi + B^T\psi, \Delta x\rangle\, ds\, dt +$$

$$+ \iint\limits_\Pi \langle b_0(s,t), \Delta x(s,t)\rangle\, ds\, dt + \int\limits_T \Big[\langle A^+(s_1,t)\psi^+(s_1,t), \Delta x^+(s_1,t)\rangle -$$

$$-\langle A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), \Delta x^+(s_0,t)\rangle - \langle A^-(s_0,t)\psi^-(s_0,t), \Delta x^-(s_0,t)\rangle -$$

$$-\langle \dot{p}(t), \Delta x^+(s_0,t)\rangle - \langle p(t), \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t)\tilde{x}^+(s_0,t) +$$

$$+ C(u(t),t)\Delta x^+(s_0,t) + \Delta b(u(t),t)\rangle \Big]\, dt + \langle p(t_1), \Delta x^+(s_0,t_1)\rangle.$$

В последнем интеграле откажемся от традиционного перехода к невозмущенному значению состояния $x^+ = x^+(s_0,t,u)$ и потребуем, чтобы функции $\psi(s,t)$ и $p(t) = p(t,u)$ являлись решениями следующей сопряженной задачи:

$$D_A\psi + A_s\psi = -B^T(s,t)\psi + b_0(s,t), \quad (s,t) \in \Pi; \tag{6.11}$$

$$\psi(s,t_1) = -c(s), \quad s \in S;$$

$$\psi^+(s_1,t) = 0, \quad \psi^-(s_0,t) = 0, \quad t \in T.$$

$$\dot{p} = -C^T(u(t),t)p(t) - A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), \quad t \in T; \tag{6.12}$$

$$p(t_1) = 0.$$

Окончательно получим формулу приращения целевого функционала в виде

$$\Delta J(u) = -\int_T \langle p(t,u), \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t)x^+(s_0,t,\tilde{u}) + \Delta b(u(t),t)\rangle\, dt. \tag{6.13}$$

Вторая формула приращения является симметричной и получается в результате использования в (6.8) следующего представления

$$C(\tilde{u},t)\,\tilde{x}^+ - C(u,t)\,x^+ = \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t)x^+ + C(\tilde{u},t)\Delta x^+. \tag{6.14}$$

Тогда

$$\Delta J(u) = -\int_T \langle p(t,\tilde{u}), \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t)\, x^+(s_0,t,u) + \Delta b(u(t),t)\rangle\, dt. \tag{6.15}$$

В силу произвольности допустимых управлений $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$ формула (6.15) может быть также получена из (6.13) формальной заменой u на $\tilde{u}$ и $\tilde{u}$ на u.

Отметим принципиальное отличие формул (6.13), (6.15) от стандартной формулы приращения (3.7)–(3.8), использованной ранее при доказательстве принципа максимума: формулы (6.13), (6.15) являются точными (без остаточных членов). Однако при этом система (6.4) или система (6.12) интегрируются на возмущенных управлениях. Каждая из формул (6.13), (6.15) непосредственно приводит к необходимым и достаточным условиям оптимальности, которые сводят исходную задачу к линейным по состоянию задачам оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Достаточно заметить, что в (6.13) все пары $(\tilde{u}, \tilde{x}^+)$ связаны системой обыкновенных дифференциальных уравнений (6.4), а в (6.15) системой (6.12) связаны пары $(\tilde{u}, p(t, \tilde{u}))$. Соответствующие результаты естественно назвать вариационными принципами максимума для линейных по состоянию задач оптимизации гиперболических систем.

Для точной формулировки условий оптимальности, вытекающих из формулы (6.13), введем в рассмотрение следующую задачу оптимального управления $LP(y)$ системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} I(v) = -\int\limits_T \langle p(t,u), (C(v(t),t) - C(u(t),t))y(t,v) + \\ + b(v(t),t) - b(u(t),t)\rangle \, dt \to \min, \\ \dot{y} = C(v(t),t)y + b(v(t),t), \quad t \in T, \\ y(t_0) = \left(x^0(s_0)\right)^+, \\ v(t) \in U, \quad t \in T. \end{gathered} \tag{6.16}$$

Здесь $u(t)$, $p(t,u)$ – фиксированные функции, $y = y(t)$ – m_1-мерная функция состояния, $v(t)$ – управление, удовлетворяющее тем же ограничениям, что и управляющая функция исходной задачи оптимального управления.

Аналогично, формула (6.15) естественным образом приводит к следующей задаче $LP(p)$:

$$\Phi(v) = -\int_T \langle p(t,v), (C(v(t),t) - C(u(t),t))\, x^+(s_0,t,u) +$$

$$+ b(v(t),t) - b(u(t),t)\rangle\, dt \to \min,$$

$$\dot p = -C^T(v(t),t)p - A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), \quad t \in T, \tag{6.17}$$

$$p(t_1) = 0,$$

$$v(t) \in U, \quad t \in T.$$

Здесь $u(t)$, $\psi^+(s_0,t)$, – фиксированные функции; $x^+(s_0,t,u)$ – решение задачи Коши (6.4) при $u = u(t)$; $p = p(t)$ – m_1-мерная функция состояния.

Теорема 6.1. (вариационные принципы максимума).*Для оптимальности управления $\tilde u(t)$ в задаче (6.1)–(6.6) необходимо и достаточно, чтобы управление $\tilde v = \tilde u(t)$ было оптимальным в каждой из задач $LP(y)$ и $LP(p)$. В частности, это необходимо и достаточно для оптимальности исследуемого управления $u(t)$.*

Доказательство непосредственно следует из формул (6.13), (6.15). Из этих же формул вытекает, что оптимальное значение функционала в задаче (6.1)–(6.6) равно

$$J(\tilde u) = J(u) + I(\tilde u) = J(u) + \Phi(\tilde u).$$

Примечательно, что если условия оптимальности этой теоремы, связанные с задачей $LP(y)$, можно получить из принципа Лагранжа (например, детализируя лагранжиан в доказательстве теоремы 4.3), то для задачи $LP(p)$ этого сделать нельзя и, по-видимому, наличие двух систем оптимальности является одним из проявлений двойственности в задаче (6.1)–(6.6).

1.6.3. Редукции задач и методы решения. Обсудим конструктивные особенности редукций, вытекающих из теоремы 6.1, а также возможные численные методы улучшения.

Из формулы (6.13) и соответствующего вариационного принципа максимума следует, что для решения задачи оптимального управления (6.1)-(6.6) необходимо выполнить следующие операции.

1) Задать произвольное допустимое управление $u(t)$. Вычислить соответствующее ему решение $p = p(t, u)$ сопряженной задачи (6.12). Отметим, что для этого необходимо также найти решение задачи (6.11), которое не зависит от выбора допустимого процесса.

2) Решить задачу оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений (6.16).

Следовательно, для решения исходной задачи (6.1)-(6.6) необходимо всего лишь 2 раза проинтегрировать системы дифференциальных уравнений с частными производными (поиск $\psi = \psi(s, t)$ и состояния, соответствующего оптимальному управлению).

Решение задачи оптимального управления (6.1)-(6.6) на основе формулы (6.15) и соответствующего вариационного принципа максимума сводится к следующим операциям.

1) Задается произвольное допустимое управление $u(t)$. Вычисляются $x^+ = x^+(s_0, t, u)$ и $\psi = \psi(s, t)$.

2) Решается задача оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений (6.17). Трудоемкость реализации данной схемы та же – двукратное интегрирование систем дифференциальных уравнений с частными производными, а также решение линейной по состоянию задачи оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Подчеркнем еще раз, что если бы задача (6.1)-(6.6) решалась итерационными процессами классического принципа максимума, изложенными в пункте 1.4, то на каждой итерации приходилось бы неоднократно интегрировать гиперболическую систему (6.1). Отметим также, что для решения вспомогательных задач (6.16), (6.17), на данный момент уже хорошо изученных, можно использовать весь набор достаточно эффективных методов, разработанных для задач оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим, например, подробнее задачу оптимального управления (6.17). С математической точки зрения, это линейная задача оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее характерной особенностью является то, что матрица коэффициентов системы зависит от управления. Таким образом, принцип максимума не является достаточным условием оптимальности. Для решения можно использовать нестандартные процедуры, также основанные на идеях точных формул приращения [2, 156, 157].

Для двух допустимых процессов $\{v, p\}$ и $\{\tilde{v} = v + \Delta v, \tilde{p} = p + \Delta p\}$ формула приращения целевого функционала имеет вид:

$$\Delta I(v) = \int_T \Delta_v H(\xi(t, v), p(t, \tilde{v}), v, t)\, dt, \tag{6.18}$$

или

$$\Delta I(v) = \int_T \Delta_v H(\xi(t, \tilde{v}), p(t, v), v, t)\, dt \tag{6.19}$$

где вектор-функция $\xi = \xi(t)$ удовлетворяет сопряженной системе уравнений

$$\dot{\xi} = C(v, t)\xi(t) + (C(v, t) - C(u, t))x^+(s_0, t, u), \quad t \in T,$$

$$\xi(t_0) = 0; \tag{6.20}$$

а скалярная функция $H = H(\xi, p, v, t)$ – это функция Понтрягина для задачи (6.17):

$$H(\xi, p, v, t) = \langle \xi(t), -C^T(v,t)p(t) - A^+\psi^+(s_0,t)\rangle -$$

$$-\langle p(t), (C(v,t) - C(u,t))x^+(s_0,t,u)\rangle. \qquad (6.21)$$

Введем отображение $v^*(\xi, p, t)$ с помощью экстремального соотношения

$$v^*(\xi, p, t) = \arg\min_{v \in U} H(\xi, p, v, t), \qquad (6.22)$$

где $\xi \in E^{m_1}$, $p \in E^{m_1}$, $t \in T$. Обозначим за $D_p(t)$ – множество достижимости фазовой системы в момент $t \in T$:

$$D_p(t) = \{p(t,v), \quad v \in U\};$$

$D_\xi(t)$ – множество достижимости сопряженной системы в момент $t \in T$:

$$D_\xi(t) = \{\xi(t,v), \quad v \in U\}.$$

Тогда для оптимальности управления $v(t)$ в задаче (6.23) достаточно выполнения хотя бы одного из симметричной пары условий

$$v(t) = v^*(\xi(t,v), p, t), \quad p \in D_p(t), \quad t \in T; \qquad (6.23)$$

$$v(t) = v^*(\xi, p(t,v), t), \quad \xi \in D_\xi(t), \quad t \in T. \qquad (6.24)$$

Могут быть предложены две процедуры улучшения управления v.

На основе формулы приращения (6.18) (условия (6.23)) строится первая процедура улучшения:

1) по данному v найдем $\xi(t,v), \quad t \in T$;

2) сформируем экстремальное управление

$$\tilde{v}^*(p,t) = v^*(\xi(t,v), p, t);$$

3) найдем решение $p(t), t \in T$ фазовой системы

$$\dot{p} = -C^T(\tilde{v}^*(p,t), t)p - A^+\psi^+(s_0,t),$$

$$p(t_1) = 0 \tag{6.25}$$

вместе с управлением $\quad \tilde{v}(t) = \tilde{v}^*(p(t), t), \quad t \in T.$

Свойство улучшения вполне очевидно. Поскольку

$$\tilde{v}(t) = v^*(\xi(t, v), p(t, \tilde{v}), t),$$

то в силу определения отображения v^* получаем

$$\Delta_{\tilde{v}(t)} H(\xi(t, v), p(t, \tilde{v}), v(t), t) \leq 0, \quad t \in T.$$

Отсюда на основании формулы приращения (6.18) заключаем, что

$$\Delta_{\tilde{v}} I(v) \leq 0.$$

Таким образом, для любого допустимого управления v первая процедура улучшения вырабатывает управление $\tilde{v}$ со свойством $I(\tilde{v}) \leq I(v)$. Равенство $\tilde{v}(t) = v(t)$, $t \in T$ означает, что исходное управление $v(t)$ удовлетворяет принципу максимума.

Симметричная схема улучшения получится на основе формулы приращения (6.19) (условия (6.24)):

1) по данному v найдем $p(t, v), \ \ t \in T$;

2) сформируем экстремальное управление

$$\tilde{v}^*(\xi, t) = v^*(\xi, p(t, v), t);$$

3) найдем решение $\xi(t), t \in T$ сопряженной системы

$$\dot{\xi} = C(\tilde{v}^*(\xi, t), t)\xi(t) + (C(\tilde{v}^*(\xi, t), t) - C(u, t))x^+(s_0, t, u), \ \ t \in T,$$

$$\xi(t_0) = 0 \tag{6.26}$$

вместе с управлением $\quad \tilde{v}(t) = \tilde{v}^*(\xi(t), t), \ \ t \in T.$

На выходе процедуры получим допустимое управление со свойством улучшения. Совпадение $\tilde{v}(t) = v(t)$, $t \in T$ означает принцип максимума для управления $v = v(t)$.

В целях корректности процедур естественно предположить, что решение $p(t) = p(t, \tilde{v})$ задачи Коши (6.25) в первой процедуре и решение $\xi(t) = \xi(t, \tilde{v})$ задачи Коши (6.26) во второй процедуре существуют на T, причем соответствующее управление $\tilde{v}(t)$, $t \in T$ в обоих случаях является ограниченной и измеримой вектор-функцией.

По трудоемкости реализации вторая процедура аналогична первой: и в том и в другом случае цена улучшения составляет две задачи Коши (для фазовой и сопряженной систем).

Существенной особенностью обеих процедур является то, что их реализация связана с интегрированием разрывных по фазовым или сопряженным переменным систем (6.25) или (6.26). В работах В.А.Срочко с соавторами [2, 156, 157] показано, что возможная неединственность решения, возникающая при интегрировании разрывных систем, не является недостатком. Наоборот, неединственность решения позволяет в ряде случаев улучшать управления, удовлетворяющие принципу максимума.

Аналогичная схема может быть также предложена и для задачи (6.16). Для решения вспомогательных задач (6.16), (6.17) могут применяться и другие, ставшие уже классическими, методы поиска решения задач оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.7. ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Продолжим исследование задачи оптимального управления теперь по квадратичному критерию. В таких задачах реализация идей п.1.6 потребует не только векторных, но и матричных сопряженных функций.

1.7.1. Постановка задачи и первая формула приращения. Пусть допустимый процесс $\{u, x\}$ подчинен начально-краевой задаче (6.1)-(6.4) с ограничениями на управление (6.5). Целью задачи будем считать минимизацию квадратичного критерия качества

$$J(u) = \int\limits_S \Big(\langle c(s), x(s,t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle D(s)\, x(s,t_1), x(s,t_1)\rangle \Big)\, ds+ \tag{7.1}$$

$$+ \iint\limits_{\Pi} \Big(\langle b_0(s,t), x(s,t)\rangle + \frac{1}{2}\langle Q(s,t)x(s,t), x(s,t)\rangle \Big)\, ds\, dt \to \min .$$

Будем предполагать, что матрицы $B(s,t)$, $Q(s,t)$ и $D(s)$ – диагональные, причем элементы матрицы $Q(s,t)$ и функция $b_0(s,t)$ непрерывны по своим аргументам. Никаких предположений о знакоопределенности матриц не делается.

Рассмотрим два допустимых процесса $\{u, \quad x = x(s,t,u)\}$ и $\{\tilde{u} = u + \Delta u, \quad \tilde{x} = x(s,t,\tilde{u}) = x + \Delta x\}$. Воспользовавшись тем, что для произвольной симметричной матрицы G справедливо равенство

$$\langle G\tilde{x}, \tilde{x}\rangle - \langle Gx, x\rangle = \langle G\Delta x, \Delta x\rangle + 2\langle Gx, \Delta x\rangle,$$

выпишем формулу приращения функционала (7.1)

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \langle c(s) + D(s)\, x(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\rangle\, ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_S \langle D(s)\, \Delta x(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\rangle\, ds+$$

$$+\iint\limits_{\Pi} \langle Q(s,t)x(s,t) + b_0(s,t), \Delta x(s,t)\rangle\, ds\, dt+$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Pi} \langle Q(s,t)\Delta x(s,t), \Delta x(s,t)\rangle\, ds\, dt.$$

Добавим, как и ранее, в формулу приращения нулевые слагаемые

$$\iint\limits_{\Pi} \langle \psi(s,t), D_A \Delta x - B(s,t)\Delta x(s,t)\rangle\, ds\, dt,$$

$$\int\limits_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t) - \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t)\tilde{x}^+(s_0,t) -$$

$$-C(u(t),t)\Delta x^+(s_0,t) - \Delta b(u(t),t)\rangle\, dt,$$

а также

$$\iint\limits_{\Pi} \langle \Psi(s,t)\Delta x(s,t), D_A \Delta x - B(s,t)\Delta x(s,t)\rangle\, ds\, dt,$$

$$\int\limits_T \langle P(t)\Delta x^+(s_0,t), \Delta x_t^+(s_0,t) - \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t)\tilde{x}^+(s_0,t)-$$

$$-C(u(t),t)\Delta x^+(s_0,t) - \Delta b(u(t),t)\rangle\, dt,$$

где $\psi(s,t)$ и $p(t)$ – пока произвольные вектор-функции, $\Psi(s,t)$ – диагональная, а $P(t)$ – симметричная матрицы-функции размерности $n \times n$ и $m_1 \times m_1$ соответственно. В данных формулах правая часть (6.8) представлена с использованием (6.9).

К слагаемым

$$\int\limits_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t)\rangle\, dt, \quad \int\limits_T \langle P(t)\Delta x^+(s_0,t), \Delta x_t^+(s_0,t)\rangle\, dt$$

применим обычную формулу интегрирования по частям, а к слагаемым

$$\iint\limits_{\Pi} \langle \psi(s,t), D_A \Delta x\rangle\, ds\, dt, \quad \iint\limits_{\Pi} \langle \Psi(s,t)\Delta x(s,t), D_A \Delta x\rangle\, ds\, dt$$

– ее обобщенный вариант (1.8). После этого введем сопряженные задачи

$$\begin{gathered} D_A\psi + A_s\psi = -B(s,t)\psi + b_0(s,t) + Q(s,t)x(s,t), \quad (s,t) \in \Pi, \\ \psi(s,t_1) = -c(s) - D(s)x(s,t_1), \quad s \in S, \\ \psi^+(s_1,t) = 0, \quad \psi^-(s_0,t) = 0, \quad t \in T; \end{gathered} \tag{7.2}$$

$$\begin{gathered} \dot{p} = -A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t) - C^T(u(t),t)p, \\ p(t_1) = 0; \end{gathered} \tag{7.3}$$

$$\begin{gathered} D_A\Psi + A_s\Psi = -2\Psi B(s,t) + Q(s,t), \quad (s,t) \in \Pi, \\ \Psi(s,t_1) = -D(s), \quad s \in S, \end{gathered} \tag{7.4}$$

$$\Psi^+(s_1, t) = 0, \quad \Psi^-(s_0, t) = 0, \quad t \in T;$$

$$\dot{P}(t) = -A^+(s_0, t)\Psi^+(s_0, t) - C^T(u(t), t)P - PC(u(t), t),$$
$$P(t_1) = 0. \tag{7.5}$$

Система (7.4) представляет собой n скалярных уравнений для диагональных элементов матрицы $\Psi(s, t)$. Качественно (7.4) совпадает с системой гиперболических уравнений (6.1) с диагональной матрицей коэффициентов. Отметим, что данная система не зависит от управления, а, следовательно, решается всего один раз.

Окончательный вариант формулы приращения принимает следующий вид:

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \langle p(t, u) + P(t, u)(x^+(s_0, t, \tilde{u}) -$$
$$-x^+(s_0, t, u)), \Delta_{\tilde{u}} C(u(t), t) x^+(s_0, t, \tilde{u}) + \Delta b(u(t), t)\rangle \, dt. \tag{7.6}$$

Вводя функции

$$\zeta(t, u, x^+(s_0, t, \tilde{u})) = p(t, u) + P(t, u)\,(x^+(s_0, t, \tilde{u}) - x^+(s_0, t, u)),$$

$$h(\zeta, x^+, u, t) = \langle \zeta, C(u(t), t)x^+(s_0, t, u) + b(u(t), t)\rangle,$$

формулу приращения можно переписать в более традиционной форме

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \Delta_{\tilde{u}} h(\zeta(t, u, x^+(s_0, t, \tilde{u})), x^+(s_0, t, \tilde{u}), u(t), t)\, dt.$$

Формула (7.6) в рассматриваемом случае является аналогом формулы (6.13). Она не содержит остаточных членов, но фигурирующие в ней значения $x^+ = x^+(s_0, t, \tilde{u})$ подсчитываются на управлении $\tilde{u} = u + \Delta u$. По аналогии с линейным случаем сформулируем необходимое и достаточное условие оптимальности.

1.7.2. Вариационный принцип максимума. Введем в рассмотрение линейно-квадратичную задачу $LQP(y)$ оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$I(v) = -\int_T \langle p(t,u) + P(t,u)\,(y(t,v) - x^+(s_0,t,u)), (C(v(t),t) -$$
$$- C(u(t),t))\,y(t,v) + b(v(t),t) - b(u(t),t)\rangle\,dt \to \min, \tag{7.7}$$
$$\dot{y} = C(v(t),t)y + b(v(t),t), \quad t \in T,$$
$$y(t_0) = \left(x^0(s_0)\right)^+,$$
$$v(t) \in U \quad t \in T.$$

Здесь $u(t)$ – фиксированная функция из класса допустимых управлений. Для наглядности в целевом функционале задачи (7.7) выделим квадратичную и линейную части.

$$I(v) = -\int_T \langle (C(v(t),t) - C(u(t),t))^T P(t,u)y(t,v), y(t,v)\rangle\,dt -$$
$$-\int_T \langle (C(v(t),t) - C(u(t),t))^T (p(t,u) - P(t,u)x^+(s_0,t,u)) +$$
$$+ P(t,u)(b(v(t),t) - b(u(t),t)), y(t,v)\rangle\,dt -$$
$$-\int_T \langle p(t,u) - P(t,u)x^+(s_0,t,u), b(v(t),t) - b(u(t),t)\rangle\,dt.$$

Матрица коэффициентов в первом интеграле может быть преобразована в симметричную с помощью стандартной операции симметризации.

Теорема 7.1. (вариационный принцип максимума). *Для оптимальности управления $\tilde{u}(t)$ в задаче (6.1)-(6.5), (7.1) необходимо и достаточно, чтобы управление $\tilde{v} = \tilde{u}(t)$ было оптимальным в задаче $LPQ(y)$.*

Доказательство непосредственно вытекает из формулы приращения (7.6). Из этой же формулы следует, что оптимальное значение функционала

$$J(\tilde{u}) = J(u) + I(\tilde{u}).$$

Вариационный принцип максимума позволяет предложить следующий метод, основанный на идее редукции исходной задачи оптимального управления к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

1) Задается произвольное допустимое управление $u(t)$. Вычисляется соответствующее ему решение $x = x(s, t, u)$ начально - краевой задачи (6.1)-(6.4) для исходной гиперболической системы. Решаются сопряженная задача (7.2) для функции $\psi = \psi(s, t, u)$ и независящая от выбора управления задача (7.4) для функции $\Psi = \Psi(s, t)$. Далее определяются решения задач Коши (7.3), (7.5) для векторной и матричной функций $p = p(t, u)$, $P = P(t, u)$.

2) Решается задача минимизации квадратичного функционала в линейной по состоянию системе обыкновенных дифференциальных уравнений (7.7).

Итак, для решения задачи (6.1)-(6.5), (7.1) необходимо 3–4 раза проинтегрировать системы гиперболических уравнений (поиск $x = x(s, t, u)$, $\psi = \psi(s, t, u)$, $\Psi = \Psi(s, t)$ и при необходимости $x^* = x^*(s, t, v^*)$) и решить задачу оптимального управления с квадратичным критерием качества в линейной по состоянию системе, содержащей m_1 обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.7.3. Вторая формула приращения. Кратко остановимся на варианте формулы приращения, использующем представление (6.14). В случае линейного целевого функционала использование двух симметричных вариантов формул приращения (6.13) и (6.15) привело к двум, вообще говоря, симметричным результатам (задачи (6.16) и (6.17)). В рассматриваемом варианте квадратичного критерия качества применение второго варианта формулы приращения приводит к асимметричному результату. Формально второй вариант формулы приращения можно получить из (7.6) переменой ролей u и $\tilde{u}$.

$$\Delta J(u) = -\int_T \langle p(t,\tilde{u}) + P(t,\tilde{u})(x^+(s_0,t,u) -$$

$$-x^+(s_0,t,\tilde{u})), \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t) x^+(s_0,t,u) + \Delta b(u(t),t)\rangle\, dt. \qquad (7.8)$$

Непосредственное применение формулы (7.8) затруднительно, поскольку в ней фигурируют решения как исходной, так и сопряженных начально-краевых задач, вычисляемые на возмущенном управлении. Выполним ряд преобразований. Введем функцию

$$\zeta(t,\tilde{u},x^+(s_0,t,u)) = p(t,\tilde{u}) + P(t,\tilde{u})\left(x^+(s_0,t,u) - x^+(s_0,t,\tilde{u})\right).$$

Продифференцировав данную функцию по t с учетом (7.3), (7.5), имеем

$$\dot{\zeta}(t) = -A^+(s_0,t)\big(\psi^+(s_0,t,\tilde{u}) +$$

$$+\Psi^+(s_0,t)(x^+(s_0,t,u) - x^+(s_0,t,\tilde{u}))\big) -$$

$$-C^T(\tilde{u}(t),t)\zeta - P(t,\tilde{u})(\Delta_{\tilde{u}} C(u,t) x^+(s_0,t,u) + \Delta b(u(t),t)),$$

$$\zeta(t_1) = 0.$$

Введем функцию

$$\chi(s,t,\tilde{u},u) = \psi(s,t,\tilde{u}) + \Psi(s,t)(x(s,t,u) - x(s,t,\tilde{u})).$$

Применив к данной функции сопряженный дифференциальный оператор, получим

$$D_A\chi + A_s\chi = -B(s,t)\chi + b_0(s,t) + Q(s,t)x(s,t,u),$$

$$\chi(s,t_1) = -c(s) - D(s)\, x(s,t_1,u), \qquad (7.9)$$

$$\chi^+(s_1,t) = 0, \qquad \chi^-(s_0,t) = 0.$$

Из (7.9) следует, что функция χ может быть однозначно определена из системы гиперболических уравнений и не зависит от выбора $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$.

Поэтому в дальнейшем для функции χ будем использовать обозначение $\chi = \chi(s, t, u)$.

Таким образом, формула приращения целевого функционала преобразована к следующему виду:

$$\Delta J(u) = -\int_T \langle \zeta(t, \tilde{u}, x^+(s_0, t, u)), \Delta_{\tilde{u}} C(u(t), t) x^+(s_0, t, u) +$$

$$+\Delta b(u(t), t) \rangle \, dt, \tag{7.10}$$

$$\dot{\zeta}(t) = -A^+(s_0, t)\chi^+(s, t, u) - C^T(\tilde{u}(t), t)\zeta -$$

$$-P(t, \tilde{u})(\Delta_{\tilde{u}} C(u, t) x^+(s_0, t, u) + \Delta b(u(t), t)),$$

$$\zeta(t_1) = 0; \tag{7.11}$$

$$\dot{P}(t) = -A^+(s_0, t)\Psi^+(s_0, t) - C^T(\tilde{u}(t), t)P - PC(\tilde{u}(t), t),$$

$$P(t_1) = 0.$$

Формула приращения (7.10) позволяет сформулировать необходимое и достаточное условие оптимальности вида вариационного принципа максимума и предложить следующую схему решения задачи (6.1)-(6.5), (7.1).

1) Задается произвольное допустимое управление $u(t)$. Вычисляется соответствующее ему решение $x = x(s, t, u)$ начально-краевой задачи (6.1)-(6.4) для исходной гиперболической системы. Решаются начально - краевая задача (7.9) для определения функции $\chi = \chi(s, t, u)$ и независящая от выбора управления задача (7.4) для функции $\Psi = \Psi(s, t)$.

2) Находится решение вспомогательной задачи минимизации линейного по состоянию целевого функционала (7.10)

$$I(\tilde{u}) = J(\tilde{u}) - J(u) \to \min_{\tilde{u}}$$

в линейной по состоянию системе, состоящей из $m_1^2 + m_1$ обыкновенных дифференциальных уравнений (7.11). Пусть $\tilde{u}^* = \tilde{u}^*(t)$ – решение этой вспомогательной задачи. Из формулы приращения (7.10) следует, что это управление является оптимальным в исходной задачи, причем оптимальное значение критерия качества

$$J(\tilde{u}^*) = J(u) + I(\tilde{u}^*).$$

Итак, применение формул (7.6) и (7.8) позволило свести рассматриваемую задачу оптимального управления (6.1)-(6.5), (7.1) к двум различным по структуре задачам оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Использование (7.6) приводит к вспомогательной задаче минимизации квадратичного функционала в системе из m_1 линейных по состоянию обыкновенных дифференциальных уравнений. Результатом же применения (7.8) является вспомогательная задача минимизации линейного функционала в системе из $m_1^2 + m_1$ линейных по состоянию обыкновенных дифференциальных уравнений (в силу симметричности матричной функции $P = P(s,t)$ число обыкновенных дифференциальных уравнений на самом деле несколько меньше – $(m_1^2 + 3m_1)/2$). В обоих случаях для реализации методов необходимо также решить 3 начально-краевые задачи для систем гиперболических уравнений и в конце проинтегрировать исходную гиперболическую систему для поиска состояния, соответствующего найденному оптимальному управлению.

1.7.4. Заключительные замечания. Отметим характерную особенность задач оптимального управления, к которым сводится исследуемая задача – все системы обыкновенных дифференциальных уравнений линейны по состоянию с зависящими от управления матрицами коэффициентов при фазовых переменных. Последнее обстоятельство позволяет использовать для решения вспомогательных задач эффективные подходы, основанные на неклассических точных формулах приращения целевых функционалов теперь уже в задачах оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений [73, 154, 156, 158]. Существенной чертой этих подходов является интегрирование разрывных по фазовым или сопряженным переменным систем. Возможные неединственные решения позволяют в ряде случаев улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие принципу максимума. Для квадратичного целевого функционала качество методов значительно улучшается за счет дополнительных квадратичных, "регуляризующих" добавок [17, 156, 158].

Естественным желанием является распространение изложенного выше подхода на случай нелинейного целевого функционала. В качестве замечания кратко остановимся на следующем случае.

Пусть допустимый процесс $\{u, x\}$ подчинен начально-краевой задаче (6.1)–(6.4) с ограничениями на управление (2.5). Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u) = \int\limits_S \varphi(x(s,t_1), s)\, ds + \iint\limits_\Pi F(x,s,t)\, ds\, dt, \tag{7.12}$$

в котором функции $\varphi = \varphi(x,s)$ и $F = F(x,s,t)$ вогнуты по x.

Аналог формулы (6.13) будет выглядеть следующим образом:

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \langle p(t,u), \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t) x^+(s_0,t,\tilde{u}) + \Delta b(u(t),t)\rangle\, dt +$$

$$+ \int\limits_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)\, ds + \iint\limits_\Pi o_F(\|\Delta x(s,t)\|)\, ds\, dt, \tag{7.13}$$

где функция $p = p(t,u)$ определяется из сопряженной задачи (6.12), в которой функция $\psi = \psi(s,t)$ является решением следующей задачи

$$D_A\psi + A_s\psi = -B^T(s,t)\psi + F_x(x,s,t), \quad (s,t) \in \Pi;$$

$$\psi(s,t_1) = -\varphi_x(x(s,t_1),s), \quad s \in S; \tag{7.14}$$

$$\psi^+(s_1, t) = 0, \quad \psi^-(s_0, t) = 0, \quad t \in T.$$

Отметим, что в отличие от (6.11) решение задачи (7.14) зависит от состояния $x = x(s, t)$, а, следовательно, и от управления $u = u(t)$.

Наличие остаточных членов в формуле (7.13) не позволяет распространить на исследуемый случай выводы о возможности сведения исходной задачи оптимального управления к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако неположительность остатков в (7.13), вызванная вогнутостью соответствующих интегрантов (7.12), дает возможность построить нелокальную процедуру улучшения, в которой отсутствует процедура параметрического поиска, изложенная в пункте 1.5.

Опишем одну итерацию метода. Пусть на k -ом шаге найдено управление $u^k = u^k(t)$. Определяются функции $x^k = x(s, t, u^k)$ и $\psi^k = \psi(s, t, u^k)$, являющиеся соответственно решениями начально - краевых задач (6.13)–(6.3) и (7.14). Вычисляется функция $p^k = p(t, u^k)$, являющаяся решением задачи (6.12) при $u = u^k(t)$. Решается вспомогательная задача

$$\begin{gathered}
I(v) = -\int\limits_T \langle p(t, u), (C(v(t), t) - C(u^k(t), t))y(t, v)+ \\
+b(v(t), t) - b(u^k(t), t)\rangle \, dt \to \min; \\
\dot{y} = C(v(t), t)y + b(v(t), t), \\
y(t_0) = \left(x^0(s_0)\right)^+; \\
v(t) \in U, \quad t \in T.
\end{gathered} \tag{7.15}$$

Решение этой вспомогательной задачи выбирается в качестве следующего приближения $u^{k+1} = u^{k+1}(t)$. Неположительность остаточных членов в (7.13) гарантирует релаксационность процесса: $J(u^{k+1}) \le J(u^k)$. Выполнение равенства $J(u^{k+1}) = J(u^k)$ означает, что управление $u^k(t)$ удовлетворяет принципу максимума.

Задача (7.15) является линейной по состоянию задачей оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, если матрица коэффициентов C не зависит от управления, то задача может быть решена с помощью принципа максимума Л.С.Понтрягина. В общем же случае для ее решения могут быть использованы специальные процедуры пункта 1.6.

В случае линейно-квадратичной задачи второй вариант формулы приращения привел к несимметричному результату. Для нелинейного же критерия качества аналог второго варианта формулы приращения (6.15) вообще не позволяет построить конструктивный вариант процедуры улучшения. Действительно, симметричный вариант формулы приращения имеет вид:

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \langle p(t,\tilde{u}), \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t) x^+(s_0,t,u) + \Delta b(u(t),t)\rangle\, dt +$$

$$+\int\limits_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)\, ds + \iint\limits_\Pi o_F(\|\Delta x(s,t)\|)\, ds\, dt.$$

Формально схема процедуры улучшения совпадает с изложенной выше. Однако на каждом шаге процедуры необходимо решать следующую вспомогательную задачу:

$$I(v) = -\int\limits_T \langle p(t,v), (C(v(t),t) - C(u^k(t),t))x^+(s_0,t,u^k) +$$

$$+ b(v(t),t) - b(u^k(t),t)\rangle\, dt \to \min;$$

$$\dot{p} = C^T(v(t),t)p(t) - A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t,v),$$

$$p(t_1) = 0;$$

$$v(t) \in U, \quad t \in T.$$

В силу (7.14) функция $\psi = \psi(s,t,v)$ зависит от управления $v = v(t)$. Поэтому решение этой вспомогательной задачи совпадает по сложности с решением исходной задачи оптимального управления гиперболической системой.

Укажем возможные области использования полученных результатов. Задачи оптимального управления вида (1.1), (2.1)–(2.5) возникают при исследовании процессов, связанных с переносом (например, загрязнения, излучения и т.п.), развитием во времени систем, в которых существенна возрастная структура (например, популяций, основных экономических фондов и т.п.) [54, 123, 137, 156, 236]. При этом граничные условия распределенной системы генерируются управляемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (например, осциллятор электромагнитных колебаний в задаче переноса интенсивности излучения [137]).

Для упрощения выкладок в данной работе были рассмотрены простейшие целевые функционалы. Возможно их усложнение путем введения членов, зависящих от незакрепленных компонент вектора состояния на другой границе, и интегралов, содержащих управления $u(t)$. Возможными целями могут являться: достижение заданных значений фазовых переменных в момент окончания процесса или на другой границе (квадратичный функционал), минимизация соответствующих значений компонент состояния (например, уровня загрязнения) в конечный момент времени, в заданной точке, интегральных показателей по времени и пространству (линейный функционал) и т.п.

Глава 2

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ С УПРАВЛЯЕМЫМИ КОНЕЧНОМЕРНЫМИ СВЯЗЯМИ НА ГРАНИЦЕ

Рассматривается задача оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений при конечномерных (поточечных) связях между начально-краевыми состояниями системы и управляющими воздействиями. Допустимые граничные и стартовые управления выбираются из класса ограниченных и измеримых функций. В отличие от задач, рассмотренных в предыдущей главе, в данном случае несправедливо условие оптимальности в форме поточечного принципа максимума. Доказывается неклассическое условие оптимальности типа вариационного принципа максимума. Смысл полученного результата заключается в том, что оптимальное граничное или стартовое управление почти в каждой точке является решением специальной задачи управления начальными условиями системы обыкновенных дифференциальных уравнений, построенной на семействе характеристик исходной гиперболической системы. Проводится сравнение вариационного и дифференциального принципов максимума. Доказывается, что вариационный принцип максимума является более сильным необходимым условием оптимальности. Излагается схема итерационного метода, основанного на вариационном принципе максимума.

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Продолжим исследование задачи оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \qquad (s,t) \in \Pi. \tag{1.1}$$

Как и ранее, предполагаем, что система приведена к инвариантному виду, диагональные элементы матрицы A знакопостоянны в $\bar{\Pi}$, а из вектора состояния $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выделены два подвектора: $x^+ = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_1})$ и $x^- = (x_{m_2+1},\ x_{m_2+2}, \ldots, x_n)$, $m_1 \le m_2$, соответствующих положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы A.

Для системы (1.1) поставим управляемые начальные условия

$$x(s,t_0) = p(u(s),s), \quad s \in S. \tag{1.2}$$

Для простоты изложения будем пока считать условия при $s = s_0$ и $s = s_1$ фиксированными:

$$x^+(s_0,t) = g^{(1)}(t), \quad x^-(s_1,t) = g^{(2)}(t), \quad t \in T. \tag{1.3}$$

Множеством допустимых управлений является совокупность ограниченных и измеримых на S вектор-функций $u = (u_1(s),\ u_2(s), \ldots, u_r(s))$, удовлетворяющих почти всюду на этом отрезке ограничению

$$u(s) \in U, \tag{1.4}$$

где U – компакт из пространства E^r.

Качество управляемого процесса оценим функционалом

$$J(u) = \int\limits_S \varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \int\limits_T (\varphi_0(x^-(s_0,t),t)+$$

$$+\varphi_1(x^+(s_1,t),t))\,dt + \iint\limits_\Pi F(x,s,t)\,ds\,dt. \tag{1.5}$$

Поставим задачу минимизации данного функционала, определенного на решениях задачи (1.1)–(1.3) при допустимых управлениях, удовлетворяющих ограничению типа включения (1.4).

В дальнейшем будем считать, что ось значений независимой переменной s является осью абсцисс, направленной вправо, а ось значений независимой переменной t – осью ординат, направленной вверх (см. также рисунок 3.1). Для сокращения обозначений введем функцию

$$\Phi(x,s,t) = \begin{cases} \varphi_0(x^-(s_0,t),t), & t \in T, \quad s = s_0; \\ \varphi(x(s,t_1),s), & s \in S, \quad t = t_1; \\ -\varphi_1(x^+(s_1,t),t), & t \in T, \quad s = s_1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Пусть Ω – граница прямоугольника $\bar{\Pi}$, из которой исключен отрезок $\{(s,t) \in E^2 : \ s \in S, \ t = t_0\}$. Тогда критерий качества (1.5) можно записать в более компактной форме

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} \Phi(x,s,t)(ds+dt) + \iint\limits_{\Pi} F(x,s,t)\,ds\,dt,$$

где обход Ω в первом интеграле осуществляется по часовой стрелке.

Задача оптимального управления (1.1)–(1.5) рассматривается при следующих предположениях:

1) диагональные элементы $a_i(s,t), \ i = 1,2,...,n$ матрицы A непрерывно дифференцируемы в прямоугольнике $\bar{\Pi}$; будем также считать, что любые две функции $a_i(s,t)$ и $a_j(s,t), \ i \neq j$, либо всюду совпадают, либо всюду различны в $\bar{\Pi}$;

2) вектор-функция $p(u,s)$ непрерывна по $u \in U$, ограничена и измерима по $s \in S$;

3) вектор-функции $g^{(1)}(t), \ g^{(2)}(t)$ ограничены и измеримы на T;

4) вектор-функция $f(x,s,t)$ и скалярные функции $F(x,s,t)$, $\varphi(x,s)$, $\varphi_0(x^-,t)$, $\varphi_1(x^+,t)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по x соответственно на $E^n \times S \times T, \ E^n \times S \times T, \ E^n \times S, \ E^{n-m_2} \times T, \ E^{m_1} \times T$.

При сделанных предположениях можно гарантировать (теорема 1.1 пункта 1.1), что для любого допустимого управления существует и единственно обобщенное решение $x = x(s,t)$ начально-краевой задачи (1.1)-(1.3), принадлежащее классу ограниченных и измеримых на $\bar{\Pi}$ функций. При этом компоненты $x_i = x_i(s,t)$ абсолютно непрерывны вдоль соответствующих i-ых характеристик системы (1.1).

В дальнейшем для компактности изложения понадобится операция выделения из произвольного вектора пространства E^n компонент, отвечающих совпадающим диагональным элементам матрицы A. Будем предполагать, что уравнения системы (1.1) упорядочены таким образом, что

$$a_1(s,t) = a_2(s,t) = \ldots = a_{i_1}(s,t) > a_{i_1+1}(s,t) = a_{i_1+2}(s,t) = \ldots$$

$$= a_{i_2}(s,t) > \ldots > a_{i_{q-1}+1}(s,t) = a_{i_{q-1}+2}(s,t) = a_{i_q}(s,t),$$

$$q \le n, \quad i_q = n.$$

Пусть b – произвольный вектор пространства E^n. Обозначим

$$\bar{b}^l = (b_{i_{l-1}+1}, b_{i_{l-1}+2}, \ldots b_{i_l}) \in E^{i_l - i_{l-1}},$$

$$\tilde{b}^l = (b_1, b_2, \ldots, b_{i_{l-1}}, b_{i_l+1}, \ldots b_n) \in E^{n - i_l + i_{l-1}}.$$

В случае, если все диагональные элементы матрицы A различны, эта операция превращается просто в выделение компоненты вектора b, соответствующей выбранному диагональному элементу. Обозначим также через $\tilde{A}^l$ квадратную матрицу, полученную из матрицы A вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих диагональным элементам, равным a_{i_l}, то есть строк и столбцов с номерами $i_{l-1}+1, i_{l-1}+2, \ldots, i_l$.

Для двух произвольных векторов $b, c \in E^n$ под прямой суммой векторов $\bar{b}^l$ и c будем понимать вектор $d = \bar{b}^l \dot{+} c$ с компонентами $d_k = b_k + c_k, \;\; k = i_{l-1}+1, i_{l-1}+2, \ldots, i_l$ и $d_k = c_k, \;\; k = 1, 2, \ldots, i_{l-1}, i_l+1, \ldots, n$.

Перейдем к исследованию задачи (1.1)-(1.5).

2.2. ОЦЕНКА ПРИРАЩЕНИЯ СОСТОЯНИЯ НА ИГОЛЬЧАТОЙ ВАРИАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ

Применим классическую схему доказательства необходимых условий оптимальности, основанную на исследовании формулы приращения целевого функционала. Исследуемая задача имеет, в отличие от задачи, рассмотренной в главе 1, ряд особенностей, которые, в конечном счете, и приводят к новому необходимому условию оптимальности.

Рассмотрим произвольный допустимый процесс $\{u, x\}$. Зададим игольчатую вариацию управления $u = u(s)$. В качестве параметров вариации выберем точку $\xi \in (s_0, s_1]$, число $\varepsilon \in (0, \xi - s_0]$, вектор $v \in U$. Отрезок варьирования $S_\varepsilon = [\xi - \varepsilon, \xi]$ целиком лежит в S. Положим

$$\Delta u(s) = \begin{cases} v - u(s), & s \in S_\varepsilon, \\ 0, & s \in S \backslash S_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.1}$$

Пусть Δx – приращение состояния, вызванное вариацией (2.1). Тогда процесс $\{\hat{u} = u + \Delta u, \;\; \hat{x} = x + \Delta x\}$ будет допустимым.

Для дальнейших построений, связанных с оценкой приращения состояния, вызванного игольчатой вариацией управления, нам потребуется вспомогательное утверждение.

Утверждение 2.1. *Существуют константы $\varepsilon_0 \in (0, \xi - s_0]$ и $C_1 > 0$ такие, что для произвольного числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ можно указать число $t_\varepsilon \in T$, для которого $t_\varepsilon - t_0 \le C_1 \varepsilon$, и множества*

$$\Pi_l(\varepsilon) = \left\{(s,t) \in \bar{\Pi} : \; t > t_\varepsilon, \; s^{(i_l)}(\xi - \varepsilon, t_0; t) \le s \le s^{(i_l)}(\xi, t_0; t)\right\},$$

$$l = 1, 2, \ldots, q,$$

не имеют общих точек.

Для доказательства рассмотрим две произвольные характеристики $s = s^{(i)}(\xi, t_0; t)$ и $s = s^{(j)}(\xi - \varepsilon, t_0; t)$, отвечающие двум различным функциям $a_i = a_i(s,t)$ и $a_j = a_j(s,t)$. Предположим, что эти характеристики пересекаются в точке (s_{ij}, t_{ij}), $t_{ij} > t_0$. Покажем, что существуют числа $\varepsilon_{ij} > 0$, $C_{ij} > 0$ такие, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{ij}]$ выполняются неравенства

$$t_{ij} - t_0 \le C_{ij}\varepsilon, \quad t_{ij} < t_1. \tag{2.2}$$

Воспользуемся тем, что функции $a_i(s,t)$ задают в точке (s,t) тангенсы углов наклона к положительному направлению оси t касательных к характеристикам i–го семейства. Поэтому, если, например, $a_i(s,t) > 0$, то прямая проходящая через точку (ξ, t_0) с угловым коэффициентом

$$\frac{1}{\min\limits_{(s,t)\in\Pi} a_i(s,t)} = \max_{(s,t)\in\Pi} \frac{1}{a_i(s,t)},$$

лежит выше графика соответствующей характеристики $s = s^{(i)}(\xi, t_0; t)$. Элементарные геометрические рассуждения позволяют получить следующий результат:

$$C_{ij} = \begin{cases} K_i, & a_j(s,t) = 0, \\ K_j, & a_i(s,t) = 0, \\ \frac{K_i K_j}{K_i + K_j}, & a_i(s,t)a_j(s,t) < 0, \\ \frac{K_i K_j}{|K_i - K_j|}, & a_i(s,t)a_j(s,t) > 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

$$K_i = \frac{1}{\min\limits_{(s,t)\in\Pi} |a_i(s,t)|}, \quad K_j = \frac{1}{\min\limits_{(s,t)\in\Pi} |a_j(s,t)|}. \tag{2.4}$$

Знаменатели дробей в (2.3), (2.4) отличны от нуля в силу сделанного в пункте 2.1 предположения о том, значения $a_i(s,t)$ и $a_j(s,t)$ либо всюду совпадают, либо всюду различны в $\bar{\Pi}$, а также из предположения о знакопостоянстве диагональных элементов матрицы A.

Второе неравенство в (2.2) следует из первого при достаточно малых числах ε_{ij}.

Найдем теперь среди всех точек пересечения характеристик рассматриваемого вида точку с наибольшей координатой t_{ij}. Обозначив эту точку через t_ε, выбрав в качестве ε_0 наименьшее из чисел ε_{ij}, а в качестве константы C_1 – наибольшее из чисел C_{ij}, получим искомое утверждение. Тем самым доказано, что часть рассматриваемой области, в которой пересекаются характеристические полоски, опирающиеся на отрезок $[\xi - \varepsilon, \xi]$, содержится в прямоугольнике $[s_0, s_1] \times [t_0, t_\varepsilon]$. Мера этого прямоугольника имеет порядок ε.

Заметим также, что в силу ограниченности функций $a_i = a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, ни одно из множеств $\Pi_l(\varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ не является пустым.

Перейдем к оценке приращения состояния, вызванного игольчатой вариацией (2.1). Обозначим

$$\Pi(\varepsilon) = \bigcup_{l=1}^{q} \Pi_l(\varepsilon), \quad G_\varepsilon = \left\{(s,t) \in \bar{\Pi} :\ t > t_\varepsilon\right\}.$$

Утверждение 2.2. *Справедливы неравенства:*

$$\begin{array}{l} \|\Delta x(s,t)\| \le K\,\varepsilon \quad \textit{почти для всех}\ \ (s,t) \in G_\varepsilon \backslash \Pi(\varepsilon), \\ \|\Delta \tilde{x}^l(s,t)\| \le K\,\varepsilon \quad \textit{почти для всех}\ \ (s,t) \in \Pi_l(\varepsilon), \end{array} \tag{2.5}$$

где K – некоторая положительная постоянная, не зависящая от выбора ε.

Доказательство. Введем функцию

$$\gamma(s,t) = \begin{cases} \|\Delta \tilde{x}^l(s,t)\|, & (s,t) \in \Pi_l(\varepsilon), \\ \|\Delta x(s,t)\|, & (s,t) \in G_\varepsilon \backslash \Pi(\varepsilon), \end{cases}$$

определенную на множестве G_ε. Зафиксируем произвольную точку $(s,t) \in G_\varepsilon$ и рассмотрим компоненты $\Delta x_i(s,t)$ вектора приращения состояния, индексы i которых выбираются следующим образом: $i = 1, 2, \dots, n$, если $(s,t) \in G_\varepsilon \backslash \Pi(\varepsilon)$; $i = 1, 2, \dots, i_{l-1}, i_l + 1, \dots, n$, если $(s,t) \in \Pi_l(\varepsilon)$.

Справедлива оценка:

$$|\Delta x_i(s,t)| \le \int\limits_{\tau_i}^{t} |\Delta f_i(x, s^{(i)}(s,t;\alpha),\alpha)|\, d\alpha,$$

где τ_i – момент начала характеристики $s^{(i)}(s,t;\alpha)$.

Предположим сначала, что $\tau_i \le t_\varepsilon$. Тогда, воспользовавшись условием Липшица по x для правой части системы (1.1), получим

$$|\Delta x_i(s,t)| \le \int\limits_{\tau_i}^{t_\varepsilon} |\Delta f_i(x, s^{(i)}(s,t;\alpha),\alpha)|\, d\alpha +$$

$$+L\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \gamma(s^{(i)}(s,t;\alpha),\alpha)\, d\alpha + L\sum_{j=1}^{q}\int\limits_{t_{*j}}^{t_j^*} \|\Delta \bar{x}^j(s^{(i)}(s,t;\alpha),\alpha)\|\, d\alpha. \qquad (2.6)$$

Здесь $L > 0$ – константа Липшица для функций $f_i(x,s,t),\quad i = 1,2,\ldots,n$; $[t_{*j}, t_j^*]$ – отрезок времени, в течение которого характеристика $s^{(i)}(s,t;\alpha)$ находится в характеристической полоске $\Pi_j(\varepsilon)$. Если характеристика не пересекает полоску $\Pi_j(\varepsilon)$, то будем считать $t_{*j} = t_j^*$. В силу указанного выше выбора индекса i, в сумме отсутствуют слагаемые, соответствующие характеристикам, совпадающим с $s^{(i)}(s,t;\alpha)$.

Пусть теперь $\tau_i > t_\varepsilon$. Тогда выполняется аналогичное (2.6) неравенство

$$|\Delta x_i(s,t)| \le L\int\limits_{\tau_i}^{t} \gamma(s^{(i)}(s,t;\alpha),\alpha)\, d\alpha +$$

$$+L\sum_{j=1}^{q}\int\limits_{t_{*j}}^{t_j^*} \|\Delta \bar{x}^j(s^{(i)}(s,t;\alpha),\alpha)\|\, d\alpha. \qquad (2.7)$$

Обозначим

$$\beta(t) = \operatorname{ess}\sup_{\substack{(\xi,\tau)\in G_\varepsilon \\ \tau\le t}} \gamma(\xi,\tau).$$

Рассуждениями, аналогичными проведенным в утверждении 2.1, можно показать существование константы $C_2 \ge 0$, такой что при достаточно малых ε в суммах (2.6), (2.7) $t_j^* - t_{*j} \le C_2\,\varepsilon$.

В силу ограниченности приращения состояния $\|\Delta x(s,t)\|$, $(s,t) \in \Pi$ и утверждения 2.1 можно указать такую константу $C_3 \geq 0$, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства:

$$|\Delta x_i(s,t)| \leq L \int\limits_{\tau_i}^{t} \beta(\alpha)\, d\alpha + C_3\, \varepsilon,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{для } (s,t) \in G_\varepsilon \backslash \Pi(\varepsilon),$$

$$i = 1, 2, \ldots, i_{l-1}, i_l + 1, \ldots, n \quad \text{для } (s,t) \in \Pi_l(\varepsilon).$$

Отсюда почти для всех точек $(s,t) \in G_\varepsilon$ имеем

$$\gamma(s,t) \leq L\sqrt{n} \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \beta(\alpha)\, d\alpha + \sqrt{n}\, C_3\, \varepsilon.$$

Поскольку правая часть данного неравенства не зависит от переменной s, то

$$\beta(t) \leq L\sqrt{n} \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \beta(\alpha)\, d\alpha + \sqrt{n}\, C_3\, \varepsilon.$$

Применив к этому неравенству лемму Гроноулла-Беллмана, получим оценку

$$\gamma(s,t) \leq C_4\, \varepsilon \;\text{ почти для всех } (s,t) \in G_\varepsilon,$$

$$C_4 = \sqrt{n}\, C_3\, \exp(L\sqrt{n}\,(t_1 - t_0)),$$

что и доказывает утверждение 2.2.

Для компонент приращения состояния $\Delta x_i(s,t)$, $i = i_{l-1} + 1$, $i_{l-1} + 2, \ldots, i_l$, $\quad (s,t) \in \Pi_l(\varepsilon)$ удается получить лишь оценку вида

$$|\Delta x_i(s,t)| \leq C_5(t - t_0), \quad C_5 > 0. \tag{2.8}$$

Замечание 2.1. Оценку компонент приращения состояния через меру области игольчатого варьирования можно получить и для всего прямоугольника $\bar{\Pi}$. Однако, при $t \leq t_\varepsilon$ необходимо рассматривать пересечения характеристических полосок, что неизбежно ведет к усложнению обозначений. Неравенств (2.5) вполне достаточно для получения вариационного принципа максимума.

Таким образом, в отличие от обычной схемы получения необходимого условия оптимальности типа принципа максимума, в данной задаче оптимального управления не удается установить неравенство, оценивающее в целом приращение состояния системы через меру области игольчатого варьирования. Это связано с особенностями рассматриваемых систем дифференциальных уравнений: в гиперболических системах начальное возмущение переносится вдоль характеристических полосок. В этих характеристических полосках (множествах) и сосредотачивается основная часть возмущения решения, вызванного вариацией начальных условий на отрезке S.

2.3. ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА

Из утверждения 2.2 следует, что применение обычной методики получения необходимых условий оптимальности на основе исследования формулы приращения функционала в рассматриваемой задаче имеет ряд особенностей. Вариация управления на множестве малой меры вызывает такое приращение состояния, часть которого (компоненты $\Delta x_i(s,t)$ в соответствующих характеристических полосках) не зависит от меры области игольчатого варьирования. Этим обстоятельством, в конечном счете, и объясняется несправедливость в данной задаче необходимого условия оптимальности типа принципа максимума. В частности, в работе [253] построен соответствующий простой контрпример, показывающий несправедливость классического принципа максимума в простейшей гиперболической системе с двумя ортогональными семействами характеристик и управлением в правой части, являющимся функцией одного независимого аргумента.

Прежде чем перейти к исследованию формулы приращения целевого функционала введем дополнительные конструкции (см. рис. 3.1). Обозначим $\Gamma_l(\varepsilon)$ – совокупность конечных точек характеристик $s^{(i)}(s, t_0; \alpha)$, $s \in S_\varepsilon$, $i = i_{l-1}+1, i_{l-1}+2, \ldots, i_l$, т.е. характеристик, лежащих в $\Pi_l(\varepsilon)$ и отвечающих диагональным элементам матрицы A, равным $a_{i_l}(s,t)$.

Пусть $\Gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{l=1}^{q} \Gamma_l(\varepsilon)$, $\quad Q_l(\varepsilon) = \{(s,t) \in \bar{\Pi} :\ t \le t_\varepsilon,\quad s^{(i_l)}(\xi - \varepsilon, t_0; t) \le s \le s^{(i_l)}(\xi, t_0; t)\}$. В силу сделанных выше предположений множества $\Gamma_l(\varepsilon)$ при достаточно малых ε не пересекаются.

Заметим, что мера областей $Q_l(\varepsilon)$ имеет порядок ε^2, так как каждая из этих областей содержится в прямоугольнике, высота которого $t_\varepsilon - t_0$, а длина основания равна $\varepsilon + |\lambda_{i_l}(\xi, t_0)|\,(t_\varepsilon - t_0) + o(\varepsilon)$.

Область возмущения, вызванного игольчатой вариацией (2.1) управления, то есть область, в которой приращение состояния отлично от нуля, определяется как область влияния отрезка $\{(s,t) :\ s \in S_\varepsilon,\ t = t_0\}$. Эта область влияния ограничена крайними характеристиками $s^{(n)}(\xi - \varepsilon, t_0; t)$ и $s^{(1)}(\xi, t_0; t)$. Поэтому мера $Z_\varepsilon = \{(s,t) \in \bar{\Pi} :\ t \le t_\varepsilon,\ s^{(n)}(\xi - \varepsilon, t_0; t) \le s \le s^{(1)}(\xi, t_0; t)\}$ также имеет порядок ε^2.

Рассмотрим приращение функционала $\Delta J(u) = J(u + \Delta u) - J(u)$, вычисленное на двух допустимых процессах $\{u, x\}$ и $\{\hat{u} = u + \Delta u,\ \hat{x} = x+ +\Delta x\}$. Очевидно, что приращение $\Delta x = \Delta x(s,t)$ удовлетворяет начально-краевой задаче:

$$D_A \Delta x = \Delta f(x, s, t), \quad (s,t) \in \Pi,$$

$$\Delta x(s, t_0) = \Delta p(u(s), s), \quad s \in S,$$

$$\Delta x^+(s_0, t) = 0, \quad \Delta x^-(s_1, t) = 0, \quad t \in T.$$

Здесь

$$\Delta f(x, s, t) = f(\hat{x}, s, t) - f(x, s, t),$$

$$\Delta p(u, s) = p(\hat{u}, s) - p(u, s).$$

Введем в рассмотрение скалярную функцию Понтрягина:

$$H(\psi, x, s, t) = \langle \psi, f(x, s, t) \rangle - F(x, s, t).$$

Считая функцию $\psi(s,t)$ принадлежащей пространству $A_\infty(\Pi)$ и воспользовавшись гладкостью функций f, F и Φ по x, будем иметь

$$\Delta J(u) = \int\limits_{\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon} \langle \Phi_x(x, s, t), \Delta x(s, t) \rangle \, (ds + dt) +$$

$$+ \iint\limits_{G_\varepsilon \setminus \Pi(\varepsilon)} \left[\langle \psi, D_A \Delta x \rangle - \langle H_x(\psi, x, s, t), \Delta x(s, t) \rangle \right] ds \, dt +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q} \left\{ \int\limits_{\Gamma_l(\varepsilon)} \left[\Phi(x \dot{+} \Delta \bar{x}^l, s, t) - \Phi(x, s, t) \right] (ds + dt) + \right.$$

$$+ \iint\limits_{\Pi_l(\varepsilon)} \left[\langle \tilde{\psi}^l, D_A \Delta \tilde{x}^l \rangle - \langle \tilde{\psi}^l, (\tilde{f}^l(x \dot{+} \Delta \bar{x}^l, s, t) - \tilde{f}^l(x, s, t)) \rangle \right] dsdt +$$

$$\left. + \iint\limits_{\Pi_l(\varepsilon)} \left(F(x \dot{+} \Delta \bar{x}^l, s, t) - F(x, s, t) \right) \, ds \, dt \right\} + R_1. \tag{3.1}$$

Здесь

$$R_1 = \int\limits_{\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon} o_\Phi(\|\Delta x(s, t)\|) \, (ds + dt) - \iint\limits_{G_\varepsilon \setminus \Pi(\varepsilon)} o_H(\|\Delta x(s, t)\|) \, ds \, dt +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q} \left\{ \int\limits_{\Gamma_l(\varepsilon)} \left[\Phi(x + \Delta x, s, t) - \Phi(x \dot{+} \Delta \bar{x}^l, s, t) \right] (ds + dt) - \right.$$

$$- \iint\limits_{\Pi_l(\varepsilon)} \left[\langle \tilde{\psi}^l, (\tilde{f}^l(x + \Delta x, s, t) - \tilde{f}^l(x \dot{+} \Delta \bar{x}^l, s, t)) \rangle \right] dsdt +$$

$$\left. + \iint\limits_{\Pi_l(\varepsilon)} \left(F(x + \Delta x, s, t) - F(x \dot{+} \Delta \bar{x}^l, s, t) \right) \, ds \, dt \right\} +$$

$$+ \iint\limits_{\Pi \setminus G_\varepsilon} \Delta F(x, s, t) \, ds \, dt,$$

где $\Delta F(x, s, t) = F(\hat{x}, s, t) - F(x, s, t)$.

Остановимся на оценке остаточного члена R_1. В силу неравенств (2.5) вне множества $\Pi(\varepsilon)$ приращение состояния имеет порядок ε, то есть

$\|\Delta x(s,t)\| \sim \varepsilon,\ (s,t) \in G_\varepsilon \backslash \Pi(\varepsilon)$. Поэтому первые два слагаемых в выражении для R_1 имеют порядок $o(\varepsilon)$. Далее, приращение состояния отлично от нуля при $t \le t_\varepsilon$ лишь в области Z_ε, которая имеет меру ε^2. Отсюда и из ограниченности функции $\Delta F(x,s,t)$ имеем

$$\iint\limits_{\Pi \backslash G_\varepsilon} \Delta F(x,s,t)\, ds\, dt = \iint\limits_{Z_\varepsilon} \Delta F(x,s,t)\, ds\, dt \sim \varepsilon^2.$$

Наконец, в силу предположений, сделанных в пункте 2.1, функции f, F, Φ удовлетворяют условию Липшица по x с некоторой константой, не зависящей от выбора допустимого процесса. Для оценки слагаемых под знаком суммы в выражении для R_1 воспользуемся условием Липшица, неравенствами (2.5) и тем, что области $\Gamma_l(\varepsilon)$ и $\Pi_l(\varepsilon)$ имеют меру порядка ε. Окончательно получим оценку остаточного члена вида

$$R_1 = o(\varepsilon). \tag{3.2}$$

Обозначим

$$D_l(\varepsilon) = \{s \in S:\ s^{(i_l)}(\xi - \varepsilon, t_0; t_\varepsilon) \le s \le s^{(i_l)}(\xi, t_0; t_\varepsilon)\},$$

$$D_\varepsilon = \bigcup_{l=1}^{q} D_l(\varepsilon).$$

Пусть $\bar{\tau}_l, \bar{\bar{\tau}}_l$ – моменты окончания характеристик $s^{(i_l)}(\xi, t_0; t)$ и $s^{(i_l)}(\xi - \varepsilon, t_0; t)$ соответственно.

Применим формулу интегрирования по частям (1.1.8).

$$\iint\limits_{G_\varepsilon \backslash \Pi(\varepsilon)} \langle \psi, D_A \Delta x \rangle\, ds\, dt = - \iint\limits_{G_\varepsilon \backslash \Pi(\varepsilon)} \langle D_A\psi + A_s(s,t)\psi, \Delta x(s,t) \rangle\, ds\, dt +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q} \left\{ \int\limits_{t_\varepsilon}^{\bar{\tau}_l} \langle \psi, \left[\frac{ds}{dt} E - A(s,t) \right] \Delta x(s,t) \Big|_{s = s_{i_l}(\xi, t_0; t)} \rangle\, dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{t_\varepsilon}^{\bar{\bar{\tau}}_l} \langle \psi, \left[\frac{ds}{dt} E - A(s,t) \right] \Delta x(s,t) \Big|_{s = s_{i_l}(\xi - \varepsilon, t_0; t)} \rangle\, dt \right\} +$$

$$+\int\limits_{\Omega_\varepsilon\backslash\Gamma_\varepsilon} \langle\psi(s,t),\Delta x(s,t)\rangle\, ds - \langle\psi(s,t),A(s,t)\Delta x(s,t)\rangle\, dt-$$

$$-\int\limits_{S\backslash D_\varepsilon} \langle\psi(s,t_\varepsilon),\Delta x(s,t_\varepsilon)\rangle\, ds. \tag{3.3}$$

Здесь E – единичная матрица размерности $n\times n$, Ω_ε – граница области G_ε, из которой исключен отрезок $\{(s,t):\ s\in S,\ t=t_\varepsilon\}$.

Последнее слагаемое в (3.3) можно оценить следующим образом

$$\int\limits_{S\backslash D_\varepsilon} \langle\psi(s,t_\varepsilon),\Delta x(s,t_\varepsilon)\rangle\, ds \sim \varepsilon^2. \tag{3.4}$$

Действительно, длина участка отрезка S, на котором возмущение $\Delta x(s,t_\varepsilon)$ отлично от нуля, не превосходит разности

$$s^{(1)}(\xi,t_0;t)-s^{(n)}(\xi-\varepsilon,t_0;t)=\varepsilon+$$

$$+(a_1(\xi,t_0)-a_n(\xi,t_0))\,(t_\varepsilon-t_0)+o(\varepsilon)\sim\varepsilon$$

при достаточно малых ε. Отсюда и следует (3.4), если принять во внимание, что

$$\|\Delta x(s,t_\varepsilon)\|\le \bar C\,(t_\varepsilon-t_0),$$

где $\bar C>0$ – некоторая константа, не зависящая от выбора ε.

В силу того, что интегрирование под знаком суммы в (3.3) осуществляется вдоль характеристик системы, справедливы следующие равенства:

$$\int\limits_{t_\varepsilon}^{\bar\tau_l} \langle\psi(s,t),\left[\frac{ds}{dt}E-A(s,t)\right]\,\Delta x(s,t)\Big|_{s=s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)}\rangle\, dt=$$

$$=\int\limits_{t_\varepsilon}^{\bar\tau_l} \langle\tilde\psi^l(s,t),\left[\frac{ds}{dt}\tilde E^l-\tilde A^l(s,t)\right]\,\Delta\tilde x^l(s,t)\Big|_{s=s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)}\rangle\, dt. \tag{3.5}$$

$$l=1,2,\ldots,q$$

Здесь через $\tilde E^l$ обозначена единичная матрица, размерность которой совпадает с размерностью матрицы $\tilde A^l$. Аналогичные равенства справедливы также и для вторых слагаемых под знаком суммы в выражении (3.3).

Далее,

$$\iint\limits_{\Pi_l(\varepsilon)} \langle \tilde{\psi}^l, D_A \Delta \tilde{x}^l \rangle \, ds\, dt = - \iint\limits_{\Pi_l(\varepsilon)} \langle \left[D_A \tilde{\psi}^l + \tilde{A}^l_s(s,t) \tilde{\psi}^l \right], \Delta \tilde{x}^l(s,t) \rangle \, ds\, dt +$$

$$+ \int\limits_{t_\varepsilon}^{\bar{\bar{\tau}}_l} \langle \tilde{\psi}^l(s,t), \left[\frac{ds}{dt} \tilde{E}^l - \tilde{A}^l(s,t) \right] \Delta \tilde{x}^l(s,t) \Big|_{s = s^{(i_l)}(\xi - \varepsilon, t_0; t)} \rangle \, dt -$$

$$- \int\limits_{t_\varepsilon}^{\bar{\tau}_l} \langle \tilde{\psi}^l(s,t), \left[\frac{ds}{dt} \tilde{E}^l - \tilde{A}^l(s,t) \right] \Delta \tilde{x}^l(s,t) \Big|_{s = s^{(i_l)}(\xi, t_0; t)} \rangle \, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_l(\varepsilon)} \langle \tilde{\psi}^l(s,t), \Delta \tilde{x}^l(s,t) \rangle \, ds - \langle \tilde{\psi}^l(s,t), \tilde{A}^l(s,t) \Delta \tilde{x}^l(s,t) \rangle \, dt -$$

$$- \int\limits_{D_l(\varepsilon)} \langle \tilde{\psi}^l(s, t_\varepsilon), \Delta \tilde{x}^l(s, t_\varepsilon) \rangle \, ds, \quad l = 1, 2, \ldots, q. \tag{3.6}$$

Последний интеграл в выражении (3.6) можно оценить, пользуясь теми же рассуждениями, которые применялись при доказательстве оценки (3.4).

$$\int\limits_{D_l(\varepsilon)} \langle \tilde{\psi}^l(s, t_\varepsilon), \Delta \tilde{x}^l(s, t_\varepsilon) \rangle \, ds \sim \varepsilon^2, \quad l = 1, 2, \ldots, q. \tag{3.7}$$

Потребуем теперь, чтобы вектор-функция $\psi = \psi(s,t)$ удовлетворяла сопряженной задаче

$$\begin{gathered} D_A \psi + A_s(s,t) \psi = -H_x(\psi, x, s, t), \quad (s,t) \in \Pi; \\ \psi(s, t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(s, t_1), s)}{\partial x}, \quad s \in S; \\ \psi_i(s_0, t) = \frac{1}{a_i(s_0, t)} \frac{\partial \varphi_0(x^-(s_0, t), t)}{\partial x_i}, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, n; \\ \psi_i(s_1, t) = -\frac{1}{a_i(s_1, t)} \frac{\partial \varphi_1(x^+(s_1, t), t)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1; \\ t \in T. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Тогда формула приращения (3.1) с учетом (3.3), (3.5), (3.6) примет вид

$$\Delta J(u) = \sum_{l=1}^{q} \left\{ \int\limits_{\Gamma_l(\varepsilon)} \left[\Phi(x \dot{+} \Delta \bar{x}^l, s, t) - \Phi(x, s, t) \right] (ds + dt) - \right.$$

$$- \iint\limits_{\Pi_l(\varepsilon)} \Big[\langle \tilde{\psi}^l(s,t), (\tilde{f}^l(x \dot{+} \Delta\bar{x}^l, s, t) - \tilde{f}^l(x,s,t)) \rangle -$$

$$- F(x \dot{+} \Delta\bar{x}^l, s, t) + F(x,s,t) \Big] \, ds\, dt \Big\} + R_2,$$

где

$$R_2 = R_1 - \int\limits_{S \setminus D_\varepsilon} \langle \psi(s,t_\varepsilon), \Delta x(s,t_\varepsilon) \rangle \, ds - \sum_{l=1}^{q} \int\limits_{D_l(\varepsilon)} \langle \tilde{\psi}^l(s,t_\varepsilon), \Delta\tilde{x}^l(s,t_\varepsilon) \rangle \, ds.$$

Используя оценки (3.2), (3.4), (3.7), а также тот факт, что области $Q_l(\varepsilon)$ имеют меры порядка ε^2, формулу приращения можно переписать следующим образом

$$\Delta J(u) = \sum_{l=1}^{q} \Bigg\{ \int\limits_{\Gamma_l(\varepsilon)} \Big[\Phi(x \dot{+} \Delta\bar{x}^l, s, t) - \Phi(x,s,t) \Big] \, (ds + dt) -$$

$$- \iint\limits_{\Pi_l(\varepsilon) \bigcup Q_l(\varepsilon)} \Big[\langle \tilde{\psi}^l(s,t), (\tilde{f}^l(x \dot{+} \Delta\bar{x}^l, s, t) - \tilde{f}^l(x,s,t)) \rangle - \qquad (3.9)$$

$$- F(x \dot{+} \Delta\bar{x}^l, s, t) + F(x,s,t) \Big] \, ds\, dt \Big\} + o(\varepsilon).$$

Полученная формула приращения функционала позволяет перейти непосредственно к доказательству необходимого условия оптимальности.

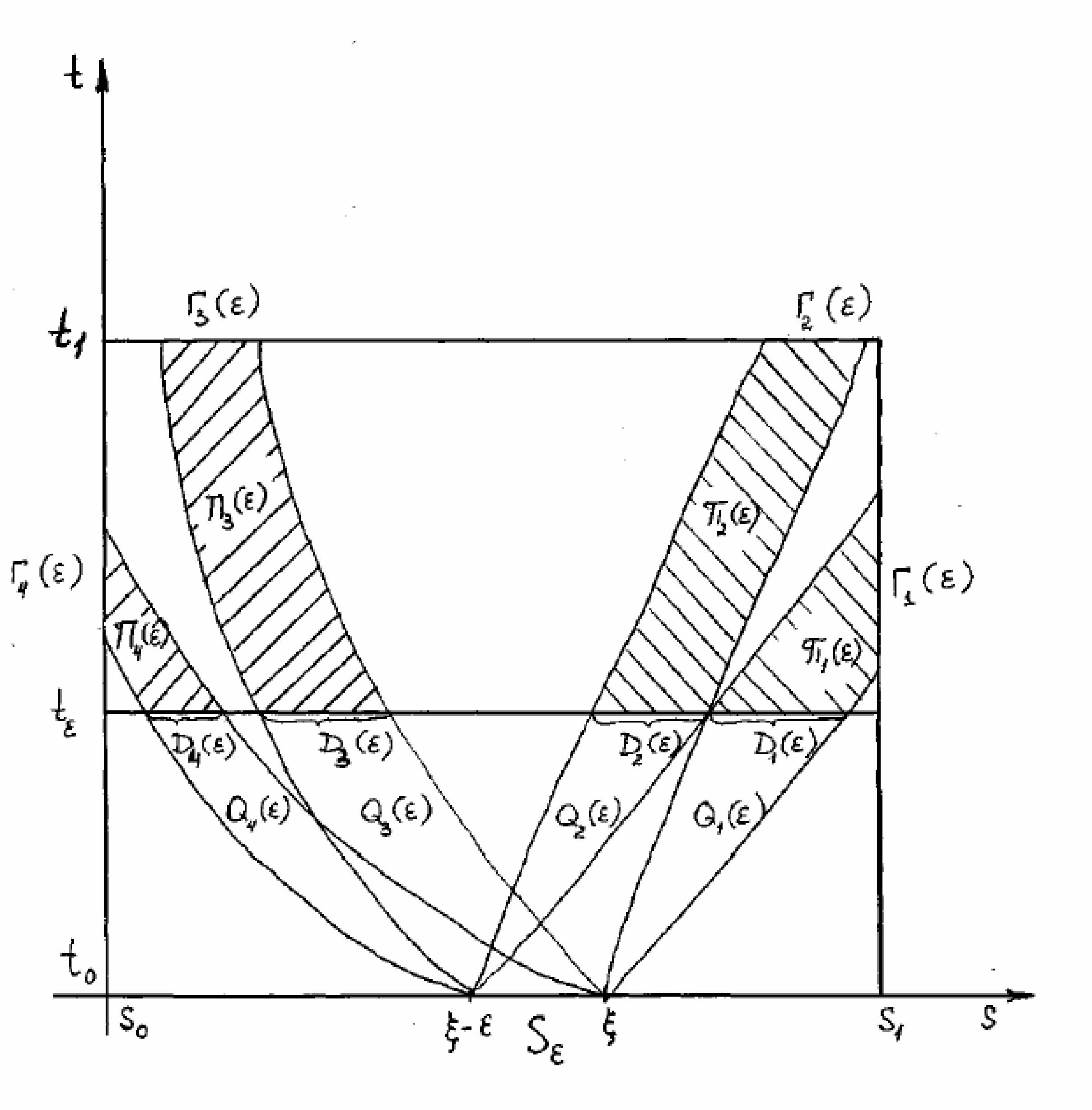

t
t_1
$\Gamma_3(\varepsilon)$
$\Gamma_2(\varepsilon)$
$\Pi_3(\varepsilon)$
$\Pi_2(\varepsilon)$
$\Gamma_4(\varepsilon)$
$\Gamma_1(\varepsilon)$
$\Pi_4(\varepsilon)$
$\Pi_1(\varepsilon)$
t_ε
$D_4(\varepsilon)$
$D_3(\varepsilon)$
$D_2(\varepsilon)$
$D_1(\varepsilon)$
$Q_4(\varepsilon)$
$Q_3(\varepsilon)$
$Q_2(\varepsilon)$
$Q_1(\varepsilon)$
t_0
S_0
$\xi-\varepsilon$
S_ε
ξ
S_1
S

Рис. 3.1.

Завершение доказательства вариационного принципа максимума проведем в два этапа: сначала в формуле приращения (3.9) перейдем к интегрированию по отрезку игольчатого варьирования S_ε; затем покажем возможность определения слагаемых в формуле приращения лишь при помощи данных задачи на соответствующих характеристиках.

Пусть $(\bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta))$ - конечные точки характеристик $s^{(i_l)}(\eta, t_0; t)$, $l = 1, 2, \ldots, q$; $\eta \in S_\varepsilon$. Очевидно, что эти точки однозначно определяются заданием параметра η. На верхней границе прямоугольника $\bar{\Pi}$, то есть при $\bar{\tau}^{(l)}(\eta) = t_1$, координата $\bar{\xi}^{(l)}(\eta)$ определяются равенством

$$\bar{\xi}^{(l)}(\eta) = s^{(i_l)}(\eta, t_0; t_1).$$

На боковых границах прямоугольника моменты $\bar{\tau}^{(l)}(\eta)$ однозначно определяются из уравнений

$$s_0 = s^{(i_l)}(\eta, t_0; \bar{\tau}^{(l)}(\eta)) \text{ при } \bar{\xi}^{(l)}(\eta) = s_0,$$

$$s_1 = s^{(i_l)}(\eta, t_0; \bar{\tau}^{(l)}(\eta)) \text{ при } \bar{\xi}^{(l)}(\eta) = s_1.$$

Эта зависимость координат конечных точек характеристик от выбора начала характеристических кривых позволяет в формуле приращения (3.9) перейти от интегрирования по участкам Γ_ε к интегрированию по отрезку S_ε. Вычислим производные $d\bar{\xi}^{(l)}(\eta)/d\eta$, $d\bar{\tau}^{(l)}(\eta)/d\eta$, необходимые для применения формулы замены переменных. Очевидно, что

$$\frac{d\bar{\xi}^{(l)}(\eta)}{d\eta} = \frac{\partial s^{(i_l)}(\eta, t_0; t_1)}{\partial \eta}.$$

В дальнейшем нам потребуется также и явный вид производной

$$\partial s^{(i_l)}(\eta, t_0; \alpha)/\partial \eta.$$

Из определения характеристики следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial s^{(i_l)}(\eta, t_0; \alpha)}{\partial \eta} = \frac{\partial a_{i_l}(s^{(i_l)}(\eta, t_0; \alpha), \alpha)}{\partial s} \cdot \frac{\partial s^{(i_l)}(\eta, t_0; \alpha)}{\partial \eta}.$$

Проинтегрируем это линейное однородное дифференциальное уравнение с учетом того, что

$$s^{(i_l)}(\eta, t_0; \alpha) = \eta + \int\limits_{t_0}^{\alpha} a_{i_l}(s^{(i_l)}(\eta, t_0; \tau), \tau)\, d\tau,$$

а, следовательно,

$$\frac{\partial s^{(i_l)}(\eta, t_0; t_0)}{\partial \eta} = 1.$$

В результате получим

$$\frac{\partial s^{(i_l)}(\eta, t_0; \alpha)}{\partial \eta} = \exp\left[\int\limits_{t_0}^{\alpha} \frac{\partial a_{i_l}(s^{(i_l)}(\eta, t_0; \tau), \tau)}{\partial s}\, d\tau,\right]. \tag{4.1}$$

Для вычисления производной $\partial\bar{\tau}^{(l)}(\eta)/\partial\eta$ рассмотрим приращение $\bar{\tau}^{(l)}(\eta_2) - \bar{\tau}^{(l)}(\eta_1)$, где η_1, η_2 – произвольные точки из S_ε. На боковых границах прямоугольника $\bar{\Pi}$ выполняются равенства

$$s^{(i_l)}(\eta, t_0; \bar{\tau}^{(l)}(\eta_1)) = s^{(i_l)}(\eta, t_0; \bar{\tau}^{(l)}(\eta_2)).$$

Применив формулу Тейлора первого порядка к функции в правой части равенства, после несложных преобразований получим

$$\bar{\tau}^{(l)}(\eta_2) - \bar{\tau}^{(l)}(\eta_1) = -\frac{1}{a_{i_l}(\bar{\xi}^{(l)}(\eta_1), \bar{\tau}^{(l)}(\eta_1))} \cdot \frac{\partial s^{(i_l)}(\eta_1, t_0; \bar{\tau}^{(l)}(\eta_1))}{\partial \eta} \times$$
$$\times(\eta_2 - \eta_1) + o(|\eta_2 - \eta_1|),$$

где $\bar{\xi}^{(l)}(\eta_1)$ принимает значения s_0, либо s_1. Коэффициент при первой степени приращения $(\eta_2 - \eta_1)$ и есть искомая производная $\partial\bar{\tau}^{(l)}(\eta)/\partial\eta$.

Следовательно, воспользовавшись полученными результатами, интегралы по участкам $\Gamma_l(\varepsilon)$ можно записать в виде

$$\int\limits_{\Gamma_l(\varepsilon)} \left[\Phi(x\dot{+}\Delta\bar{x}^l, s, t) - \Phi(x, s, t)\right] (ds + dt) =$$

$$= \int\limits_{S(\varepsilon)} \left[\Phi(x\dot{+}\Delta\bar{x}^l, \bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta)) - \Phi(x, \bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta))\right] \times$$

$$\times \frac{\partial s^{(i_l)}(\eta, t_0; \bar{\tau}^{(l)}(\eta))}{\partial \eta}\, \mu(\bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta))\, d\eta.$$

Здесь введена функция

$$\mu(\bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta)) =$$

$$= \begin{cases} 1, & (\bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta)) \in \left\{(s,t) :\ t = t_1,\ s_0 < s \le s_1\right\}, \\ -a_{i_l}^{-1}(s_0, \bar{\tau}^{(l)}(\eta)), & (\bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta)) \in \left\{(s,t) :\ t_0 < t \le t_1,\ s = s_0\right\}, \\ -a_{i_l}^{-1}(s_1, \bar{\tau}^{(l)}(\eta)), & (\bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta)) \in \left\{(s,t) :\ t_0 < t \le t_1,\ s = s_1\right\}. \end{cases}$$

Применяя аналогичную замену для интегралов по характеристическим полоскам $\Pi_l(\varepsilon) \cup Q_l(\varepsilon)$, приходим к следующему виду формулы приращения:

$$\Delta J(u) = \int\limits_{S_\varepsilon} \sum_{l=1}^{q} \Big\{\left[\Phi(x\dot{+}\Delta\bar{x}^l, \bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta)) - \Phi(x, \bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta))\right] \times$$

$$\times \frac{\partial s^{(i_l)}(\eta, t_0; \bar{\tau}^{(l)}(\eta))}{\partial \eta}\, \mu(\bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta)) -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{\bar{\tau}^{(l)}(\eta)} \left[\langle \tilde{\psi}^l(s,t), \tilde{f}^l(x\dot{+}\Delta\bar{x}^l, s, t) - \tilde{f}^l(x, s, t)\rangle -\right.$$

$$\left. - F(x\dot{+}\Delta\bar{x}^l, s, t) + F(x, s, t)\right]_{s = s^{(i_l)}(\eta, t_0; t)} \times$$

$$\times \frac{\partial s^{(i_l)}(\eta, t_0; t)}{\partial \eta}\, dt\Big\}\, d\eta + o(\varepsilon). \tag{4.2}$$

Перейдем к последнему этапу доказательства. Заметим, что в формуле приращения (4.2) компоненты вектора $\Delta\bar{x}^l(s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t)$ неявно зависят от остальных компонент вектора приращения состояния и, следовательно, не могут быть определены только из данных задачи на характеристике $s^{(i_l)}(\eta, t_0; t)$. Это очевидно из вида интегральной системы (1.1.7), используемой при определении обобщенного решения системы (1.1).

Для того чтобы избавиться от неявной зависимости рассмотрим вектор-функции $y^l(t)$, $l = 1, 2, \ldots, q$, размерности которых совпадают с размерностями подвекторов $\bar{x}^l$. Введем в рассмотрение также n-мерные вектор-функции

$$z^l(t) = x(s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t)\dot{+}(y^l(t) - x(s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t),$$

$$l = 1, 2, \ldots, q,$$

то есть мы предполагаем, что вектор-функция $z^l(t)$ получена из вектор-функции $x(s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t)$ заменой компонент $\bar{x}^l(s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t)$ на вектор-функцию $y^l(t)$. Функции $y^l(t)$ определим из систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}^l(t) = \bar{f}^l(z^l(t), s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t), \quad t \in [t_0, \bar{\tau}^{(l)}],$$

$$y^l(t_0) = \bar{p}^l(v, \eta).$$

Очевидно, что решить данные системы при выбранном $x = x(s,t)$ можно, пользуясь лишь данными задачи на соответствующих характеристиках $s^{(i_l)}(\eta, t_0; t)$.

Покажем справедливость неравенств

$$\| \left(x(s,t)\dot{+}\Delta\bar{x}^l(s,t)\right)\Big|_{s=s^{(i_l)}(\eta,t_0;t)} - z^l(t)\| =$$

$$\| \left(\bar{x}^l(s,t) + \Delta\bar{x}^l(s,t)\right)\Big|_{s=s^{(i_l)}(\eta,t_0;t)} - y^l(t)\| \le \bar{C}\,\varepsilon,$$

$$t \in [t_0, \bar{\tau}^{(l)}], \quad l = 1, 2, \ldots, q, \tag{4.3}$$

где $\bar{C} > 0$ – некоторая константа, не зависящая от выбора ε.

Действительно, из интегрального представления решения (1.1.7) следует, что для $i \in \{i_{l-1}+1, i_{l-1}+2, \ldots, i_l\}$

$$|x_i(s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t) + \Delta x_i(s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t) - y_i^l(t)| \le$$

$$\le \int\limits_{t_0}^{t} |f_i(x + \Delta x, s, \alpha) - f_i(x\dot{+}\Delta\bar{x}^l, s, \alpha)|\Big|_{s=s^{(i_l)}(\eta,t_0;\alpha)}\, d\alpha +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} |f_i(x\dot{+}\Delta\bar{x}^l, s, \alpha) - f_i(z^l(\alpha), s, \alpha)|\big|_{s=s^{(i_l)}(\eta,t_0;\alpha)}\, d\alpha. \qquad (4.4)$$

Первый интеграл запишем в виде суммы двух интегралов по отрезкам $[t_0, t_\varepsilon]$ и $[t_\varepsilon, t]$, применим условие Липшица на правые части системы, а также неравенства (2.2), (2.5) и (2.8). В результате получим оценку

$$\int\limits_{t_0}^{t} |f_i(x+\Delta x, s, \alpha) - f_i(x\dot{+}\Delta\bar{x}^l, s, \alpha)|\big|_{s=s^{(i_l)}(\eta,t_0;\alpha)}\, d\alpha \le$$

$$\le L\, C_5\, C_1\, \varepsilon + L\, K\, \varepsilon.$$

Используем условие Липшица для интегранта во втором интеграле в (4.4), запишем неравенство (4.4) в виде оценки для нормы:

$$\|\bar{x}^l(s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t) + \Delta\bar{x}^l(s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t) - y^l(t)\| \le L\, \varepsilon\, (C_1\, C_5 + K)\sqrt{n} +$$

$$+\sqrt{n}\, L \int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{x}^l(s, \alpha) + \Delta\bar{x}^l(s, \alpha) - y^l(\alpha)\|\big|_{s=s^{(i_l)}(\eta,t_0;\alpha)}\, d\alpha.$$

Применив лемму Гронуолла-Беллмана, получим необходимое нам неравенство (4.3), в котором

$$\bar{C} = L\, \varepsilon\, (C_1\, C_5 + K)\sqrt{n} \cdot \exp(L\sqrt{n}\, (\tau_l(\eta) - t_0)).$$

В силу предположений, сделанных в пункте 2.1, функции f, F и Φ удовлетворяют условию Липшица по x. Поэтому, учитывая доказанное выше неравенство (4.3), а также то, что длина отрезка S_ε равна ε, в формуле приращения (4.2) можно заменить $x(s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t)\dot{+}\Delta\bar{x}^l(s^{(i_l)}(\eta, t_0; t), t)$ на $z^l(t)$. Остаток, полученный в результате этой замены, имеет порядок ε^2. Таким образом, окончательно формулу приращения (4.2) можно записать в виде:

$$\Delta J(u) = \int\limits_{S_\varepsilon} \sum_{l=1}^{q} \big\{ [\, \Phi(z^l(\bar{\tau}^{(l)}(\eta)), \bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta)) -$$

$$-\Phi(x(\bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta)), \bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta))\,]\, \frac{\partial s^{(i_l)}(\eta, t_0; \bar{\tau}^{(l)}(\eta))}{\partial \eta}\, \mu(\bar{\xi}^{(l)}(\eta), \bar{\tau}^{(l)}(\eta)) -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{\bar\tau^{(l)}(\eta)} \Big[\langle \tilde\psi^l(s,t), \tilde f^l(z^l(t),s,t) - \tilde f^l(x,s,t)\rangle -$$

$$- F(z^l(t),s,t) + F(x,s,t)\Big]\Big|_{s=s^{(i_l)}(\eta,t_0;t)} \frac{\partial s^{(i_l)}(\eta,t_0;t)}{\partial \eta}\, dt\Big\}\, d\eta + o(\varepsilon). \quad (4.5)$$

Необходимое условие оптимальности типа вариационного принципа максимума формулируется следующим образом.

Теорема 4.1. *Пусть процесс $\{u,x\}$ является оптимальным в задаче (1.1)–(1.5). Тогда почти всюду на отрезке S выполняется условие максимума*

$$I(u(\xi),\xi) = \max_{v\in U} I(v,\xi), \quad \xi \in S, \quad (4.6)$$

где

$$I(v,\xi) = \sum_{l=1}^{q} \Bigg\{ -\Phi(z^l(\bar\tau^{(l)}), \bar\xi^{(l)}, \bar\tau^{(l)}) \frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar\tau^{(l)})}{\partial \xi}\, \mu(\bar\xi^{(l)}, \bar\tau^{(l)}) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\bar\tau^{(l)}} \Big[\langle \tilde\psi^l(s,t), \tilde f^l(z^l(t),s,t)\rangle - F(z^l(t),s,t)\Big]\Big|_{s=s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)} \times$$

$$\times \frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)}{\partial \xi}\, dt\Bigg\}, \quad (4.7)$$

$$z^l(t) = x(s^{(i_l)}(\xi,t_0;t),t) \dot{+} (y^l(t) - \bar x^l(s^{(i_l)}(\xi,t_0;t),t)), \quad (4.8)$$

функции $y^l(t)$ определяются из систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot y^l(t) = \bar f^l(z^l(t), s^{(i_l)}(\xi,t_0;t),t), \quad t \in [t_0, \bar\tau^{(l)}], \quad (4.9)$$

$$y^l(t_0) = \bar p^l(v,\xi), \quad l = 1,2,\ldots,q,$$

$(\bar\xi^{(l)}, \bar\tau^{(l)})$ – конечные точки характеристик $s = s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)$, $\tilde\psi^l$ – компоненты решения сопряженной задачи (3.8) на оптимальном процессе $\{u,x\}$.

Для доказательства достаточно воспользоваться формулой приращения (4.5) на оптимальном процессе. Очевидно, что при $v = u(\xi)$ выполнено равенство $z^l(t) = x(s^{(i_l)}(\xi, t_0; t), t)$. Поэтому на вариации (2.1) оптимального управления

$$J(u + \Delta u) - J(u) = -\int\limits_{S_\varepsilon} [\, I(v, \eta) - I(u(\eta), \eta) \,] \, d\eta + o(\varepsilon), \qquad (4.10)$$

причем вследствие оптимальности управления $u = u(s)$ данное приращение неотрицательно. Отсюда, применив теорему о среднем для интеграла и воспользовавшись произвольностью выбора параметров игольчатого варьирования, получим доказываемое утверждение.

Таким образом, оптимальное в задаче (1.1)–(1.5) управление доставляет максимум функции (4.7) в задаче, которая, фактически, является задачей управления начальными условиями систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для уменьшения громоздкости изложения предполагалось, что краевые условия на боковых границах прямоугольника фиксированы. Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно показать справедливость вариационного принципа максимума для задачи, в которой условия (1.3) также являются управляемыми. Сформулируем этот результат.

Вместо краевых условий (1.3) рассмотрим следующие условия:

$$x^+(s_0, t) = g^{(1)}(u^{(1)}(t), t),$$

$$x^-(s_1, t) = g^{(2)}(u^{(2)}(t), t), \quad t \in T. \qquad (4.11)$$

Предполагаем, что функции $u^{(1)} = u^{(1)}(t)$, $u^{(2)} = u^{(2)}(t)$ ограничены и измеримы на отрезке T и удовлетворяют ограничениям типа включения

$$u^{(1)}(t) \in U^{(1)} \subset E^{r_1}, \quad u^{(2)}(t) \in U^{(2)} \subset E^{r_2}. \qquad (4.12)$$

Будем считать, что $a_{i_l} > 0$, $l = 1, 2, \ldots, q_1$; $a_{i_l} < 0$, $l = q_2$, $q_2 + 1, \ldots, q$; $q_1 < q_2 \leq q$.

Теорема 4.2. *Пусть процесс* $\{u, u^{(1)}, u^{(2)}; x\}$ *является оптимальным в задаче (1.1), (1.2), (4.11) – (4.12), (1.4)–(1.5). Тогда*

1) почти всюду на отрезке S *выполняется условие максимума (4.6)–(4.9);*

2) при почти всех $\tau \in T$

$$I^{(1)}(u^{(1)}(\tau), \tau) = \max_{v^{(1)} \in U^{(1)}} I^{(1)}(v^{(1)}, \tau),$$

где

$$I^{(1)}(v^{(1)}, \tau) = \sum_{l=1}^{q_1} \left\{ \Phi(z^l(\bar{\tau}^{(l)}), \bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}) \, \frac{\partial s^{(i_l)}(s_0, \tau; \bar{\tau}^{(l)})}{\partial \tau} \, \mu(\bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}) - \right.$$

$$- \int\limits_{\tau}^{\bar{\tau}^{(l)}} \left[\langle \tilde{\psi}^l(s,t), \tilde{f}^l(z^l(t), s, t) \rangle - F(z^l(t), s, t) \right] \Big|_{s = s^{(i_l)}(s_0, \tau; t)} \times$$

$$\left. \times \, \frac{\partial s^{(i_l)}(s_0, \tau; t)}{\partial \tau} \, dt \right\},$$

$$z^l(t) = x(s^{(i_l)}(s_0, \tau; t), t) \dot{+} (y^l(t) - \bar{x}^l(s^{(i_l)}(s_0, \tau; t), t)),$$

$$\dot{y}^l(t) = \bar{f}^l(z^l(t), s^{(i_l)}(s_0, \tau; t), t), \quad t \in [\tau, \bar{\tau}^{(l)}],$$

$$y^l(\tau) = \bar{g}^{l^{(1)}}(v^{(1)}, \tau), \quad l = 1, 2, \ldots, q_1,$$

3) при почти всех $\tau \in T$

$$I^{(2)}(u^{(2)}(\tau), \tau) = \max_{v^{(2)} \in U^{(2)}} I^{(2)}(v^{(2)}, \tau),$$

где

$$I^{(2)}(v^{(2)}, \tau) = \sum_{l=q_2}^{q} \left\{ -\Phi(z^l(\bar{\tau}^{(l)}), \bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}) \, \frac{\partial s^{(i_l)}(s_1, \tau; \bar{\tau}^{(l)})}{\partial \tau} \, \mu(\bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}) + \right.$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{\bar{\tau}^{(l)}} \left[\langle \tilde{\psi}^l(s,t), \tilde{f}^l(z^l(t), s, t) \rangle - F(z^l(t), s, t) \right] \Big|_{s = s^{(i_l)}(s_1, \tau; t)} \times$$

$$\times \frac{\partial s^{(i_l)}(s_1,\tau;t)}{\partial \tau}\,dt\Big\},$$

$$z^l(t) = x(s^{(i_l)}(s_1,\tau;t),t)\dot{+}(y^l(t) - \bar{x}^l(s^{(i_l)}(s_1,\tau;t),t)),$$

$$\dot{y}^l(t) = \bar{f}^l(z^l(t), s^{(i_l)}(s_1,\tau;t),t), \quad t \in [\tau, \bar{\tau}^{(l)}],$$

$$y^l(\tau) = \bar{g}^{l^{(2)}}(v^{(2)},\tau), \quad l = q_2, q_2+1, \ldots, q.$$

Здесь $\tilde{\psi}^l$ – компоненты решения сопряженной задачи (3.8), подсчитанные на оптимальном процессе $\{u, u^{(1)}, u^{(2)}; x\}$.

Замечание 4.1. При доказательстве вариационного принципа максимума можно было не применять замены переменных, приводящей к интегрированию по отрезку S_ε. Почти для каждой точки $\xi \in (s_0, s_1]$ справедливо разложение

$$\int\limits_{\Gamma_l(\varepsilon)} \left[\Phi(x\dot{+}\Delta\bar{x}^l, s, t) - \Phi(x, s, t)\right](ds + dt) =$$

$$= \left[\Phi(x(\bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)})\dot{+}\Delta\bar{x}^l(\bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}), \bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}) -\right.$$

$$\left. -\Phi(x(\bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}), \bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)})\right] mes\,\Gamma_l(\varepsilon) + o(\varepsilon),$$

$$mes\,\Gamma_l(\varepsilon) = \frac{\partial s^{(i_l)}(\xi, t_0; \bar{\tau}^{(l)})}{\partial \xi}\,\mu(\bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}) + o(\varepsilon).$$

Применяя аналогичное разложение для интеграла по характеристической полоске $\Pi_l(\varepsilon) \cup Q_l(\varepsilon)$ и заменив после этого в формуле приращения $x(s^{(i_l)}(\xi, t_0; t), t)\dot{+}\Delta\bar{x}^l(s^{(i_l)}(\xi, t_0; t), t)$ на $z^l(t)$, можно получить следующий результат:

$$J(u + \Delta u) - J(u) = -\varepsilon\,[\,I(v, \xi) - I(u(\xi), \xi)\,] + o(\varepsilon). \tag{4.13}$$

Представление приращения целевого функционала в форме (4.13) достаточно для получения вариационного принципа максимума. Однако для построения итерационных методов поиска управлений, удовлетворяющих этому необходимому условию оптимальности, нам потребуется формула приращения в виде (4.10), т.к. формулы (4.13) недостаточно для доказательства сходимости метода, который изложен в пункте 2.6.

Проиллюстрируем конструкции только что доказанного условия оптимальности на конкретном примере задачи оптимального управления.

Пример 4.1. Пусть в прямоугольнике $S \times T$, $S = [s_n, s_k]$, $T = [t_0, t_1]$, управляемый процесс описывается следующей начально-краевой задачей:

$$x_{1t} + \lambda x_{1s} = \alpha(s)(x_1 - x_2),$$

$$x_{2t} - \lambda x_{2s} = \beta(s)(x_1 - x_2),$$

$$x_1(s, t_0) = u(s) + q(s), \quad x_2(s, t_0) = u(s) - q(s), \quad s \in S.$$

Допустимые управления – скалярные функции $u(s)$, удовлетворяющие поточечному ограничению

$$u(s) \in U \subset E^1, \quad s \in S.$$

Цель задачи заключается в минимизации функционала

$$J(u) = \int_S \left(x_1(s, t_1) + x_2(s, t_1) - \eta(s)\right)^2 ds.$$

Функции $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $q(s)$, $\eta(s)$ и положительная константа λ считаются заданными. Дополнительно предполагаем, что выполнено условие

$$s_k - s_n > 2\lambda(t_1 - t_0), \tag{4.14}$$

смысл которого будет пояснен чуть позже.

Задачи оптимального управления рассматриваемого вида возникают при исследовании процессов возбуждения и распространения гравитационных волн. Подробному численному решению одной из подобных задач посвящена глава 5 настоящей работы.

В этом примере два семейства характеристик определяются уравнениями $s_1 = -\lambda t + const$, $s_2 = \lambda t + const$. Из (4.1) в силу постоянства коэффициентов λ следует, что

$$\frac{\partial s^{(1)}(\xi, t_0; \alpha)}{\partial \xi} = \frac{\partial s^{(2)}(\xi, t_0; \alpha)}{\partial \xi} = 1.$$

Пусть $\{u, x\}$ – оптимальный процесс, $\psi(s,t)$ – вычисленное на этом процессе решение сопряженной задачи

$$\psi_{1t} + \lambda\psi_{1s} = -\alpha\psi_1 - \beta\psi_2,$$

$$\psi_{2t} - \lambda\psi_{2s} = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2,$$

$$\psi_1(s,t_1) = \psi_2(s,t_1) = 2\left(\eta(s) - x_1(s,t_1) - x_2(s,t_1)\right), \quad s \in S,$$

$$\psi_1(s_k,t) = \psi_2(s_n,t) = 0, \quad t \in T.$$

Из теоремы 4.1. следует, что почти всюду на отрезке S выполняется условие максимума (4.6) функционала $I(v,\xi)$. Вид этого функционала и соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.9) зависит в нашем случае от расположения точки ξ на отрезке S.

a) $\qquad s_n + (t_1 - t_0)\lambda \le \xi \le s_k - (t_1 - t_0)\lambda.$

Неравенство (4.14) гарантирует, что этот отрезок непустой. Уравнения характеристик, исходящих из точки (ξ, t_0) имеют вид:

$$s^{(1)} = \lambda(t_0 - t) + \xi, \quad s^{(2)} = \lambda(t - t_0) + \xi.$$

Конечными точками этих характеристик являются точки отрезка $\{(s,t) : s \in S,\ t = t_1\}$. В данном случае

$$I(v,\xi) = -\left(y_1(t_1) + x_2(\lambda(t_0 - t_1) + \xi, t_1) - \eta(\lambda(t_0 - t_1) + \xi)\right)^2 +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \psi_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t)\, \beta(\lambda(t_0 - t) + \xi)(y_1(t) - x_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t))\, dt -$$

$$-\left(y_2(t_1) + x_1(\lambda(t_1 - t_0) + \xi, t_1) - \eta(\lambda(t_1 - t_0) + \xi)\right)^2 +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \psi_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t)\, \alpha(\lambda(t - t_0) + \xi)(x_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t) - y_2(t))\, dt,$$

$$\dot{y}_1(t) = \alpha(\lambda(t_0 - t) + \xi)(y_1(t) - x_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t)), \quad t \in T, \tag{4.15}$$

$$\dot{y}_2(t) = \beta(\lambda(t - t_0) + \xi)(x_1(\lambda(t_0 - t) + \xi, t) - y_2(t)), \quad t \in T, \tag{4.16}$$

$$y_1(t_0) = v(\xi) + q(\xi), \quad y_2(t_0) = v(\xi) - q(\xi). \tag{4.17}$$

б) $\qquad s_n \le \xi < s_n + (t_1 - t_0)\lambda.$

В этом случае характеристика первого семейства, проходящая через точку (ξ, t_0), имеет в качестве конечной точку $(s_n, t_0 + (\xi - s_n)/\lambda)$. Характеристика же второго семейства заканчивается в точке $(\lambda(t_1 - t_0) + \xi, t_1)$. Целевой функционал (4.7) имеет следующий вид:

$$I(v,\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_0+(\xi-s_n)/\lambda} \psi_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t)\, \beta(\lambda(t_0 - t) + \xi)(y_1(t) -$$

$$-x_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t))\, dt - (y_2(t_1) + x_1(\lambda(t_1 - t_0) + \xi, t_1) - \eta(\lambda(t_1 - t_0) + \xi))^2 +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \psi_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t)\, \alpha(\lambda(t - t_0) + \xi)(x_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t) - y_2(t))\, dt.$$

При этом функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ являются решениями задачи Коши (4.15), (4.16), (4.17). Однако уравнение (4.15) рассматривается при $t \in [t_0, t_0 + (\xi - s_n)/\lambda]$.

в) $\qquad s_k - (t_1 - t_0)\lambda < \xi \le s_k.$

Этот случай симметричен только что рассмотренному. Характеристика второго семейства, начинающаяся в точке (ξ, t_0), имеет в качестве конечной точку $(s_k, t_0 + (s_k - \xi)/\lambda)$. Характеристика первого семейства заканчивается в точке $(\lambda(t_0 - t_1) + \xi, t_1)$.

$$I(v,\xi) = -\,(y_1(t_1) + x_2(\lambda(t_0 - t_1) + \xi, t_1) - \eta(\lambda(t_0 - t_1) + \xi))^2 +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \psi_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t)\, \beta(\lambda(t_0 - t) + \xi)(y_1(t) - x_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t))\, dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_0+(s_k-\xi)/\lambda} \psi_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t)\, \alpha(\lambda(t - t_0) + \xi)(x_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t) - y_2(t))\, dt.$$

Функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ являются решениями задачи Коши (4.15), (4.16), (4.17). Однако уравнение (4.15) рассматривается при $t \in [t_0, t_0 + (s_k - \xi)/\lambda]$.

Данный пример иллюстрирует случай различных диагональных элементов матрицы гиперболического оператора. Фигурирующие в условии оптимальности задачи оптимального управления начальными условиями систем обыкновенных дифференциальных уравнений имеют ряд особенностей. Во-первых, несмотря на аддитивность целевого функционала, каждая из задач не распадается на задачи оптимизации в отдельных обыкновенных дифференциальных уравнениях, построенных вдоль характеристик гиперболического оператора. Во-вторых, каждое из уравнений системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается на, вообще говоря, различных отрезках изменения независимой переменной.

Конструкции теоремы 4.2 поясним следующим примером.

Пример 4.2. В прямоугольнике $S \times T$, $S = [0, s_k]$, $T = [t_0, t_1]$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$x_{1t} + x_{1s} = \alpha(s,t)x_1 + \beta(s,t)x_2,$$

$$x_{2t} + x_{2s} = \mu(s,t)x_1 + \gamma(s,t)x_2;$$

$$x_1(0,t) = 1 - v(t), \quad x_2(0,t) = v(t), \quad t \in T;$$

$$x_1(s,t_0) = \bar{x}_1(s), \quad x_2(s,t_0) = \bar{x}_2(s), \quad s \in S.$$

Допустимые управления – скалярные функции $v(t)$, удовлетворяющие поточечному ограничению

$$v(t) \in [0,1], \quad t \in T.$$

Цель задачи заключается в минимизации функционала

$$J(v) = \int\limits_S \left(x_1(s,t_1) + x_2(s,t_1) - \eta(s)\right)^2 ds.$$

Функции $\alpha(s,t)$, $\beta(s,t)$, $\mu(s,t)$, $\gamma(s,t)$, $\bar{x}_1(s)$, $\bar{x}_2(s)$, $\eta(s)$ считаются заданными. Будем предполагать также, что $s_k > t_1 - t_0$. Задачи рассматриваемого вида возникают при изучении процессов в распределенных по возрасту популяциях, исследовании распространения болезней, наркомании и т.п. Подробно одна из задач такого типа исследована в главе 4 настоящей работы.

В данном примере коэффициенты при производных по переменной s в обоих уравнениях равны одной и той же константе 1. В силу этого факта условие оптимальности теоремы 4.2 имеет очень простой вид.

Действительно, уравнение характеристики, проходящей через точку $(0,\tau)$ имеет вид $s^{(i)} = t - \tau$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\frac{\partial s^{(i)}(s_0, \tau; t)}{\partial \tau} = -1.$$

Условие $s_k > t_1 - t_0$ гарантирует, что все характеристики, выходящие из точек $(0,\tau)$, $\tau \in [t_0, t_1]$, имеют в качестве конечных точки из отрезка $\{(s,t) : \ s \in S, \ t = t_1\}$. На оптимальном процессе $\{v^*, x^*\}$ почти в каждой точке $\tau \in T$

$$I^{(1)}(v^*(\tau), \tau) = \max_{v \in [0,1]} I^{(1)}(v, \tau),$$

где

$$I^{(1)}(v(\tau), \tau) = -\left(y_1(t_1) + y_2(t_1) - \eta(t_1 - \tau)\right)^2,$$

$$\dot{y}_1 = \alpha(t-\tau, t) y_1(t) + \beta(t-\tau, t) y_2(t),$$

$$\dot{y}_2 = \mu(t-\tau, t) y_1(t) + \gamma(t-\tau, t) y_2(t), \quad t \in [\tau, t_1],$$

$$y_1(\tau) = 1 - v, \quad y_2(\tau) = v.$$

Таким образом, в рассматриваемом примере вариационный принцип максимума вырождается в простейшее условие максимума вдоль семейства характеристик системы.

2.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ЕГО СРАВНЕНИЕ С ВАРИАЦИОННЫМ

Нашей дальнейшей целью будет являться сравнение вариационного принципа максимума, полученного в предыдущем пункте, с известными необходимыми условиями оптимальности в рассматриваемой задаче оптимального управления. Как уже отмечалось, характерной особенностью задачи (1.1)– (1.5) является отсутствие в ней необходимого условия оптимальности вида конечномерного принципа максимума. В связи с этим невозможно применение одного из традиционных способов доказательства дифференциального (линеаризованного) принципа максимума как следствия конечномерного принципа максимума при дополнительных предположениях о дифференцируемости параметров задачи по управлению и выпуклости множества, задающего ограничения на управляющую функцию. Отметим, что методика, примененная в работах [102, 125] для исследования задач оптимального управления смешанными системами, в которых одно из уравнений является гиперболическим, позволяет доказать конечномерный принцип максимума как необходимое условие оптимальности граничных управлений. Однако в силу предположения о линейности задачи по управлению конечномерный принцип максимума в данном случае совпадает с дифференциальным.

В статье [218] установлена справедливость дифференциального принципа максимума в линейных по состоянию гиперболических системах первого порядка в предположении, что управление входит линейно в функцию, задающую граничные условия, а подынтегральные функции в критерии качества выпуклы. В этой же работе предложен метод, основанный на полученном результате. В [214] показана возможность доказательства дифференциального принципа максимума для задачи оптимального управления граничными условиями полулинейной гиперболической системы. Доказательство проводится путем сведения задачи оптимального управления к абстрактной задаче в банаховом пространстве.

Для сравнения вариационного принципа максимума и дифференциального принципа максимума будет полезно получить дифференциальный принцип максимума методом, основанным на исследовании формулы приращения функционала. Ограничимся изложением схемы доказательства.

Будем считать, что в дополнение к условиям на параметры задачи оптимального управления (1.1)– (1.5), сформулированным в пункте 2.1, справедливы следующие предположения:

1) вектор-функция $p(u,s)$ дифференцируема по управлению и удовлетворяет условию Липшица по u;

2) множество U выпукло.

Рассмотрим два произвольных допустимых процесса $\{u, x\}$ и $\{\ \hat{u} = u + \Delta u,\ \hat{x} = x + \Delta x\}$. Формула приращения функционала (1.5) может быть записана в виде:

$$\Delta J(u) = J(\hat{u}) - J(u) = \int\limits_{\Omega} \Delta\Phi(x,s,t)\,(ds+dt) +$$

$$+ \iint\limits_{\Pi} \Delta F(x,s,t)\,ds\,dt +$$

$$+ \iint\limits_{\Pi} \langle \psi(s,t), (D_A \Delta x(s,t) - \Delta f(x,s,t)) \rangle\,ds\,dt, \qquad (5.1)$$

где $\psi = \psi(s,t)$ – пока произвольная n -мерная ограниченная и измеримая в прямоугольнике Π функция, для которой имеет смысл обобщенная производная $D_A\psi$.

Применим стандартные преобразования, используемые при доказательстве принципа максимума, то есть

– представим приращение $\Delta\Phi(x,s,t) = \Phi(\hat{x},s,t) - \Phi(x,s,t)$ по формуле Тейлора первого порядка, выделив линейную часть относительно приращения состояния процесса;

– введем скалярную функцию $H(\psi,x,s,t) = \langle\psi, f(x,s,t)\rangle - F(x,s,t)$;

– представим приращение $\Delta H(\psi,x,s,t) = H(\psi,\hat{x},s,t) - H(\psi,x,s,t)$ также по формуле Тейлора первого порядка;

– к последнему слагаемому в (5.1) применим формулу интегрирования по частям (1.3.4);

– потребуем, чтобы функция $\psi = \psi(s,t)$ удовлетворяла сопряженной задаче (3.8).

В результате получим, что приращение целевого функционала можно записать в виде

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \langle\psi(s,t_0), \Delta_{\tilde{u}} p(u(s),s)\rangle\, ds + \int\limits_\Omega o_\Phi(\|\,\Delta x(s,t)\,\|)\,(ds+dt) -$$

$$- \iint\limits_\Pi o_H(\|\,\Delta x(s,t)\,\|)\, ds\, dt. \qquad (5.2)$$

Пусть теперь $\bar{u} = \bar{u}(s)$ – произвольное допустимое управление. Оценим приращение состояния, вызванное приращением управления

$$\Delta u = \alpha\,(\bar{u} - u), \quad \alpha \in (0,1].$$

В силу выпуклости множества U управление $u + \Delta u$ является допустимым.

Пусть $(\xi^{(i)}, \tau^{(i)})$ – начальная точка характеристики $s^{(i)}(s,t;\tau)$. Из интегрального варианта (1.1.7) рассматриваемой системы гиперболических уравнений следует, что

$$|\Delta x_i(s,t)| \le |p_i(u + \alpha\,(\bar{u} - u), \xi_i) - p_i(u,\xi_i)| +$$

$$+ \int\limits_{\tau^{(i)}}^{t} |\Delta f_i(x(s,t),s,\tau)|\Big|_{s=s^{(i)}(s,t;\tau)} d\tau \le$$

$$\leq L_1 \alpha \, \|\bar{u}(\xi^{(i)}) - u(\xi^{(i)})\| + L \int\limits_{\tau^{(i)}}^{t} \|\Delta x(s^{(i)}(s,t;\tau)), \tau)\| \, d\tau, \tag{5.3}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь L_1 и L – константы Липшица соответственно для функции p и f_i.

Обозначим

$$\gamma(\tau) = \operatorname{ess} \sup_{\substack{(s,t) \in \bar{\Pi} \\ t \leq \tau}} \|\Delta x(s,t)\|$$

Из неравенства (5.3) в силу ограниченности $\|\bar{u}(s) - u(s)\|$ получим, что существует константа $C_1 \geq 0$, такая что

$$|\Delta x_i(s,t)| \leq L \int\limits_{t_0}^{t} \gamma(\tau) \, d\tau + C_1 \, \alpha, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда

$$\gamma(t) \leq \sqrt{n} \, L \int\limits_{t_0}^{t} \gamma(\tau) \, d\tau + \sqrt{n} \, C_1 \, \alpha, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Применив лемму Гронуолла-Беллмана, получим

$$\gamma(t) \leq C_2 \, \alpha, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где

$$C_2 = \sqrt{n} \, C_1 \, \exp(L \sqrt{n} \, (t_1 - t_0)).$$

Данное неравенство позволяет установить оценку для остаточного члена в формуле (5.2)

$$\int\limits_{\Omega} o_{\Phi}(\| \, \Delta x(s,t) \, \|) \, (ds + dt) - \iint\limits_{\Pi} o_H(\| \, \Delta x(s,t) \, \|) \, ds \, dt = o(\alpha). \tag{5.4}$$

Введем функцию

$$h(\psi, u, s) = \langle \psi(s, t_0), p(u(s), s) \rangle,$$

определенную на отрезке S.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству дифференциального принципа максимума.

Теорема 5.1. *Пусть процесс $\{u^*, x^*\}$ оптимален в задаче (1.1)–(1.5). Тогда почти в каждой точке s отрезка S справедливо неравенство*

$$\langle h_u(\psi^*(s,t_0), u^*(s), s), (v - u^*(s))\rangle \leq 0, \quad \forall\, v \in U, \tag{5.5}$$

где $\psi^*(s,t)$ – соответствующее решение сопряженной задачи (3.8).

Доказательство. Пусть управление $u^* = u^*(s)$ оптимально в рассматриваемой задаче. Предположение о дифференцируемости функции p по управлению позволяет выделить в формуле приращения (5.2) слагаемое, имеющее порядок α. Для любого допустимого управления $\bar{u} = \bar{u}(s)$

$$0 \leq J(u^* + \alpha\,(\bar{u} - u^*)) - J(u^*) =$$

$$= -\alpha \int\limits_S \langle h_u(\psi^*(s,t_0), u^*(s), s), (\bar{u}(s) - u^*(s))\rangle\, ds + o(\alpha), \;\; \alpha \in (0,1].$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_S \langle h_u(\psi^*(s,t_0), u^*(s), s), (\bar{u}(s) - u^*(s))\rangle\, ds \leq 0. \tag{5.6}$$

От полученного интегрального необходимого условия оптимальности можно легко перейти к поточечному, воспользовавшись произвольностью управления $\bar{u} = \bar{u}(s)$. Для этого зафиксируем произвольную точку $\xi \in (s_0, s_1]$ и число $\varepsilon \in (0, \xi - s_0]$. Управление $\bar{u} = \bar{u}(s)$ зададим в виде

$$\bar{u} = \begin{cases} u^*(s), & s \in S \backslash (\xi - \varepsilon, \xi], \\ v, & s \in (\xi - \varepsilon, \xi], \end{cases}$$

где v – произвольный вектор из U.

Из неравенства (5.6) следует, что почти всюду на отрезке S справедливо (5.5), что и означает выполнение дифференциального принципа максимума.

Перейдем теперь к сравнению вариационного принципа максимума и дифференциального принципа максимума. Наша цель состоит в доказательстве того, что вариационный принцип максимума является более сильным условием оптимальности.

Прежде всего заметим, что вариационный принцип максимума справедлив при более слабых предположениях на параметры задачи оптимального управления. Действительно, при доказательстве вариационного принципа максимума не было необходимости предполагать, что функция $p = p(u, s)$, задающая начальные условия, дифференцируема по управлению, не требовалось и выпуклости множества U, определяющего ограничения на управления.

Пусть задача оптимального управления (1.1)–(1.5) удовлетворяет условиям, при которых справедлив дифференциальный принцип максимума. Покажем, что из вариационного принципа максимума всегда следует дифференциальный. Несправедливость обратного утверждения проиллюстрируем соответствующим контрпримером.

Теорема 5.2. *Пусть допустимое управление $u = u(s)$ удовлетворяет вариационному принципу максимума в задаче (1.1)–(1.5). Тогда для него справедлив дифференциальный принцип максимума.*

Доказательство. Обозначим $x = x(s,t)$ и $\psi = \psi(s,t)$ – решения соответственно прямой задачи (1.1)–(1.3) и сопряженной задачи (3.8), отвечающие управлению $u = u(s)$.

Поскольку управление $u = u(s)$ удовлетворяет вариационному принципу максимума, то оно почти в каждой точке $\xi \in S$ доставляет максимум функции (4.7).

Сформулируем необходимое условие оптимальности вектора $u(\xi)$ в задаче (4.6)–(4.9). Для этого зафиксируем произвольный вектор $v \in U$ и рассмотрим приращение целевой функции, соответствующее приращению аргумента $\Delta u = \alpha\,(v - u(\xi)), \quad \alpha \in (0,1]$.

$$I(u(\xi) + \alpha\,(v - u(\xi)), \xi) - I(u(\xi), \xi) = \sum_{l=1}^{q} \big\{ \big[-\Phi(z^l(\bar{\tau}^{(l)}), \bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}) + $$

$$+ \Phi(x(\bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}), \bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}) \big] \frac{\partial s^{(i_l)}(\xi, t_0; \bar{\tau}^{(l)})}{\partial \xi} \, \mu(\bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}) +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{\bar\tau^{(l)}} \big[\langle\tilde\psi^l(s,t),(\tilde f^l(z^l(t),s,t)\rangle - \langle\tilde\psi^l(s,t),(\tilde f^l(x(s,t),s,t)\rangle -$$

$$- F(z^l(t),s,t) + F(x(s,t),s,t)\big]\Big|_{s=s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)} \frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)}{\partial\xi}\,dt +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{\bar\tau^{(l)}} \langle\zeta^l(t),\left[\frac{d(y^l(t)-\bar x^l(s,t))}{dt} - \Delta_{z^l}\bar f^l(x,s,t)\right]\Bigg|_{s=s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)}\rangle\,dt\,\}.$$

Здесь функции $z^l(t)$ определяются из (4.8)–(4.9) при начальных условиях

$$y^l(t_0) = \bar p(u(\xi) + \alpha\,(v-u(\xi)),\xi),$$

$\zeta^l(t)$ – некоторые пока произвольные почти всюду на отрезках $[t_0,\bar\tau^{(l)}]$ дифференцируемые вектор-функции, размерности которых совпадают с размерностями вектор-функций $y^l(t)$.

Выполним далее стандартные преобразования: разложение по формуле Тейлора первого порядка, выделение линейной части относительно приращения $y^l(t)-\bar x(s^{(i_l)}(\xi,t_0;t),t)$, применение формулы интегрирования по частям. Подчиним вектор-функции $\zeta^l(t)$ системам обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot\zeta^l(t) = -\bar f^l_{\bar x^l}(x,s^{(i_l)}(\xi,t_0;t),t)^T\,\zeta^l(t) +$$

$$+\big[\tilde f^l_{\bar x^l}(x,s,t)^T\tilde\psi^l(s,t) - F_{\bar x^l}(x,s,t)\big]\Big|_{s=s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)} \frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar\tau^{(l)})}{\partial\xi},$$

$$\zeta^l(\bar\tau^{(l)}) = \Phi_{\bar x^l}(x,s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar\tau^{(l)}),\bar\tau^{(l)})\,\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar\tau^{(l)})}{\partial\xi}\,\mu(\bar\xi^{(l)},\bar\tau^{(l)}),$$

$$t\in[t_0,\bar\tau^{(l)}];\quad l=1,2,\ldots,q. \tag{5.7}$$

Воспользовавшись ограниченностью $\|v-u(\xi)\|$, условиями Липшица на правые части (1.1) и (1.2), а также леммой Гронуолла - Беллмана, можно легко получить оценку

$$\|y^l(t)-\bar x^l(s^{(i_l)}(\xi,t_0;t),t)\| \le C\,\alpha,\ \ C\ge 0;\ \ l=1,2,\ldots,q.$$

Введем в рассмотрение скалярную функцию

$$h^0(\zeta, u, \xi) = \sum_{l=1}^{q} \langle \zeta^l(t_0), \bar{p}(u(\xi), \xi) \rangle.$$

Тогда с учетом оптимальности вектора $u(\xi)$ формулу приращения можно записать в виде

$$0 \geq I(u(\xi) + \alpha\,(v - u(\xi)), \xi) - I(u(\xi), \xi) =$$

$$= -\langle\, h^0_u(\zeta, u(\xi), \xi), (v - u(\xi))\,\rangle\, \alpha + o(\alpha), \quad \alpha \in (0, 1].$$

Таким образом, необходимым условием оптимальности вектора $u(\xi)$ в задаче (4.6)–(4.9), является выполнение неравенства

$$\langle\, h^0_u(\zeta, u(\xi), \xi), (v - u(\xi))\,\rangle \geq 0 \tag{5.8}$$

для произвольного вектора $v \in U$.

Установим связь между функцией $h^0_u(\zeta, u(\xi), \xi)$ и фигурирующей в дифференциальном принципе максимума функцией

$$h(\psi, u, \xi) = \langle \psi(\xi, t_0), p(u(\xi), \xi) \rangle = \sum_{l=1}^{q} \langle \bar{\psi}^l(\xi, t_0), \bar{p}^l(u(\xi), \xi) \rangle.$$

Для этого найдем связь между функциями $\zeta^l(t)$ и $\bar{\psi}^l(s^{(i_l)}(\xi, t_0; t), t)$. Из вида сопряженной задачи (3.8) следует, что

$$\frac{d\,\bar{\psi}^l(s^{(i_l)}(\xi, t_0; t), t)}{dt} = \{ - \left[\bar{f}^l_{\bar{x}^l}(x(s,t), s, t) + \frac{\partial a_{i_l}(s,t)}{\partial s}\,\bar{E} \right]^T \bar{\psi}^l(s,t) -$$

$$- \tilde{f}^l_{\bar{x}^l}(x(s,t), s, t)^T \tilde{\psi}^l(s,t) + F_{\bar{x}^l}(x(s,t), s, t) \big\}_{s = s^{(i_l)}(\xi, t_0; t)},$$

$$\bar{\psi}^l(s^{(i_l)}(\xi, t_0; \tau_l), \tau_l) = -\Phi_{\bar{x}^l}(x(\bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}), \bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)})\; \mu(\bar{\xi}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}),$$

$$t \in [t_0, \bar{\tau}^{(l)}]; \quad l = 1, 2, \ldots, q. \tag{5.9}$$

Здесь $\bar{E}$ – единичная матрица размерности $i_l - i_{l-1} \times i_l - i_{l-1}$.

Введем обозначения

$$A(t) = \bar{f}^l_{\bar{x}^l}(x(s^{(i_l)}(\xi, t_0; t), t), s^{(i_l)}(\xi, t_0; t), t)^T,$$

$$B(t) = -\left\{ \tilde{f}^l_{\bar{x}^l}(x(s,t),s,t)^T \tilde{\psi}^l(s,t) - F_{\bar{x}^l}(x(s,t),s,t) \right\}_{s=s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)}.$$

С помощью этих обозначений системы (5.7), (5.9) можно записать в более компактной форме

$$\dot{\zeta}^l(t) = -A(t)\,\zeta^l(t) - B(t)\,\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;\tau_l)}{\partial \xi}, \tag{5.10}$$

$$\zeta^l(\bar{\tau}^{(l)}) = \Phi_{\bar{x}^l}(x(\bar{\xi}^{(l)},\bar{\tau}^{(l)}),\bar{\xi}^{(l)},\bar{\tau}^{(l)})\,\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar{\tau}^{(l)})}{\partial \xi}\,\mu(\bar{\xi}^{(l)},\bar{\tau}^{(l)});$$

$$\frac{d\,\bar{\psi}^l(s^{(i_l)}(\xi,t_0;t),t)}{dt} = -\left[A(t) + \frac{\partial a_{i_l}(s^{(i_l)}(\xi,t_0;t),t)}{\partial s}\,\bar{E}\right]^T \bar{\psi}^l + B(t), \tag{5.11}$$

$$\bar{\psi}^l(s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar{\tau}^{(l)}),\bar{\tau}^{(l)}) = -\Phi_{\bar{x}^l}(x(\bar{\xi}^{(l)},\bar{\tau}^{(l)}),\bar{\xi}^{(l)},\bar{\tau}^{(l)})\;\mu(\bar{\xi}^{(l)},\bar{\tau}^{(l)}).$$

Запишем решения этих систем с помощью формулы Коши. Введем фундаментальные матрицы, определяемые из систем матричных уравнений

$$V^\zeta_t(t,\alpha) = -A(t)\,V^\zeta(t,\alpha),$$

$$V^\zeta(\alpha,\alpha) = \bar{E};$$

$$V^\psi_t(t,\alpha) = -\left[A(t) + \frac{\partial a_{i_l}(s^{(i_l)}(\xi,t_0;t),t)}{\partial s}\,\bar{E}\right] V^\psi(t,\alpha),$$

$$V^\psi(\alpha,\alpha) = \bar{E}.$$

Тогда решения неоднородных систем дифференциальных уравнений (5.10), (5.11) можно записать в следующем виде

$$\zeta^l(t) = -V^\zeta(t,\bar{\tau}^{(l)})\,\bar{\psi}^l(s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar{\tau}^{(l)}),\bar{\tau}^{(l)})\,\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar{\tau}^{(l)})}{\partial \xi} +$$

$$+\int\limits_t^{\bar{\tau}^{(l)}} V^\zeta(t,\alpha)\,B(\alpha)\,\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;\alpha)}{\partial \xi}\,d\alpha, \tag{5.12}$$

$$\bar{\psi}^l(s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar{\tau}^{(l)}),\bar{\tau}^{(l)}) = V^\psi(t,\bar{\tau}^{(l)})\,\bar{\psi}^l(s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar{\tau}^{(l)}),\tau_l)\,\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar{\tau}^{(l)})}{\partial \xi} -$$

$$-\int\limits_t^{\bar{\tau}^{(l)}} V^\psi(t,\alpha)\,B(\alpha)\,d\alpha. \tag{5.13}$$

Для того чтобы найти зависимость между фундаментальными матрицами $V^{\zeta}(t,\alpha)$ и $V^{\psi}(t,\alpha)$ введем функцию

$$\rho(t,\alpha)=\exp\left[\int\limits_{t}^{\alpha}\frac{\partial\, a_{i_l}(s^{(i_l)}(\xi,t_0;\tau),\tau)}{\partial s}\,d\tau\right];\quad t,\,\alpha\in[t_0,\bar{\tau}^{(l)}].$$

Производная этой функции имеет вид

$$\rho_t(t,\alpha)=-\frac{\partial\, a_{i_l}(s^{(i_l)}(\xi,t_0;\tau),\tau)}{\partial s}\,\rho(t,\alpha).$$

Отсюда и из уравнений для фундаментальных матриц получим следующую зависимость

$$V^{\psi}(t,\alpha)=V^{\zeta}(t,\alpha)\,\rho(t,\alpha). \tag{5.14}$$

Воспользуемся формулой (4.1), определяющей явный вид производной $\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;\alpha)/\partial\xi$. Из этой формулы следует, что

$$\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;\alpha)}{\partial\xi}=\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)}{\partial\xi}\,\rho(t,\alpha).$$

Поэтому (5.12) можно записать следующим образом

$$\zeta^l(t)=-V^{\zeta}(t,\bar{\tau}^{(l)})\,\rho(t,\bar{\tau}^{(l)})\,\bar{\psi}^l(s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar{\tau}^{(l)}),\bar{\tau}^{(l)})\,\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;\bar{\tau}^{(l)})}{\partial\xi}+$$

$$+\int\limits_{t}^{\bar{\tau}^{(l)}}V^{\zeta}(t,\alpha)\,\rho(t,\alpha)\,B(\alpha)\,\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)}{\partial\xi}\,d\alpha.$$

Сравнивая правую часть этого равенства с (5.13) и учитывая зависимость между фундаментальными матрицами (5.14), получим

$$\zeta^l(t)=-\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;t)}{\partial\xi}\,\bar{\psi}^l(s^{(i_l)}(\xi,t_0;t),t),\quad t\in[t_0,\tau^{(l)}].$$

В начальный момент времени, принимая во внимание равенство

$$\frac{\partial s^{(i_l)}(\xi,t_0;t_0)}{\partial\xi}=1,$$

получим

$$\zeta^l(t_0)=-\bar{\psi}^l(\xi,t_0).$$

Поэтому
$$h(\psi(\xi,t_0),u(\xi),\xi) = -h^0(\zeta(t_0),u(\xi),\xi).$$
Из (5.8) следует, что почти в каждой точке $\xi \in S$ выполняется неравенство
$$\langle\, h_u(\psi(\xi,t_0),u(\xi),\xi),(v-u(\xi))\,\rangle \le 0, \quad v \in U.$$
А это и означает, что управление $u = u(\xi)$ удовлетворяет дифференциальному принципу максимума. Теорема доказана.

Обратное утверждение выполняется далеко не всегда. Приведем контрпример, показывающий, что для управления, удовлетворяющего дифференциальному принципу максимума, вариационный принцип максимума может не выполняться. Тем самым мы завершим второй этап сравнения дифференциального и вариационного принципов максимума.

Пример 5.1. В прямоугольнике $\bar{\Pi} = S \times T$, $S = [0,2]$, $T = [0,1]$ рассмотрим задачу оптимального управления
$$x_t + x_s = 0,$$
$$x(s,0) = u^3(s),\ s \in S; \quad x(0,t) = 0,\ t \in T;$$
$$-1 \le u(s) \le 1, \quad s \in S.$$
Пусть требуется минимизировать функционал
$$J(u) = \int_S x(s,1)\,ds.$$
Выпишем уравнения характеристик для рассматриваемого гиперболического уравнения
$$s(\xi,\tau;t) = t + \xi - \tau, \quad (\xi,\tau) \in \bar{\Pi}.$$
Решение гиперболического уравнения определяется формулой
$$x(s,t) = \begin{cases} u^3(s-t), & t \le s, \\ 0, & t > s. \end{cases}$$

Сопряженная задача:

$$\psi_t + \psi_s = 0, \quad (s,t) \in \Pi,$$

$$\psi(1,t) = 0,\ t \in T; \quad \psi(s,1) = -1,\ s \in S$$

Очевидно, что решение сопряженной задачи не зависит от выбора управляющей функции и может быть записано в виде

$$\psi(s,t) = \begin{cases} 0, & t < s-1, \\ -1, & t \geq s-1. \end{cases}$$

Оптимальным в рассматриваемой задаче является управление

$$u^*(s) = \begin{cases} -1, & s \in [0,1], \\ w, & w \in [-1,1],\ s \in (1,2]. \end{cases}$$

Значение функционала, подсчитанное на оптимальном управлении

$$J(u^*) = -1.$$

Оптимальное управление u^* удовлетворяет как дифференциальному, так и вариационному принципам максимума. Действительно, запишем функцию $h(\psi, u, s)$

$$h(\psi(s,t_0), u(s), s) = \psi(s,0)\, u^3(s) = \begin{cases} 0, & s > 1, \\ -u^3(s), & s \leq 1. \end{cases}$$

При $s \leq 1$

$$h_u(\psi, u^*, s)\, u^* = 3 \geq -3v = h_u(\psi, u^*, s)\, v, \quad v \in U = [-1,1].$$

При $s > 1$

$$h_u(\psi, u^*, s) = 0,$$

то есть дифференциальный принцип максимума выполняется во всех точках отрезка S.

Зафиксируем произвольную точку $\xi \in [0,1]$. Система дифференциальных уравнений (4.9) в данном случае примет вид

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad t \in [0,1],$$

$$y(0) = v^3(\xi).$$

Функция (4.7):

$$I(v, \xi) = -y(1) = -v^3(\xi). \tag{5.15}$$

Для произвольного вектора $v \in U = [-1, 1]$ справедливо неравенство

$$I(u^*, \xi) = 1 \geq -v^3(\xi) = I(v, \xi),$$

что доказывает выполнение вариационного принципа максимума на оптимальном управлении u^*.

Рассмотрим теперь допустимое управление $\bar{u} = 0, \quad s \in S$. Данное управление не является оптимальным, так как $J(\bar{u}) = 0$. Выбранное нами управление удовлетворяет дифференциальному принципу максимума, поскольку

$$h_u(\psi(s, t_0), \bar{u}) = 0, \quad s \in S.$$

Однако управление $\bar{u} = 0$ не доставляет максимума функции (5.15) на множестве $U = [-1, 1]$. Следовательно, для этого управления не выполнено необходимое условие оптимальности вида вариационного принципа максимума.

Итак, теорема 5.2 и рассмотренный только что пример показывают, что вариационный принцип максимума является более сильным необходимым условием оптимальности, чем дифференциальный принцип максимума.

2.6. МЕТОД ПОИСКА УПРАВЛЕНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ВАРИАЦИОННОМУ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМА

Доказательство вариационного принципа максимума способом, основанным на исследовании формулы приращения целевого функционала, позволяет построить итерационный метод поиска управлений, удовлетворяющих этому необходимому условию оптимальности.

Общая структура метода аналогична схеме, изложенной в первой главе. Основные отличия заключаются в использовании иной невязки выполнения необходимого условия оптимальности и другой вспомогательной задачи поиска управления, применяемого для построения на каждом шаге однопараметрического семейства управлений.

Изложим общую схему метода. Пусть на k-ой итерации вычислено допустимое управление $u^k = u^k(s)$. По этому управлению найдем функции $x^k = x^k(s,t)$ и $\psi^k = \psi^k(s,t)$, являющиеся соответственно решениями задач (1.1)–(1.5) и (3.8). На основе этих данных построим функцию $I_k(v,\xi)$, получаемую из (4.7) заменой $x(s,t)$ на $x^k(s,t)$, $\psi(s,t)$ на $\psi^k(s,t)$. Предположим, что из вспомогательной задачи максимизации функции $I_k(v,\xi)$ можно определить допустимое ограниченное и измеримое на S управление $\bar{u}^k(s)$, $s \in S$:

$$I_k(\bar{u}^k(\xi),\xi) = \max_{v \in U} I_k(v,\xi), \quad \xi \in S. \tag{6.1}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\bar{w}_k(\xi) = I_k(\bar{u}^k(\xi),\xi) - I_k(u^k(\xi),\xi). \tag{6.2}$$

Тогда число

$$\mu_k = \mu(u^k) = \frac{1}{mes\ S} \int\limits_S \bar{w}_k(\xi)\, d\xi \geq 0 \tag{6.3}$$

можно рассматривать как невязку выполнения вариационного принципа максимума. Если $\mu(u^k) = 0$, то управление $u^k = u^k(s)$ почти всюду на S удовлетворяет этому необходимому условию оптимальности, и итерационный процесс завершается.

Пусть $\mu_k > 0$. Строим семейство управлений по правилу

$$u^k_\varepsilon(s) = \begin{cases} \bar{u}^k(s), & s \in S_k(\varepsilon), \\ u^k(s), & s \in S \backslash S_k(\varepsilon), \end{cases}$$

где $S_k(\varepsilon)$ – однопараметрическое семейство множеств из отрезка S, мера которых линейно зависит от ε, $\varepsilon \in [0,1]$.

Из условия наискорейшего спуска найдем параметр ε_k, играющий роль шага варьирования

$$\varepsilon^k: \quad J_k(u^k_{\varepsilon_k}) = \min_{\varepsilon\in[0,1]} J_k(u^k_\varepsilon). \tag{6.4}$$

В качестве следующего приближения выбирается управление

$$u^{k+1} = u^k_{\varepsilon_k}.$$

Сходимость метода доказывается с помощью утверждений, аналогичных сформулированным в главе 1. Основным требованием, которому должны удовлетворять множества $S_k(\varepsilon)$, является выполнение определяющего неравенства вида (1.5.7):

$$\int\limits_{S_k(\varepsilon)} \bar{w}_k(\xi)\, d\xi \geq N_k\, \mu_k^\sigma\, \varepsilon, \quad \varepsilon \in [0,1], \tag{6.5}$$

$$N_k \geq N > 0; \quad k = 0, 1, \dots; \quad \sigma \geq 1.$$

Выполнение неравенства (6.5) на каждом шаге метода гарантирует его релаксационность. Действительно, из формулы приращения (4.10) следует, что

$$J(u^k_\varepsilon) - J(u^k) = -\int\limits_{S_k(\varepsilon)} \bar{w}_k(\xi)\, d\xi + o(\varepsilon) \leq -N_k\, \mu_k^\sigma\, \varepsilon + o(\varepsilon).$$

Доказательство сходимости метода возможно при дополнительных предположениях, гарантирующих возможность следующей оценки приращения функционала

$$J(u^k_\varepsilon) - J(u^k) \leq -\int\limits_{S_k(\varepsilon)} \bar{w}_k(\xi)\, d\xi + M\, \varepsilon^{1+\gamma}; \quad M \geq 0, \quad \gamma > 0. \tag{6.6}$$

Из вида остаточного члена, полученного при доказательстве формулы приращения (4.5), следует, что в рассматриваемой задаче неравенство (6.6) справедливо при $\gamma = 1$, если дополнительно предположить, что функции $\varphi_x(x(s,t_1),s)$, $\varphi_{0_x}(x^-(s_0,t),t)$, $\varphi_{1_x}(x^+(s_1,t),t)$, $\Phi_x(x,s,t)$, $f_x(x,s,t)$ удовлетворяют условия Липшица по x.

Заметим, что выбор параметра ε_k из условия точного решения задачи одномерной минимизации (6.4) на практике достаточно сложен. Теорема о сходимости метода остается справедливой, если ε_k находится из более удобного при расчетах требования гарантированного убывания по функционалу:

$$\varepsilon_k = \delta^l, \quad l = 0, 1, \dots\ ,$$

$$J(u^k_{\delta^l}) - J(u^k) \le -N_k\, \mu_k^\sigma\, \delta^l\, \frac{\gamma}{1+\gamma}, \tag{6.7}$$

где $\delta \in (0,1)$ – параметр метода, l – минимальный номер, при котором выполняется (6.7).

Сформулируем утверждение о сходимости, доказательство которого проводится точно также, как и доказательство теоремы 5.1 в главе 1.

Теорема 6.1. *Пусть в задаче оптимального управления (1.1)–(1.5) выполнены следующие предположения:*

1) функционал $J(u)$ ограничен снизу на множестве допустимых управлений;

2) существуют области игольчатого варьирования, на которых справедливо неравенство (6.6);

3) области игольчатого варьирования $S_k(\epsilon)$ подобраны таким образом, что на каждом шаге итерационного процесса удовлетворяется неравенство (6.5).

Тогда при произвольном допустимом начальном приближении $u^0 = u^0(s)$ последовательность управлений, генерируемая методом, является релаксационной и сходится в смысле $\mu_k \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty$.

Таким образом, использование для построения итерационного процесса конструкций вида (1.5.1) – (1.5.7) позволяет при доказательстве теоремы о сходимости воспользоваться рассуждениями, применяемыми для обоснования сходимости метода поиска управлений, удовлетворяющих классическому принципу максимума в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Несколько замечаний о реализации метода. Наиболее трудоемким является поиск вспомогательного управления из условия (6.1).

Данная задача является задачей управления начальными условиями систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому для ее решения можно применять методы, разработанные для этого класса задач, например, методы градиентного типа.

Однопараметрические семейства множеств $S_k(\varepsilon)$, удовлетворяющие неравенству (6.5), можно строить способами, предложенными для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Краткий обзор этих способов приведен в первой главе.

Глава 3

ОПТИМИЗАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГЛАДКИМИ ГРАНИЧНЫМИ И СТАРТОВЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Исследуется задача оптимального управления начально-краевыми условиями полулинейных гиперболических систем первого порядка в классе гладких управляющих воздействий, стесненных поточечными (амплитудными) или интегральными ограничениями. Именно такой класс функций характерен для обратных задач математической физики. Понятно, что для такого рода задач неприменимы методы оптимального управления, использующие разрывные вариации (игольчатые, скольжения, v–вариации). Предлагаемый подход основан на использовании специальных вариаций, обеспечивающих гладкость варьируемых управлений и выполнение ограничений. Применение этого подхода привело к новым условиям оптимальности и позволило построить конструктивные варианты методов улучшения допустимых управлений.

Использованная в настоящей главе схема получения условий оптимальности и основанных на них численных методов может быть реализована для весьма широких классов задач оптимального управления системами с сосредоточенными и распределенными параметрами.

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ С ПОТОЧЕЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

Как и ранее, рассмотрим задачу оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \tag{1.1}$$

$$(s,t) \in \Pi, \;\; \Pi = (s_0, s_1) \times (t_0, t_1).$$

Поставим управляемые начально-краевые условия для системы (1.1):

$$x(s,t_0) = p(u(s),s), \quad s \in S, \tag{1.2}$$

$$x^+(s_0,t) = M(t)x^-(s_0,t) + g^{(1)}(u^{(1)}(t),t), \quad t \in T,$$

$$x^-(s_1,t) = N(t)x^+(s_1,t) + g^{(2)}(u^{(2)}(t),t), \quad t \in T. \tag{1.3}$$

Здесь $M(t)$ и $N(t)$ – прямоугольные матрицы размерности соответственно $m_1 \times (n - m_2)$ и $(n - m_2) \times m_1$; $u = u(s)$ – стартовое управление; $u^{(1)} = u^{(1)}(t)$, $u^{(2)} = u^{(2)}(t)$ – управления в краевых условиях.

Подобные условия на боковых границах возникают после сведения системы гиперболических уравнений к инвариантной форме. Сложность работы с такими условиями заключается в том, что функции в правых частях равенств (1.3) не известны заранее, но могут быть определены интегрированием гиперболической системы (1.1) с использованием сначала условий на нижней границе прямоугольника Π при $t = t_0$, а затем путем последовательного восстановления условий на боковых границах.

Введем поточечные ограничения на управляющие воздействия (ограничения в каждой точке отрезка):

$$u(s) \in U \subset E^r, \quad s \in S, \;\; U - \text{компакт}; \tag{1.4}$$

$$u^{(1)}(t) \in U^{(1)} \subset E^{r_1}, \quad t \in T, \quad U^{(1)} - \text{компакт}; \tag{1.5}$$

$$u^{(2)}(t) \in U^{(2)} \subset E^{r_2}, \quad t \in T, \quad U^{(2)} - \text{компакт}. \tag{1.6}$$

Задача рассматривается в классе гладких управляющих воздействий: стартовое управление $u(s)$ непрерывно дифференцируемо на отрезке S, граничные управления $u^{(1)}(t)$, $u^{(2)}(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке T.

Цель задачи состоит в минимизации функционала

$$J(u, u^{(1)}, u^{(2)}) = \int\limits_S \varphi(x(s, t_1), s)\, ds + \iint\limits_\Pi F(x, s, t)\, ds\, dt, \tag{1.7}$$

определенного на решениях задачи (1.1)–(1.3) при допустимых управлениях, удовлетворяющих условиям (1.4)–(1.6).

Задача оптимального управления (1.1)–(1.7) исследуется при следующих предположениях:

1) диагональные элементы $a_i = a_i(s, t)$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы A непрерывны и непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Pi}$;

2) вектор-функции $p(u, s)$, $g^{(1)}(u^{(1)}, t)$, $g^{(2)}(u^{(2)}, t)$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по своим переменным и имеют ограниченные производные соответственно по u, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$;

3) вектор-функция $f = f(x, s, t)$ и скалярные функции $F = F(x, s, t)$, $\varphi = \varphi(x, s)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по компонентам вектора состояния соответственно на $E^n \times S \times T$, $E^n \times S \times T$, $E^n \times S$;

4) элементы матриц $M(t)$, $N(t)$ непрерывно дифференцируемы на T.

При сделанных предположениях обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3), определенное в пункте 1.1 главы 1, будет принадлежать классу кусочно-непрерывных в Π функций. Решение обладает обобщенной производной $D_A x = (D_1 x_1, D_2 x_2, \ldots, D_n x_n)$, каждая компонента которой $D_i x_i$ непрерывна вдоль соответствующего i–го семейства характеристик [95, 145]. Таким образом, каждая компонента $x_i = x_i(s, t)$ обобщенного решения x непрерывно дифференцируема вдоль любой характеристики i–го семейства характеристик.

Решение будет существовать в классе непрерывных функций, если предположить, что начально-краевые условия (1.2)–(1.3) согласованы:

$$\begin{aligned} p^{+}(u(s_0), s_0) &= M(t)\, p^{-}(u(s_0), s_0) + g^{(1)}(u^{(1)}(t_0), t_0), \\ p^{-}(u(s_1), s_1) &= N(t)\, p^{+}(u(s_1), s_1) + g^{(2)}(u^{(2)}(t_0), t_0). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь компоненты p^{+} и p^{-} вектор-функции p соответствуют положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы A. Требование согласованности начально-краевых условий (1.8) налагает, вообще говоря, дополнительные ограничения на допустимые управления, которые необходимо учитывать при выводе условий оптимальности и реализации численных методов. Существование классического решения задачи (1.1)–(1.3), вообще говоря, не предполагается, так как для этого необходимы более жесткие предположения о согласованности начально-краевых условий до первого порядка включительно.

Для простоты будем пока считать, что управления в краевых условиях фиксированы:

$$\begin{aligned} x^{+}(s_0, t) &= M(t)\, x^{-}(s_0, t) + g^{(1)}(t), \quad t \in T, \\ x^{-}(s_1, t) &= N(t)\, x^{+}(s_1, t) + g^{(2)}(t), \quad t \in T; \end{aligned} \tag{1.9}$$

а идею подхода сначала изложим лишь для стартовых управлений $u = u(s)$.

Пусть $C^1(S, U)$ – множество допустимых управлений. Пару $\{u, x\}$ будем называть *допустимым процессом*, если управление $u = u(s)$ допустимо, а $x = x(s, t)$ – соответствующее данному управлению решение задачи (1.1), (1.2), (1.9). Допустимый процесс будем называть оптимальным, если на нем достигается решение задачи (1.1)–(1.2), (1.4), (1.7), (1.9).

3.2. ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

3.2.1. Формула приращения. Рассмотрим на допустимых процессах $\{u, x\}$ и $\{\tilde{u} = u + \Delta u,\ \tilde{x} = x + \Delta x\}$ формулу приращения целевого функционала $\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u)$:

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \Delta\varphi(x(s, t_1), s)\, ds + \iint\limits_\Pi \Delta F(x, s, t)\, ds\, dt. \tag{2.1}$$

На первом этапе исследования формулы (2.1) используется методика, рассмотренная в главе 1.

Приращение $\Delta x = \Delta x(s, t)$ удовлетворяет начально-краевой задаче

$$D_A \Delta x = \Delta f(x, s, t), \quad (s, t) \in \Pi; \tag{2.2}$$

$$\Delta x(s, t_0) = \Delta p(u(s), s), \quad s \in S,$$

$$\Delta x^+(s_0, t) = M(t)\, \Delta x^-(s_0, t), \quad t \in T,$$

$$\Delta x^-(s_1, t) = N(t)\, \Delta x^+(s_1, t), \quad t \in T.$$

Здесь $\Delta f(x, s, t) = f(\tilde{x}, s, t) - f(x, s, t), \quad \Delta p(u(s), s) = p(\tilde{u}(s), s) - p(u(s), s)$.

Добавим к правой части (2.1) нулевое слагаемое

$$\iint\limits_\Pi \langle \psi(s, t), D_A \Delta x - \Delta f(x, s, t) \rangle\, ds\, dt,$$

где $\psi(s, t)$ – пока произвольная вектор-функция, для которой имеет смысл в Π производная $D_A \psi$.

Введем функции

$$H(\psi, x, s, t) = \langle \psi(s, t), f(x, s, t) \rangle - F(x, s, t),$$

$$h(\psi(s, t_0), u(s), s) = \langle \psi(s, t_0), p(u(s), s) \rangle.$$

Представим приращения $\Delta\varphi(x(s,t_1),s)$ и $\Delta H(\psi,x,s,t) = H(\psi,\tilde{x},s,t) - H(\psi,x,s,t)$ по формуле Тейлора первого порядка. Применив условия (2.2), получим

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \langle \varphi_x(x(s,t_1),s), \Delta x(s,t_1)\rangle\, ds + \int\limits_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)\, ds +$$

$$+ \int\limits_S \langle \psi(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\rangle\, ds - \int\limits_S \Delta h(\psi(s,t_0), u(s), s)\, ds -$$

$$- \iint\limits_\Pi \langle D_A\psi + A_s\psi, \Delta x\rangle\, ds\, dt - \iint\limits_\Pi (\, \langle H_x, \Delta x\rangle + o_H(\|\Delta x(s,t)\|)\,)\, ds\, dt +$$

$$+ \int\limits_T \langle A^+(s_1,t)\psi^+(s_1,t) + N^T(t)\, A^-(s_1,t)\, \psi^-(s_1,t), \Delta x^+(s_1,t)\rangle\, dt -$$

$$- \int\limits_T \langle A^-(s_0,t)\psi^-(s_0,t) + M^T(t)\, A^+(s_0,t)\, \psi^+(s_0,t), \Delta x^-(s_0,t)\rangle\, dt.$$

Потребуем, чтобы функция $\psi = \psi(s,t)$ удовлетворяла сопряженной задаче

$$D_A\psi + A_s\psi = -H_x(\psi,x,s,t), \quad (s,t)\in\Pi, \tag{2.3}$$

$$\psi(s,t_1) = -\varphi_x(x(s,t_1),s), \quad s\in S;$$

$$\psi^+(s_1,t) = N_1(t)\psi^-(s_1,t), \quad t\in T,$$

$$\psi^-(s_0,t) = M_1(t)\psi^+(s_0,t), \quad t\in T.$$

Здесь прямоугольные матрицы $N_1(t)$ и $M_1(t)$ определяются следующим образом:

$$N_1(t) = -(A^+(s_1,t))^{-1} N^T(t) A^-(s_1,t),$$

$$M_1(t) = -(A^-(s_0,t))^{-1} M^T(t) A^+(s_0,t).$$

Задача (2.3) является задачей с тем же семейством характеристик, что и (1.1)–(1.2), (1.9). Обобщенное решение $\psi = \psi(s,t)$ существует и единственно в том же самом смысле, что и решение $x(s,t)$ задачи (1.1)–(1.2), (1.9).

Окончательно получим, что формула приращения целевого функционала имеет следующий вид:

$$\Delta J(u) = -\int\limits_S \Delta h(\psi(s,t_0), u(s), s)\, ds + \eta, \tag{2.4}$$

где

$$\eta = \int\limits_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)\, ds - \iint\limits_\Pi o_H(\|\Delta x(s,t)\|)\, ds\, dt. \tag{2.5}$$

Формула приращения (2.4) с остаточным членом вида (2.5) представляет собой удобный промежуточный результат при доказательстве необходимых условий оптимальности.

3.2.2. Оценка приращения состояния. Получим оценку приращения состояния, входящего в остаточный член формулы (2.4), а именно докажем справедливость следующей оценки:

$$\max_{(\xi,\tau)\in\bar{\Pi}} \|\Delta x(\xi,\tau)\| \le \bar{K} \max_{s\in S} \|\Delta u(s)\|, \quad \bar{K} > 0. \tag{2.6}$$

(нормы в (2.6) евклидовы).

При этом методику главы 1 придется существенно образом модифицировать с целью учета общего характера краевых условий (1.9).

Выберем промежуток времени $\bar{\tau}$, в течение которого ни одна из характеристик, проходящих через точки прямоугольника $\Pi_1 = S \times [t_0, t_0 + \bar{\tau}\ ]$, не успеет пересечь рассматриваемую область от одной боковой границы до другой. В качестве $\bar{\tau}$ можно выбрать число

$$\bar{\tau} = \frac{s_1 - s_0}{\max\limits_i \max\limits_{(s,t)\in\bar{\Pi}} |a_i(s,t)|}. \tag{2.7}$$

Пусть $\Pi_1(\tau) = \{(s,t) \in \Pi_1 :\ t \le \tau\}$. Введем обозначение

$$\gamma_1(\tau) = \max_{(s,t)\in\Pi_1(\tau)} \|\Delta x(s,t)\|. \tag{2.8}$$

В силу предположений на параметры задачи оптимального управления правые части системы (1.1) удовлетворяют условию Липшица по x

с некоторой константой $L > 0$. В свою очередь правые части условий (1.2) тоже удовлетворяют условию Липшица с некоторой константой K. Выберем C_1 и C_2 следующим образом:

$$C_1 = \max_{\substack{i=m_2+1,m_2+2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m_1}} \max_{t\in T} N_{ij}(t);$$

$$C_2 = \max_{\substack{i=1,2,\dots,m_1 \\ j=m_2+1,m_2+2,\dots,n}} \max_{t\in T} M_{ij}(t);$$

Здесь $N_{ij}(t)$ и $M_{ij}(t)$ – элементы соответствующих матриц в (1.9).

Применяя интегральный вариант задачи (2.2)

$$\Delta x_i(s,t) = \Delta x_i(\xi^{(i)}, \tau^{(i)}) + \int\limits_{\tau^{(i)}}^{t} \Delta f_i(x,\xi,\tau)|_{\xi=s^{(i)}(s,t;\tau)}\, d\tau,$$

где точка $(\xi^{(i)}, \tau^{(i)})$ – начало i-й характеристики, оценим $\Delta x(s,t)$ на границах Π_1.

Пусть сначала $s = s_1$. Тогда при $i = 1, 2, \dots, m_1$ выполнено неравенство

$$|\Delta x_i(s_1,t)| \le |\Delta p_i(u(\xi^{(i)}), \xi^{(i)})| + L\int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau \le$$

$$\le K \max_{s\in S} \|\Delta u(s)\| + L\int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau,$$

а при $i = m_2+1, m_2+2, \dots, n$

$$|\Delta x_i(s_1,t)| \le \sum_{j=1}^{m_1} |N_{ij}(t)| \cdot |\Delta x_j(s_1,t)| \le C_1 \sum_{j=1}^{m_1} |\Delta x_j(s_1,t)| \le$$

$$\le C_1 \left(\sum_{j=1}^{m_1} |\Delta p_j(u(\xi^{(j)}), \xi^{(j)})| + Lm_1 \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau \right) \le$$

$$\le C_1 K \sum_{j=1}^{m_1} \|\Delta u(\xi^{(j)})\| + C_1 L\, m_1 \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau \le$$

$$\le C_1 K\, m_1 \max_{s\in S} \|\Delta u(s)\| + C_1 L\, m_1 \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau.$$

Аналогично, для $s = s_0$ получим неравенства:

при $i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, n$

$$|\Delta x_i(s_0, t)| \le |\Delta p_i(u(\xi^{(i)}), \xi^{(i)})| + L \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau \le$$

$$\le K \max_{s \in S} \|\Delta u(s)\| + L \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau,$$

при $i = 1, 2, \ldots, m_1$

$$|\Delta x_i(s_0, t)| \le \sum_{j=m_2+1}^{n} |M_{ij-m_2}(t)| \cdot |\Delta x_j(s_0, t)| \le$$

$$\le C_2 \sum_{j=m_2+1}^{n} |\Delta x_j(s_0, t)| \le$$

$$\le C_2 \left(\sum_{j=m_2+1}^{n} |\Delta p_j(u(\xi^{(j)}), \xi^{(j)})| + L\,(n - m_2) \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau \right) \le$$

$$\le C_2 K \sum_{j=m_2+1}^{n} \|\Delta u(\xi^{(j)})\| + C_2 L\,(n - m_2) \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau \le$$

$$\le C_2 K\,(n - m_2) \max_{s \in S} \|\Delta u(s)\| + C_2 L\,(n - m_2) \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau.$$

И, наконец, если $t = t_0$, то при всех $i = 1, 2, \ldots, n$

$$|\Delta x_i(s, t_0)| \le |\Delta p_i(u(s), s)| \le K \max_{s \in S} \|\Delta u(s)\|.$$

Введем константы K_1 и L_1:

$$K_1 = \max\{K,\ C_1 K\, m_1,\ C_2 K\,(n - m_2)\},$$

$$L_1 = \max\{L,\ C_1 L\, m_1,\ C_2 L\,(n - m_2)\}.$$

Таким образом, на нижней и боковых границах прямоугольника Π_1 выполнены неравенства

$$|\Delta x_i(s, t)| \le K_1 \max_{s \in S} \|\Delta u(s)\| + L_1 \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau, \tag{2.9}$$

откуда

$$\|\Delta x(s,t)\| \leq \sqrt{n}\, K_1 \max_{s\in S} \|\Delta u(s)\| + \sqrt{n}\, L_1 \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau.$$

Тогда во всем прямоугольнике Π_1

$$\|\Delta x(s,t)\| \leq \sqrt{n}\, K_1 \max_{s\in S} \|\Delta u(s)\| + (\sqrt{n}\, L_1 + L) \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau$$

или

$$\gamma_1(t) \leq \sqrt{n}\, K_1 \max_{s\in S} \|\Delta u(s)\| + (\sqrt{n}\, L_1 + L) \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\, d\tau.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гроноулла-Беллмана, получим

$$\gamma_1(t) \leq \sqrt{n}\, K_1 \max_{s\in S} \|\Delta u(s)\| \, \exp((\sqrt{n}\, L_1 + L)(t - t_0)) \leq$$

$$\leq \sqrt{n}\, K_1 \max_{s\in S} \|\Delta u(s)\| \, \exp((\sqrt{n}\, L_1 + L)(\bar{\tau} - t_0)),$$

откуда следует, что в прямоугольнике Π_1 (в том числе и на верхней его границе) справедлива оценка

$$\|\Delta x(s,t)\| \leq \overline{K_1} \max_{s\in S} \|\Delta u(s)\|, \tag{2.10}$$

$$\overline{K_1} = \sqrt{n}\, K_1 \, \exp((\sqrt{n}\, L_1 + L)(\bar{\tau} - t_0)).$$

Последовательно повторяя указанные операции для прямоугольников $\Pi_2 = S \times [t_0 + \bar{\tau}, t_0 + 2\bar{\tau}\ ]$, $\Pi_3 = S \times [t_0 + 2\bar{\tau}, t_0 + 3\bar{\tau}\ ]$ и т.д., получим справедливость оценки вида (2.10) соответственно с некоторыми константами $\overline{K_2}$, $\overline{K_3}$ и т.д. для каждого из прямоугольников. Это означает, что за конечное число шагов k (в силу выбора $\bar{\tau}$) можно доказать справедливость неравенства (2.10) во всем прямоугольнике $\bar{\Pi}$ с единой константой $\overline{K} = \max\{\overline{K_1}, \overline{K_2}, \ldots, \overline{K_k}\}$, то есть выполнено (2.6).

3.2.3. Интегральное необходимое условие оптимальности. В классе вариаций $\Delta u(s) = \tilde{u}(s) - u(s)$, малых по норме пространства

$C(S)$, формулу приращения (2.4) можно линеаризовать

$$\Delta J(u) = -\int\limits_S \langle h_u(\psi(s,t_0),u(s),s), \Delta u(s)\rangle \; ds + \eta_1, \tag{2.11}$$

где

$$\eta_1 = \eta + o(\|\Delta u\|_{C(S)}).$$

В силу (2.6) $\eta_1 = o(\|\Delta u\|_{C(S)})$. При дополнительном предположении выпуклости множества U отсюда сразу вытекает базовое интегральное необходимое условие оптимальности в исходной задаче оптимального управления.

Теорема 2.1. *Для оптимальности управления $u(s)$ необходимо, чтобы оно было решением следующей экстремальной задачи:*

$$I(v) = \int\limits_S \langle h_u(\psi(s,t_0),u(s),s), v(s)\rangle \; ds \to \max, \tag{2.12}$$

$$v(.) \in C^1(S,U).$$

Если бы исходная задача оптимального управления исследовалась в классе ограниченных и измеримых управляющих воздействий, то из (2.12) сразу бы вытекало условие оптимальности вида дифференциального принципа максимума

$$\langle h_u(\psi(s,t_0),u(s),s), u(s)\rangle = \max_{v\in U} \langle h_u(\psi(s,t_0),u(s),s), v\rangle\,, \quad s\in S. \tag{2.13}$$

Отметим, что это условие является достаточным в задаче (2.12). Однако, оно является слишком грубым в плане необходимости.

Для более тонкого анализа (2.12) ее можно переформулировать как линейно-выпуклую задачу оптимального управления, введя дифференциальную связь $\dot{v} = w(s)$. Тогда (2.12) превратится в задачу оптимального управления с фазовым ограничением типа включения в классе непрерывных неограниченных по амплитуде управлений. К этой задаче можно применить схему Дубовицкого-Милютина (которая сведется к условию непересечения некоторой системы конусов) в сочетании с одним полезным результатом Р.Рокафеллара из выпуклого анализа [147] об описании множества опорных функционалов к выпуклому множеству непрерывных на отрезке S функций, значения которых принадлежат множеству U. В результате применения этой схемы, во-первых, в необходимом условии появится мера – множитель Лагранжа по фазовому ограничению и, во-вторых, неравенство из дифференциального принципа максимума должно будет выполняться не почти всюду на S в смысле меры Лебега, а лишь на множестве, где сосредоточена мера, соответствующая фазовому ограничению.

Применение данного подхода с точки зрения построения конструктивных численных методов оптимизации весьма проблематично. Поэтому далее мы перейдем к рассмотрению некоторого специального вида слабой вариации, позволяющего строить методы решения задач в классе гладких управлений.

3.3. ГЛАДКАЯ ВАРИАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ПОТОЧЕЧНОЕ НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Дальнейший вариационный анализ исследуемой задачи основан на использовании неклассических вариаций, обеспечивающих гладкость допустимых управлений. Проварьированное управление строится по правилу

$$u_{\varepsilon,\delta}(s) = u(s + \varepsilon\delta(s)), \quad s \in S, \tag{3.1}$$

где $\varepsilon \in [0, 1]$ – параметр, характеризующий малость вариации, $\delta(s)$ – непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$s_0 \le s + \delta(s) \le s_1, \quad s \in S. \tag{3.2}$$

Отметим свойства проварьированного управления (3.1).

Во-первых, оно, очевидно, является гладким. Во-вторых, область значений функции $u_{\varepsilon,\delta}(s)$ определяется областью значений исходного управления $u(s)$. Таким образом, управление $u_{\varepsilon,\delta}(s)$ допустимо. Наконец, имеет место поточечная (и даже равномерная) сходимость: при $\varepsilon \to 0$ $u_{\varepsilon,\delta}(s) \to u(s)$ в каждой точке отрезка S для любой $\delta(s)$, удовлетворяющей неравенству (3.2).

Последнее свойство позволяет характеризовать соответствующую вариацию управления $\Delta u_{\varepsilon,\delta}(s) = u_{\varepsilon,\delta}(s) - u(s)$ как нестандартную слабую вариацию гладкой функции $u(s)$: равномерно малая деформация отрезка S "перемешивает" значения исходного управления, сохраняя равномерную близость к нулю функции $\Delta u_{\varepsilon,\delta}(s)$ и ее производной $\frac{d}{ds}\Delta u_{\varepsilon,\delta}(s)$.

Выбирая варьируемое управление по правилу (3.1) и используя разложение

$$\Delta u = \dot{u}(s)\,\varepsilon\,\delta(s) + o(\varepsilon),$$

перепишем формулу приращения целевого функционала (2.4)–(2.5):

$$\begin{aligned}\Delta J(u) = -\int\limits_S \Delta h(\psi(s,t_0),u(s),s)\,ds + \eta =\\ = -\int\limits_S \langle h_u, \Delta u\rangle\,ds - \int\limits_S o(\|\Delta u\|)\,ds + \eta =\\ = -\varepsilon\int\limits_S \langle h_u, \dot{u}(s)\rangle\delta(s)\,ds + \eta_1,\end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned}\eta_1 = \eta - \int\limits_S \langle h_u, o(\varepsilon)\rangle\,ds - \int\limits_S o(\|\Delta u\|)\,ds =\\ = \int\limits_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)\,ds - \iint\limits_\Pi o_H(\|\Delta x(s,t)\|)\,ds\,dt -\\ - \int\limits_S \langle h_u, o(\varepsilon)\rangle\,ds - \int\limits_S o(\|\Delta u\|)ds.\end{aligned}$$

Учитывая оценку (2.6), получим

$$|\eta_1| \le \left|\int\limits_S o(\varepsilon)\,ds\right| + \left|\iint\limits_\Pi o(\varepsilon)\,ds\,dt\right| + \left|\int\limits_S \langle h_u, o(\varepsilon)\rangle\,ds\right| + \left|\int\limits_S o(\varepsilon)\,ds\right|,$$

откуда

$$\Delta J(u) = -\varepsilon\int\limits_S \langle h_u, \dot u(s)\rangle\,\delta(s)\,ds + o(\varepsilon). \tag{3.4}$$

Отсюда, в силу произвольности $\delta(s)$, следует

Теорема 3.1. *Пусть процесс $\{u, x\}$ является оптимальным в рассматриваемой задаче. Тогда всюду на отрезке S выполняется условие*

$$\langle h_u(\psi(s,t_0), u(s), s), \dot u(s)\rangle = 0, \quad s \in S, \tag{3.5}$$

где $\psi(s,t_0)$ – решение сопряженной задачи (2.3) при $u = u(s)$.

Пусть теперь, наоборот, начальные условия фиксированы, а условия на левой боковой границе управляемы. Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно получить следующее необходимое условие оптимальности.

Теорема 3.2. *Пусть процесс $\{u^{(1)}, x\}$ является оптимальным в задаче*

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \quad (s,t) \in \Pi,$$

$$x(s,t_0) = p(s), \quad s \in S,$$

$$x^+(s_0,t) = M(t)x^-(s_0,t) + g^{(1)}(u^{(1)}(t),t), \quad t \in T,$$

$$x^-(s_1,t) = N(t)x^+(s_1,t) + g^{(2)}(t), \quad t \in T,$$

$$u^{(1)}(t) \in U^{(1)} \subset E^{r_1}, \ \ t \in T, \ \ U^{(1)} - \textit{компакт},$$

$$J(u^{(1)}) = \int\limits_S \varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \iint\limits_\Pi F(x,s,t)\,ds\,dt \to \min.$$

Тогда всюду на отрезке T выполняется условие

$$\langle h^{(1)}_{u^{(1)}}(\psi^+(s_0,t), u^{(1)}(t), t), \dot u^{(1)}(t)\rangle = 0, \quad t \in T, \tag{3.6}$$

где

$$h^{(1)}(\psi^+(s_0,t),u^{(1)}(t),t) = \langle A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), g^{(1)}(u^{(1)}(t),t)\rangle.$$

Доказательство. Отметим лишь основные отличия от случая стартового управления при получении формулы приращения целевого функционала и оценки приращения состояния.

Пусть имеются два допустимых процесса $\{u^{(1)},x\}$ и $\{\tilde{u}^{(1)} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)}, \tilde{x} = x + \Delta x\}$.

Выпишем систему в приращениях:

$$D_A \Delta x = \Delta f(x,s,t), \quad (s,t) \in \Pi;$$

$$\Delta x(s,t_0) = 0, \quad s \in S,$$

$$\Delta x^+(s_0,t) = M(t)\,\Delta x^-(s_0,t) + \Delta g^{(1)}(u^{(1)}(t),t), \quad t \in T,$$

$$\Delta x^-(s_1,t) = N(t)\,\Delta x^+(s_1,t), \quad t \in T.$$

В формуле приращения целевого функционала проделаем те же выкладки, что и ранее. Поскольку теперь $\Delta x(s,t_0) = 0$, а в формуле для $\Delta x^+(s_0,t)$ появилось дополнительное слагаемое $\Delta g^{(1)}(u^{(1)}(t),t)$, то формула приращения целевого функционала вместо слагаемого

$$-\int\limits_S \Delta h(\psi(s,t_0),u(s),s)\,ds = -\int\limits_S \langle \psi(s,t_0), \Delta p(u(s),s)\rangle\,ds$$

содержит слагаемое

$$-\int\limits_T \Delta h^{(1)}(\psi^+(s_0,t),u^{(1)}(t),t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_T \langle A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), \Delta g^{(1)}(u^{(1)}(t),t)\rangle\,dt.$$

Подчинив функцию $\psi(s,t)$ системе (2.3), получим:

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \Delta h^{(1)}(\psi^+(s_0,t),u^{(1)}(t),t)\,dt + \eta,$$

где

$$\eta = \int\limits_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)\,ds - \iint\limits_\Pi o_H(\|\Delta x(s,t)\|)\,ds\,dt.$$

Обратимся к оценке для $\|\Delta x(s,t)\|$. Введем прямоугольник $\Pi_1 = S \times [t_0, t_0+\bar\tau]$, где $\bar\tau$ выбирается по формуле (2.7), и оценим $\|\Delta x(s,t)\|$ на границе этого прямоугольника, используя обозначение (2.8):

– на нижней границе Π_1, при $t = t_0$

$$\Delta x_i(s,t_0) = 0, \quad s \in S, \quad i = 1,2,\ldots,n;$$

– на правой боковой границе Π_1, при $s = s_1$

$$|\Delta x_i(s_1,t)| \le L\int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\,d\tau, \quad i = 1,2,\ldots,m_1,$$

$$|\Delta x_i(s_1,t)| \le C_1 L\, m_1 \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\,d\tau, \quad i = m_2+1, m_2+2,\ldots,n;$$

– на левой боковой границе Π_1, при $s = s_0$

$$|\Delta x_i(s_0,t)| \le L\int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\,d\tau, \quad i = m_2+1, m_2+2,\ldots,n,$$

$$\begin{aligned}|\Delta x_i(s_0,t)| &\le \sum_{j=m_2+1}^{n} |M_{ij-m_2}(t)|\;|\Delta x_j(s_0,t)| + |\Delta g_i^{(1)}(u^{(1)}(\tau^{(i)}),\tau^{(i)})| \le \\ &\le C_2 \sum_{j=m_2+1}^{n} |\Delta x_j(s_0,t)| + K\max_{t\in T}\|\Delta u^{(1)}(t)\| \le \\ &\le C_2 L\,(n-m_2)\int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\,d\tau + K\max_{t\in T}\|\Delta u^{(1)}(t)\|.\end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, $(\xi^{(i)}, \tau^{(i)})$ – точки начала характеристик i–го семейства.

Таким образом, на границе прямоугольника Π_1 верно неравенство вида (2.9):

$$|\Delta x_i(s,t)| \le K_1\max_{t\in T}\|\Delta u^{(1)}(t)\| + L_1\int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(\tau)\,d\tau,$$

где

$$K_1 = K, \quad L_1 = \max\{L,\, C_1 L\, m_1,\, C_2 L\,(n-m_2)\}.$$

Далее, следуя полностью методике пункта 3.2 и используя лемму Гронуолла- Беллмана, получим оценку

$$\|\Delta x(s,t)\| \le \bar{K}_1^{(1)} \max_{t\in T} \|\Delta u^{(1)}(t)\|$$

сначала в прямоугольнике Π_1, а затем, за конечное число шагов, во всем прямоугольнике Π.

Проварьированное управление будем строить по правилу

$$u^{(1)}_{\varepsilon,\delta^{(1)}}(t) = u^{(1)}(t+\varepsilon\delta^{(1)}(t)), \quad t\in T,$$

где $\varepsilon \in [0,1]$ – параметр, характеризующий малость вариации, $\delta^{(1)}(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$t_0 \le t+\delta^{(1)}(t) \le t_1, \quad t\in T.$$

Тогда окончательный вариант формулы приращения имеет вид

$$\Delta J(u^{(1)}) = -\varepsilon \int_T \langle h^{(1)}_{u^{(1)}}, \dot{u}^{(1)}(t)\rangle \delta^{(1)}(t)\, dt + o(\varepsilon),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве теоремы 3.2, показывается справедливость необходимого условия оптимальности для управлений, сосредоточенных на правой границе прямоугольника Π.

Теорема 3.3. *Пусть процесс $\{u^{(2)}, x\}$ является оптимальным в задаче*

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \quad (s,t)\in\Pi,$$

$$x(s,t_0) = p(s), \quad s\in S,$$

$$x^+(s_0,t) = M(t)x^-(s_0,t) + g^{(1)}(t), \quad t\in T,$$

$$x^-(s_1,t) = N(t)x^+(s_1,t) + g^{(2)}(u^{(2)}(t),t), \quad t \in T,$$

$$u^{(2)}(t) \in U^{(2)} \subset E^{r_2}, \;\; t \in T, \quad U^{(2)} - \textit{компакт},$$

$$J(u^{(2)}) = \int\limits_S \varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \iint\limits_\Pi F(x,s,t)\,ds\,dt \to \min .$$

Тогда всюду на отрезке T выполняется условие

$$\langle h^{(2)}_{u^{(2)}}(\psi^-(s_1,t), u^{(2)}(t), t), \dot u^{(2)}(t)\rangle = 0, \quad t \in T, \tag{3.7}$$

где

$$h^{(2)}(\psi^-(s_1,t), u^{(2)}(t), t) = \langle A^-(s_1,t)\psi^-(s_1,t), g^{(2)}(u^{(2)}(t),t)\rangle.$$

Комбинируя теоремы 3.1, 3.2, 3.3, можно сформулировать единое условие оптимальности процесса $\{u, u^{(1)}, u^{(2)}, x\}$ в задаче (1.1)–(1.7).

Кратко охарактеризуем полученное условие оптимальности. В отличие от интегрального условия (2.12) для получения поточечного условия оптимальности не требуется вводить предположение о выпуклости множества U. Как уже отмечалось выше, дифференциальный принцип максимума в форме (2.13) для задачи в классе гладких управлений, вообще говоря, не справедлив. Предположим, что исходная задача (1.1), (1.2), (1.4), (1.7), (1.9) исследуется в классе ограниченных и измеримых управлений, множество U выпукло. Выполнение ограничения (1.4) понимается в смысле почти всюду. В этом случае справедливо необходимое условие оптимальности в форме дифференциального принципа максимума (2.13) (см. главу 2). Пусть оптимальное управление $u(s)$ является, тем не менее, гладкой функцией. Тогда из (2.13) следует, что

$$\langle h_u(\psi(s,t_0), u(s), s), v - u(s)\rangle \le 0, \quad s \in S, \quad v \in U.$$

Данное неравенство выполняется, в частности, и при $v = u(s+\varepsilon\delta(s))$. Имеем

$$\langle h_u(\psi(s,t_0), u(s), s), u(s+\varepsilon\delta(s)) - u(s)\rangle =$$

$$= \varepsilon\delta(s)) \langle h_u, \dot{u}(s)\rangle \leq 0, \quad s \in S.$$

В силу произвольности $\delta(s)$ выполнение данного неравенства возможно лишь, если

$$\langle h_u, \dot{u}(s)\rangle = 0, \quad s \in S,$$

что и означает выполнение теоремы 3.1.

Замечание 3.1. Использованная в данном пункте вариация может быть применена также и для задач оптимального управления многомерными дифференциальными уравнениями, то есть в случае, когда $s = (s_1, s_2, \ldots, s_l)$. При этом формальная запись проварьированного управления в виде (3.1) остается той же (см., например, [?]).

Доказанные условия оптимальности служат основой для построения численных методов, которые рассматриваются в п. 3.5 настоящей главы.

3.4. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ГЛАДКИЕ УПРАВЛЕНИЯ

Пусть управляемый процесс $\{u, x\}$ подчинен следующей начально-краевой задаче:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \ \ (s,t) \in \Pi, \tag{4.1}$$

$$x(s,t_0) = p(u(s),s), \quad s \in S, \tag{4.2}$$

$$x^+(s_0,t) = M(t)x^-(s_0,t) + g^{(1)}(t), \quad t \in T,$$

$$x^-(s_1,t) = N(t)x^+(s_1,t) + g^{(2)}(t), \quad t \in T. \tag{4.3}$$

Под допустимыми управлениями будем понимать непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие интегральным ограничениям

$$\int\limits_S \Phi_j(u(s))ds = L_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{4.4}$$

с дополнительным условием однородности подинтегральных функций

$$\Phi_j(\lambda u) = \lambda^\alpha \Phi_j(u),\ \alpha \geq 1.$$

Цель задачи состоит в минимизации функционала

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \iint_\Pi F(x,s,t)\,ds\,dt. \tag{4.5}$$

Предположения, при которых рассматривается задача (4.1)–(4.5), аналогичны предположениям 1–4, введенным в пункте 3.1.

Пусть $\{u,x\}$ и $\{\tilde{u} = u + \Delta u, \tilde{x} = x + \Delta x\}$ – два допустимых процесса. Формула приращения функционала имеет вид (2.4)–(2.5):

$$\Delta J(u) = -\int_S \Delta_u h(\psi(s,t_0),u(s),s)\,ds + \int_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)\,ds -$$

$$-\iint_\Pi o_H(\|\Delta x(s,t)\|)\,ds\,dt.$$

Здесь $$H(\psi,x,s,t) = \langle \psi(s,t), f(x,s,t)\rangle - F(x,s,t),$$

$$h(\psi(s,t_0),u(s),s) = \langle \psi(s,t_0), p(u(s),s)\rangle;$$

функция $\psi(s,t)$ удовлетворяет сопряженной задаче:

$$D_A\psi + A_s\psi = -H_x(\psi,x,s,t), \quad (s,t) \in \Pi,$$

$$\psi(s,t_1) = -\varphi_x(x(s,t_1),s), \quad s \in S,$$

$$\psi^+(s_1,t) = N_1(t)\psi^-(s_1,t), \quad t \in T,$$

$$\psi^-(s_0,t) = M_1(t)\psi^+(s_0,t), \quad t \in T,$$

где

$$N_1(t) = -(A^+(s_1,t))^{-1}N^T(t)A^-(s_1,t),$$

$$M_1(t) = -(A^-(s_0,t))^{-1}M^T(t)A^+(s_0,t),$$

причем приращение состояния удовлетворяет оценке:

$$\max_{(s,t)\in\bar{\Pi}} \|\Delta x(s,t)\| \leq \bar{K} \max_{s\in S} \|\Delta u(s)\|.$$

По аналогии с пунктом 4.2, линеаризовав формулу приращения и рассмотрев ее в классе вариаций $\Delta u(s) = \tilde{u}(s) - u(s)$, малых по норме пространства $C(s)$, можно сформулировать интегральное необходимое условие оптимальности. Однако вопрос об его конструктивном использовании для построения численных методов остается открытым.

Воспользуемся модификацией вариации п. 4.3, позволяющей учесть интегральные ограничения (4.4).

Проварьированное управление будем строить по правилу:

$$u_{\varepsilon,\delta}(s) = \lambda(s)u(s+\varepsilon\delta(s)), \quad \lambda(s) = (1+\varepsilon\dot{\delta}(s))^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{4.6}$$

Здесь $\varepsilon \in [0,1]$ – параметр, характеризующий малость вариации, $\delta(s)$ – обладающая достаточной степенью гладкости, по меньшей мере, непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{gathered} s_0 \le s + \delta(s) \le s_1, \quad s \in S, \\ \delta(s_0) = \delta(s_1) = 0, \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$|\dot{\delta}(s)| \le 1, \quad s \in S. \tag{4.8}$$

Выбор $\lambda(s)$ в форме (4.6) обеспечивает допустимость $u_{\varepsilon,\delta}(s)$, то есть выполнение интегральных ограничений (4.4).

Утверждение 4.1. *Пусть $u(s)$ – допустимое управление и функция $\delta(s)$ удовлетворяет условиям (4.7). Тогда для всех $\varepsilon \in [0,1]$ управление $u_{\varepsilon,\delta}(s)$ является допустимым.*

Действительно,

$$\int\limits_S \Phi_j(u_\varepsilon(s))\,ds = \int\limits_S \Phi_j\left(\lambda(s)u(s+\varepsilon\delta(s))\right)\,ds =$$

$$= \int\limits_S \lambda^\alpha(s)\Phi_j(u(s+\varepsilon\delta(s))\,ds = \int\limits_S (1+\varepsilon\dot{\delta}(s))\Phi_j(u(s+\varepsilon\delta(s))\,ds.$$

Сделаем замену переменной $\xi = s + \varepsilon\delta(s)$. Тогда

$$d\xi = (1+\varepsilon\dot{\delta}(s))\,ds$$

и

$$\int\limits_S \Phi_j(u_\varepsilon(s))\,ds = \int\limits_S \Phi_j(u(\xi))\,d\xi = L_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, k,$$

что и требовалось доказать.

Разложим функцию $(1+\varepsilon\dot{\delta}(s))^{\frac{1}{\alpha}}$ в ряд по степеням ε:

$$(1+\varepsilon\dot{\delta}(s))^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{\alpha}\,\varepsilon\dot{\delta}(s) + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\varepsilon^2\dot{\delta}^2(s) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\cdot\;\ldots\;\cdot\left(\frac{1}{\alpha}-n+1\right)\varepsilon^n\dot{\delta}^n(s) + \ldots \quad .$$

Учитывая, что $\varepsilon \in [0,1]$, для сходимости ряда при $\alpha > 1$ существенно выполнение условия (4.8). Тогда приращение управления представимо в следующем виде:

$$\Delta u(s) = u_\varepsilon(s) - u(s) = \lambda(s)u(s+\varepsilon\delta(s)) - u(s) =$$

$$= (1+\varepsilon\dot{\delta}(s))^{\frac{1}{\alpha}} u(s+\varepsilon\delta(s)) - u(s) =$$

$$= \left[1 + \frac{1}{\alpha}\varepsilon\dot{\delta}(s) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\varepsilon^2\dot{\delta}^2(s) + \ldots\right] u(s+\varepsilon\delta(s)) - u(s) =$$

$$= u(s+\varepsilon\delta(s)) - u(s) + \frac{1}{\alpha}\varepsilon\dot{\delta}(s)u(s+\varepsilon\delta(s)) + o(\varepsilon) =$$

$$= \dot{u}(s)\varepsilon\delta(s) + \frac{1}{\alpha}u(s)\varepsilon\dot{\delta}(s) + o(\varepsilon).$$

Воспользуемся этим разложением при выводе формулы приращения целевого функционала, соответствующей вариации (4.6):

$$\Delta J(u) = -\int\limits_S \langle h_u, \Delta u(s)\rangle\,ds + \eta =$$

$$= -\int\limits_S \langle h_u, \dot{u}(s)\varepsilon\delta(s) + \frac{1}{\alpha}u(s)\varepsilon\dot{\delta}(s) + o(\varepsilon)\rangle\,ds + \eta =$$

$$= -\varepsilon\int\limits_S \langle h_u, \dot{u}(s)\rangle\delta(s)\,ds - \varepsilon\frac{1}{\alpha}\int\limits_S \langle h_u, u(s)\rangle\dot{\delta}(s)\,ds + \eta_1 =$$

$$= -\varepsilon\int\limits_S \langle h_u, \dot{u}(s)\rangle\delta(s)\,ds - \varepsilon\,\frac{1}{\alpha}(\langle h_u, u(s)\rangle\delta(s))\Big|_{s=s_0}^{s_1} +$$

$$+\varepsilon\frac{1}{\alpha}\int\limits_S \langle h_u, u(s)\rangle_s \delta(s)\,ds + \eta_1.$$

Здесь

$$\eta = -\int\limits_S o(\|\Delta u(s)\|\,ds + \int\limits_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)\,ds -$$

$$-\iint\limits_\Pi o_H(\|\Delta x(s,t)\|)\,ds\,dt,$$

$$\eta_1 = \eta - \int\limits_S \langle h_u, o(\varepsilon)\rangle\,ds.$$

Поскольку $\delta(s_0) = \delta(s_1) = 0$, а $\eta_1 \sim o(\varepsilon)$, то окончательный вариант формулы приращения имеет вид:

$$\Delta J(u) = -\varepsilon\int\limits_S (\langle h_u, \dot u(s)\rangle - \frac{1}{\alpha}\langle h_u, u\rangle_s)\delta(s)\,ds + o(\varepsilon).$$

Отсюда и из произвольности функции $\delta(s)$ следует

Теорема 4.1. *Пусть процесс $\{u, x\}$ является оптимальным в задаче (4.1)–(4.5). Тогда всюду на отрезке S выполняется условие*

$$\langle h_u(\psi(s,t_0), u(s), s), \dot u(s)\rangle - \frac{1}{\alpha}\langle h_u(\psi(s,t_0), u(s), s), u\rangle_s = 0, \quad s\in S. \quad (4.9)$$

Замечание 4.1. Аналогичными рассуждениями можно получить условия оптимальности для гладких управлений $u^{(1)}(t)$, $u^{(2)}(t)$ в управляемых краевых условиях типа (1.4):

$$\langle h^{(1)}_{u^{(1)}}, \dot u^{(1)}(t)\rangle - \frac{1}{\alpha}\langle h^{(1)}_{u^{(1)}}, u^{(1)}\rangle_t = 0, \quad t\in T,$$

$$\langle h^{(2)}_{u^{(2)}}, \dot u^{(2)}(t)\rangle - \frac{1}{\alpha}\langle h^{(2)}_{u^{(2)}}, u^{(2)}\rangle_t = 0, \quad t\in T, \quad (4.10)$$

где

$$h^{(1)}(\psi^+(s_0,t), u^{(1)}(t), t) = \langle A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), g^{(1)}(u^{(1)}(t), t)\rangle,$$

$$h^{(2)}(\psi^-(s_1,t), u^{(2)}(t), t) = \langle A^-(s_1,t)\psi^-(s_1,t), g^{(2)}(u^{(2)}(t), t)\rangle.$$

При этом под допустимыми понимаются гладкие управления $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, удовлетворяющие ограничениям типа (4.4).

Совокупность условий (4.9)–(4.10) представляет собой систему необходимых условий оптимальности процесса $\{u, u^{(1)}, u^{(2)}, x\}$.

Замечание 4.2. Если в интегральные ограничения управления входят линейно ($\alpha = 1$), то условия (4.9)–(4.10) запишутся в более простой форме:

$$\langle h_{us}, u\rangle = 0, \quad s \in S, \tag{4.11}$$

$$\langle h^{(1)}_{u^{(1)}t}, u^{(1)}\rangle = 0, \quad t \in T,$$

$$\langle h^{(2)}_{u^{(2)}t}, u^{(2)}\rangle = 0, \quad t \in T.$$

При этом нет необходимости производить разложение в ряд функции $(1 + \varepsilon\dot{\delta}(s))^{\frac{1}{\alpha}}$, а значит, и требовать выполнения условия (4.8).

Замечание 4.3. В рамках изложенной только что методики можно рассмотреть также комбинацию интегральных ограничений (4.4) с односторонними ограничениями

$$u(s) \geq 0, \quad s \in S.$$

Замечание 4.4. В случае многомерных дифференциальных уравнений ($s = (s_1, s_2, \ldots, s_l)$) проварьированное управление необходимо строить по правилу

$$u_{\varepsilon,\delta}(s) = (1 + \varepsilon\dot{\delta}_1(s_1))^{\frac{1}{\alpha}}(1 + \varepsilon\dot{\delta}_2(s_2))^{\frac{1}{\alpha}} \ldots (1 + \varepsilon\dot{\delta}_l(s_l))^{\frac{1}{\alpha}} \times$$

$$\times u(s_1 + \varepsilon\delta_1(s_1), s_2 + \varepsilon\delta_2(s_2), \ldots, s_l + \varepsilon\delta_l(s_l)),$$

где каждая из непрерывно дифференцируемых функций $\delta_i(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, удовлетворяет условиям, аналогичным (4.7), (4.8).

Условия оптимальности, полученные в пунктах 3.3, 3.4, представляют собой специфические условия для гладких управлений. Их доказательство методом, основанным на исследовании формулы приращения целевого функционала, носит конструктивный характер, то есть позволяет построить численные методы решения соответствующих задач оптимального управления и обосновать их сходимость.

3.5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Остановимся подробнее на алгоритмах, использующих необходимое условие оптимальности в форме (3.5).

Введем в рассмотрение скалярную функцию

$$\omega(\psi(s,t_0),u(s),\dot{u}(s),s) = \langle h_u(\psi(s,t_0),u(s),s),\dot{u}(s)\rangle. \qquad (5.1)$$

Пусть задано начальное приближение из класса допустимых функций $u^0 = u^0(s)$. Опишем k–ую итерацию метода, т.е. переход от $u^k(s)$ к $u^{k+1}(s)$, $k = 0,1,2,\dots$. Для управления $u^k(s)$ вычисляются решения $x^k = x^k(s,t)$, $\psi^k = \psi^k(s,t)$ исходной и сопряженной систем гиперболических уравнений, строится $\omega_k(s) = \omega(\psi^k(s,t_0),u^k(s),\dot{u}^k(s),s)$. Если $\omega_k(s) = 0$, $s \in S$, то управление u^k удовлетворяет необходимому условию оптимальности, и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае выделим области

$$\Omega_k^+ = \{s \in S: \ \omega_k(s) > 0\},$$

$$\Omega_k^- = \{s \in S: \ \omega_k(s) < 0\}.$$

Определим гладкую функцию $\delta_k(s)$, удовлетворяющую условиям

$$\delta_k(s) = \begin{cases} > 0, & s \in \Omega_k^+, \\ < 0, & s \in \Omega_k^-, \\ 0, & s \notin \Omega_k^+ \cap \Omega_k^-. \end{cases}$$

Построим однопараметрическое семейство управлений $u_\varepsilon^k(s) = u^k\,(s + \varepsilon\delta_k(s))$ и решим задачу одномерной минимизации

$$\varepsilon_k: \ \ J(u_{\varepsilon_k}^k) = \min_{\varepsilon\in[0,1]} J(u_\varepsilon^k).$$

Следующее приближение находится по формуле

$$u^{k+1} = u^k_{\varepsilon_k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, .$$

Сформулируем утверждение о сходимости метода.

Теорема 5.1. *Пусть в дополнение к сделанным ранее предположениям на параметры задачи*

1) целевой функционал $J(u)$ ограничен снизу на множестве допустимых процессов;

2) вектор-функции $\varphi_x(x, s)$, $F_x(x, s, t)$ и матричная функция $f_x(x, s, t)$ удовлетворяют условию Липшица по x с одной константой для всех допустимых процессов;

3) вектор-функция $p_u(u, s)$ удовлетворяет условию Липшица по u для всех допустимых управлений.

Тогда последовательность управлений, генерируемая методом, является релаксационной:

$$J(u^{k+1}) < J(u^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и сходится в смысле

$$\mu(u^k) = \int\limits_S \delta_k(s)\omega_k(s)\, ds \to 0, \quad k \to \infty.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться тем фактом, что при сделанных предположениях из формулы приращения (3.3) вытекает оценка

$$J(u^{k+1}) - J(u^k) \le -\varepsilon\mu(u^k) + L\varepsilon^2, \quad L > 0.$$

Аналогичные методы можно построить на основе необходимых условий оптимальности (3.6) и (3.7) для управлений в краевых условиях, стесненных амплитудными ограничениями.

Для интегральных ограничений на управляющие воздействия, рассмотренных в предыдущем пункте, только что изложенный алгоритм остается тем же с точностью до определения функции ω.

В этом случае

$$\omega(\psi^k(s,t_0),u^k(s),\dot{u}^k(s),s) = \left\langle h_u(\psi^k(s,t_0),u^k(s),s),\dot{u}^k(s)\right\rangle -$$
$$-\frac{1}{\alpha}\left\langle h_u(\psi^k(s,t_0),u^k(s),s),u^k(s)\right\rangle_s.$$

В данном пункте мы намеренно ограничились изложением лишь общей схемы численных методов. Особенности их реализации связаны со способами выбора вспомогательных функций $\delta_k(s)$, решением задач одномерной оптимизации по ε и т.п. Эффективность реализации методов сильно зависит от выбора начального приближения. В частности, это весьма характерно для задач с ограничениями на управление типа включения. Это и понятно – вариация п. 3.3 не создает новые значения управления, а лишь "перемешивает" уже имеющиеся. Конструктивные варианты описанных методов и вопросы их численной реализации для конкретных прикладных задач обсуждаются в следующих двух главах.

Глава 4

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОПУЛЯЦИЕЙ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ВОЗРАСТУ

Для исследования динамики популяций в настоящее время широко используются модели с возрастной структурой [18, 54, 150, 199, 202, 203, 224, 225, 245]. Процесс описывается дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка и нестандартным краевым условием, задающим плотность распределения только что родившихся членов популяции. Независимыми переменными являются время наблюдения и возраст членов популяции. Предполагается, что изменение численности популяции может происходить только за счет рождения и смерти ее членов. В работах [213, 215, 216] исследованы некоторые задачи оптимального управления, которые могут быть поставлены при исследовании процессов развития популяций. Основным результатом этих работ является доказательство необходимых условий оптимальности вида дифференциального (линеаризованного) принципа максимума для управляющих функций, характеризующих уровень рождаемости или смертности.

В настоящей работе задача оптимального управления динамикой популяций рассматривается для управляющей функции, задающей возрастное распределение рожающих особей и удовлетворяющей дополнительному интегральному ограничению. На основе методики главы 3 построена специальная вариация допустимого управления, обеспечивающая выполнение ограничений. Получено неклассическое необходимое условие оптимальности, которое является основой численного метода решения задачи оптимального управления.

Предлагаемый алгоритм оптимизации обладает свойством релаксации и сходимости к выполнению условия оптимальности. Для одного из иллюстративных примеров приведены результаты численных расчетов при различных начальных приближениях.

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На некотором отрезке времени $T = [0, t_k]$ рассмотрим функцию двух независимых переменных $x = x(s,t)$, характеризующую плотность распределения популяции некоторого вида в зависимости от возраста $s \in S = [0, s_k]$, s_k - максимальная продолжительность жизни. Кратко поясним смысл используемого понятия возрастной плотности популяции. Пусть $g(s,t)$ - число особей данного вида, имеющих в момент наблюдения t возраст меньше s. Тогда под плотностью распределения популяции рассматриваемого вида понимается предел

$$x(s,t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{g(s + \Delta s, t) - g(s,t)}{\Delta s} = \frac{\partial g(s,t)}{\partial s}.$$

Предполагая, что изменение численности популяции может происходить только за счет рождения и смерти ее членов, а число умерших особей пропорционально общей численности популяции, приходим к следующему уравнению в частных производных [18, 150, 215, 216, 245]

$$\frac{\partial x(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial x(s,t)}{\partial s} = -\mu(s) x(s,t), \quad s \in S, \ t \in T \tag{1.1}$$

с начально-краевыми условиями

$$x(s,0) = x_0(s), \quad s \in S, \tag{1.2}$$

$$x(0,t) = \beta(t) \int\limits_{s_1}^{s_2} K(s) u(s) x(s,t)\, ds, \quad t \in T. \tag{1.3}$$

Здесь $\mu(s)$ - коэффициент смертности; $x_0(s)$ - первоначальное распределение популяции по возрасту; $\beta(t)$ - коэффициент, характеризующий средний уровень рождаемости в каждый момент времени; $K(s)$ - доля самок. Роль управления играет функция $u = u(s)$, задающая возрастное распределение рожающих особей. Эта функция удовлетворяет следующим ограничениям

$$\int\limits_{s_1}^{s_2} u(s)\, ds = 1, \quad u(s) \geq 0, \tag{1.4}$$

где s_1, s_2 - границы детородного возраста, $0 < s_1 < s_2 \leq s_k$.

Целью задачи будем считать минимизацию функционала

$$J(u) = \int\limits_S \varphi(x(s,t_k), s)\, ds. \tag{1.5}$$

В частности, если

$$\varphi(x,s) = \frac{1}{2}(x(s,t_k) - \bar{x}(s))^2,$$

где $\bar{x} = \bar{x}(s)$ - заданная функция, то цель управления состоит в достижении в конечный момент времени заданной плотности $\bar{x}$. В этом случае задача может рассматриваться также и как обратная задача математической физики, смысл которой заключается в восстановлении коэффициента $u(s)$ по известным данным наблюдения в конечный момент времени.

Задача оптимального управления (1.1)–(1.5) исследуется при следующих предположениях на ее параметры:

1) функции $u = u(s)$, $K = K(s)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[s_1, s_2]$; при проведении промежуточных выкладок удобно считать, что

$$u(s) \equiv 0, \quad K(s) \equiv 0, \quad s \notin [s_1, s_2]; \tag{1.6}$$

2) функции $x_0(s)$ и $\beta(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезках S и T соответственно;

3) функция $\mu(s)$ непрерывна на полуинтервале $[0, s_k)$ и удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^{s_k} \mu(s)\, ds = +\infty; \tag{1.7}$$

4) функция $\varphi(x, s)$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные и ограниченные производные по x всюду в области своего определения.

Нестандартность условий (1.3) на границе заключается в том, что значение $x(0, t)$ задается не в виде фиксированной функции, а вычисляется в каждый момент времени интегрированием выражения, в которое входит определяемое решение на исследуемом слое по времени. Условие (1.7) обеспечивает нулевую плотность при возрасте особей, превышающем максимальный возраст s_k [215, 216].

Решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), вообще говоря, нужно понимать как решение следующего интегрального уравнения, построенного на семействе характеристик дифференциального уравнения (1.1)

$$x(s,t) = \begin{cases} x_0(s-t)\exp(-\int\limits_{s-t}^{s} \mu(\rho)\, d\rho), & s \geq t, \\ \beta(t-s)\int\limits_{s_1}^{s_2} K(r)u(r)x(r, t-s)dr\ \exp(-\int\limits_0^{s} \mu(\rho)d\rho), & s < t. \end{cases} \tag{1.8}$$

При сделанных предположениях для любого допустимого управления решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), понимаемое в смысле (1.8), будет являться неотрицательной функцией, гладкой в областях $s < t$ и $s > t$ [245]. Возможной линией разрыва является прямая $s = t$. Можно гарантировать непрерывность функции $x(s, t)$ всюду в рассматриваемой области лишь при выполнении условия согласования

$$x_0(0) = \beta(0)\int\limits_{s_1}^{s_2} K(s)u(s)x_0(s)ds. \tag{1.9}$$

Данное условие можно считать дополнительным интегральным ограничением на управление.

Описанная модель является одной из разновидностей структурированных по возрасту управляемых процессов. Кроме моделей динамики популяций начально-краевые задачи вида (1.1)–(1.3) используются для изучения процессов распространения инфекционных заболеваний и наркомании [199, 200, 224], динамики безработицы [224], динамики капитальных ресурсов с учетом возрастной структуры основных экономических фондов [123] и др. При этом состояние процесса может описываться и векторной функцией (отдельные уравнения для самцов и самок; лиц, приобщившихся и неприобщившихся к наркотикам и т.д.). В большинстве моделей управление входит в правые части дифференциальных уравнений или систем, а результаты ограничиваются доказательством поточечного или дифференциального принципа максимума. В работах [215, 216] задача оптимального управления рассматриваемого вида исследовалась при управляющем воздействии $\beta = \beta(t)$. Авторы цитируемых статей ограничились получением аналога линеаризованного принципа максимума. Основная цель данной работы - получение неклассического необходимого условия оптимальности и построение численных методов на основе применения нестандартной вариации, обеспечивающей выполнение ограничений (1.4).

4.2. ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ И НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Задачу оптимального управления (1.1)–(1.5) исследуем с помощью подхода, изложенного в предыдущей главе. Рассмотрим приращение целевого функционала (1.5) на двух допустимых процессах $\{u, x\}$ и $\{\tilde{u} = u + \Delta u, \tilde{x} = x + \Delta x\}$. Функция $\Delta x = \Delta x(s, t)$ является решением следующей начально-краевой задачи

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial t} + \frac{\partial \Delta x}{\partial s} = -\mu(s)\Delta x, \quad s \in S, \quad t \in T;$$

$$\Delta x(s,0) = 0, \quad s \in S; \tag{2.1}$$

$$\Delta x(0,t) = \beta(t)\int\limits_{s_1}^{s_2} K(s)\left[\tilde{u}(s)\tilde{x}(s,t) - u(s)x(s,t)\right] ds, \quad t \in T.$$

С учетом (2.1) формула приращения целевого функционала может быть записана в виде

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = \int\limits_S \Delta\varphi(x(s,t_k),s)\, ds +$$

$$+\int\limits_S\int\limits_T \psi(s,t)\left[\frac{\partial \Delta x}{\partial t} + \frac{\partial \Delta x}{\partial s} + \mu(s)\Delta x\right] ds\, dt,$$

где $\Delta\varphi = \varphi(\tilde{x}(s,t_k),s) - \varphi(x(s,t_k),s)$, а $\psi = \psi(s,t)$ - пока произвольная кусочно-гладкая функция.

Проделаем следующие достаточно стандартные преобразования:

– представим приращение $\Delta\varphi$ по формуле Тейлора первого порядка, выделив линейную часть относительно состояния процесса;

– используем формулы интегрирования по частям;

– возникшее при применении интегрирования по частям слагаемое

$$\int\limits_T \psi(0,t)\Delta x(0,t)\, dt$$

преобразуем с учетом (2.1);

– воспользовавшись (1.6), перейдем от интегрирования по отрезку $[s_1, s_2]$ к интегрированию по S и поменяем порядок интегрирования;

– подчиним $\psi = \psi(s,t)$ сопряженной задаче:

$$\frac{\partial \psi(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(s,t)}{\partial s} = \mu(s)\psi(s,t) - \psi(0,t)\beta(t)K(s)u(s),\ s \in S,\ t \in T;$$

$$\psi(s,t_k) = -\frac{\partial \varphi(x(s,t_k),s)}{\partial x}, \ \ s \in S; \tag{2.2}$$

$$\psi(s_k, t) = 0,\ t \in T.$$

Тогда окончательный вариант формулы приращения можно записать в виде:

$$\Delta J(u) = -\int_{s_1}^{s_2} K(s)\Delta u(s) \int_T \psi(0,t)\beta(t)x(s,t)\,dt\,ds + \eta, \tag{2.3}$$

где

$$\eta = -\int_{s_1}^{s_2} K(s)\Delta u(s) \int_T \psi(0,t)\beta(t)\Delta x(s,t)\,dt\,ds+$$
$$+\int_S o_\varphi(|\Delta x(s,t_k)|)ds. \tag{2.4}$$

Введя функцию

$$h(\psi, u, x, s) = K(s)u(s) \int_T \psi(0,t)\beta(t)x(s,t)\,dt,$$

формулу (2.3) можно записать в более краткой и традиционной форме

$$\Delta J(u) = -\int_{s_1}^{s_2} \Delta_{\tilde{u}} h(\psi, u, x, s)\,ds + \eta,$$

где

$$\Delta_{\tilde{u}} h(\psi, u, x, s) = h(\psi, \tilde{u}, x, s) - h(\psi, u, x, s).$$

Полученная формула приращения справедлива для двух произвольных допустимых процессов.

Дальнейшее исследование задачи основано на применении неклассической вариации допустимых управлений (3.4.6), обеспечивающей выполнение ограничений (1.4).

Пусть $u = u(s)$ - допустимое управление. Варьируемое управление задается формулой

$$u_{\varepsilon,\delta}(s) = (1 + \varepsilon\dot{\delta}(s))\, u(s + \varepsilon\delta(s)).$$

Здесь $\varepsilon \in [0,1]$ - параметр, характеризующий малость варьирования, $\delta = \delta(s)$ - дважды непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$s_1 \le s + \delta(s) \le s_2, \quad \dot{\delta}(s) \ge -1, \quad s \in [s_1, s_2],$$

$$\delta(s_1) = \delta(s_2) = 0.$$

Применение данной вариации для допустимого управления u снова приводит к управлению, удовлетворяющему условиям (1.4). Действительно, для доказательства выполнения интегрального ограничения достаточно в интеграле

$$\int_{s_1}^{s_2} u_{\varepsilon,\delta}(s)\,ds = \int_{s_1}^{s_2} (1+\varepsilon\dot{\delta}(s))\,u(s+\varepsilon\delta(s))\,ds$$

сделать замену переменных $r = s + \varepsilon\delta(s)$.

Оценим остаточный член (2.4) в формуле приращения целевого функционала для двух допустимых процессов $\{u, x\}$ и $\{u_{\varepsilon,\delta} = u + \Delta u, x_\varepsilon = x + \Delta x\}$. Воспользовавшись непрерывной дифференцируемостью допустимых управлений, представим приращение управления в виде

$$\Delta u(s) = (1+\varepsilon\dot{\delta}(s))\,u(s+\varepsilon\delta(s)) - u(s) =$$

$$= u(s+\varepsilon\delta(s)) - u(s) + \varepsilon\dot{\delta}(s)\,u(s+\varepsilon\delta(s)) =$$

$$= \varepsilon\left[\delta(s)\dot{u}(s) + \dot{\delta}(s)u(s)\right] + o(\varepsilon).$$

Таким образом, приращение управления есть величина порядка ε.

Интегральное представление решения (1.8) дает возможность оценить приращение состояния. Действительно,

$$\Delta x(s,t) = \begin{cases} 0, & s \geq t, \\ \beta(t-s)\int\limits_{s_1}^{s_2} K(r)\;\left[u_\varepsilon(r)x_\varepsilon(r,t-s) - \right. & \\ \left. -u(r)x(r,t-s)\right]\,dr\;\exp(-\int\limits_0^s \mu(\rho)\,d\rho), & s < t. \end{cases}$$

Анализируя приращение состояния при $0 \leq s < t$ и используя предположения об ограниченности соответствующих функций, приходим к неравенству

$$|\Delta x(s,t)| \leq M_1 \int_{s_1}^{s_2} |\Delta x(r,t-s)|\;dr + M_2 \int_{s_1}^{s_2} |\Delta u(r)|\;dr;$$

$$M_1 \geq 0, \quad M_2 \geq 0.$$

Последовательно применяя данное неравенство для $t \in [0, s_1]$, $t \in (s_1, 2s_1]$ и т.д., получим оценку

$$|\Delta x(s,t)| \sim \varepsilon, \quad s \in S, \quad t \in T.$$

В итоге формула приращения может быть записана в виде

$$J(u_{\varepsilon,\delta}) - J(u) = -\varepsilon \int\limits_{s_1}^{s_2} K(s) \frac{d}{ds}[\delta(s)u(s)] \int\limits_T \psi(0,t)\beta(t)x(s,t)\,dt\,ds+$$
$$+o(\varepsilon). \tag{2.5}$$

Подставляя данное представление в формулу приращения целевого функционала и используя формулу интегрирования по частям, приходим к следующему необходимому условию оптимальности в рассматриваемой задаче.

Утверждение 2.1. *Пусть $u^* = u^*(s)$ - оптимальное управление в задаче (1.1)–(1.5), $x^* = x^*(s,t)$ - соответствующее ему состояние, а $\psi^* = \psi^*(s,t)$ - решение сопряженной задачи (2.2) при $u = u^*(s)$, $x = x^*(s,t)$. Тогда для всех точек $s \in [s_1, s_2]$ выполняется следующее равенство:*

$$u^*(s) \int\limits_T \psi^*(0,t)\beta(t)\left[K(s)x^*(s,t)\right]_s\,dt = 0. \tag{2.6}$$

Доказательство основано на только что полученной формуле приращения целевого функционала и произвольности выбора функции $\delta(s)$.

4.3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Необходимое условие оптимальности (2.6) служит основой для построения численных алгоритмов решения задачи оптимального управления. Перейдем к описанию численного метода. Пусть задано начальное приближение $u^0 = u^0(s)$ и с помощью метода вычислено $u^i = u^i(s)$,

$i = 1, 2 \dots$. Для этого управления вычисляются решения $x^i = x^i(s,t)$, $\psi^i = \psi^i(s,t)$ исходной и сопряженной задач (1.1)–(1.3) и (2.2).

Строится функция

$$\omega_i(s) = u^i(s) \int\limits_T \psi^i(0,t)\beta(t) \left[K(s)x^i(s,t)\right]_s dt.$$

Если $\omega_i(s) \equiv 0$, $s \in [s_1, s_2]$, то найденное решение удовлетворяет условию оптимальности, и метод прекращает свою работу. В противном случае выделим области

$$\Omega_i^+ = \{s \in [s_1, s_2] : \ \ \omega_i(s) > 0\},$$

$$\Omega_i^- = \{s \in [s_1, s_2] : \ \ \omega_i(s) < 0\}.$$

Определим допустимую функцию $\delta_i = \delta_i(s)$, удовлетворяющую условиям

$$\delta_i(s) \ = \begin{cases} > 0, & s \in \Omega_i^+, \\ < 0, & s \in \Omega_i^-, \\ 0, & s \notin \Omega_i^+ \cup \Omega_i^-. \end{cases}$$

Построим однопараметрическое семейство управлений

$$u_\varepsilon^i(s) = (1 + \varepsilon\dot{\delta}_i(s))\, u^i(s + \varepsilon\delta_i(s)).$$

Найдем ε_i из условия

$$J(u_\varepsilon^i) \to \min, \quad \varepsilon \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Тогда следующее приближение строится по формуле

$$u^{i+1}(s) = u_{\varepsilon_i}^i(s).$$

Сформулируем утверждение о сходимости метода (аналог теоремы 5.1 главы 3).

Утверждение 3.1. *Пусть в дополнение к предположениям на параметры задачи (1.1)–(1.5), сформулированным в пункте 4.1 настоящей главы,* *1) целевой функционал $J(u)$ ограничен снизу на множестве допустимых процессов;*

2) вектор-функция $\varphi_x(x, s)$ удовлетворяет условию Липшица по x с одной константой для всех допустимых процессов.

Тогда последовательность управлений, генерируемая методом, является релаксационной:

$$J(u^{i+1}) < J(u^i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

и сходится в смысле

$$\mu(u^i) = \int\limits_{s_1}^{s_2} \delta_i(s)\omega_i(s)\, ds \to 0, \quad i \to \infty.$$

Действительно, при сделанных предположениях можно оценить остаточный член в формуле приращения (2.5) и выписать следующее неравенство для приращения функционала

$$J(u^{i+1}) - J(u^i) \leq -\varepsilon\mu(u^i) + L\varepsilon^2, \quad L > 0,$$

откуда и следует справедливость утверждения.

Конкретные варианты алгоритмов отличаются конструктивными методами построения функций $\delta_i(s)$

Проведена серия тестовых расчетов для задачи с квадратичным критерием качества. Для численного интегрирования уравнения (1.1) использовалась характеристическая разностная сетка. Заранее неизвестные краевые условия (1.3) восстанавливались на каждом слое по времени численным интегрированием выражения в правой части (1.3). Приведенные ниже результаты получены для следующих значений параметров

$$s_k = 5, \;\; t_k = 5, \;\; s_1 = 1, \;\; s_2 = 4;$$

$$\bar{x}(s) = \exp\left(5 - s - \frac{1}{5-s}\right), \quad x_0(s) = \exp\left(-s - \frac{1}{5-s}\right),$$

$$\mu(s) = \frac{1}{(5-s)^2}, \quad K(s) = s\,\exp\left(s + \frac{1}{5-s}\right),$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\exp(-0.2).$$

Функции $\delta_i(s)$ строились по правилу

$$\delta_i(s) = \frac{\gamma_i(s)}{M_i},$$

$$\gamma_i(s) = \frac{(s-s_0)(s_1-s)}{(s_1-s_0)} \cdot \frac{\omega_i(s)}{\max\limits_{s\in[s_1,s_2]} |\omega_i(s)|},$$

$$M_i = \max_{s\in[s_1,s_2]} |\dot{\gamma}_i(s)|.$$

В таблице приведены значения целевого функционала на соответствующих итерациях для трех различных начальных приближений

$$\tilde{u}^0(s) = \frac{1}{3}; \quad \hat{u}^0(s) = \frac{2}{9}(s-1); \quad \breve{u}^0(s) = \frac{1}{3}(\sin 2\pi s + 1).$$

Таблица 3.1

Итерация i	$J(\tilde{u}^i)$	$J(\hat{u}^i)$	$J(\breve{u}^i)$
0	$2.827 \cdot 10^7$	$1.143 \cdot 10^4$	$1.329 \cdot 10^3$
1	$2.605 \cdot 10^1$	$2.315 \cdot 10^3$	$2.236 \cdot 10^2$
2	$2.16 \cdot 10^{-7}$	$2.646 \cdot 10^2$	$1.052 \cdot 10^2$
3		$2.26 \cdot 10^{-7}$	$4.593 \cdot 10^1$
6			$2.19 \cdot 10^{-7}$

Во всех трех случаях реализация процесса завершалась после достижения требуемой точности по значению целевого функционала. Таким образом, цель управления была достигнута. Небольшое число итераций в первом и втором случаях не означает, что объем вычислений был невелик. Основная трудоемкость каждой итерации – в решении вспомогательной задачи (3.1). На каждой итерации для решения этой задачи одномерной оптимизации приходилось 15 – 20 раз интегрировать уравнение

(1.1). Для каждого из начальных приближений метод привел к своему "почти" оптимальному управлению. Отметим, что в рассматриваемой задаче оптимальное управление, доставляющее глобальный минимум целевому функционалу, неединственно.

В целом, проведенные численные эксперименты показывают, что предлагаемый метод может быть достаточно успешно применен для задачи оптимального управления динамикой популяций.

Глава 5

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОФИЛЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

При изучении процессов возбуждения и распространения гравитационных волн представляет интерес задача восстановления начального профиля волны по известным характеристикам волны в конечный момент времени. В частности, задачи подобного типа возникают при исследовании так называемой обратной проблемы цунами, которая заключается в определении параметров подвижки дна, вызывающей в момент окончания землетрясения волну заданного профиля. Данная задача представляет собой обратную задачу математической физики. Однако, при ее исследовании оказалось эффективным применение изложенных выше методов оптимального управления. При этом существенным является требование гладкости допустимых управлений.

В пункте 5.1 содержится постановка обратной задачи математической физики и ее формализация как задачи оптимального управления в классе гладких управляющих воздействий. Разностные схемы интегрирования исходной и сопряженной систем гиперболических уравнений изложены в пункте 5.2. Описанию численных экспериментов при различных входных данных, а также анализу результатов посвящен раздел 5.3.

5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему гиперболических уравнений первого порядка линеаризованной теории "мелкой воды"[13, 145]:

$$\eta_t + b_0(s)v_s = -\dot{b_0}(s)v,$$

$$v_t + g\eta_s = 0, \tag{1.1}$$

$$\eta(s,t_0) = u(s), \quad v(s,t_0) = q(s).$$

Здесь t – время, $t \in [t_0, t_1] = T$, t_0, t_1 – соответственно моменты окончания землетрясения и снятия показаний о профиле волны; s – линейный размер, $s \in [s_0, s_1] = S$ – область возмущения поверхности воды в конечный момент времени; $\eta = \eta(s,t)$ – профиль волны; $v = v(s,t)$ – массовая скорость частиц воды; $b_0(s)$ – функция, определяющая профиль дна, причем $b_0(s) > 0, \quad s \in S; \quad \dot{b_0}(s)$ – производная функции $b_0(s)$; $q(s)$ – известная функция; g – ускорение свободного падения; $u(s)$ – неизвестный начальный профиль волны.

Будем считать, что вода находится в состоянии покоя всюду вне области $S = [s_0, s_1]$, то есть выполняются условия $v(s,t_1) = \eta(s,t_1) = 0$, $s \notin S$, а также $v(s_0,t_1) = \eta(s_0,t_1) = v(s_1,t_1) = \eta(s_1,t_1) = 0$. Это означает, что ось OS на координатной плоскости $\{O; s, \eta\}$ совпадает с уровнем невозмущенной поверхности воды, а функция $\eta = \eta(s,t_1)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, показывающие отклонение от этого уровня.

Поскольку в конечный момент времени поверхность воды возмущается только в ограниченной области $S = [s_0, s_1]$, естественно считать, что в любой момент времени $t \in T$ область возмущения поверхности воды не выходит за границы S. Отсюда получаем условия:

$$\eta(s_0,t) = \eta(s_1,t) = 0, \quad t \in T,$$

$$v(s_0, t) = v(s_1, t) = 0, \quad t \in T.$$

Пусть область возмущения поверхности воды в начальный момент времени представляет собой отрезок $[s_n, s_k]$. Всюду вне этого отрезка будем считать, что $u(s) = 0$.

Предположим, что в конечный момент времени известен профиль волны – функция $\bar{\eta}(s) = \eta(s, t_1), \quad s \in S$. Тогда цель обратной задачи математической физики – нахождение неизвестного профиля волны в начальный момент времени $u(s) = \eta(s, t_0)$ – может быть интерпретирована как задача минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2} \int\limits_S (\eta(u, s, t_1) - \bar{\eta}(s))^2 ds.$$

Приведем модель "мелкой воды"(2.1) к инвариантной форме. В соответствии с методикой [145], инварианты Римана $x_1 = x_1(s, t)$, $x_2 = x_2(s, t)$ задаются соотношениями

$$x_1(s, t) = \sqrt{g}\eta(s, t) + \sqrt{b_0(s)}v(s, t),$$

$$x_2(s, t) = \sqrt{g}\eta(s, t) - \sqrt{b_0(s)}v(s, t).$$

Легко проверить, что обратное преобразование имеет вид

$$\eta(s, t) = \frac{x_1(s, t) + x_2(s, t)}{2\sqrt{g}},$$

$$v(s, t) = \frac{x_1(s, t) - x_2(s, t)}{2\sqrt{b_0(s)}}.$$

Тогда система (1.1) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{1t} + \sqrt{gb_0(s)}x_{1s} &= -a(s)(x_1 - x_2), \\ x_{2t} - \sqrt{gb_0(s)}x_{2s} &= -a(s)(x_1 - x_2), \\ x_1(s, t_0) &= \sqrt{g}u(s) + \sqrt{b_0(s)}q(s), \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$x_2(s,t_0) = \sqrt{g}u(s) - \sqrt{b_0(s)}q(s),$$

$$x_1(s_0,t) = x_2(s_1,t) = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $a(s) = \frac{\sqrt{g}\dot{b}_0(s)}{4\sqrt{b_0(s)}}$.

В новых обозначениях целевой функционал имеет следующий вид:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_S \left(\frac{x_1(s,t_1)+x_2(s,t_1)}{2\sqrt{g}} - \bar{\eta}(s)\right)^2 ds. \tag{1.4}$$

Опишем два возможных типа ограничений на функцию $u(s)$.

1) Поточечные (амплитудные) ограничения

$$u(s) \in U, \quad s \in [s_n, s_k], \tag{1.5}$$

где U задает максимально возможную амплитуду искомой волны.

Задача (1.2)–(1.5) – это задача оптимального управления вида (3.1.1)–(3.1.2), (3.1.7), (3.1.9), рассмотренная в главе 3. Роль управления играет функция $u(s)$ – неизвестный начальный профиль волны. По физическому смыслу задачи управляющие воздействия принадлежат классу гладких функций.

Выпишем для данной задачи основные конструкции, необходимые для реализации численных методов:

– функция $h = h(\psi(s,t_0), u(s), s)$

$$h(\psi(s,t_0),u(s),s) = \psi_1(s,t_0)\,(\sqrt{g}u(s) + \sqrt{b_0(s)}q(s)) +$$

$$+\psi_2(s,t_0)\,(\sqrt{g}u(s) - \sqrt{b_0(s)}q(s)); \tag{1.6}$$

– сопряженная задача для $\psi = \psi(s,t)$

$$\psi_{1t} + \sqrt{gb_0(s)}\psi_{1s} = -a(s)(\psi_1 - \psi_2),$$

$$\psi_{2t} - \sqrt{gb_0(s)}\psi_{2s} = -a(s)(\psi_1 - \psi_2), \tag{1.7}$$

$$\psi_1(s,t_1) = \psi_2(s,t_1) = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{x_1(s,t_1)+x_2(s,t_1)}{2\sqrt{g}} - \bar{\eta}(s)\right), \quad s \in S,$$

$$\psi_1(s_1,t)=\psi_2(s_0,t)=0,\quad t\in T;$$

– необходимое условие оптимальности (3.3.5)

$$(\psi_1(s,t_0)+\psi_2(s,t_0))\dot{u}(s)=0. \tag{1.8}$$

Обозначим левую часть равенства (1.8) за функцию (3.5.1)

$$\omega(u(s),s)=(\psi_1(s,t_0)+\psi_2(s,t_0))\dot{u}(s).$$

Применительно к данной задаче алгоритм решения будет выглядеть следующим образом:

Шаг 0. Пусть задано начальное приближение из класса допустимых функций $u^0(s)$ и с помощью метода вычислено $u^k(s),\ k=1,2,\ldots$.

Шаг 1. При заданном управлении находим решения $x^k=x^k(s,t)$, $\psi^k=\psi^k(s,t)$ исходной (1.3) и сопряженной (1.7) систем гиперболических уравнений.

Шаг 2. Строим функцию

$$\omega_k(s)=\omega(u^k(s),s).$$

Если $\omega_k(s)=0,\ \ s\in S$, то управление $u^k(s)$ удовлетворяет необходимому условию оптимальности, и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае построим однопараметрическое семейство управлений

$$u^k_\varepsilon(s)=u^k(s+\varepsilon\delta_k(s)),$$

где

$$\delta_k(s)=\frac{(s-s_n)(s_k-s)\omega_k(s)}{(s_k-s_n)\max\limits_{s\in S}|\omega_k(s)|}, \tag{1.9}$$

и решим задачу одномерной минимизации

$$\varepsilon_k:\quad J(u^k_{\varepsilon_k})=\min_{\varepsilon\in[0,1]}J(u^k_\varepsilon). \tag{1.10}$$

Находим следующее приближение по формуле

$$u^{k+1} = u^k_{\varepsilon_k},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и переходим на шаг 1.

Утверждение 1.1. *Функция $\delta_k(s)$, выбираемая по правилу (1.9) удовлетворяет условиям (3.3.2)*

$$s_n - s \le \delta_k(s) \le s_k - s, \quad s \in S.$$

Доказательство. Действительно,

а) если $\omega_k(s) \ge 0$, то

$$0 \le (s - s_n)\omega_k(s) \le (s_k - s_n) \max_{s \in S} |\omega_k(s)|,$$

откуда

$$0 \le \frac{(s - s_n)\omega_k(s)}{(s_k - s_n) \max\limits_{s \in S} |\omega_k(s)|} \le 1,$$

или, умножив на $(s_k - s)$, получаем

$$s_n - s \le 0 \le \delta_k(s) \le s_k - s;$$

б) аналогично рассматривается случай $\omega_k(s) \le 0$.

На рис.1.1 изображены условия (3.3.2) на функцию $\delta(s)$ и одна из возможных функций, удовлетворяющих этим условиям.

Сходимость метода доказана в пункте 3.5.

2) Интегральные ограничения

$$\int\limits_S u(s)\,ds = \int\limits_S \bar\eta(s)\,ds = \text{const} \tag{1.11}$$

могут быть получены путем интегрирования по прямоугольнику $P = S \times T$ суммы уравнений (1.2) и представляют собой, с физической точки зрения, закон сохранения массы.

Задача (1.2)–(1.4), (1.11) – это задача оптимального управления вида (3.1.1)–(3.1.2), (3.1.7), (3.1.9), (3.4.4), которая была рассмотрена в пункте 3.4. Подынтегральная функция в условии (1.11) линейна относительно $u = u(s)$:

$$\Phi(u(s)) = u(s),$$

коэффициент однородности в этом случае $\alpha = 1$:

$$\Phi(\lambda u(s)) = \lambda\Phi(u(s)).$$

При ранее введенных функции $h(\psi(s,t_0), u(s), s)$ (1.6) и сопряженной задаче (1.7), учитывая линейность функции $\Phi(u(s))$, необходимое условие оптимальности имеет вид (3.4.11) главы 3

$$-(\psi_{1s}(s,t_0) + \psi_{2s}(s,t_0))u(s) = 0.$$

Обозначим

$$\omega(u(s), s) = -(\psi_{1s}(s,t_0) + \psi_{2s}(s,t_0))u(s)$$

и выпишем алгоритм решения:

Шаг 0. Пусть задано начальное приближение из класса допустимых функций $u^0(s)$ и с помощью метода вычислено $u^k(s),\ k = 1, 2, \ldots$.

Шаг 1. При заданном управлении находим решения $x^k = x^k(s,t)$, $\psi^k = \psi^k(s,t)$ исходной (1.3) и сопряженной (1.7) систем гиперболических уравнений.

Шаг 2. Строим функцию

$$\omega_k(s) = \omega(u^k(s), s).$$

Если $\omega_k(s) = 0,\ \ s \in S$, то управление $u^k(s)$ удовлетворяет необходимому условию оптимальности, и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае определим гладкую функцию $\delta_k(s)$ по правилу (1.9)

$$\delta_k(s) = \frac{(s - s_n)(s_k - s)\omega_k(s)}{(s_k - s_n)\max\limits_{s\in S}|\omega_k(s)|},$$

построим однопараметрическое семейство управлений

$$u_\varepsilon^k(s) = (1 + \varepsilon\dot{\delta}_k(s))u^k(s + \varepsilon\delta_k(s))$$

и решим задачу одномерной минимизации

$$\varepsilon_k : \quad J(u_{\varepsilon_k}^k) = \min_{\varepsilon \in [0,1]} J(u_\varepsilon^k).$$

Находим следующее приближение по формуле

$$u^{k+1} = u_{\varepsilon_k}^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и переходим на шаг 1.

Функция $\delta_k(s)$, определяемая правилом (1.9), удовлетворяет условиям (3.4.7)

$$s_n - s \le \delta_k(s) \le s_k - s, \quad s \in S,$$

$$\delta_k(s_n) = \delta_k(s_k) = 0.$$

Выполнение первого из указанных условий доказано выше (утверждение 1.1), второе очевидно. В силу линейности функции $\Phi(u(s))$ по u нет необходимости требовать для функции $\delta_k(s)$ выполнения условия (3.4.8)

$$|\dot{\delta}(s)| \le 1, \quad s \in [s_n, s_k]$$

(см. замечание 3.4.2).

Можно доказать, что последовательность управлений, генерируемая методом, является релаксационной:

$$J(u^{k+1}) < J(u^k), \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и сходится в смысле

$$\mu(u^k) = \int_S \delta_k(s)\omega_k(s)\, ds \to 0, \quad k \to \infty.$$

В следующем пункте рассмотрим подробнее схемы численного интегрирования систем (1.2)–(1.3) и (1.7).

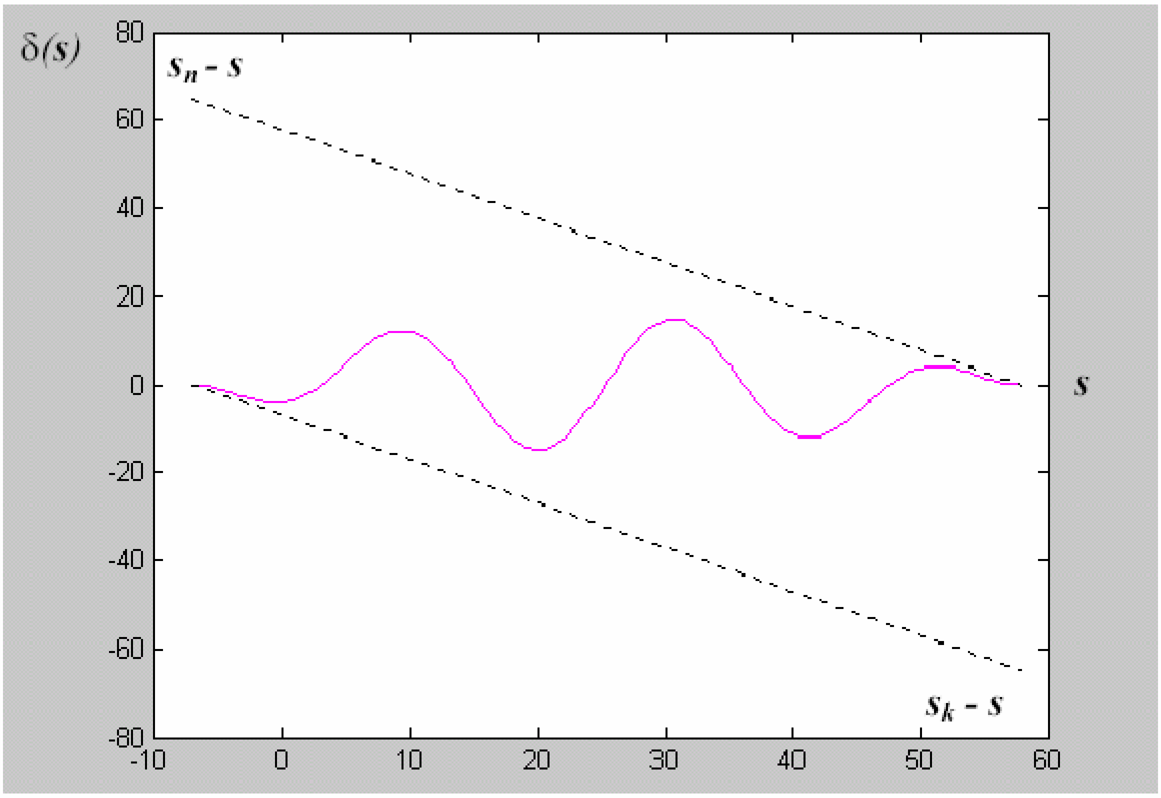


Рис.1.1

5.2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Построим область распространения возмущения $G \subset \bar{\Pi} = S \times T$ так, чтобы условие

$$x_1(s_0, t) = x_2(s_1, t) = 0, \quad t \in T$$

заведомо выполнялось. Введем характеристики $s_1(\xi, \tau; t)$, $s_2(\xi, \tau; t)$ системы (1.2), являющиеся решениями уравнений

$$\frac{ds_1(\xi, \tau; t)}{dt} = \sqrt{gb_0(s_1(\xi, \tau; t))}, \;\; s_1(\xi, \tau; \tau) = \xi,$$
$$\frac{ds_2(\xi, \tau; t)}{dt} = -\sqrt{gb_0(s_2(\xi, \tau; t))}, \;\; s_2(\xi, \tau; \tau) = \xi. \tag{2.1}$$

Очевидно, что неравенства

$$s_2(s_0, t_1; t) \leq s_i(\xi, \tau; t) \leq s_1(s_1, t_1; t), \quad i = 1, 2,$$

выполняются для всех $t \in [\tau, t_1]$, если $(\xi, \tau) \in G$, где область G определена условием

$$G = \{(s, t) \in P: \; s_2(s_0, t_1; t) \leq s \leq s_1(s_1, t_1; t)\}.$$

Отсюда следует, что решение $x = x(s, t)$ задачи (1.2) удовлетворяет условию $x(s, t) \equiv 0, \;\; (s, t) \notin G$.

Известно [145], что одним из наиболее распространенных методов интегрирования гиперболических систем является метод характеристик. В применении к задачам (1.2)–(1.3) и (1.7) этот метод выглядит так.

Построим характеристическую разностную сетку, узлы которой являются пересечением характеристик, задаваемых уравнениями (2.1).

В общем случае характеристическая разностная сетка является криволинейной, что существенно затрудняет численную реализацию метода характеристик из-за сложной логики построения фронта расчета. Однако, воспользовавшись спецификой уравнений (2.1), удается построить прямоугольную разностную сетку, свободную от указанного недостатка.

Разобьем отрезок $T = [t_0, t_1]$ на N равных частей $[t^i, t^{i+1}]$, положив $t^i = t_0 + i\ell = t_1 - (N-i)\ell, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad \ell = (t_1 - t_0)/N$. Пусть $s = s_2(s_0, t_1; t)$ – характеристика системы (1.2), определенная из второго уравнения (2.1). Тогда в качестве узлов $s^j \in S = [s_0, s_1]$ выберем точки

$$s^j = s_2(s_0, t_1; t_1 - (N-j)\ell), \quad j = 0, 1, \ldots, M, \tag{2.2}$$

причем M удовлетворяет условию $s^{M-1} < s_1 \leq s^M$. Заметим, что такое построение возможно для любого конечного $[s_0, s_1]$, так как функция $b_0 = b_0(s)$ не зависит от времени и определена всюду на числовой оси $s \in (-\infty, +\infty)$.

Из способа построения разностной сетки с узлами (s^j, t^i), $j = 0, 1, \ldots, M$, $i = 0, 1, \ldots, N$, очевидно, что она строится однозначно для любого заданного числа $N > 0$. При практической реализации способа построения характеристической разностной сетки применялся широко известный метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности.

Из соотношения (2.2) и вида уравнений (2.1) нетрудно получить равенства

$$s^j = s_2(s^{j-1}, t^{i+1}; t^i) = s_1(s^{j+1}, t^{i+1}; t^i),$$

$$j = 1, 2, \ldots, M-1, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

которые означают, что построенная разностная сетка является характеристической (рис.2.1).

В общем случае равенства (2.2) выполняются лишь приближенно, поскольку характеристики находятся с помощью численного метода, но в случае ровного дна ($b_0(s) \equiv const$), когда характеристики системы являются прямыми линиями, эти равенства выполняются точно.

Получим расчетные формулы метода характеристик. Интегрируя уравнения (1.2) вдоль характеристик по формуле трапеций, будем иметь следующую разностную схему:

$$x_{1j}^{i} = x_{1j-1}^{i-1} - \frac{\ell}{2}\left[a_{j-1}(x_{1j-1}^{i-1} - x_{2j-1}^{i-1}) + a_j(x_{1j}^{i} - x_{2j}^{i})\right],$$

$$x_{2j}^{i} = x_{2j+1}^{i-1} - \frac{\ell}{2}\left[a_{j+1}(x_{1j+1}^{i-1} - x_{2j+1}^{i-1}) + a_j(x_{1j}^{i} - x_{2j}^{i})\right],$$

где $a_j = a(s^j)$, $x_j^i = x(s^j, t^i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $j = 0, 1, \ldots, M$.

Рассматривая данные выражения неявной разностной схемы как систему двух линейных алгебраических уравнений относительно x_{1j}^{i}, x_{2j}^{i}, можно получить явные формулы перерасчета разностного решения на i-м слое по заданным значениям на $(i-1)$-м слое:

$$x_{1j}^{i} = (1 - C_j)A_j^i + C_j B_j^i,$$

$$x_{2j}^{i} = (1 + C_j)B_j^i - C_j A_j^i, \tag{2.3}$$

где

$$A_j^i = x_{1j-1}^{i-1} - \frac{\ell}{2}\left[a_{j-1}(x_{1j-1}^{i-1} - x_{2j-1}^{i-1})\right],$$

$$B_j^i = x_{2j+1}^{i-1} - \frac{\ell}{2}\left[a_{j+1}(x_{1j+1}^{i-1} - x_{2j+1}^{i-1})\right],$$

$$C_j = \frac{\ell}{2} a_j.$$

Предлагаемая разностная схема является частным вариантом характеристической схемы [145], являющейся устойчивой и обеспечивающей второй порядок аппроксимации. В силу линейности задачи из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.

Для сопряженной задачи разностная схема метода характеристик аналогична:

$$\psi_{1j}^{i} = \psi_{1j+1}^{i+1} + \frac{\ell}{2}\left[a_{j+1}(\psi_{1j+1}^{i+1} - \psi_{2j+1}^{i+1}) + a_j(\psi_{1j}^{i} - \psi_{2j}^{i})\right],$$

$$\psi_{2j}^{i} = \psi_{2j-1}^{i+1} + \frac{\ell}{2}\left[a_{j-1}(\psi_{1j-1}^{i+1} - \psi_{2j-1}^{i+1}) + a_j(\psi_{1j}^{i} - \psi_{2j}^{i})\right].$$

Если ввести обозначения

$$D_j^i = {\psi_1}_{j+1}^{i+1} + \frac{\ell}{2}({\psi_1}_{j+1}^{i+1} - {\psi_2}_{j+1}^{i+1}) \cdot a_{j+1},$$

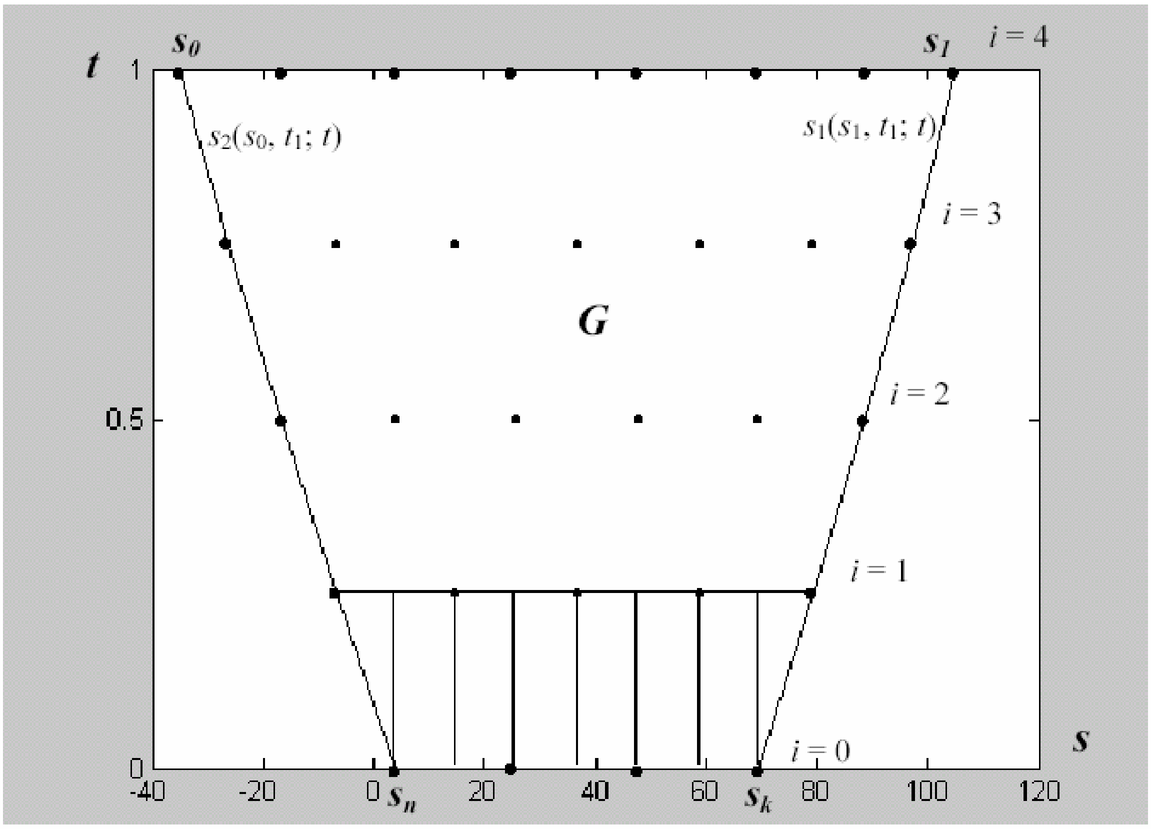
$$E_j^i = {\psi_2}_{j-1}^{i+1} + \frac{\ell}{2}({\psi_1}_{j-1}^{i+1} - {\psi_2}_{j-1}^{i+1}) \cdot a_{j-1},$$

то решение разностной сопряженной задачи определяется следующими формулами

$${\psi_1}_j^i = (1 + C_j)D_j^i - C_j E_j^i,$$

$${\psi_2}_j^i = (1 - C_j)E_j^i + C_j D_j^i.$$

Таким образом, заготовлены все расчетные формулы реализации предложенных алгоритмов. Перейдем к описанию проведенных численных экспериментов и их анализу.



s_0
s_1
$i = 4$
t
1
$s_2(s_0, t_1; t)$
$s_1(s_1, t_1; t)$
$i = 3$
G
$i = 2$
0.5
$i = 1$
s
$i = 0$
0
-40
-20
0
s_n
20
40
60
s_k
80
100
120

Рис.2.1

5.3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

При проведении численных экспериментов применялась следующая методика построения конкретных вариантов задачи оптимального управления (1.2)–(1.5).

Вначале выбиралась функция $b_0 = b_0(s)$, описывающая профиль дна. Задавались границы известного профиля волны в конечный момент времени $s = s_0$ и $s = s_1$. По характеристикам системы (1.2) строилась область G распространения возмущения и находились значения $s = s_n$, $s = s_k$ – границы неизвестного профиля волны в начальный момент времени $t = t_0$. Задавалось некоторое управление $u^* = u^*(s),\ \ s \in [s_n, s_k]$, определяющее начальный профиль волны. Затем с помощью разностной схемы (2.3) находилось приближенное решение $x^* = x^*(s,t)$ задачи (1.2)–(1.3). В момент времени $t = t_1$ вычислялась функция $\bar{\eta}(s) = \eta(s, t_1)$.

Далее решалась задача оптимального управления (1.2)–(1.5), где вместо $\bar{\eta}(s)$ подставлялась найденная функция. Таким образом, построение конкретного варианта задачи (1.2)–(1.5) осуществлялось однозначно по следующим параметрам:

$$T = [t_0, t_1],\ \ S = [s_0, s_1],\ \ b_0 = b_0(s),\ \ u^* = u^*(s),\ \ U = [c, d].$$

Решение задачи выполнялось описанным выше методом. Критерием остановки служила одна из полученных на k-й итерации метода ситуаций:

– достижение заданной точности по значению функционала; так как $J(u^*) = 0$, то условием остановки может быть, например, неравенство

$$J(u^k) \leq 10^{-3};$$

– выполнение с заданной точностью необходимого условия оптимальности для функции $u^k(s)$; например, близость к нулю $\omega_k(s)$ в каждой точке $s \in [s_n, s_k]$ можно гарантировать, если справедливо неравенство:

$$\max_{s \in [s_n, s_k]} |\omega_k(s)| \le 10^{-5};$$

– неулучшение значения функционала, полученного на предыдущей, $(k-1)$-й итерации, например:

$$J(u^k) - J(u^{k-1}) > 10^{-6}.$$

Поиск по параметру $\varepsilon \in [0, 1]$ в задаче минимизации (1.10) осуществлялся среди значений $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$. Случай, когда найденное значение ε очень близко к нулю, соответствует неулучшению значения функционала на шаге метода.

В таблице 3.1 приведены результаты численных расчетов для задачи (1.2)–(1.5) с поточечными ограничениями на управление при следующих данных: $b_0(s) = 100 + s$; $t_0 = 0$ (начальный момент времени), $t_1 = 1$ (конечный момент времени), $s_0 = -35$, $s_1 = 100$ (границы известного профиля волны в конечный момент времени), $U = [-1, 1]$ – амплитудные ограничения на управление,

$$u^* = u^*(s) = \sin\frac{\pi(s - s_n)}{s_k - s_n}\cos\frac{2\pi(s - s_n)}{s_k - s_n} \text{ – оптимальное управление,}$$

$$u^0(s) = \sin\frac{2\pi(s - s_n)}{s_k - s_n} \text{ – начальное приближение,}$$

$N = 200$ (число слоев по времени).

Получены значения $s_n = -7.0049$, $s_k = 57.7786$ – границы неизвестного профиля волны в начальный момент времени. Число узлов на нижнем слое разностной сетки $L = 186$, $u^k(s)$ – управление, полученное за 124 итерации приведенным выше методом. Выход осуществлен по неулучшению значения функционала. Функция $\omega_k(s)$, характеризующая выполнение необходимого условия оптимальности, в каждой точке отрезка $[s_n, s_k]$ удовлетворяет неравенству: $|\omega_k(s)| \le 0.0035$.

На рис.3.1 хорошо видно, что полученное с помощью метода управление близко к оптимальному всюду в области $[s_n, s_k]$, кроме отрезков $[22.8, 27.7]$ (узлы 92–106) и $[41.5, 57.8]$ (узлы 144–186). На этих отрезках функция принимает некоторое постоянное значение.

Выберем другое начальное приближение, не меняя остальных данных. Пусть

$$u^0(s) = \sin\frac{20\pi(s - s_n)}{s_k - s_n}.$$

Метод закончил работу, достигнув заданной точности по значению функционала за 34 итерации. Полученные результаты численных расчетов отражены в таблице 3.2 и на рис.3.2. Отметим, что участки постоянства у найденного с помощью метода управления отсутствуют и управление на выходе близко к оптимальному на всей области определения. При этом $\max\limits_{s\in[s_n,s_k]} |\omega_k(s)| = 0.0017$.

Функция, задающая профиль дна, в рассмотренных выше случаях имела вид $b_0(s) = 100 + s$, то есть была линейной. Рассмотрим случай, когда профиль дна представляет собой параболу, а именно, пусть $b_0(s) = 100 - 0.02(s+40)(s-100)$ (рис.3.3). При этом остальные данные таковы: $t_0 = 0,\ \ t_1 = 1,\ \ s_0 = -35,\ \ s_1 = 100,\ \ U = [-2, 2],\ \ N = 200,$

$$u^* = u^*(s) = \sin\frac{2\pi(s - s_n)}{s_k - s_n}\cos\left(\pi + \frac{\pi(s - s_n)}{s_k - s_n}\right).$$

В таблице 3.3 (рис.3.4) начальное приближение следующего вида:

$$u^0(s) = \sin\frac{2\pi(s - s_n)}{s_k - s_n},$$

в таблице 3.5 (рис.3.6) оно выбрано так:

$$u^0(s) = 2\sin\frac{20\pi(s - s_n)}{s_k - s_n}.$$

Результаты. Функция управления $u = u(s)$ определена на отрезке $s \in [3.97033, 62.5367]$, число узлов на нижнем слое характеристической сетки $L = 135$. В первом случае (табл. 3.3, рис. 3.4) проведено 68 итераций метода, при этом не достигнута требуемая точность на значение функционала ($J(u^k(s)) = 0.387574$) и выполнение условия оптимальности ($\max\limits_{s\in[s_n,s_k]} |\omega_k(s)| = 0.00072$). У функции $u^k(s)$, $k = 68$ наблюдается участок постоянства – это точки $s \in [7.4, 24.6]$ (узлы 9–48).

Во втором случае (табл. 3.5, рис. 3.6) понадобилась лишь 21 итерация метода, чтобы достигнуть заданной точности по значению функционала: $J(u^{21}) < 10e - 3$; результат вычислений – функция $u^k(s)$, $k = 21$ – не имеет участков вида $u^k = const$ и мало отличается от функции $u^*(s)$ на всем отрезке $[s_n, s_k]$. Невязка выполнения условия оптимальности составляет $\max\limits_{s\in[s_n,s_k]} |\omega_k(s)| = 0.0038$.

Анализ расчетов позволяет сделать следующие выводы. На результаты вычислений большое влияние оказывает выбор начального приближения. Во-первых, необходимо выбирать только такие начальные приближения, которые охватывают все допустимые значения из U, так как при реализации метода новых значений функции $u(s)$ не возникает, а пересортировываются уже имеющиеся. Во-вторых, у полученных с помощью данного метода управлений наблюдаются некоторые участки постоянства, которых можно избежать, применяя сильно осциллирующие начальные приближения.

Отметим, что в качестве функции $\delta_k(s)$ во всех экспериментах рассматривалась функция (1.9). Однако, это не единственный вариант выбора функции $\delta_k(s)$, хотя и наиболее, на наш взгляд, удобный.

Была предпринята попытка решения исходной задачи в ее разностной аппроксимации по схеме метода условного градиента. Найденные таким образом управления качественно повторяют характер оптимальных управляющих воздействий, однако сильно отличаются от них количественно (табл. 3.4, рис. 3.5). В приведенном варианте потребовалось 182 итерации метода условного градиента. Выход осуществлен по неулучшению значения целевого функционала. Отметим, что применение метода условного градиента, с формальной точки зрения, в данной задаче некорректно, поскольку данный метод не обеспечивает гладкость управляющих воздействий на каждой итерации. В этом смысле результаты применения вариации, сохраняющей гладкость допустимых управлений, более точны.

В целом, эффективность предложенного в работе метода не вызывает сомнений, подтверждением тому приведенные выше результаты решения исходной задачи при четырех различных наборах входных данных, а также результаты серии других численных расчетов, опущенных здесь для краткости.

Проведены численные расчеты для задачи с интегральными ограничениями на управляющие воздействия. В таблице 3.6 (рис. 3.7) содержатся результаты эксперимента при следующих входных данных: $b_0(s) = 100 - 0.02(s+40)(s-100)$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $s_0 = -35$, $s_1 = 100$, $N = 200$,

$$\int\limits_{s_n}^{s_k} u(s)ds = \frac{8}{\pi}(s_k - s_n) \approx 149.131,$$

данное ограничение получено как значение интеграла для оптимального управления:

$$u^* = u^*(s) = -6\sin\frac{2\pi(s-s_n)}{s_k - s_n}\cos\left(\pi + \frac{\pi(s-s_n)}{s_k - s_n}\right),$$

начальное приближение, удовлетворяющее интегральному ограничению, подобрано аналитически: $u^0(s) = 4\sin\frac{\pi(s-s_n)}{s_k-s_n}$.

Методом реализовано 255 итераций, после чего осуществлен выход по неулучшению значения функционала. На выходе получено управление, не идеально совпадающее с оптимальным, но повторяющее его характер.

Поскольку предложенная для интегральных ограничений на управление вариация управляющих воздействий избавлена от недостатка вариации в случае поточечных ограничений, а именно, позволяет создавать новые значения функции $u = u(s)$, представляет интерес следующий вопрос: как ведет себя метод, если на некотором участке области определения (или на всей области определения) начальное управление принимает постоянное значение.

При тех же входных данных, кроме, конечно, $u^0(s)$, такой пример был подобран. Так как начальное управление вида $u^0(s) = 0, s \in [s_n, s_k]$, очевидно, не является допустимым, задать гладкое начальное приближение в виде константы на всей области определения не представляется возможным. Начальное управление строилось следующим образом: участок синусоиды на небольшом отрезке в начале и в конце отрезка $[s_n, s_k]$, гладко переходящий в прямую $u(s) = C = const$, где C подсчитывалось численно таким образом, чтобы $u^0(s)$ было допустимым. Результаты вычислений показаны в табл. 3.7 и на рис.3.8. Количество итераций – 276. Выход так же, как в приведенном выше примере, по неулучшению значения функционала, однако, полученное на выходе управление $u^k(s)$ близко к оптимальному на всем отрезке $s \in [s_n, s_k]$, кроме области $s \in [27, 38]$.

Следует отметить, что при реализации приведенного в главе 3 метода для задач (1.2)–(1.5) и (1.2)–(1.4), (1.11) существенным оказалось дополнительное условие на управляющие воздействия: $u(s_n) = u(s_k) = 0$. Необходимо было обеспечить его выполнение на каждой итерации метода. Выбор функции $\delta^k(s)$ вида (1.9) оказался в этом смысле удобным, так как гарантирует равенство нулю $u^k(s)$ в точках $s = s_n$ и $s = s_k$, если начальное управление удовлетворяло указанным условиям, поскольку варьирование управления строится либо по правилу

$$u_\varepsilon^k(s) = u^k(s + \varepsilon\delta(s)),$$

либо в виде

$$u_\varepsilon^k(s) = (1 + \varepsilon\dot{\delta}^k(s))u^k(s + \varepsilon\delta^k(s)),$$

а $\delta^k(s_n) = \delta^k(s_k) = 0$.

Проведенные численные эксперименты для задачи восстановления начального профиля волны по известным характеристикам в конечный момент времени показали, что предложенные в главе 3 методы улучшения гладких управляющих воздействий, стесненных поточечными или интегральными ограничениями, в задаче оптимального управления начально-краевыми условиями полулинейных гиперболических систем, могут эффективно использоваться для численного решения указанных задач.

Таблица 3.1.

N	s	$u^*(s)$	$u^0(s)$	$u^k(s)$
1	-7.0049	0	0	0
15	-2.68659	0.189916	0.406684	0.190133
30	2.04893	0.271462	0.769531	0.265794
45	6.89694	0.137745	0.97535	0.137947
60	11.8575	-0.202645	0.966745	-0.20245
75	16.9305	-0.625547	0.731258	-0.625359
90	22.116	-0.938175	0.31194	-0.937991
105	27.414	-0.976	-0.195342	-0.971203
120	32.8245	-0.702594	-0.660405	-0.702423
135	38.3475	-0.24967	-0.951175	-0.249504
150	43.983	0.143081	-0.973025	-0.007008
165	49.7311	0.270313	-0.703645	-0.006971
186	57.9673	0	0	-0.000306
Значение $J(u)$		8.7e-33	12.1527	0.164164

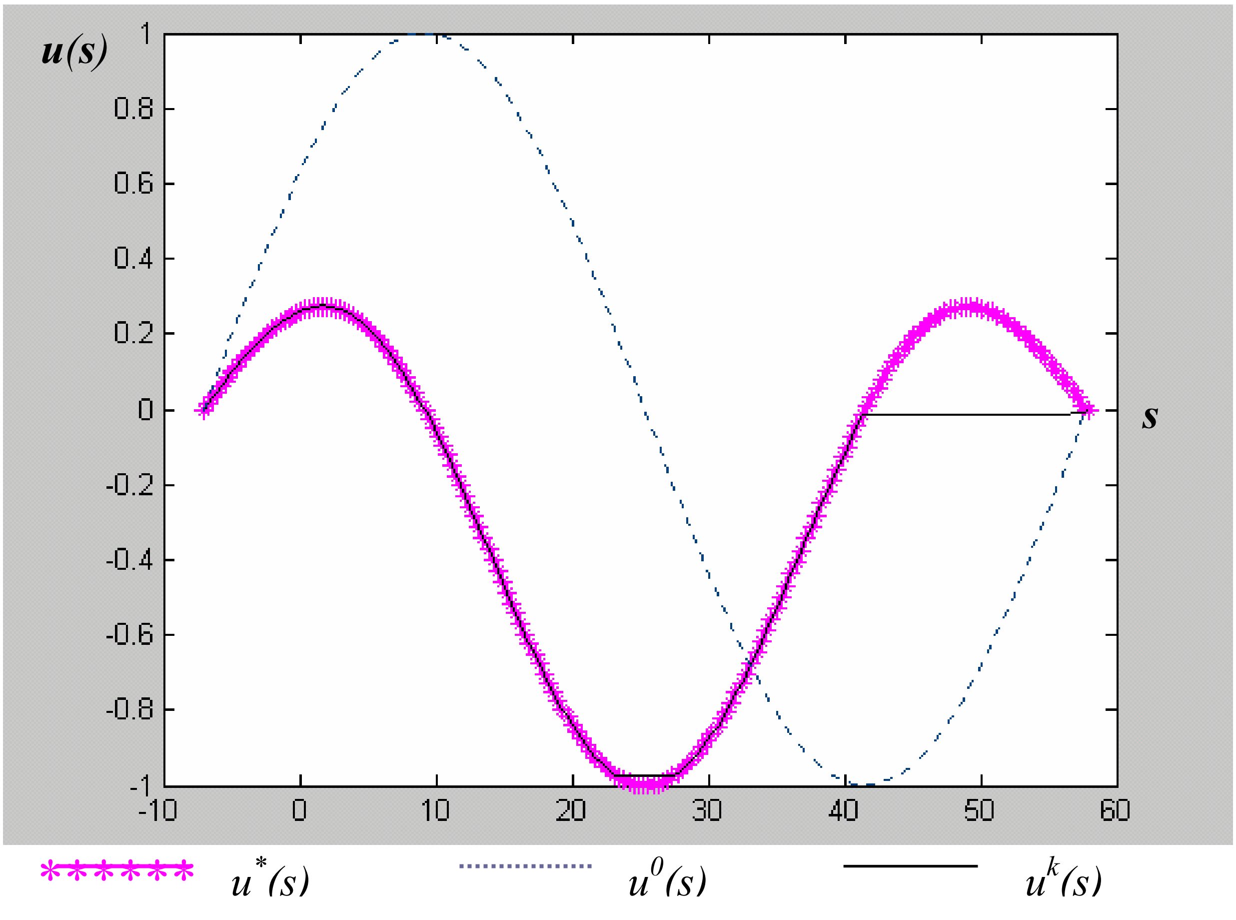
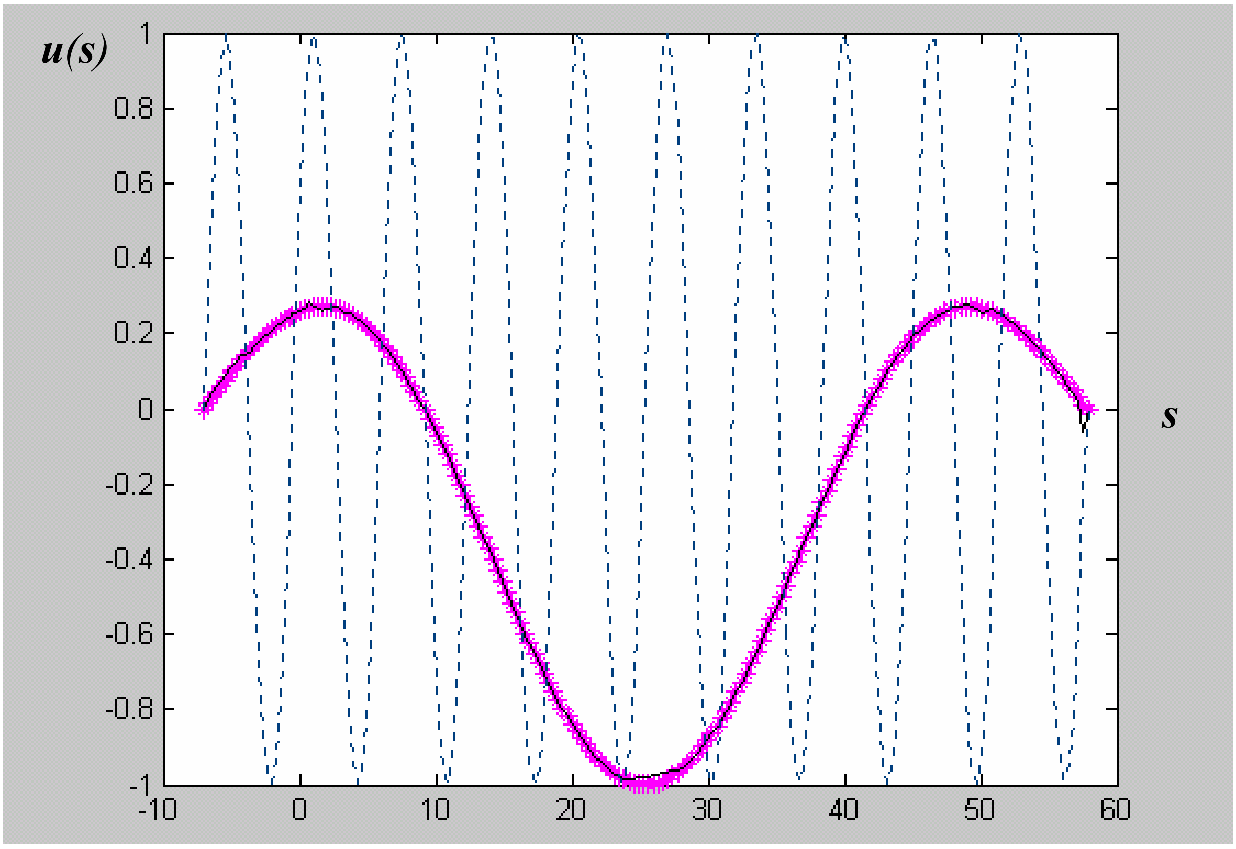


Рис. 3.1.

Таблица 3.2.

N	s	$u^*(s)$	$u^0(s)$	$u^k(s)$
1	-7.0049	0	0	0
15	-2.68659	0.189916	-0.86574	0.188284
30	2.04893	0.271462	0.600166	0.270383
45	6.89694	0.137745	0.793574	0.113774
60	11.8575	-0.202645	-0.527327	-0.20265
75	16.9305	-0.625547	-0.940173	-0.625552
90	22.116	-0.938175	0.030747	-0.93818
105	27.414	-0.976	0.922895	-0.969649
120	32.8245	-0.702594	0.801853	-0.702599
135	38.3475	-0.24967	0.0038317	-0.249675
150	43.983	0.143081	-0.726776	0.143077
165	49.7311	0.270313	-0.998807	0.268998
186	57.9673	0	0	-0.000425
Значение $J(u)$		8.7e-33	12.1505	0.00097



$u^*(s)$ $u^0(s)$ $u^k(s)$

Рис. 3.2.

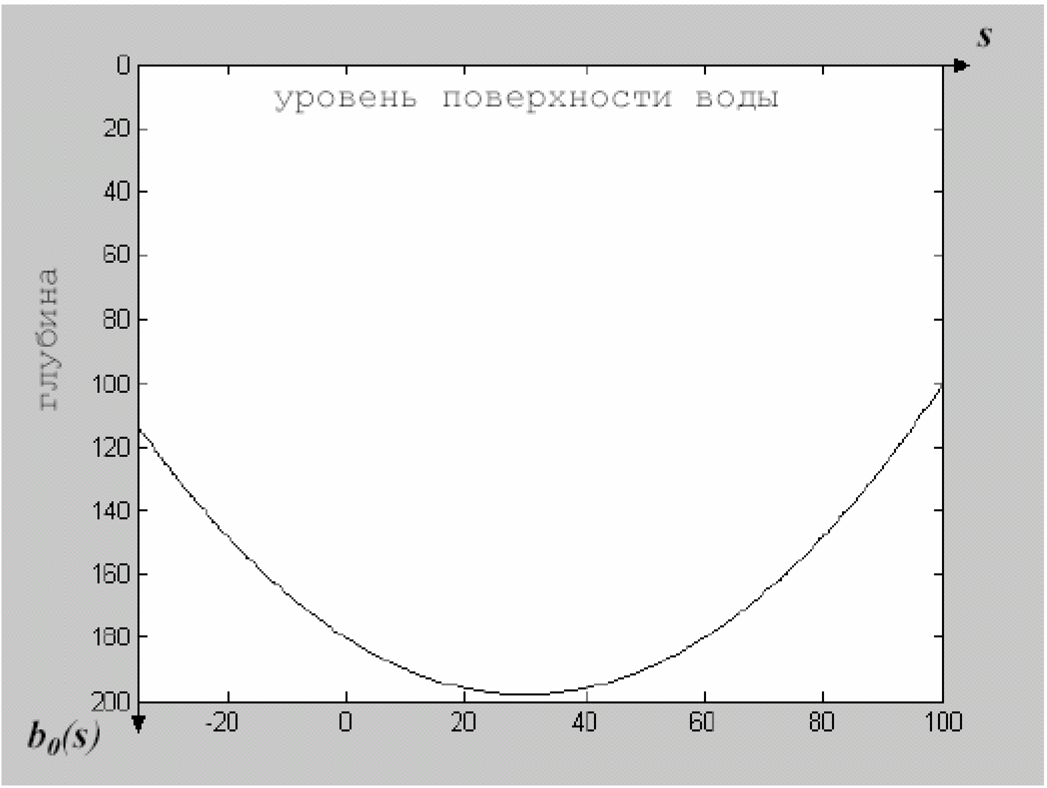

s
уровень поверхности воды
глубина
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
-20
0
20
40
60
80
100
$b_0(s)$

Рис.3.3

Таблица 3.3.

N	s	$u^*(s)$	$u^0(s)$	$u^k(s)$
1	3.97033	0	0	0
12	8.72415	-0.472394	0.488181	-0.352106
23	13.5294	-0.74503	0.85499	-0.352298
34	18.3746	-0.71582	0.999676	-0.35228
45	23.2478	-0.449372	0.878847	-0.352775
56	28.1375	-0.141388	0.521722	-0.146774
67	33.0316	-0.000283	0.02381	-0.012063
78	37.9183	-0.118817	-0.479826	-0.124188
89	42.786	-0.417655	-0.853502	-0.423601
100	47.6226	-0.696399	-0.999573	-0.701788
111	52.4167	-0.757457	-0.884634	-0.76288
122	57.1565	-0.523117	-0.545685	-0.52855
135	62.6725	0	0	0
Значение $J(u)$		7.6e-33	11.1758	0.387574

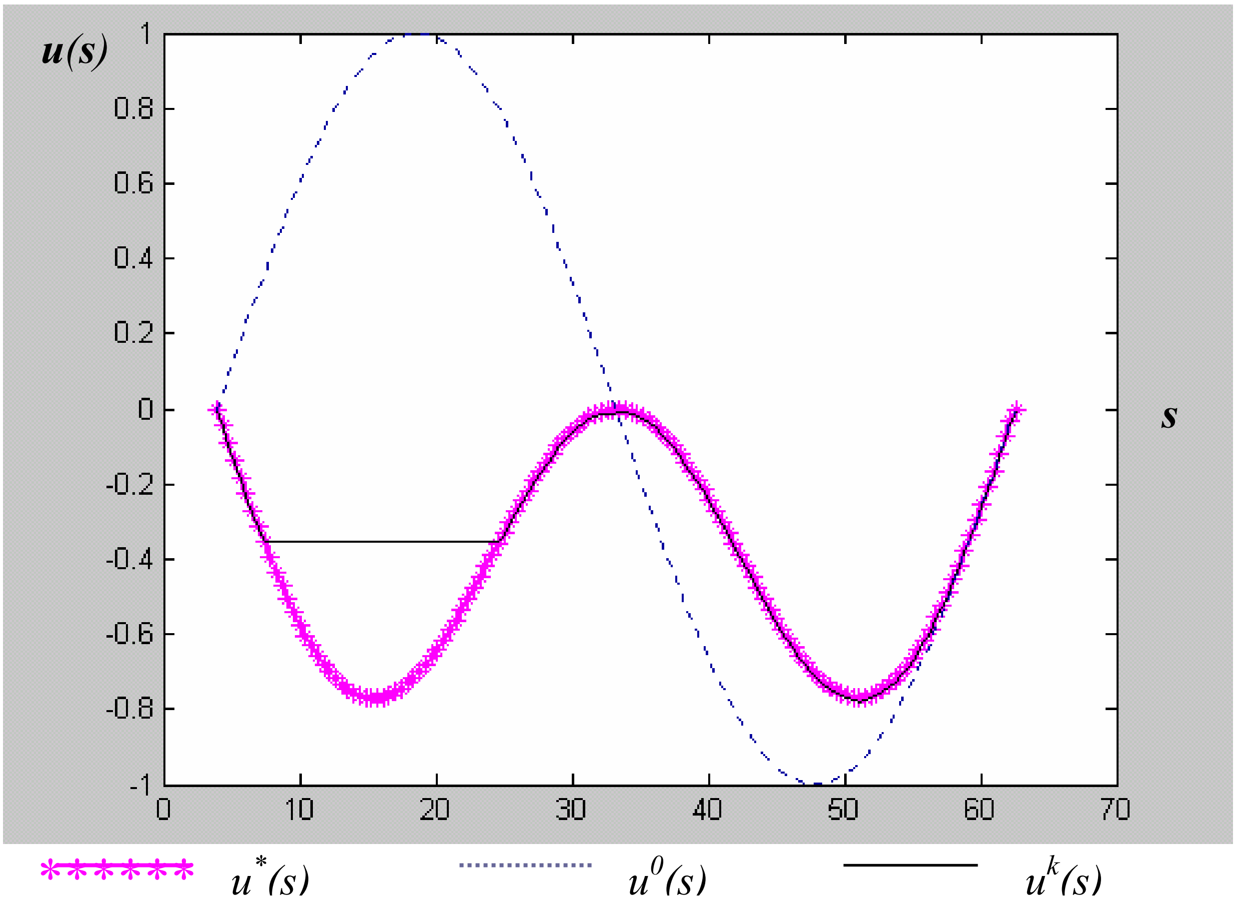


Рис. 3.4.

Таблица 3.4.

N	s	$u^*(s)$	$u^0(s)$	$u^k(s)$
1	3.97033	0	0	0
12	8.72415	-0.472394	0.488181	-0.312106
23	13.5294	-0.74503	0.85499	-0.622985
34	18.3746	-0.71582	0.999676	-0.72131
45	23.2478	-0.449372	0.878847	-0.527751
56	28.1375	-0.141388	0.521722	-0.270774
67	33.0316	-0.000283	0.02381	-0.140774
78	37.9183	-0.118817	-0.479826	-0.214188
89	42.786	-0.417655	-0.853502	-0.413601
100	47.6226	-0.696399	-0.999573	-0.611878
111	52.4167	-0.757457	-0.884634	-0.759875
122	57.1565	-0.523117	-0.545685	-0.852845
135	62.6725	0	0	0
Значение $J(u)$		7.6e-33	11.1758	2.48573

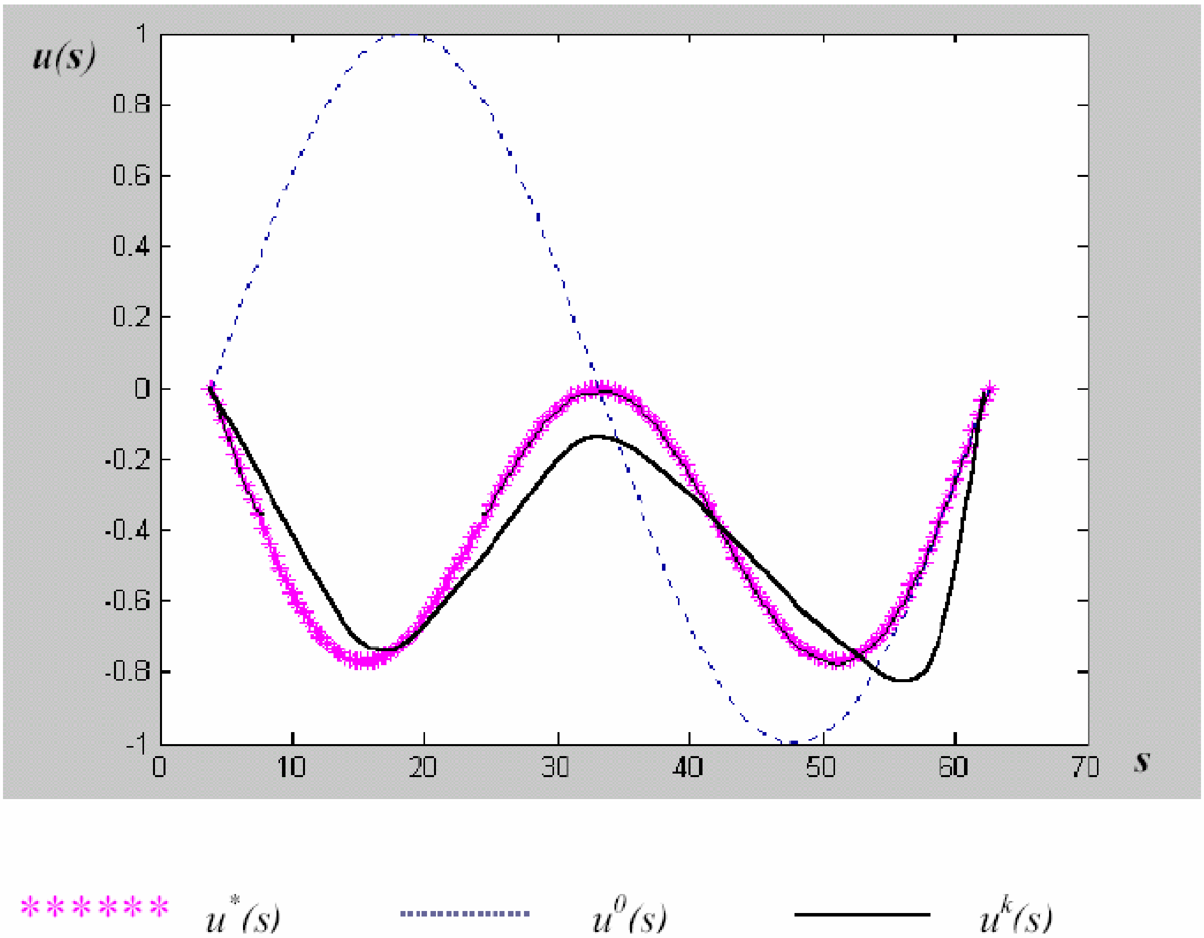
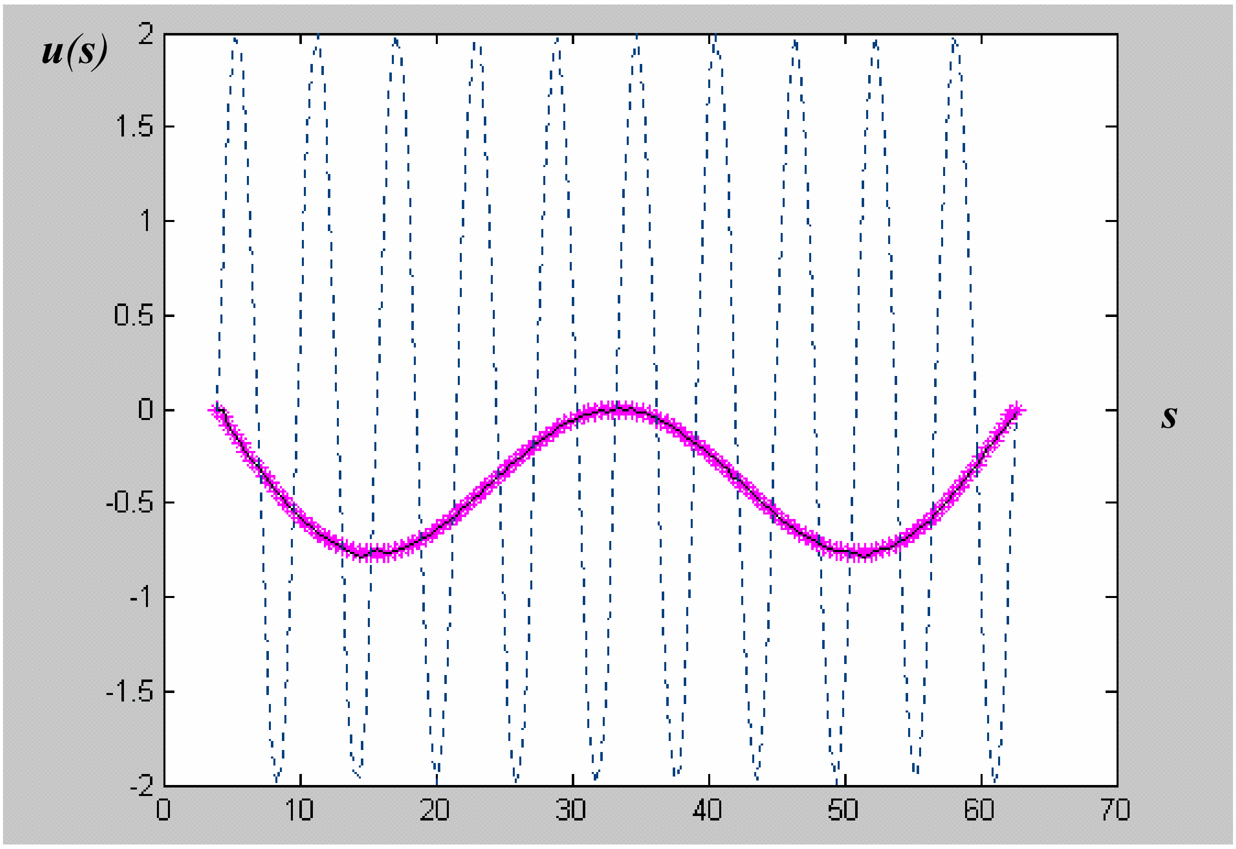


Рис. 3.5.

Таблица 3.5.

N	s	$u^*(s)$	$u^0(s)$	$u^k(s)$
1	3.97033	0	0	0
12	8.72415	-0.472394	-1.8516	-0.472281
23	13.5294	-0.74503	-1.47658	-0.749679
34	18.3746	-0.71582	0.503786	-0.716123
45	23.2478	-0.449372	1.93218	-0.448951
56	28.1375	-0.141388	1.42703	-0.141319
67	33.0316	-0.000283	-0.471756	-0.000137
78	37.9183	-0.118817	-1.91524	-0.118715
89	42.786	-0.417655	-1.43739	-0.417562
100	47.6226	-0.696399	0.576342	-0.695965
111	52.4167	-0.757457	1.98085	-0.757776
122	57.1565	-0.523117	0.978314	-0.522998
135	62.6725	0	0	-0.012
Значение $J(u)$		7.6e-33	33.137	0.00073



$u^*(s)$ $u^0(s)$ $u^k(s)$

Рис. 3.6.

Таблица 3.6.

N	s	$u^*(s)$	$u^0(s)$	$u^k(s)$
1	3.97033	0	0	0
12	8.72415	2.83437	1.00899	2.72389
23	13.5294	4.47018	1.96236	4.39107
34	18.3746	4.29492	2.79219	4.24651
45	23.2478	2.69623	3.43756	2.63263
56	28.1375	0.848326	3.85031	0.856962
67	33.0316	0.001701	3.99972	0.32873
78	37.9183	0.712902	3.87542	0.731155
89	42.786	2.50593	3.48837	2.43069
100	47.6226	4.17839	2.86946	4.14735
111	52.4167	4.54474	2.06633	4.38921
122	57.1565	3.1387	1.13845	3.09105
135	62.6725	0	0	0
Значение $J(u)$		3.3e-31	73.2085	0.297985

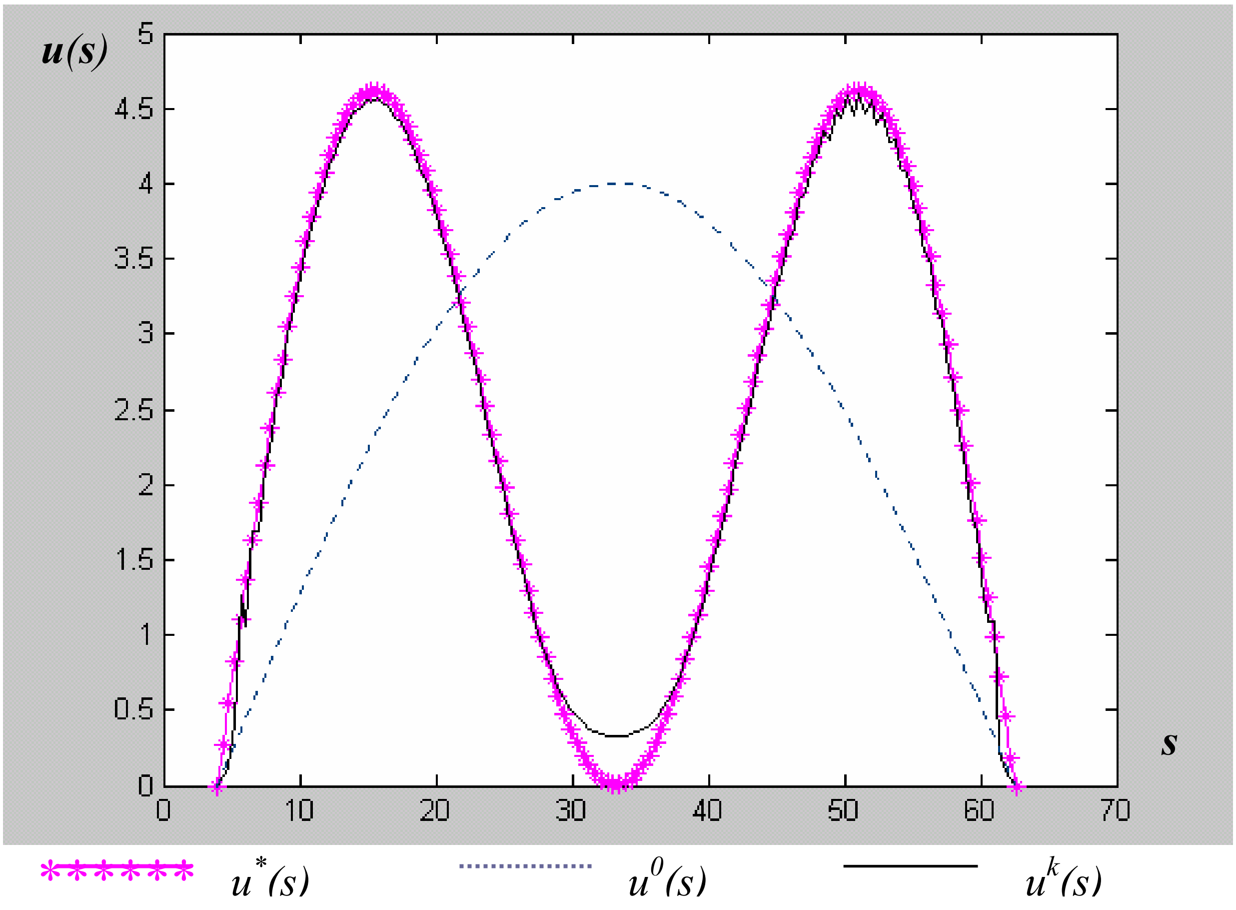


Рис. 3.7.

Таблица 3.7.

N	s	$u^*(s)$	$u^0(s)$	$u^k(s)$
1	3.97033	0	0	0
12	8.72415	2.83437	2.70681	2.70097
23	13.5294	4.47018	2.71493	4.36624
34	18.3746	4.29492	2.71493	4.21322
45	23.2478	2.69623	2.71493	2.65088
56	28.1375	0.848326	2.71493	0.956997
67	33.0316	0.001701	2.71493	0.500497
78	37.9183	0.712902	2.71493	0.845666
89	42.786	2.50593	2.71493	2.44984
100	47.6226	4.17839	2.71493	4.07341
111	52.4167	4.54474	2.71493	4.42848
122	57.1565	3.1387	2.71493	2.99349
135	62.6725	0	0	0
Значение $J(u)$		3.3e-31	32.0988	0.464879

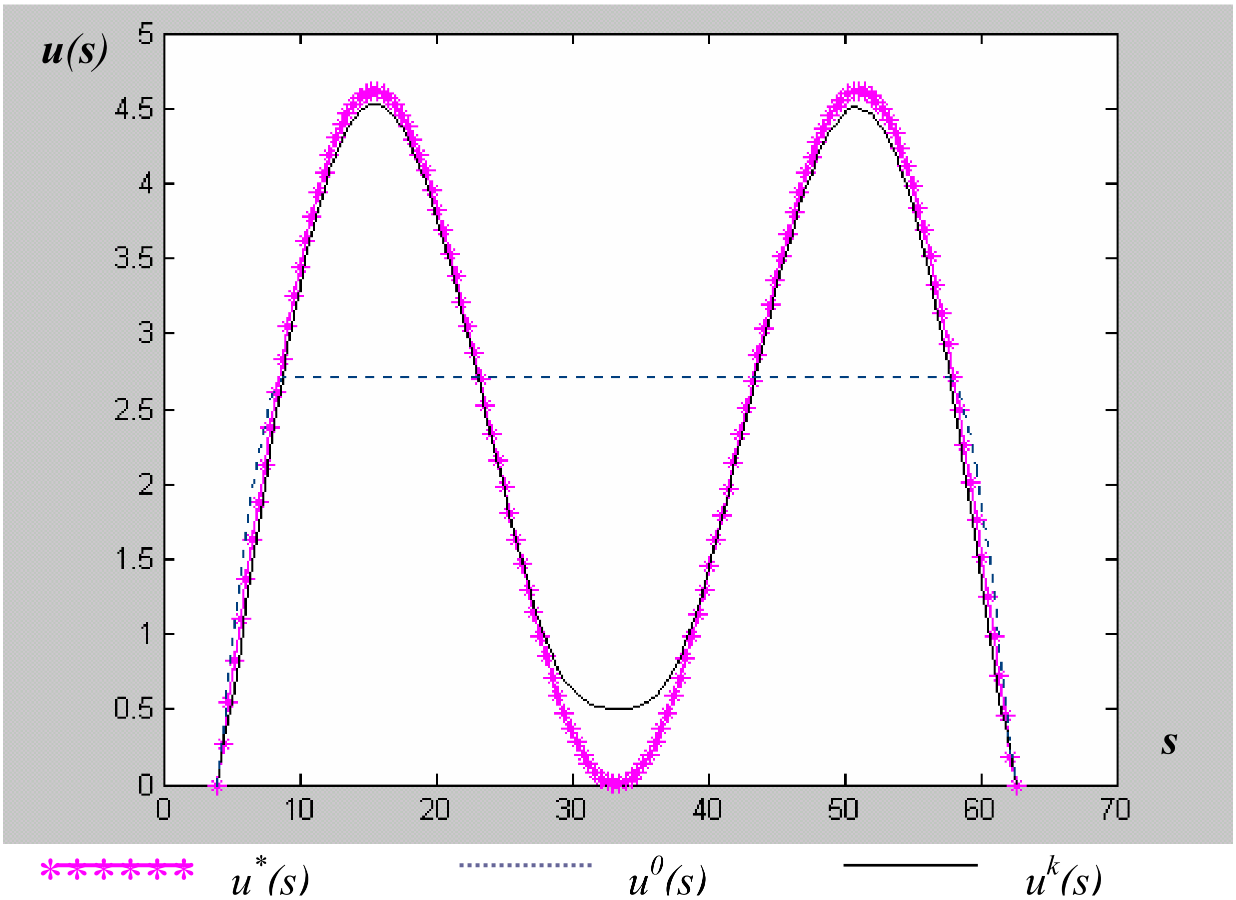


Рис. 3.8.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты, полученные в работе.

1) Впервые исследованы задачи оптимизации гиперболических систем, в которых начально-краевые условия определяются из управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе нестандартных формул приращения целевого функционала для двух частных случаев доказаны условия оптимальности вариационного типа. На их основе исходные задачи в сложных системах сведены к задачам оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Построены процедуры улучшения допустимых управлений нелокального характера.

2) Впервые получены неклассические условия оптимальности типа вариационного принципа максимума в задаче оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений при обычных конечномерных связях между компонентами вектора состояния, для которых ставятся начально-краевые условия, и управляющими воздействиями. Допустимые граничные и стартовые управления выбираются из класса ограниченных и измеримых функций. Необходимо отметить, что для этого класса задач несправедлив аналог классического условия оптимальности вида поточечного (конечномерного) принципа максимума Л.С.Понтрягина. Предложен сходящийся к выполнению доказанного

условия оптимальности итерационный метод.

3) Впервые исследованы задачи оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболических систем в классе гладких управляющих воздействий. На основе применения применения нестандартных вариаций, сохраняющих гладкость допустимых управлений, установлены необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления системой гиперболических уравнений, в которой управляемые граничные условия заданы в виде конечномерных связей общего вида; при этом гладкие управляющие воздействия стеснены поточечными (амплитудными) или интегральными ограничениями. Предложенный подход является достаточно универсальным и может быть распространен на целый ряд задач управления различными типами систем.

4) Разработаны итерационные методы решения задач оптимального управления полулинейными гиперболическими системами с гладкими граничными управлениями, доказаны теоремы сходимости предложенных алгоритмов, проведена их численная реализация для прикладных задач динамики популяций и восстановления начального профиля гравитационной волны по известным данным наблюдений в конечный момент времени. Проведена серия численных экспериментов, изучены особенности реализации предлагаемых методов.

Разработанные подходы могут быть распространены и на другие типы дифференциальных уравнений и систем. Использованный аппарат характеристик весьма существенен лишь при получении специфического условия оптимальности в главе 2. В остальных главах применение этого аппарата носит технический характер и служит, главным образом, для оценки возмущений состояния процесса, вызванных вариациями допустимых управлений.

Литература

1. Агранович М.С. Граничные условия для систем псевдодифференциальных операторов 1–го порядка // Успехи матем. наук. – 1969. – Т. 24, № 1. – С.61–125.

2. Антоник В.Г., Срочко В.А. К решению задач оптимального управления на основе методов линеаризации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1992. – Т. 32, № 7. – С.979–991.

3. Антоник В.Г., Срочко В.А. Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1998. – Т. 38, № 4. – С.564–572.

4. Аргучинцев А.В. К поиску оптимальных граничных управлений в двумерных полулинейных гиперболических уравнениях // Модели и методы исследования операций. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. – С.50–58.

5. Аргучинцев А.В. Неклассическое условие оптимальности в задаче управления граничными условиями полулинейной гиперболической системы // Изв. вузов. Математика.– 1994.– № 1.– С. 3-11.

6. Аргучинцев А.В. Решение задачи оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболической системы на осно-

ве точных формул приращения // Изв. вузов. Математика.– 2002.– № 12.– С. 23-29.

7. Аргучинцев А.В. Неклассическое условие оптимальности в задаче управления популяцией, распределенной по возрасту // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2003. – Т.43, № 11. – С.1669-1675.

8. Аргучинцев А.В. Оптимизация гиперболических систем с интегральными ограничениями на граничные управления // Изв. вузов. Математика.– 2004.– № 1.– С. 10-17.

9. Аргучинцев А.В. Оптимизация гиперболических систем с управляемыми начально-краевыми условиями в виде дифференциальных связей // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2004. – Т. 44, № 2. – С.285-294.

10. Аргучинцев А.В. Оптимальное управление начально-краевыми условиями гиперболических систем первого порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – №5. – С.42-48.

11. Аргучинцев А.В., Васильев О.В. Итерационные процессы принципа максимума и их модификации в системах с распределенными параметрами // Дифференц. уравнения. - 1996. – Т. 32, № 6. – С.797-803.

12. Аргучинцев А.В., Крутикова О.А. Оптимизация полулинейных гиперболических систем с гладкими граничными управлениями // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 2. – С.3-12.

13. Аргучинцев А.В., Терлецкий В.А. К решению обратной проблемы цунами в рамках двумерной модели методами оптимального управления // Исследования цунами.– 1990.– № 4.– С.52-57.

14. Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А. Необходимое условие в оптимальном управлении. – М.: Наука, 1990. – 319 с.

15. Баев А.В., Солтан И.Е. Обратная задача прогнозирования неоднородной среды по данным вертикально-сейсмического профилирования // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1997. – Т. 37, № 6. – С.723-732.

16. Батурин В.А., Лемперт А.А. Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления // Вычислительные технологии. – 2003. – Т.8. – С.103-108.

17. Батурин В.А., Урбанович Д.Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1997. –175 с.

18. Блохинов Ю.В. Качественное исследование модели динамики популяции, распределенной по возрасту и жизненности // Моделирование процессов экологического развития. Вып. 2.– М.: ВНИИ системных исследований, 1982. – С.64-69.

19. Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. Геометрические методы в вариационных задачах. – М.: Магистр, 1998. – 658 с.

20. Бокмельдер Е.П., Дыхта В.А. К теории принципа максимума для управляемых систем гиперболического типа // Теоретические и прикладные вопросы оптимального управления. – Новосибирск, 1985. – С.41-58.

21. Бокмельдер Е.П., Дыхта В.А. Принцип максимума для полулинейных гиперболических систем при функциональных ограничениях //

Дифференциальные уравнения и численные методы. – Новосибирск, 1986. – С.200-207.

22. Бубнов В.А., Соловьев И.А. Об использовании гиперболического уравнения в теории теплопроводности // Инженерно-физ. журнал. – 1977. – Т. XXXIII, № 6. – С.1131–1135.

23. Бурдуковская А.В., Васильев О.В. Оптимизация систем канонических гиперболических уравнений с гладкими ограниченными управлениями // Журн. вычислит. математики и мат. физики – 2000. – Т.40, № 1. – С. 43-53.

24. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 474 с.

25. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.

26. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М.: Наука, 1977. – 624 с.

27. Васильев О.В. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем с распределенными параметрами // Прикладная математика. – Новосибирск, 1978. – С.109–138.

28. Васильев О.В. Об одном алгоритме оптимизации в системах Гурса–Дарбу, основанном на принципе максимума // Проблемы оптимального управления. – Минск, 1981. – С.264–277.

29. Васильев О.В., Аргучинцев А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. - М.: Физматлит, 1999. - 208 с.

30. Васильев О.В., Аргучинцев А.В., Терлецкий В.А. Методы оптимизации систем с сосредоточенными и распределенными параметрами,

основанные на допустимых вариациях // Труды 12 - й Байкальской межд. конф. "Методы оптимизации и их приложения". Пленарные доклады. – Иркутск, 2001. – С.52–68.

31. Васильев О.В., Надежкина Н.В. Об одном классе обратных задач оптимального управления // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 3. – С.14-20.

32. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. Оптимальное управление. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 151 с.

33. Васильев О.В., Терлецкий В.А. Итерационные процессы решения задач оптимального управления в системах с сосредоточенными и распределенными параметрами, основанные на принципе максимума Л.С.Понтрягина // Оптимизация: Модели. Методы. Решения. – Новосибирск, 1992. – С.35-54.

34. Васильев О.В., Тятюшкин А.И. Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1981. – Т. 21, № 6. – С.1376-1384.

35. Васильев С.Н. От классических задач регулирования к интеллектному управлению. I // Изв. АН. Теория и системы управления. – 2001. – № 1. – С.5–22.

36. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

37. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал, 2002. – 824 с.

38. Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления – М.: Изд-во Моск.ун-та, 1989. – 142 с.

39. Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М. Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнения колебания струны // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл.математика и кибернетика. - 1993. – № 3. – С.8-15.

40. Васницкий Л.И., Милосердова И.В. Оптимальный гаситель продольных колебаний // Прикл. математика и механика. – 1997. – Т. 61, № 3. – С.537–540.

41. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1961. – Т. 61. – 158 с.

42. Вольцингер Н.Е. Длинные волны на мелкой воде. – Л.: Гидрометеоиздат, 1985. – 160 с.

43. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 508 с.

44. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 392 с.

45. Голубь Н.Н. Необходимые условия оптимальности для многомерных распределенных систем, содержащих звенья с сосредоточенными параметрами // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 10. – С.1878–1881.

46. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. Уравнения с частными производными первого порядка. – М.: Изд-во ЦПИ при мех.-матем. фак-те МГУ, 1999. – 96 с.

47. Громыко Г.Ф. Об одном разностном методе решения граничной обратной задачи теплопроводности // Дифференц. уравнения. - 1994. – Т. 30, № 7. – С.1194–1201.

48. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

49. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 288 с.

50. Гурман В.И., Знаменская Л.Е. Управление колебаниями при ограниченном ресурсе управления // Изв. АН. Теория и системы управления. – 2002. – № 1. – С.41–49.

51. Денисов А.М. Задача определения нелинейного коэффициента системы уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 7. – С.926–934.

52. Дикусар В.В. Теоремы существования и единственности оптимального управления для канонической задачи Дубовицкого–Милютина // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 33, № 11. – С.1484–1489.

53. Дикусар В.В., Милютин А.А. Качественные и численные методы в принципе максимума. – М.: Наука, 1989. – 144 с.

54. Динамическая теория биологических популяций / Под ред. Р.А.Полуэктова. – М.: Наука, 1974.

55. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1965. – Т. 5, № 3. – С.395-453.

56. Дыхта В.А. Вариационный принцип максимума для классических задач оптимального управления // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 4. – С.47-54.

57. Дыхта В.А. Неравенство Ляпунова-Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики и ее приложения. – М.: ВИНИТИ. – 2003. – С.32-64.

58. Дыхта В.А., Антипина Н.В. Линейные функции Ляпунова-Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 12. – С.11-22.

59. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 256 с.

60. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., 1982. – 432 с.

61. Евтушенко Ю.Г., Засухина Е.С., Зубов В.И. О численном подходе к оптимизации решения задачи Бюргерса с помощью граничных условий // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1997. – Т. 37, № 12. – С. 1449–1458.

62. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в распределенных объектах // Прикл. математика и механика. – 1963. – № 4. – С.688–696.

63. Егоров А.И. Необходимые условия оптимальности в банаховых пространствах // Матем. сборник. – 1964. – Т. 64(106), № 1. – С.79–101.

64. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – Т. 29, № 6. – С.1205–1256.

65. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

66. Егоров А.И. Управление упругими колебаниями // ДАН УССР. Сер. А. – 1986. – № 5. – С. 60–63.

67. Егоров А.И. Уравнения Риккати. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

68. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями (обзор) // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2000. – № 5(2). – С.249-257.

69. Егоров А.И., Рафатов Р.Р. Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии. – Фрунзе: Изд-во Илим, 1990. – 377 с.

70. Забелло Л.Е. Об условиях оптимальности в нелинейных инерционных управляемых системах с запаздыванием // Дифференц. уравнения – 1990.– Т. 26, № 8.– С.1309-1315.

71. Забелло Л.Е. Необходимое условие оптимальности типа равенства для систем с запаздыванием и интегральными ограничениями на управление // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 10. – С.1429.

72. Забелло Л.Е. Об условиях оптимальности в нелинейных инерционных управляемых системах с запаздыванием // Дифференц. уравнения – 1990.– Т. 26, № 8.– С.1309-1315.

73. Захарченко В.С., Срочко В.А. Метод приращений для решения квадратичных задач оптимального управления //Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 6. – С.145–154.

74. Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т . 35, № 12. – С.1640-1659.

75. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах // Докл. РАН. – 1999. – Т. 369, № 5. – С.592-596.

76. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах за произвольный промежуток времени // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 11. – С.1517-1534.

77. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний струны на двух концах при условии существования конечной энергии // Докл. РАН. –2001. – Т. 376, № 3. – С.295-299.

78. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний струны на одном ее конце при закрепленном втором конце при условии существования конечной энергии // Докл. РАН. – 2001. – Т. 378, № 6. – С.743-747.

79. Ильин В.А. Граничное управление сферически симметричными колебаниями трехмерного шара // Труды Матем. ин-та РАН. – 2001. – Т. 232. – С.144-155.

80. Ильин В.А., Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса //Дифференц. уравнения. – 1999.– Т. 35, № 5. – С.692-704.

81. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Расширение вариационных задач // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1968. – Т 18. – С. 187–246.

82. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

83. Карлыханов Н.Г. Построение оптимальных многодиагональных методов решения задач переноса излучения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1997. – Т. 37, № 4. – С.494–498.

84. Калинин А.И., Кириллова Ф.М. Асимптотическая оптимизация линейных динамических систем в классе гладких ограниченных управлений // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т.34, № 2. – С.175-183.

85. Капустян В.Е. Прямой метод решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления процессом переноса частиц // Дифференц. уравнения. – 1992. - Т. 28, № 7. – С.1230–1242.

86. Капустян В.Е. Оптимальное ограниченное управление сингулярно возмущенными системами с распределенными параметрами: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Киев, 1994. -35 с.

87. Кирин Н.Е. Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та. – 1975. – 160 с.

88. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. – М.: Мир, 1975. – 157 с.

89. Кружков С.Н. Нелинейные уравнения с частными производными (лекции). Часть 2. - М.: Изд-во МГУ, 1970. – 133 с.

90. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1962. – Т. 2, № 6. – С.1132-1139.

91. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1972. – Т. 11, № 1. – С.14-34.

92. Кулиев Г.Ф., Гасанов К.К. Необходимые условия оптимальности для некоторых систем с распределенными параметрами и управлением в коэффициентах при старших производных // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 6. – С. 1028–1036.

93. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.

94. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Оптимальное управление гиперболической системой на симплексе // Изв. АН. Теория и системы управления. – 2003. – № 2. – С.69–75.

95. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964.– 830 с.

96. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1982. – 88 с.

97. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 272 с.

98. Летников А.В. Курсъ варіаціоннаго исчисленія. – М.: Императорское Московское техническое училище, 1891. – 152 с.

99. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

100. Лионс Ж.-Л. Некоторые вопросы оптимального управления распределенными системами // Успехи матем. наук. – 1985.– Т. 40, № 4. – С.55-68.

101. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. – М.: Наука, 1987. – 368 с.

102. Лукьянов А.Т., Неронов В.С. Об оптимальном управлении одной параболически-гиперболической системой //Изв. АН Казахской ССР. – 1976. – № 3. – С.77-80.

103. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

104. Любушин А.А. Модификации и исследование сходимости метода последовательных приближений для задач оптимального управления // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1979. – Т. 19, № 6. – С.1414–1421.

105. Любушин А.А. О применении модификации метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1982. – Т. 22, № 1. – С.30–35.

106. Любушин А.А., Черноусько Ф.Л. Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1983. – № 2. – С.147–159.

107. Мансимов К.Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче с распределенными параметрами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2001. – Т. 41, № 10. – С.1505–1520.

108. Маркин Е.А., Стрекаловский А.С. О существовании , единственности и устойчивости решения одного класса динамических систем, описывающих химические процессы // Вестн. МГУ. Сер. вычисл. матем. и кибернетика. – 1977. – № 4. – С.3–11.

109. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. – М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1992. – 336 с.

110. Матвеев А.С. Обобщенные решения полулинейной системы уравнений в частных производных гиперболического типа и задачи управления // Деп. в ВИНИТИ 23.07.90, № 2983-30. – 39 с.

111. Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. - СПб: Издательство С.-Петербургского университета, 2003. - 540 с.

112. Матросов В.М., Васильев С.Н., Москаленко А.И. и др. Нелинейная теория управления. – М.: Физматлит, 2003. - 352 с.

113. Методы решения задач математического программирования и оптимального управления / Л.Т.Ащепков, Б.И.Белов, В.П.Булатов и др. – Новосибирск: Наука, 1984. – 233 с.

114. Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения / В.А.Батурин, В.А.Дыхта, А.И.Москаленко и др. – Новосибирск: Наука, 1990. – 190 с.

115. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977. – 504 с.

116. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 360 с.

117. Морозов С.Ф. Начально-краевая задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Краевые задачи. – Пермь, 1989.– С.141-149.

118. Морозов С.Ф., Сумин В.И. Об одной задаче оптимального управления нестационарными процессами переноса // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т . 8, № 12. – С.2235-2243.

119. Морозов С.Ф., Сумин В.И. О задачах быстродействия в теории оптимального управления процессами переноса // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 4. – С.726-740.

120. Морозов С.Ф., Сумин В.И. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение нестационарного переноса // Матем. заметки. – 1977. – Т. 21, № 5. – С.665-676.

121. Москаленко А.И. Методы нелинейных отображений в оптимальном управлении. – Новосибирск: Наука, 1983. – 222 с.

122. Москаленко А.И. Оптимальное управление моделями экономической динамики. – Новосибирск: Наука, 1999. – 220 с.

123. Москаленко А.И., Москаленко Р.А., Хамитов Г.П. Моделирование возрастной структуры производственных фондов с точки зрения задач управления экономическими системами // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2000. – № 5(2). – С.418–427.

124. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жестко-пластических сред. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 208 с.

125. Неронов В.С., Евсеев О.Н. Об оптимальном управлении неустановившимся режимом трубопровода // Численные и аналоговые методы решения краевых задач. – Алма-Ата, 1989. – С.57-62.

126. Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. – Горький: Изд-во Горьковского гос. ун-та. – 1986. – 87 с.

127. Новоженов М.М., Сумин М.И. Об одном подходе к численному решению задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // Исследования по теории функций. – Горький, 1987. – С.76-93. – Деп. 18.11.87, № 8122.

128. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками. – Л.: Изд- во Ленинград. ун-та, 1980.– 228 с.

129. Овсянников Д.А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1990. – 310 с.

130. Овсянников Д.А., Дривотин О.И. Моделирование интенсивных пучков заряженных частиц. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. – 176 с.

131. Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 237 с.

132. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф.Кротова. – М.: Высшая школа, 1990. – 430 с.

133. Островский Г.М., Волин Ю.М. Методы оптимизации химических реакторов. – М.: Химия, 1967. – 248 с.

134. Островский Г.М., Волин Ю.М. Моделирование сложных химико-технологических систем. – М.: Химия, 1975. – 311 с.

135. Панов Е.Ю. О мерозначных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Изв. АН. Сер. математическая. – 1996. – Т. 60, № 2. – С.107–148.

136. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частыми производными. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1953. – 360 с.

137. Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А. Динамика ионизованного излучающего газа. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 309 с.

138. Плотников В.И. Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1972. – Т. 36, № 3. – С.652- 679.

139. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сиб. мат. журн. – 1981. – Т. 22, № 6. – С.142- 161.

140. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., 1983. – 392 с.

141. Потапов М.М. Обобщенное решение смешанной задачи для полулинейной гиперболической системы первого порядка // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 10. – С.1826 –1828.

142. Потапов М.М. Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для гиперболического уравнения с краевыми условия-

ми второго и третьего рода // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. математика и кибернетика. – 1996. – № 2. – С.35-41.

143. Рево П.А. Волновое уравнение с граничным управлением на левом конце при свободном правом конце и задача о полном успокоении колебательного процесса // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 6. – С.806-815.

144. Рево П.А., Чабакаури Г.Д. Граничное управление процессом колебаний на левом конце при свободном правом конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Докл. РАН. – 2001. – Т. 379, № 4. – С.459-462.

145. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 686 с.

146. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем. I // Автоматика и телемеханика. – 1959. – Т. 20, № 10. – С.1320–1334.

147. Рокафеллар Р. Интегралы, являющиеся выпуклыми функционалами, II // Математическая экономика / Под ред. Б.С.Митягина. – М.: Мир, 1974. – С.170–204.

148. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 479 с.

149. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука.–1988. –336 с.

150. Соколов А.В. Об одном подходе к описанию рождаемости в демографических моделях // Моделирование процессов экологического

развития. Вып. 2. – М.: ВНИИ системных исследований, 1982. – С.77-85.

151. Срочко В.А. Принцип максимума для одного класса систем с распределенными параметрами // Вопросы устойчивости и оптимизации динамических систем. – Иркутск, 1983. – С.170-182.

152. Срочко В.А. Условия оптимальности типа принципа максимума в системах Гурса-Дарбу // Сиб. мат. журн. – 1984. – Т. 25, № 1. – С.126-133.

153. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1989. – 160 с.

154. Срочко В.А. Метод квадратичной фазовой аппроксимации для решения задач оптимального управления // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 12. – С.81–88.

155. Срочко В.А. Методы линейно-квадратичных аппроксимаций для решения задач оптимального управления // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск: ИрВЦ СО РАН, 1995. – № 1. – С.110–135.

156. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.

157. Срочко В.А. Квадратично-игольчатая аппроксимация и методы улучшения в задачах оптимального управления // Иркутский университет. Серия: Оптимизация и управление. Вып.3. – Иркутск, 2001. – 28с.

158. Срочко В.А., Душутина С.Н., Пудалова Е.И. Регуляризация принципа максимума и методов улучшения в квадратичных задачах оп-

тимального управления // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 12. – С.82–92.

159. Стрекаловский А.С. Об условиях оптимальности в гладкой задаче оптимального управления в банаховом пространстве // Численные методы оптимизации (прикладная математика). – Иркутск: Сибирский энергетический институт СО АН СССР, 1977. – С.76–88.

160. Стрекаловский А.С. К оптимальности по векторному критерию систем управления, описываемых гиперболическим уравнением общего вида // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. университета, 1979. – С.35–55.

161. Стрекаловский А.С. К оптимальности по векторному критерию одного класса динамических систем, описывающих химические процессы // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. университета, 1980. – С.186–203.

162. Стрекаловский А.С. К теореме существования решения для одного класса распределенных систем // Вопросы устойчивости и оптимизации динамических систем. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. университета, 1983. – С.119–128.

163. Стрекаловский А.С. Об экстремальных задачах с d.c.-ограничениями // Журн. вычислит. математики и мат.физики. – 2001. – Т. 41, № 12. – С.1833–1843.

164. Стрекаловский А.С. О минимизации разности выпуклых функций на допустимом множестве // Журн. вычислит. математики и мат.физики. – 2003. – Т. 43, № 1. – С.49–59.

165. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2003. – 356 с.

166. Стрекаловский А.С., Кузнецова А.А. О сходимости алгоритма глобального поиска в задаче выпуклой максимизации на допустимом множестве // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С.74–81.

167. Сумин В.И. Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 305, № 5. – С.1056-1059.

168. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть 1. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та. – 1992. – 110 с.

169. Сумин В.И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журн. вычислит. математики и мат.физики. – 1990. – Т.30, № 1. – С.2–21.

170. Сумин В.И. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 12. – С.2097–2109.

171. Сумин М.И. Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: минимизирующие последовательности, функция значений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1997. – Т. 37, № 1. - С.23–41.

172. Сумин М.И. Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: свойства нормальности, субградиентный двой-

ственный метод // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1997. – Т. 37, № 2. – С. 162–178.

173. Сумин М.И. Принцип максимума в теории субоптимального управления распределенными системами с операторными ограничениями в гильбертовом пространстве // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – М.: ВИНИТИ, 1999. –Т.66. –С.193–235.

174. Сумин М.И. Математическая теория субоптимального управления распределенными системами: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Нижний Новгород, 2000. – 36 с.

175. Темам Р. Математические задачи теории пластичности. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 288 с.

176. Терлецкий В.А. К оптимизации полулинейных гиперболических систем первого порядка с начальным условием Коши // Управляемые системы. – Новосибирск, 1982. – № 22. – С.70-79.

177. Терлецкий В.А. К обоснованию сходимости одной модификации метода последовательных приближений, основанного на принципе максимума // Методы оптимизации и их приложения. – Иркутск, 1983. – С.58–69.

178. Терлецкий В.А. Вариационный принцип максимума в управляемых системах одномерных гиперболических уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С.82–90.

179. Терлецкий В.А. Обобщенное решение многомерных полулинейных гиперболических систем // Изв. вузов. Математика. – 2001. – №12. – С.68-76.

180. Терлецкий В.А. Обобщенное решение гиперболических систем одномерных полулинейных дифференциальных уравнений. – Иркутск: Иркутский гос. университет. Сер. Оптимизация и управление. Вып. 11. – 2004. – 48 с.

181. Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. I // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 393–403.

182. Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 529–537.

183. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

184. Толстоногов А.А. Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка // Матем. сборник. – 1999. – Т. 190, № 11. – С.135–160.

185. Толстоногов А.А. Теорема существования оптимального управления в задаче Гурса-Дарбу без предположения выпуклости // Изв. АН. Сер. математическая. – 2000. – Т. 64, № 4. – С.163–181.

186. Толстоногов А.А. Существование оптимального управления без предположения выпуклости в эволюционной системе первого порядка // Матем. сборник. – 2001. – Т. 192, № 9. – С.125–142.

187. Тятюшкин А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. – Новосибирск: Наука, 1992. - 193 с.

188. Тятюшкин А.И. Параллельные вычисления в задачах оптимального управления // Сиб. журн. вычислит. математики. – 2000. – Т. 3, № 2. - С.181-190.

189. Тятюшкин А.И. Многометодная технология для расчета оптимального управления // Изв. АН. Теория и системы управления. - 2003. – № 3. – С.59-67.

190. Условия экстремума и конструктивные методы решения в задачах оптимизации гиперболических систем / Е.П.Бокмельдер, В.А.Дыхта, А.И.Москаленко и др. – Новосибирск: ВО Наука. Сибирская издательская фирма, 1993.– 197 с.

191. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978. – 408 с.

192. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная книга, 1999.– 352 с.

193. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления // Итоги науки и техники. Математический анализ. – М.: ВИНИТИ, 1977. – Т. 14. – С.101–166.

194. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. - 400 с.

195. Якубович В.А. К абстрактной теории оптимального управления I. // Сиб. мат. журн.– 1977. – Т. 18, № 3. – С.685-707.

196. Якубович В.А. К абстрактной теории оптимального управления II. // Сиб. мат. журн.– 1978. – Т. 19, № 2. – С.436-480.

197. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974. – 488 с.

198. Ahmed N.U., Teo K.L. Optimal control of distributed parameter systems. – New York: Elsevier North Holland, Inc. – 1981. – 430 p.

199. Almeder C., Caulkins J.P., Feightinger G., Tragler G. Age-specific multi-stage drug initiation models: insights from considering heterogeneity // Bulletin on Narcotics. – 2001. – Vol. LIII. – P. 105–118.

200. Almeder C., Caulkins J.P., Feightinger G., Tragler G. An age-structured single-state drug initiation model-cycles of drug epidemics and optimal prevention programs //Socio-Economic Planning Sciences. – 2004. – Vol. 38, № 1. – P. 91–109.

201. Ammar Khodja F., Bader A. Stabilizability of systems of one-dimensional wave equations by one internal or boundary control force // SIAM J. Control Optim. – 2001. – Vol. 39, № 6. – P. 1833–1851.

202. Anita S. Optimal harvesting for nonlinear age dependent population dynamics // J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – Vol. 226. – P. 6–22.

203. Arino O. A nonlinear model for migrating species // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – Vol. 229. – P. 61–87.

204. Arguchintsev A.V. On optimization of hyperbolic systems with smooth controls and integral constraints // Proceedings of the 15th Triennial IFAC World Congress, July 2002. – Barcelona, Spain. – Paper No 2475. – P. 1-5.

205. Arguchintsev A., Vasiliev O. Inverse optimal control problems in ordinary and hyperbolic differential equations // Межд. конф. по про-

блемам управления. Том 1. - М.: Институт проблем управления РАН, 1999. - С. 104-105.

206. Arguchintsev A.V., Vasiliev O.V. Towards research of inverse problems of mathematical physics by optimal control methods // Stability and Control: Theory and Applications. – 2000. – Vol. 3, N 3. – P. 205-211.

207. Baker T.E., Polak E. On the optimal control of systems described by evolution equations // SIAM J. Control Optim. – 1994. – Vol. 32, № 1. – P. 224–260.

208. Barbu V., Ianelli M. Optimal control of population dynamics // J. Optim. Theory Appl. – 1999. – Vol. 102, № 1. – P. 1–14.

209. Basile N., Mininni M. An extension of the maximum principle for a class of optimal control problems in infinite–dimensional spaces // SIAM J. Control Optim. – 1990. – Vol. 28, № 5. – P. 1113–1135.

210. Betelu S., Gulliver R., Littman W. Boundary control of PDEs via curvature flows: the view from the boundary, II // Appl. Math. Optim. – 2002. – Vol. 46. – P. 167–178.

211. Borzi A., Ito K., Kunisch K. Optimal control formulation for determining optical flow // SIAM J. Sci. Comput. – 2002. – Vol. 24, № 3. – P. 818–847.

212. Bressan A., Coclite G.M. On the boundary control of systems of conservation laws // SIAM J. Control Optim. – 2002. – Vol. 41, № 2. – P. 607–622.

213. Brokate M. Pontryagin's principle for control problems in age-dependent population dynamics // Journ. Math. Biol. – 1985. – Vol. 23. – P.75-101.

214. Brokate M. Necessary optimality conditions for the control of semilinear hyperbolic boundary value problems // SIAM J. Control Optim. – 1987. – Vol. 25, № 5. – P.1353-1369.

215. Chan W.L., Guo B.Z. Optimal birth control of population dynamics // J. Math. Anal. Appl. – 1989.– Vol. 144. – P.532-552.

216. Chan W.L., Guo B.Z. Overtaking optimal control problem of age-dependent populations with infinite horizon // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – Vol. 150. – P.41-53.

217. Chawla S., Lenhart S.M. Application of optimal control theory to bioremediation //J. Comput. Appl. Math. – 2000. – Vol. 114. – P. 81–102.

218. Choo K.G., Teo K.L., Wu Z.S. On an optimal control problem involving first order hyperbolic systems with boundary controls //Numer. Funct. Anal. and Optim. – 1981-1982. –Vol. 4, № 2. – P.171-190.

219. Derzko N.A., Sethi S.P., Thompson G.L. Necessary and sufficient conditions for optimal control of quasilinear partial differential systems // J. Optim. Theory Appl. – 1984. – Vol. 43, № 1. – P. 89-101.

220. Dykta V.A., Bokmelder E.P. Optimization of hyperbolic systems with state constraints // Proceedings of the 10th IFAC World Congress. – Munich, Germany. – 1987. – Vol. 9. – P. 278–284.

221. Ekeland I. On the variational principle // J. Math. Anal. and Appl. – 1974. – Vol. 47. – P. 324–353.

222. Fattorini H.O. A unified theory of necessary conditions for nonlinear nonconvex systems // Appl. Math. Optim. – 1987. – Vol. 15. – P. 141–185.

223. Flores-Bazan F., Perrotta S. Nonconvex variational problems related to a hyperbolic equations // SIAM J. Control Optim. – 1999. – Vol. 37, № 6. – P. 1751–1766.

224. Feichtinger G., Gornov A.Yu., Bockmelder E.P. An approach to mathematical modelling of age-specific social and economic processes // Труды 12-й Байкальской междю конфю "Методы оптимизации и их приложения". Т.3. Математическая экономика. – Иркутск, 2001. – С. 216–221.

225. Feichtinger G., Tragler G., Veliov V. Optimality conditions for age-structured control systems // J. Math. Anal. and Appl. – 2003. – Vol. 228. – P. 47–68.

226. Friedrichs K.O. Symmetric positive linear differential equations //Comm. Pure Appl. Math. – 1958. – Vol. 11. – P. 333-418.

227. Gugat M. A Newton method for the computation of time-optimal boundary controls of one-dimensional vibrating systems // J. Comput. Appl. Math. – 2000. – Vol. 114. – P. 103–119.

228. Gugat M. Regularization of L^∞ optimal control problems for distributed parameter systems // Comput. Optim. Appl. – 2002. – Vol. 22. – P. 151–192.

229. Gundepudi P.K., Friedly J.C. Velocity control of hyperbolic partial differential equation systems with single characteristic variable //Chemical Engineering Science. – 1998. – Vol. 53, № 24. – P. 4055–4072.

230. Guo B.Z. On the boundary control of a hybrid systems with variable coefficients // J. Optim. Theory Appl. – 2002. – Vol. 114, № 2. – P. 373–395.

231. Honner M. Heat waves simulation// Comput. and Math. Appl. – 1999. – Vol. 38. – P. 233–243.

232. Ioslovich I., Gutman P.-O. A note on optimal smooth control determination when the control vector has the same dimension as the state vector // Вторая межд. конф. по проблемам управления. Избранные труды. Том 1. – М.: Институт проблем управления РАН, 2003. – С.126–130.

233. Lenhart S., Protopopescu V. Solving identification problems for the wave equations by optimal control methods // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. – 2002. – Vol. 225. – P. 221-232.

234. Li X., Yong J.. Optimal control theory for infinite dimensional systems. – Boston: Birkhäuser, 1995. – 352 p.

235. Markus M., Mizel V. Semilinear hereditary hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions, A // J. Math. Anal. and Appl. – 1980. – Vol. 76, № 2. – P.440–475.

236. Markus M., Mizel V. Semilinear hereditary hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions, B // J. Math. Anal. and Appl. – 1980. – Vol. 77, № 1. – P.1–19.

237. Mayne D.Q., Polak E. First order strong variation algorithms for optimal control // J.Optim.Theory Appl. – 1975. – Vol. 16, № 3-4. – P.277–301.

238. Mordukhovich B.S., Wang B. Necessary suboptimality and optimality conditions via variational principles // SIAM J. Control Optim. – 2002. – Vol. 41, № 2. – P. 623–640.

239. Mordukhovich B.S., Raymond J.-P. Dirichlet boundary control of hyperbolic equations in the presence of state constraints // Appl. Math. Optim. – 2004. – Vol. 49, № 2. – P. 145–157.

240. Ruan W., Clark M.E., Zhao M., Curcio A. A hyperbolic system of equations of blood flow in an arterial network // SIAM J. Appl. Math. – 2003. – Vol. 64, № 2. – P. 637–667.

241. Sarason L. On weak and strong solution of boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. – 1962. – Vol. 15. - P. 237-288.

242. Sethi S.P., Thomson G.L. Optimal control theory. Applications to management science. – Boston, 1981. – 370 p.

243. Shahrus S.M. Boundary control of the axially moving Kirchhoff string // Automatica. – 1998. – Vol. 34, № 10. – P. 1273–1277.

244. Slass J.V., Bruch J.C., Sadek I.S., Adali S. Maximum principle for optimal boundary control of vibrating structures with applications to beams //Dynamics and Control. – 1998. – Vol. 8. – P. 355–375.

245. Song J., Yu J.-U. Population control system. – New York: Springer-Verlag, 1987. – 320 p.

246. Strekalovsky A.S. On global maximum of a convex terminal functional in optimal control problems // J. Global Optimization. – 1995. – № 7. – P.75-91.

247. Suryanarayna M.B. Existence theorems for optimization problems concerning linear hyperbolic partial differential equations without

convexity conditions // J. Optim. Theory Appl. – 1976. – Vol. 19, № 1. – P. 47–61.

248. Teo K.L., Yeo L.T. On the computational methods of optimal control problems // Int. J. Systems Sci. – 1979. – Vol. 10, № 1. – P. 51–76.

249. Tzafestas S.G. Distributed-parameter and large-scale systems: a literature overview // 11-th IMACS World Congress Sci. Comput., Vol.4. – Amsterdam, 1986. – P.195-215.

250. Vasiliev O.V. Optimization methods. – Atlanta: World Federation Publishers Company INC, 1996. – 276 p.

251. Vasiliev O.V. On a method of inverse optimal control problems solving // Proceedings of the 2nd Asian Control Conference, July 22-25, 1997, Seoul. – Vol. 1. – P.465-467.

252. Winkin J., Dochain D., Ligarius P. Dynamical analysis of distributed parameter tubular reactors // Automatica. – 2000. – Vol. 36, № 10. – P. 349–361.

253. Wolfersdorf L. A counterexample to the maximum principle of Pontryagin for a class of distributed parameter systems // Z. Angew. Math. and Mech. – 1980. – Vol. 6, № 4.– P.204.