

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ДИСКРЕТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В УСЛОВИЯХ ШУМА НА БАЗЕ МЕТОДИКИ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Доклад посвящен исследованию периодических составляющих динамики процессов в условиях шума. Исследуются свойства структур дискретных последовательностей, порождаемых периодическими функциями, на базе определения численного  $\epsilon$ -ранга, соотносимого с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля.

Приводятся инвариантные зависимости численного ранга для идеальных аддитивных и мультипликативных моделей периодических дискретных последовательностей. Предлагается методика идентификации периодических свойств дискретного сигнала на основании оценки численного  $\epsilon$ -ранга. Определены проблемы идентификации периодических свойств дискретного сигнала в условиях шума. Предложена модифицированная методика идентификации периодических свойств дискретного сигнала на основе исследования следа сингулярных чисел в квази-null-пространстве.

Задача идентификации параметров функции, описывающей развитие сложного процесса, является существенно важной в рамках теории динамических систем. В случае регистрации этих параметров с постоянным шагом  $\tau$  по времени в виде совокупности временных рядов:

$$t_i = t_0 + (i-1)\tau : y_i = y(t_i), \quad i = \overline{1, N},$$

указанная задача является достаточно сложной и многовариантной при отсутствии для их объяснения функциональной модели системы динамических уравнений. Данная проблема имеет место для многих сложных реальных систем, так как получение систем динамических уравнений в этом случае связано со значительными трудностями при большом количестве переменных (динамической размерности системы), либо практически невозможно в силу их многосвязности и многосложности. Поэтому возникает необходимость развития современных методов обработки временных выборок с целью формирования приближенной оценки параметров идентификации динамики системы. Указанное требование особенно актуально в условиях развития современных систем мониторинга в режиме реального времени.

Аппарат сингулярного анализа основан на разложении временного ряда на простейшие аддитивные составляющие, что позволяет учесть и исследовать его структуру. Суть метода заключается в преобразовании одномерной выборки нестационарного процесса в матрицу развертки с помощью однопараметрической процедуры сдвига элементов ряда:

$$\mathbf{A} = \left( a_{i \ i=1}^{m+n-1} \right) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_{m+n-1} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

и сингулярного разложения этой ганкелевой матрицы [6] на основании фундаментального соотношения:

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{U}$  — унитарная матрица левых сингулярных векторов размером  $m \times m$ ,  $\mathbf{V}$  — унитарная матрица правых сингулярных векторов размером  $n \times n$ ,  $\mathbf{S}$  — диагональная матрица размером  $m \times n$  с сингулярными неотрицательными числами, расположенными в порядке не возрастания.

Из полученного набора сингулярных чисел матрицы  $\mathbf{S}$  в соотношении (2) выбираются те из них, по которым может быть восстановлена совокупность аддитивных составляющих, причем сумма с допустимой ошибкой совпадает с выборкой исходного процесса. Более подробно аппарат сингулярного разложения описан в работах [4,5].

Пояснить смысл метода сингулярного разложения позволяет метод главных компонент (алгоритм PCA). Для этого достаточно просто провести параллель между данными двумя методами. Суть метода главных компонент состоит в представлении матрицы  $\mathbf{A}$  в виде:

$$\mathbf{A} = \mathbf{TP}^T + \mathbf{E} \quad (3)$$

где  $\mathbf{T}$  — матрица счетов, которая определяет проекции исходных строк матрицы  $\mathbf{A}$  на подпространство главных компонент;  $\mathbf{P}$  — матрица нагрузок, которая определяет переход из исходного пространства строк матрицы  $\mathbf{A}$  в пространство главных компонент;  $\mathbf{E}$  — матрица ошибок (остатков).

Если в соотношении (3) представить матрицу  $\mathbf{T}$  в виде:

$$\mathbf{T} = \mathbf{US},$$

положить  $\mathbf{P}^T = \mathbf{V}$  и считать  $\mathbf{E}$  нулевой матрицей, то имеем сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{A}$ , определяемое соотношением (2).

Математическое содержание метода главных компонент — описание пространства данных, заключенных в матрице  $\mathbf{A}$ , как суммы взаимно ортогональных собственных подпространств  $\mathbf{t}_i$ . На основании этого можно говорить о том, что в сингулярном разложении матрица  $\mathbf{A}$  определяется через линейную комбинацию ортогональных проекторов на эти подпространства с коэффициентами, равными значениям сингулярных чисел матрицы  $\mathbf{S}$ . При этом количество значимых (отличных от погрешности и шума) подпространств будет зависеть от количества сингулярных чисел, существенно отличных от нуля. Это подтверждает положение, сформированное в фундаментальной работе [7], что сингулярное разложение позволяет ввести практическое понятие численного ранга, так называемого  $\varepsilon$ -ранга матрицы, который, для некоторого малого положительного  $\varepsilon$ , определяется по формуле:

$$\text{rank}(\mathbf{A}, \epsilon) = \min_{\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_2 \leq \epsilon} (\text{rank}(\mathbf{B})).$$

Количество сингулярных значений, позволяющих с допустимой погрешностью  $\epsilon$  определить  $\text{rank}(\mathbf{A}, \epsilon)$  на фоне остальных их количества, характеризует близость ранга исследуемой матрицы  $\mathbf{A}$  к матрице  $\mathbf{B}$  меньшего ранга. Поэтому сингулярное разложение позволяет раскрыть “скрытую” информацию о значимой структуре исследуемой матрицы  $\mathbf{A}$ . Так, оценивая значения сингулярных чисел

$$\begin{aligned} s_1 &\geq \dots \geq s_r > s_{r+1}, \\ s_{r+1} &= \dots = s_m \approx 0, \end{aligned}$$

получаем:

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{A}) &= r, \\ \text{range}(\mathbf{A}) &= \text{span}\{u_1, \dots, u_r\}, \\ \text{null}(\mathbf{A}) &= \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_m\}, \end{aligned}$$

где  $\text{rank}(\mathbf{A})$  – ранг матрицы  $\mathbf{A}$ ;

$\text{range}(\mathbf{A})$  – область значений матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\text{range}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^r : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$  для некоторого  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^r$ ;

$\text{null}(\mathbf{A})$  – нуль-пространство матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\text{null}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{m-r} : \mathbf{A}\mathbf{x} = 0\}$ .

Отметим, что сингулярное разложение позволяет оценить размерности двух важных подпространств:  $\text{range}(\mathbf{A})$  ранга  $r$ , содержащего существенную для исследования информацию, и  $\text{null}(\mathbf{A})$  ранга  $m - r$ , содержащего остаточную составляющую, которая может быть интерпретирована как шум или погрешность.

Понятие численного (сингулярного) ранга  $r$  позволяет раскрыть и выявить скрытые (латентные) внутренние взаимосвязи между элементами матрицы  $\mathbf{A}$ . В случае, если матрица  $\mathbf{A}$  является траекторной и характеризует исследуемую временную (пространственную) выборку процесса, то ранг  $r$ , определяемый с помощью сингулярного разложения, должен быть связан с числом степеней свободы системы, порождающей исследуемый процесс, то есть числом переменных, которые определяют фазовое состояние системы. Проиллюстрируем это положение на примере временных рядов, образованных простейшими периодическими (гармоническими) функциями.

Пусть исследуемый временной ряд порождается гармонической функцией вида:

$$f(x) = A \cos(\omega x + \phi) + B \sin(\omega x + \psi) \quad (4)$$

Предположим, что ранг  $r$  сингулярного разложения связан с числом степеней свободы системы  $d$ , порождающей исследуемый процесс. Исходя из этого сингулярное разложение заданной гармонической функции (4) должно характеризоваться соотносимым с рангом количеством сингулярных чисел в случае  $a \neq \omega k, k = 1, 2, 3, \dots$  и одним сингулярным числом при  $a = \omega k, k = 1, 2, 3, \dots$ . Для проверки указанного предположения был проведен численный эксперимент применения метода СРМР к временной выборке, порождаемой гармонической функцией вида (4), с целью исследования количества

выделяемых отличных от нуля сингулярных чисел, получаемых при разных параметрах  $a$ .

### Эксперимент 1.

Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией:

$$\begin{cases} f(i) = 0,5\cos(\alpha i) + \sin(\alpha i), i = \overline{1;51}, \\ \alpha = \frac{\alpha k}{6}, k = \overline{1;12}. \end{cases}$$

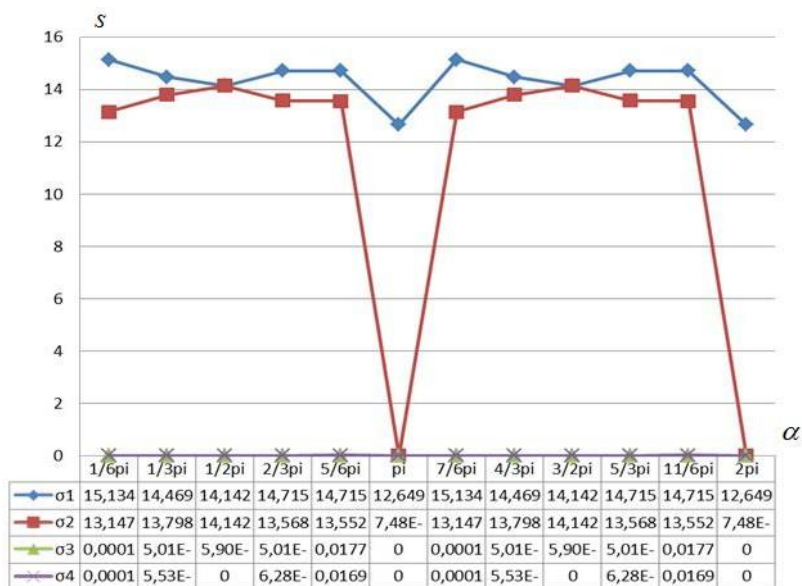


Рис. 1. Зависимость количества сингулярных чисел, выделяемых в результате сингулярного разложения ( $m = 20$ ) простейшей гармонической функции, при различных параметрах  $\alpha$ .

Для временных рядов, получаемых путем сдвига параметра  $\alpha$  с шагом  $\frac{\alpha k}{6}$ , строилась траекторная матрица  $\mathbf{A}$  и проводилось сингулярное разложение с целью определения численного ранга, определяемого количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля. Формирование сингулярного разложения было осуществлено с помощью алгоритма Голуба-Рейнша [10], включенного в состав библиотеки численных вычислений в прикладной математике и науке GSL. Результаты эксперимента представлены на рис. 1.

### Выводы:

1. Численный ранг  $r$ , соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, является инвариантным к параметру разложения  $m$ , а именно,  $r$  остается неизменным при различном параметре разложения  $m$ , меняются лишь их значения. На основании эксперимента была получена инвариантная зависимость от параметров  $n$  и  $m$  численного ранга  $r$  при разных параметрах  $a$ , в случае, если существует  $\text{null}(\mathbf{A})$  и  $m > d$ , представленная на рис. 2.

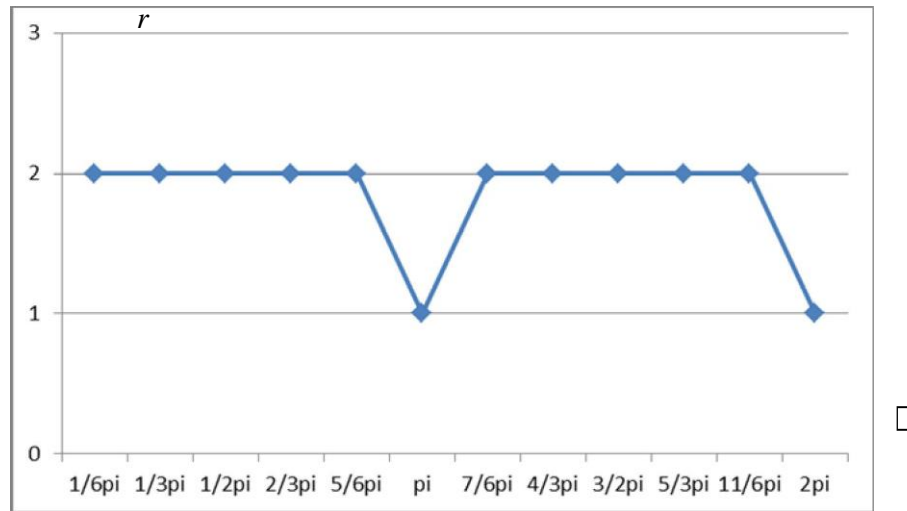


Рис. 2. Зависимость численного ранга  $r$  для простейшей гармонической функции от параметра  $\alpha$

2. Численный ранг  $r$ , определяемый с помощью сингулярного разложения, соотносится с конечным рангом ряда  $d$  для гармонических функций вида (4):

$$a \neq \frac{\pi}{k}, k = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow r = d = 2;$$

$$a = \frac{\pi}{k}, k = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow r = d = 1.$$

3. При  $a = \frac{\pi}{k}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  значения двух сингулярных чисел совпадают.

### 3. Сингулярный анализ аддитивного гармонического временного ряда

Пусть исследуемый временной ряд порождается гармонической функцией вида:

$$f(x) = \sum_{i=1}^I (A_i \cos(\omega_i x + \varphi_i) + B_i \sin(\omega_i x + \varphi_i)). \quad (5)$$

где  $I$  – количество аддитивных составляющих.

Определим свойства сингулярного разложения для заданного ряда исходя из понятия численного ранга  $r$ , соотносимого с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля.

В случае, когда  $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_I = \omega$ , легко показать, что численный ранг сингулярного разложения будет определяться аналогичным образом, что и для ряда образованного функцией (4). Так как в силу указанного равенства исходную функцию (4) можно преобразовать к виду:

$$f(x) = \left( \sum_{i=1}^I A_i \right) \cos(\omega x + \varphi) + \left( \sum_{i=1}^I B_i \right) \sin(\omega x + \varphi).$$

Заменяя

$$A = \left( \sum_{i=1}^I A_i \right) \text{ и } B = \left( \sum_{i=1}^I B_i \right)$$

получаем

$$f(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi).$$

Остается открытым вопрос об определении ранга для аддитивного гармонического временного ряда, образованного функцией (5), когда  $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_I$ . В этом случае каждая составляющая  $A \cos(\omega_i x + \varphi_i) + B \sin(\omega_i x + \varphi_i)$  будет характеризоваться двумя сингулярными числами при  $a_i \neq \omega_i k, k = 1, 2, 3, \dots$ . Для исследования данного вопроса был проведен численный эксперимент применения метода СРМР к временным выборкам аддитивного гармонического временного ряда (5) с целью исследования численного ранга  $r$  в зависимости от количества аддитивных составляющих  $I$  при  $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_I$  и  $\forall a_i \neq \omega_i k, k = 1, 2, 3, \dots$

#### Эксперимент 2.

Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией:

$$f_j(i) = \sum_{i=1}^I (0,5 \cos(0,2 ji) + \sin(0,2 ji)), j = \overline{1;101}$$

с итерационным шагом  $I = \overline{1;10}$ .

#### Вывод:

Численный ранг  $r$ , соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, для аддитивной функции вида (9) прямопропорционален количеству суммируемых составляющих  $i$  и определяется на основании линейной функции вида (рис. 3):

$$r = 2I.$$

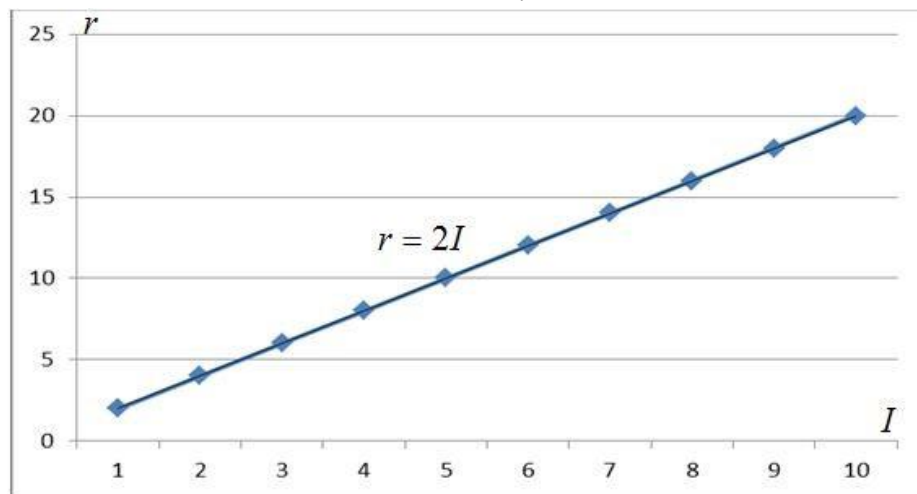


Рис. 3. Зависимость численного ранга  $r$  для аддитивной гармонической функции от количества суммируемых составляющих

При сингулярном разложении функции:

$$f_j(i) = \sum_{i=1}^{20} (0,5 \cos(0,4 ji)), j = \overline{1;201}$$

с параметрами разложения  $m = 20$  был определен численный ранг  $r = 40$ , что подтверждает сформулированный вывод.

#### 4. Сингулярный анализ мультипликативного гармонического временного ряда

Пусть исследуемый временной ряд порождается гармонической функцией вида:

$$f(x) = \prod_{i=1}^I (A_i \cos(\omega_i x + \varphi_i) + B_i \sin(\omega_i x + \psi_i)). \quad (6)$$

где  $I$  – количество мультипликативных составляющих.

Определим свойства сингулярного разложения для заданного ряда исходя из понятия численного ранга  $r$ , соотносимого с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля.

В случае, когда  $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_I = \omega$ , ситуация не такая однозначная как для аддитивного ряда. Поэтому для исследования данного вопроса был проведен численный эксперимент применения метода СРМР к временным выборкам мультипликативного гармонического временного ряда (6) с целью исследования численного ранга  $r$  в зависимости от количества мультипликативных составляющих  $I$  при  $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_I = \omega$  и  $\forall a_i \neq 0, k = 1, 2, 3, \dots$

Эксперимент 3:

Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией:

$$f_j(i) = \prod_{i=1}^I (1,5 \cos(0,2 j) + \sin(0,2 j)), j = \overline{1; 201}$$

с итерационным шагом  $I = \overline{1; 10}$ .

Вывод:

Численный ранг  $r$ , соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, для мультипликативной функции вида (6) при  $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_I = \omega$  прямопропорционален количеству мультипликативных составляющих  $I$  и определяется на основании линейной функции вида (рис. 4):

$$r = 1 + I.$$

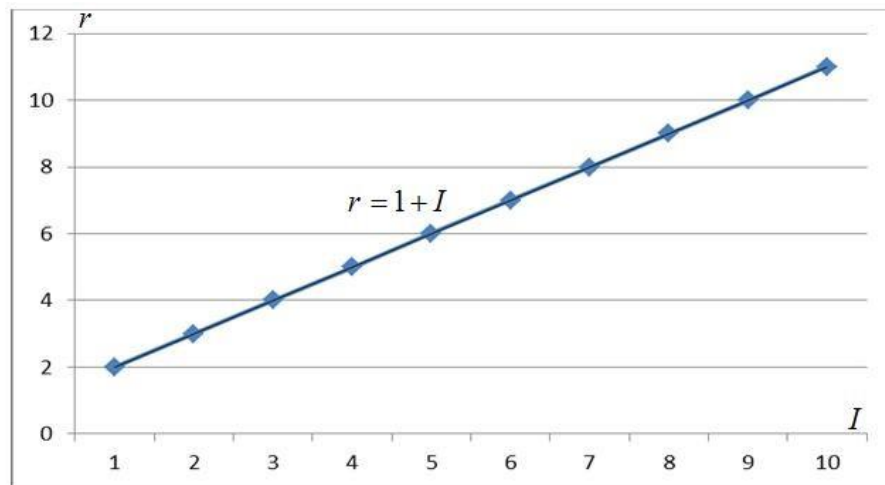


Рис. 4. Зависимость численного ранга  $r$  для мультипликативной гармонической функции

от количества составляющих при  $\square_1 = \square_2 = \dots = \square_r = \square$

С целью исследования зависимости численного ранга  $r$  от количества мультипликативных составляющих  $I$  для выборок временных рядов, образованных функцией (10) при  $\square_1 \neq \square_2 \neq \dots \neq \square_r$  и  $\forall a \neq \square k, k = 1, 2, 3, \dots$ , был проведен численный эксперимент применения метода СРМР.

Эксперимент 4.

Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией:

$$f_j(i) = \prod_{i=1}^I (0,5 \cos(0,2 ji) + \sin(0,2 ji)), j = \overline{1; 201}$$

с итерационным шагом  $I = \overline{1; 10}$ .

Вывод:

Численный ранг  $r$ , соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, для мультипликативной функции вида (5) прямопропорционален количеству мультипликативных составляющих  $I$  и определяется на основании полиномиальной функции второго порядка вида (рис. 5):

$$r = 0,5I^2 + 0,5I + 1.$$

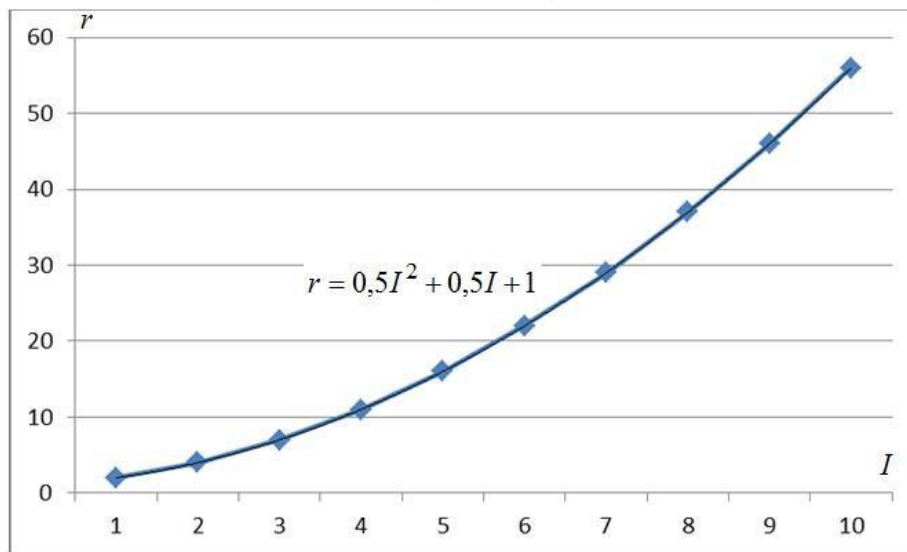


Рис. 5. Зависимость численного ранга  $r$  для мультипликативной гармонической функции от количества составляющих при  $\square_1 \neq \square_2 \neq \dots \neq \square_r$

При сингулярном разложении функции:

$$f_j(i) = \sum_{i=1}^{12} (0,5 \cos(0,4 ji)), j = \overline{1; 201}.$$

с параметрами разложения  $m = 100$  был определен численный ранг  $r = 79$ , что подтверждает сформулированный вывод.

Выделенные ключевые зависимости численного  $\varepsilon$ -ранга  $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$  от количества составляющих сложной гармонической функции вида (2) представляют интерес для разработки новой методологии оперативного анализа состояния динамической системы, что особенно актуально для мониторинга параметров управления в режиме реального времени сложных



структурно-неустойчивых систем. В данной работе ставится задача создания методики анализа параметров исследуемой временной (пространственной) выборки процесса, имеющей ярко выраженный периодический характер, на базе оценки численного  $\varepsilon$ -ранга.

Определенные зависимости получены на базе оценки  $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ , так называемого численного  $\varepsilon$ -ранга матрицы  $\mathbf{A}$ , который характеризует такое количество сингулярных чисел  $s_i$ , которое с допустимой погрешностью  $\varepsilon$  определяет близость траекторной матрицы  $\mathbf{A}$  (см. [3, 4]) к матрице  $\mathbf{B}$  меньшего ранга  $\text{rank}(\mathbf{B})$ . Таким образом, определение численного (сингулярного) ранга  $r$  позволяет выявлять скрытые (латентные) внутренние взаимосвязи между элементами матрицы  $\mathbf{A}$ , что характеризует динамику исследуемой временной (пространственной) выборки процесса, а именно число степеней свободы, порождающей его системы, или число переменных, которые определяют фазовое состояние этой системы.

### Методика определения частот периодических компонент на основании численного ранга

Выявленные свойства инвариантности численного  $\varepsilon$ -ранга  $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$  относительно значений частот аддитивных составляющих  $\forall a_i \neq \square k, k \in \mathbb{N}$  и его пропорциональной зависимости от количества  $I$  периодических компонент при  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_I$  для временных рядов, порождаемых периодической функцией вида (5), позволяют создать метод анализа частот (спектра) по исходной дискретной выборке временного ряда. Идея предлагаемого метода основана на принципе активной идентификации системы, когда используются специально выбранные тестовые сигналы и изучается влияние состояния системы на фиксированное воздействие. Применительно к контексту решаемой задачи авторы предлагают рассматривать изменение  $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$  траекторной матрицы  $\mathbf{A}$  временного ряда, образованного сложением отсчетов исходного ряда и простейшей тестовой периодической компоненты заданной частоты:

$$f_T(x) = A_T \cos(\square_T x + \square) + B \sin(\square_T x + \square).$$

В случае «воздействия» на исходную временную выборку тестовой компоненты частоты  $\alpha_T$ , не присутствующей в исходном временном ряде ( $\forall a_i : a_i \neq a_T$ ), будет наблюдаться увеличение  $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$  в силу свойства его пропорциональной зависимости от количества  $I$  периодических компонент при  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_I$ .

При «воздействии» на исходную временную выборку тестовой компоненты частоты  $\alpha_T$ , присутствующей в исходном временном ряде ( $\forall a_i : a_i = a_T$ ), в силу свойств инвариантности относительно значений частот аддитивных составляющих  $\forall a_i \neq \square k, k \in \mathbb{N}$  и дистрибутивности  $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$  останется неизменным:

$$f(x) = \left\{ A_i \cos(\square_i x + \square) + B_i \sin(\square_i x + \square) \right\} + \left\{ A_T \cos(\square_T x + \square) + B_T \sin(\square_T x + \square) \right\} = \\ = \left( A_i + A_T \right) \cos(\square_i x + \square) + \left( B_i + B_T \right) \sin(\square_i x + \square), \forall a_i : a_i = a_T.$$

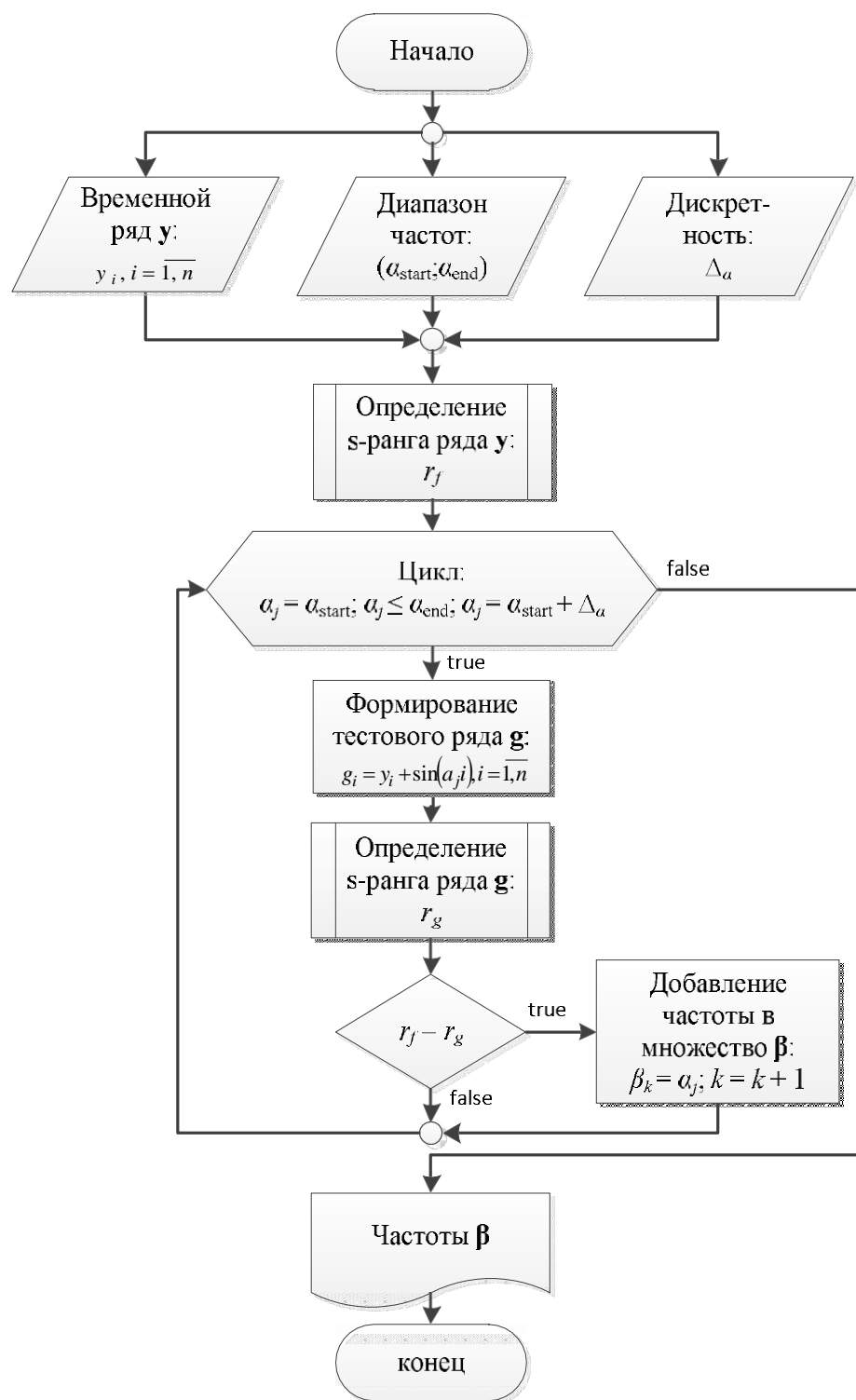


Рис. 6. Алгоритм определения частот периодических компонент

Сформулированная идея легла в основу создания итерационного алгоритма определения частот компонент периодических составляющих (спектра), присутствующих в исходном временном ряде, порождаемом периодической функцией вида (5) (см. рис. 6).

Исходными данными для алгоритма служат:

- 1) выборка исходного временного ряда  $y$ , порождаемого периодической функцией вида (5);
- 2) диапазон частот  $(\alpha_{\text{start}}; \alpha_{\text{end}})$ , в котором будет производиться поиск частот периодических составляющих, входящих в исходный ряд;

3) дискретность  $\Delta_\alpha$ , разбивающая диапазон  $(\alpha_{\text{start}}; \alpha_{\text{end}})$  на  $l$  отсчетов:

$$\Delta_\alpha = \frac{\alpha_{\text{end}} - \alpha_{\text{start}}}{l}.$$

### Особенности определения численного $\varepsilon$ -ранга

В представленном алгоритме центральное место занимает определение численного  $\varepsilon$ -ранга  $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ , которое основано на выделении области значений  $\text{range}(\mathbf{A})$  и нуль-пространства  $\text{null}(\mathbf{A})$  матрицы  $\mathbf{A}$ .

Представляет интерес определение критерия данного разделения. Интерпретация метода сингулярного разложения определяет, что разделение областей  $\text{range}(\mathbf{A})$  и  $\text{null}(\mathbf{A})$  может быть основано на исследовании динамики сингулярных чисел, последовательность которых расположена в порядке убывания модуля на главной диагонали матрицы  $\mathbf{S}$  (см. [1, 2]).

В качестве иллюстрации вышесказанного приведем результаты анализа выборки сингулярных чисел, полученной в результате сингулярного разложения временного ряда, образованного функцией вида:

$$f(i) = 0,1\sin(i) + 0,2 \cos(2i), i = \overline{1;51} \quad (7)$$

с параметром разложения  $m = 21$  (см. табл. 1).

Таблица 1

Выборка сингулярных чисел

$i$	$s_i$	$i$	$s_i$	$i$	$s_i$
1	2,64515	8	3,13E-08	15	1,90E-08
2	2,46369	9	3,03E-08	16	1,64E-08
3	1,30862	10	2,92E-08	17	1,58E-08
4	1,22877	11	2,71E-08	18	1,42E-08
5	3,93E-08	12	2,18E-08	19	1,27E-08
6	3,84E-08	13	2,06E-08	20	1,25E-08
7	3,25E-08	14	2,02E-08	21	8,97E-09

Из таблицы видно, что наиболее простым и очевидным критерием разделения областей  $\text{range}(\mathbf{A})$  и  $\text{null}(\mathbf{A})$ , может служить величина абсолютной погрешности  $\varepsilon_s$ , выше которой сингулярные числа являются значимыми и попадают в область значений  $\text{range}(\mathbf{A})$ . В противном случае сингулярные числа являются не значимыми и характеризуют область  $\text{null}(\mathbf{A})$ . Так при  $\varepsilon_s = 0,01$  видно, что первые четыре сингулярных числа являются значимыми, следовательно,  $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon) = 4$ .

В свою очередь сингулярные числа, определяющие  $\text{null}(\mathbf{A})$ , отличны от нуля и характеризуются определенной динамикой. Принятие малых не нулевых значений можно объяснить неравномерностью дискретных отсчетов, особенностями дискретного алгоритма сингулярного анализа, а также конечной точностью применяемых в ходе расчета переменных. Поэтому величина абсолютной погрешности численного  $\varepsilon$ -ранга  $\varepsilon_s$  не

является достаточно гибким критерием разделения областей  $\text{range}(\mathbf{A})$  и  $\text{null}(\mathbf{A})$ . Это легко показать, если изменить выборку исходного периодического ряда (7), прибавив еще одну компоненту близкой частоты к имеющейся в исходном ряде:

$$f(i) = 0,1\sin(i) + 0,2 \cos(2i) + \sin(0,99i), i = \overline{1;51}. \quad (8)$$

Выборка сингулярных чисел, полученных в результате сингулярного разложения ряда (4), представлена в таблице № 2.

Таблица 2

Выборка сингулярных чисел

$i$	$s_i$	$i$	$s_i$	$i$	$s_i$
1	14,5026	8	2,01E-07	15	8,79E-08
2	13,4774	9	1,62E-07	16	8,35E-08
3	2,63163	10	1,54E-07	17	7,43E-08
4	2,44769	11	1,40E-07	18	7,15E-08
5	0,0069	12	1,27E-07	19	6,06E-08
6	5,47E-03	13	1,09E-07	20	5,93E-08
7	2,69E-07	14	1,05E-07	21	4,80E-08

При выборе  $\varepsilon_s = 0,01$  видно, что первые четыре сингулярных числа являются значимыми, следовательно,  $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon) = 4$ , что не согласуется с представленной моделью функции (8), имеющей три периодические компоненты. Не трудно заметить, что пятое и шестое сингулярные числа хотя и принимают малые значения, но тем не менее отличаются на пять порядков от идущих далее сингулярных чисел. В связи с этим необходим выбор более гибкого критерия разделения областей  $\text{range}(\mathbf{A})$  и  $\text{null}(\mathbf{A})$ . С этой целью авторы предлагают использование относительных моментных коэффициентов динамики, а именно обратного цепного коэффициента роста:

$$Ks_i = \frac{s_{i+1}}{s_i}, \quad (9)$$

так как сингулярные числа  $s_i$  расположены в порядке убывания.

Таблица 3

Обратные коэффициента роста, отражающие динамику сингулярных чисел

$(i+1)/i$	$Ks_i$	$(i+1)/i$	$Ks_i$	$(i+1)/i$	$Ks_i$
2/1	1,076	9/8	1,243	16/15	1,052
3/2	5,121	10/9	1,048	17/16	1,124
4/3	1,075	11/10	1,106	18/17	1,039
5/4	354,714	12/11	1,096	19/18	1,180
6/5	1,261	13/12	1,172	20/19	1,023
7/6	20311,930	14/13	1,037	21/20	1,236
8/7	1,339	15/14	1,192	22/21	—

На основании коэффициента (9) можно определить точки разрыва в динамике выборки сингулярных чисел. Расчёт моментных показателей обратного коэффициента роста для выборки сингулярных чисел, образованных в результате сингулярного разложения функции (8), представлен в таблице 3.

В случае графического представления изменения динамики сингулярных чисел на основании показателя обратного коэффициента роста (рис. 7) целесообразно воспользоваться логарифмической шкалой:

$$\ln(Ks_i) = \ln \left| \frac{s_{i+1}}{s_i} \right|,$$

так как точки перехода (разрыва) динамики могут принимать достаточно большие значения и существенно отличаются друг от друга.

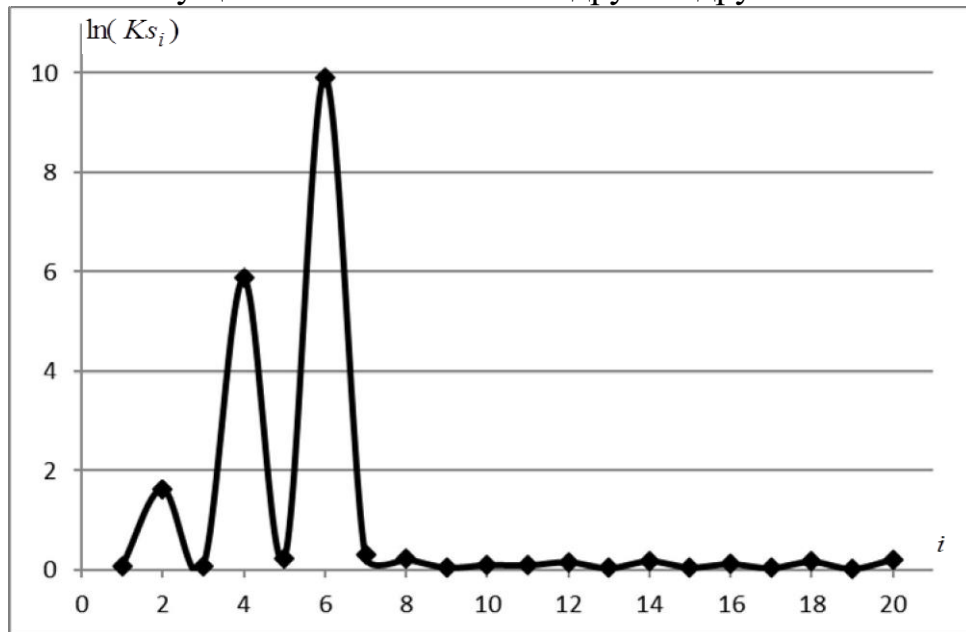


Рис. 7. Обратные коэффициента роста, отражающие динамику сингулярных чисел по логарифмической шкале

Из рис. 7 видно, что динамика сингулярных чисел для ряда (8) имеет три точки разрыва, которые можно интерпретировать следующим образом:

а) первые две точки разрыва (между третьим – вторым и четвертым – пятым сингулярными числами соответственно) характеризуют отделение трех периодических компонент друг от друга;

б) третья точка разрыва (между шестым и седьмым сингулярными числами), имеющая наибольшее значение, определяет разделение областей  $\text{range}(\mathbf{A})$  от  $\text{null}(\mathbf{A})$ .

Таким образом на основании выбранного критерия разделения областей  $\text{range}(\mathbf{A})$  и  $\text{null}(\mathbf{A})$  имеем  $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon) = 6$ , что согласуется с сформированными в работе [1] выводами.

### Численный эксперимент

Сформированный выше алгоритм был использован при проведении численного эксперимента по применению метода сингулярного разложения к временной последовательности, образованной функцией вида (7).

Для определения присутствующих во временном ряде частот был задан диапазон тестовых частот (0; 3) с дискретностью 0,01.

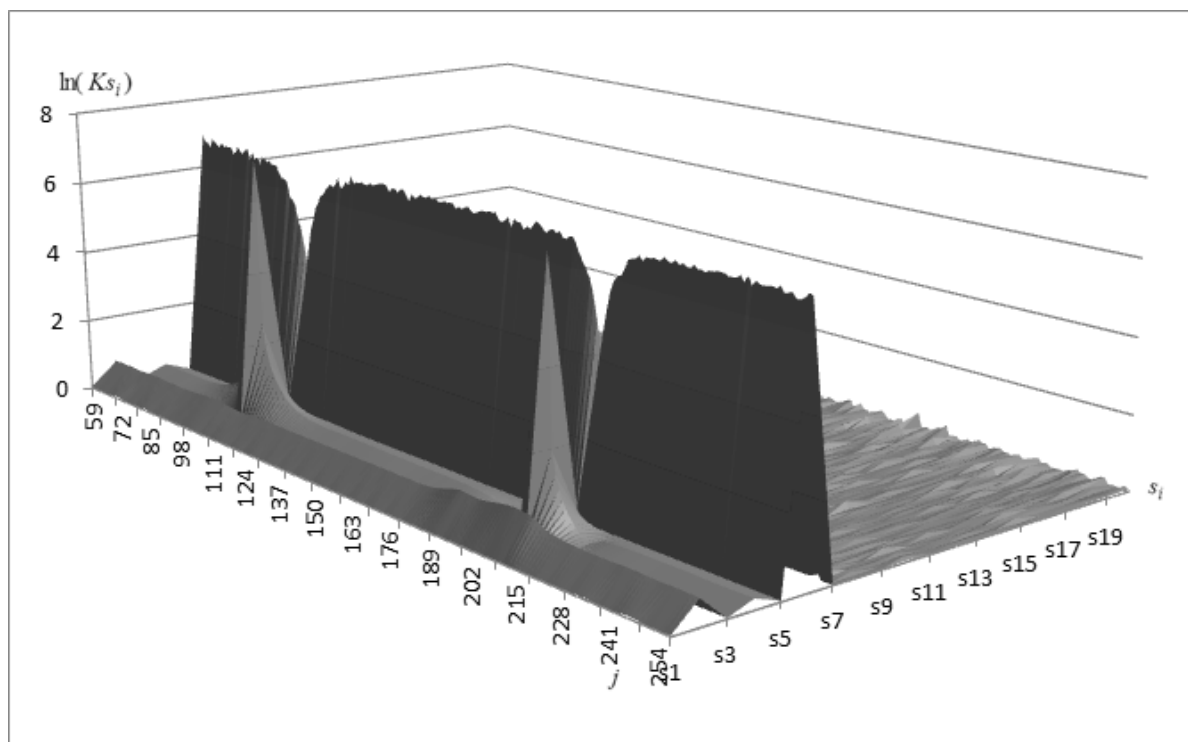


Рис. 8. Обратные коэффициента роста, отражающие динамику сингулярных чисел по логарифмической шкале для тестовых временных рядов, полученных сдвигом по частоте с заданной дискретностью

Графическое изменение обратного коэффициента роста по логарифмической шкале  $\ln(Ks_i)$  для множества рядов  $\{g_i\}$ , образованных сложением исходного ряда  $y$  и тестовых периодических компонент с определенной тестовой частотой  $\alpha_{Ti}$ , представлено на рис. 8.

На основании эксперимента определено изменение численного  $\varepsilon$ -ранга траекторной матрицы ряда  $A$  в точках с индексом 100 и 200. Следовательно, при заданной дискретности 0,01, частоты периодических компонент, присутствующих в исходной последовательности, равны 1 и 2 соответственно.

Применяя статистические характеристики вариации для области сингулярных чисел, находящихся в null-пространстве можно идентифицировать динамику в зашумленном процессе, что показывает серия экспериментов, представленных на рис. 9–10.

$$f_i = 0,1 \sin(i) + 0,2 \cos(2i) + 0,02\xi(i), \quad i = 1, \dots, 51.$$

$$f_i = 0,1 \sin(i) + 0,2 \cos(2i) + 0,04\xi(i), \quad i = 1, \dots, 51.$$

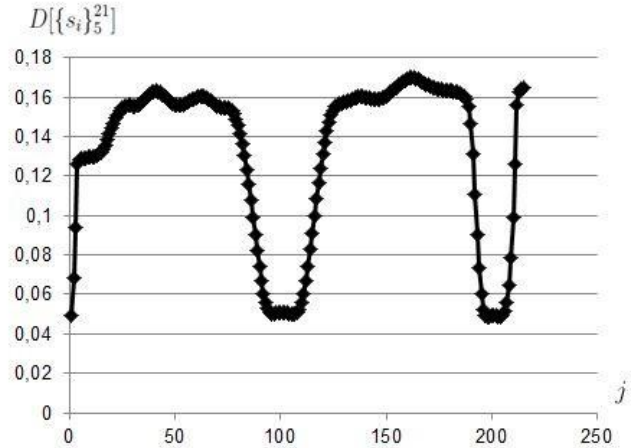
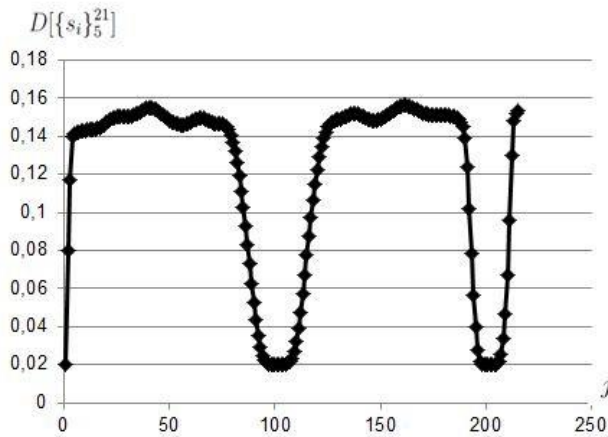


Рис. 9. Определение частот гармонических компонент в зашумленном процессе (10–20% шума)

$$f_i = 0,1 \sin(i) + 0,2 \cos(2i) + 0,16\xi(i), \quad i = 1, \dots, 51.$$

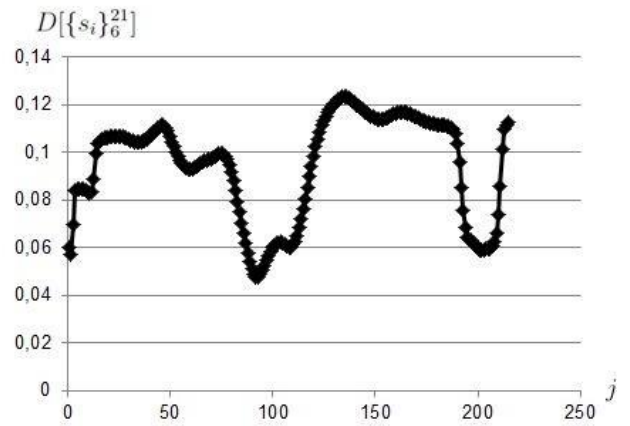
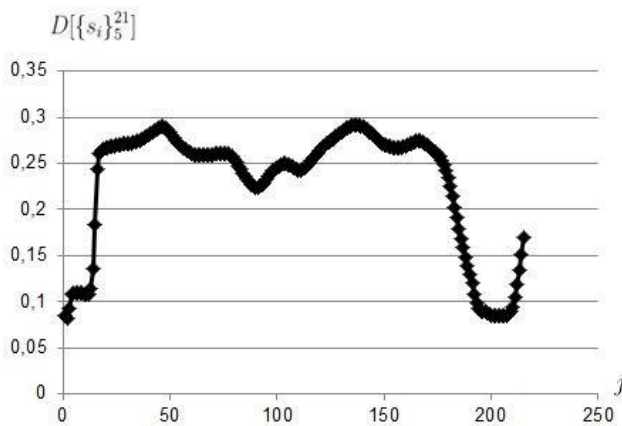


Рис. 10. Определение частот гармонических компонент в зашумленном процессе (40% шума)

В случае усиления шума для более ясной картины необходимо применять операцию численного дифференцирования к определенной области сингулярных чисел (рис. 11–12).

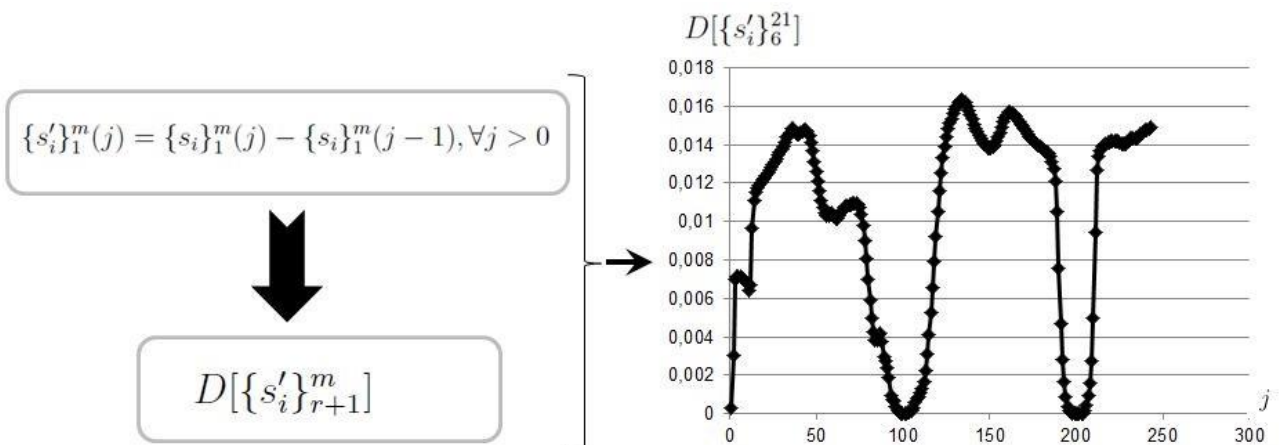


Рис. 11. Определение частот гармонических компонент в зашумленном процессе (40% шума)

$$f_i = 0,1 \sin(i) + 0,2 \cos(2i) + 0,4\xi(i), \quad i = 1, \dots, 51.$$

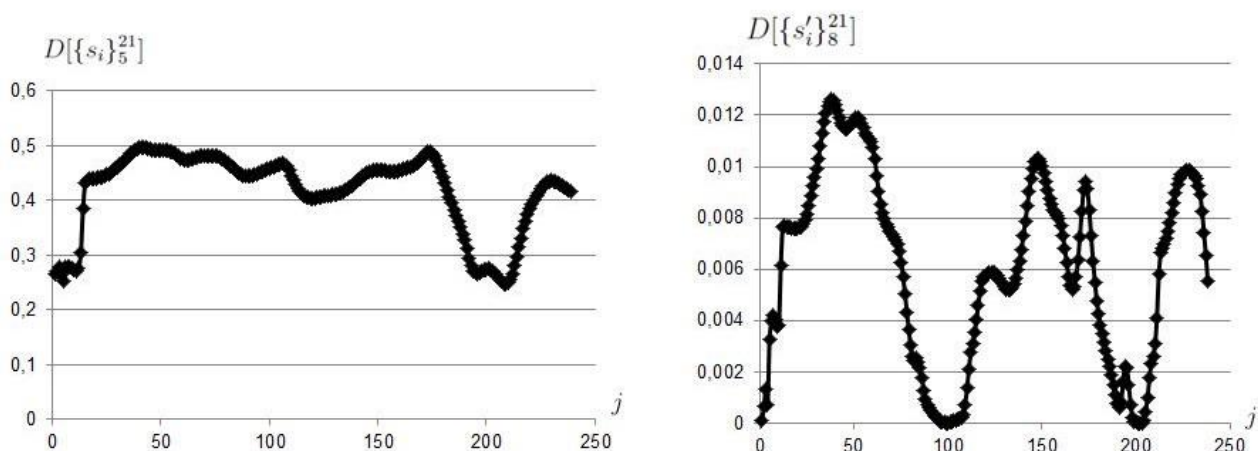


Рис. 12. Определение частот гармонических компонент в зашумленном процессе (200% шума)

Таким образом, с помощью оценки численного  $\varepsilon$ -ранга удалось создать методику, которая позволяет не только оценить динамическую размерность  $d$  (число степеней свободы) модели, но и идентифицировать параметры частот периодических компонент, присутствующих в исходном временном ряде, порождаемом периодической функцией вида (5).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Кузьмин, О.В.** Анализ структуры гармонических рядов динамики на базе алгоритма сингулярного разложения / О.В. Кузьмин, В.С. Кедрин // Проблемы управления. – 2013. – №1. – С. 26-31.
2. **Воеводин, В.В.** Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984 – 320 с.
3. **Дойников, А.Н.** Методика синтеза математических моделей рядов макроэкономических показателей на основе алгоритмов сингулярного разложения / А.Н. Дойников, В.С. Кедрин, М.К. Сальникова // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2006. – №2. – С. 138-142.
4. **Дойников, А.Н.** Моделирование нестационарных процессов с использованием алгоритмов их сингулярного разложения / А.Н. Дойников, В.С. Кедрин, М.К. Сальникова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2006. – №5. – С. 143-147.
5. **Голуб, Дж.** Матричные вычисления: Пер. с англ. / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун – М.: Мир, 1999. – 548 с.
6. Golub, G.H. Singular Value Decomposition and least squares solutions // Handbook for Automatic Computation. Vol. 2: Linear Algebra, by J.H. Wilkinson and C. Reinsch (Eds.) / G.H. Golub, C. Reinsch – NY: Springer-Verlag, 1971. – P. 134–151.



7. Measuring nonstationarity by analyzing the loss of recurrence in dynamical systems / C. Rieke and others // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – Vol. 88, № 24. – P. 31-35.
8. Гребенюк Е.А. Обнаружение изменений свойств нестационарных случайных процессов // *Автоматика и телемеханика.* – 2003. – №12. – С. 25-41.
9. Гребенюк, Е.А. Анализ и оперативная диагностика систем, описываемых нестационарными случайными процессами // *Проблемы управления.* – 2003. – №4. – С. 23-29.
10. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984 – 320 с.
11. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница» -SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. – 76 с.
12. Кузьмин О.В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. – 294 с.