Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах

М. В. Фалалеев

При исследовании колебательных процессов в средах с памятью принято использовать аппарат интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, поскольку он дает возможность усредненно учитывать при моделировании этих процессов всю предысторию наблюдений. Одним из методов решения таких задач является их редукция к уравнениям в банаховых пространствах. Данная заметка посвящена исследованию задачи Коши

$$Bu^{(N)}(t) - Au(t) - \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t) \qquad (1)$$

$$u(0) = u_0, \;\; \dot{u}(0) = u_1, \;\; \ldots, \; u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \qquad (2)$$

где $B, A, k(t)$ – замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из одного банахова пространства в другое банахово пространство. Ранее в цикле работ (см. работу [5] и библиографию к ней) был исследован случай, когда ядро интегрального оператора $k(t)$ является линейной комбинацией операторов A и B. Общий случай ядра $k(t)$ когда порядок дифференциального оператора $N \geq 2$ пока остается не исследованным. В докладе представлены некоторые результаты, полученные в этом направлении.

Постановка задачи. Пусть далее в уравнении (1) A, B, $k(t)$ - замкнутые линейные операторы действующие из E_1 в E_2, E_1, E_2 - банаховы пространства, $D(B) \subset D(A), D(k(t)) \equiv D(k)$ – не зависит от t, $\overline{D(k)} = \overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, $\overline{R(B)} = R(B)$, оператор-функция $k(t)$ и функция $f(t)$ достаточно гладкие.

Предположим, что оператор B фредгольмов [1], т.е. $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n \geq 1$, $\{\varphi_i\} \in N(B) \subset E_1$ – базис ядра оператора B, $\{\psi_i\} \in N(B^*) \subset E_2^*$

– базис ядра сопряженного оператора, $\{z_i\} \in E_2$, и $\{\gamma_i\} \in E_1^*$ – соответствующие им биортогональные системы элементов и функционалов [1], здесь $i = 1, \dots, n$. В этих предположениях непрерывно обратим оператор $\tilde{B} = B + \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$ [1] и обратный к нему, называемый оператором Треногина-Шмидта, принято обозначать $\Gamma = \tilde{B}^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$. справедливы равенства [1] $\Gamma B = I - P$ и $B\Gamma = I - Q$, где

$$P = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i, \quad Q = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i,$$

проекторы в E_1 и E_2 соответственно.

Так же далее будем предполагать, что существует полный A-жорданов набор оператора B [1, 3], т.е. существует система элементов $\{\varphi_i^{(j)}\} \in E_1$, $\varphi_i^{(1)} = \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i$ удовлетворяющих уравнениям $B\varphi_i^{(j)} = A\varphi_i^{(j-1)}$, причем выстроить эту систему можно таким образом, что $\langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$, т.е. $z_i = A\varphi_i^{(p_i)}$. В этом случае оператор B^* будет иметь полный A^*-жорданов набор, т.е. существует система функционалов $\{\psi_i^{(j)}\} \in E_2^*$, $\psi_i^{(1)} = \psi_i$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i$ удовлетворяющих уравнениям $B^*\psi_i^{(j)} = A^*\psi_i^{(j-1)}$ и условиям $\langle \varphi_i, A^*\psi_j^{(p_j)} \rangle = \delta_{ij}$, т.е. $\gamma_i = A^*\psi_i^{(p_i)}$. Присоединенные элементы $\varphi_i^{(j)}$ и функционалы $\psi_i^{(j)}$ можно восстанавливать по (циклическим) формулам $\varphi_i^{(j)} = (\Gamma A)^{j-1}\varphi_i^{(1)}$, $\varphi_i^{(1)} = (\Gamma A)^{p_i}\varphi_i^{(1)}$ и $\psi_i^{(j)} = (\Gamma^* A^*)^{j-1}\psi_i^{(1)}$, $\psi_i^{(1)} = (\Gamma^* A^*)^{p_i}\psi_i^{(1)}$. В дальнейшем потребуется проектор

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$$

и оператор-функция

$$\mathcal{U}_N(A\Gamma t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A\Gamma)^{i-1} \frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!},$$

очевидно $\mathcal{U}_2(A\Gamma t) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{A\Gamma}t}{\sqrt{A\Gamma}}$, здесь $\sqrt{A\Gamma}$ – формальный символ.

Пусть $p = \max p_i$, тогда если $p > 1$, относительно оператор функции $k(t)$ будем предполагать выполненным условие

A) $k^{(\nu)}(0) = 0, \ \ \nu = 0, 1, \ldots, N(p-1) - 1.$

Известно, что задача Коши (1)–(2) с необратимым (в нашем случае фредгольмовым) оператором при старшей производной разрешима в классе $C^N(t \geq 0, E_1)$ не при любом соотношении начальных условий (2) и правой части уравнения (1). Поэтому будем строить решение задачи (1)–(2) в классе [4] $K'_+(E_1)$ – распределений с ограниченным слева носителем. В пространстве $K'_+(E_1)$ задачу (1)–(2) можно переписать в сверточном виде

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \tilde{u}(t) = g_N(t) \qquad (3)$$

где

$$g_N(t) = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) +$$
$$+ \ldots + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t),$$

здесь $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $\theta(t)$ – функция Хевисайда [2]. Эффективным методом решения сверточного уравнения (3) является использование конструкции фундаментальной оператор-функции (фундаментального решения) [4, 6]. Фундаментальной оператор-функцией интегро-дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t))$ называется обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ удовлетворяющая следующим двум сверточным уравнениям

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * \tilde{v}(t) = \tilde{v}(t) \quad \forall \tilde{v}(t) \in K'_+(E_2) \qquad (4)$$

$$\mathcal{E}_N(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \tilde{u}(t) = \tilde{u}(t) \quad \forall \tilde{u}(t) \in K'_+(E_1) \qquad (5)$$

Замечание 1. Пространство обобщенных функций с ограниченным слева носителем $K'_+(E_1)$ является естественным для построения обобщенных решений задачи Коши (1)–(2), т.к. до момента $t = 0$ процесс, описываемый уравнением (1), находится в состоянии покоя, а кроме этого в $K'_+(E_1)$ операция свертки существует и ассоциативна, что далее будет существенно использоваться.

Равенство (4) означает, что свертка $\mathcal{E}_N(t) * g_N(t) \in K'_+(E_1)$ является решением уравнения (3), а равенство (5) означает что оно единственное.

Фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора. Ранее в работах [4, 6] была доказана следующая

Теорема 1. *Если фредгольмов оператор B имеет полный A-жорданов набор, то дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t))$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \Gamma\mathcal{U}_N(A\Gamma t)\left[I - \tilde{Q}\right]\theta(t) -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(N\cdot k)}(t)\right].$$

Если в условиях теоремы 1 выполнено дополнительно условие **A)**, то существует (регулярная) оператор-функция

$$\mathcal{H}(t)\theta(t) = k(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \left(\int\limits_0^t k(t-s)\Gamma\mathcal{U}_N(A\Gamma s)\left[I - \tilde{Q}\right] -\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle k^{(N\cdot k)}(t)\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\right]\right)\theta(t),$$

для которой справедливо (очевидное) сверточное равенство

$$\mathcal{H}(t)\theta(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t)) = k(t)\theta(t).$$

Обозначим через $\mathcal{R}(t)$ резольвенту ядра $\mathcal{H}(t)$, тогда справедлива

Теорема 2. *Если фредгольмов оператор B имеет полный A-жорданов набор и выполнено условие* **A)**, *то интегро-дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t))$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида $\mathcal{E}_N(t) = \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t))$*

Замечание 2. Условие **A)** в теореме 2 можно заменить следующим: для любого $i = 1,\ldots,n$, для которого длина A-жордановой цепочки $p_i > 1$, выполняется равенство $k^{(\nu)}(0)\varphi_i^{(p_i-k+1-j)} = 0,\ \nu = 0,1,\ldots,N\cdot k-1,\ k = 1,\ldots,p_i-1,\ j = 1,\ldots,p_i-k$.

Замечание 3. В условиях теоремы 2 представление для фундаментальной оператор-функции $\mathcal{E}_N(t)$ можно переписать в виде $\mathcal{E}_N(t) = (I\delta(t) + \tilde{\mathcal{R}}(t)\theta(t)) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t)$, здесь $\tilde{\mathcal{R}}(t)$ – резольвента ядра $\tilde{\mathcal{H}}(t) = \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * k(t)\theta(t)$.

Очевидно наиболее компактный вид фундаментальная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ будет иметь если $N = 2$ и $p = 1$. В этом случае условие **A)** в формулировке теоремы 2 отсутствует, а формула для фундаментальной оператор-функции выглядит следующим образом

$$\mathcal{E}_2(t) = \left(I\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{\mathcal{H}}(t)\theta(t)\right)^k\right) * \tilde{\mathcal{E}}_2(t),$$

здесьс под степенью $\left(\tilde{\mathcal{H}}(t)\theta(t)\right)^k$ понимается повторное ядро,

$$\tilde{\mathcal{E}}_2(t) = \Gamma\frac{\operatorname{sh}\sqrt{A\Gamma}t}{\sqrt{A\Gamma}}\left[I - \tilde{Q}\right]\theta(t) - T\delta(t),$$

и $T = \sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,\psi_i\rangle\varphi_i \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ – конечномерный оператор. Обобщенным решением задачи Коши (1)–(2) при $N = 2$ является регулярная обобщенная функция

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_2(t) * g_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(t), \tag{6}$$

здесь

$$\tilde{u}_0(t) = \tilde{\mathcal{E}}_2(t) * g_2(t), \quad g_2(t) = f(t)\theta(t) + Bu_1\delta(t) + Bu_0\delta'(t),$$

$$\tilde{u}_1(t) = \tilde{\mathcal{H}}(t)\theta(t) * \tilde{u}_0(t), \quad \tilde{u}_k(t) = \tilde{\mathcal{H}}(t)\theta(t) * \tilde{u}_{k-1}(t),$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(t) = \tilde{\mathcal{E}}_2(t) * k(t)\theta(t) = \Gamma\frac{\operatorname{sh}\sqrt{A\Gamma}t}{\sqrt{A\Gamma}}\left[I - \tilde{Q}\right]\theta(t) * k(t)\theta(t) - Tk(t)\theta(t).$$

Непосредственными вычислениями находим:

$$\tilde{u}_0(t) = \Gamma\frac{\operatorname{sh}\sqrt{A\Gamma}t}{\sqrt{A\Gamma}}\left[I - \tilde{Q}\right]\theta(t) * f(t)\theta(t) - Tf(t)\theta(t) +$$

$$+\Gamma\frac{\operatorname{sh}\sqrt{A\Gamma}t}{\sqrt{A\Gamma}}Bu_1\theta(t) + \Gamma\operatorname{ch}\sqrt{A\Gamma}tBu_0\theta(t),$$

$$\tilde{u}_0(0) = \Gamma Bu_0 - Tf(0) = u_0 - \sum_{i=1}^{n}\langle Au_0 + f(0), \psi_i\rangle\varphi_i,$$

$$\dot{\tilde{u}}_0(0) = \Gamma B u_1 - Tf'(0) = u_1 - \sum_{i=1}^{n} \langle Au_1 + f'(0), \psi_i \rangle \varphi_i,$$

$$\tilde{u}_1(t) = \tilde{\mathcal{H}}(t)\theta(t) * \tilde{u}_0(t), \quad \tilde{u}_1(0) = 0,$$

$$\dot{\tilde{u}}_1(0) = \tilde{\mathcal{H}}(0)\tilde{u}_0(0) = -Tk(0)\tilde{u}_0(0) = -\sum_{i=1}^{n} \left\langle k(0)\tilde{u}_0(0), \psi_i \right\rangle \varphi_i,$$

$$\tilde{u}_k(0) = \dot{\tilde{u}}_k(0) = 0, \quad k \geq 2.$$

Таким образом

$$\tilde{u}|_{t=0} = u_0 - \sum_{i=1}^{n} \langle Au_0 + f(0), \psi_i \rangle \varphi_i,$$

$$\dot{\tilde{u}}|_{t=0} = u_1 - \sum_{i=1}^{n} \langle Au_1 + f'(0) + k(0)\tilde{u}_0(0), \psi_i \rangle \varphi_i.$$

Но функция (6) удовлетворяет уравнению (1) (при $N = 2$), поэтому из линейной независимости элементов базиса $\{\varphi_i\}$ вытекает

Теорема 3. *Если $N = 2$ и длины всех A-жордановых цепочек равны 1, то задача Коши (1)–(2) разрешима в классе $C^2(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\langle Au_0 + f(0), \psi_i \rangle = 0, \quad \langle Au_1 + f'(0) + k(0)u_0, \psi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Замечание 4. Общий случай $N > 2$ и $p = 1$ исследуется точно по такой же схеме без каких-либо идейных новшеств, но с более длинными выкладками.

Пример. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} - (\mu - \Delta)u - \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau, x)d\tau = f(t, x) \tag{7}$$

с начально-краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \tag{8}$$

где $g(t)$, $f(t, x)$ – заданные функции, $u(t, x)$ – искомая функция, $\Omega \subset R^m$ – ограниченная область с бесконечно-гладкой границей $\partial\Omega$, Δ – оператор

Лапласа, решение ищется в цилиндре $R_+ \times \Omega$. Задача Коши-Дирихле (7)–(8) редуцируется к задаче Коши (1)–(2) с $N = 2$, если выбрать банаховы пространства и операторы следующим образом

$$E_1 \equiv \left\{ v(x) \in W_2^{k+2}(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad E_2 \equiv W_2^k(\Omega), \tag{9}$$

$B = \lambda - \Delta,\ \lambda \in \sigma(\Delta),\ A = \mu - \Delta,\ k(t) = g(t)\Delta^2,\ W_2^k(\Omega)$ – соболевские пространства.

В этом случае оператор B фредгольмов, ядро которого совпадает с пространством решений однородной задачи для оператора Лапласа $\lambda\varphi = \Delta\varphi$, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Обозначим $\{\varphi_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ – базис этого пространства, $A\varphi_i = (\mu - \lambda)\varphi_i$, т.е. $\langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ длитны всех A-жордановых цепочек равны 1. Отсюда на основании теоремы 3 получаем

Теорема 4. *Если для задачи Коши-Дирихле (7)–(8) пространства E_1 и E_2, операторы A, B, $k(t)$ выбрать как в (9), то задача (7)–(8) однозначно разрешима в классе $C^2(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\langle (\mu - \lambda)u_0(x) + f(0, x), \varphi_i \rangle = 0,$$

$$\langle (\mu - \lambda)u_1(x) + f'(0, x) + g(0)\lambda^2 u_0(x), \varphi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Замечание 5. Представленные в этой заметке результаты допускают обобщение на другие случаи сингулярности операторного пучка $(B - \lambda A)$ (нетеровость, спектральная ограниченность и др.), а также в наиболее общей постановке исследовать, например, нестационарные математические модели теории колебаний в вяязко-упругих средах.

Список литературы

[1] Вайнберг М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин – М.: Наука, 1969. – 528 с.

[2] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

[3] Сидоров Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, є 9. – С. 1516–1526.

[4] Фалалеев М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Сиб. мат. журн. – 2000. – Т. 41, є 5. – С. 1167–1182.

[5] Фалалеев М.В. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М.В. Фалалеев // Изв. иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2013. – Т. 6, є 4. – С. 128–137.

[6] Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2002. – 548 p.