ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ КВАНТОРНОЙ ПРИСТАВКОЙ

А.В. Лакеев
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
lakeyev@icc.ru
И.А. Шарая
Институт вычислительных технологий СО РАН

Первая систематическая монография по интервальному анализу была написана Раймоном Э. Муром в 1966 г. [1]. Ему же принадлежит и сам термин «интервальный анализ». В России, по-видимому, первыми были изданы монография Ю.И. Шокина (1981) [2], учебное пособие сотрудников ИГУ Т.И. Назаренко, Л.В. Марченко (1982) [3] и монография С.А. Калмыкова, Ю.И. Шокина, З.Х. Юлдашева (1986) [4]. Из более поздних отметим, ставшую уже классической, монографию А. Ноймайера (1990) [5] и постоянно обновляющуюся монографию С.П. Шарого (2018) [6]. Эти и многие другие материалы как по теории, так и по приложениям интервального анализа, можно найти на сайте http://www.nsc.ru/interval/.

Данная работа посвящена исследованию различных множеств решений линейных интервальных уравнений. Будем использовать общепринятые обозначения. Пусть $\mathbb{R}^m$ – множество вектор-столбцов размерности m, $\mathbb{R}^{m\times n}$ – множество $m \times n$-матриц и $\mathbb{IR}$ – множество интервалов в $\mathbb{R}$.

Для двух $m \times n$-матриц $\underline{A}$, $\overline{A}$ таких, что $\underline{A} \leq \overline{A}$ (неравенство понимается поэлементно) интервальной матрицей называется множество $\mathbf{A} = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \,|\, \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\}$ и, аналогично, для двух векторов из $\mathbb{R}^m$ $\underline{b}$, $\overline{b}$ таких, что $\underline{b} \leq \overline{b}$, интервальным m-вектором называется множество $\mathbf{b} = \{b \in \mathbb{R}^m \mid \underline{b} \leq b \leq \overline{b}\}$.

Рассмотрим систему линейных интервальных уравнений

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ – интервальная $m \times n$-матрица, $\mathbf{b}$ – интервальный m-вектор и $x \in \mathbb{R}^n$.

Множество решений системы (1) может быть определено различными способами в зависимости от того, какими кванторами связываются коэффициенты матрицы и правой части. Исторически первым и до сих пор самым изучаемым является так называемое объединенное множество решений (*united solution set*) (W. Oettli, W. Prager [7,8], H. Beeck [9], J. Rohn [10], С.П. Шарый [11]) вида

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists A \in \mathbf{A} \;\; \exists b \in \mathbf{b} \;\; Ax = b\}. \tag{2}$$

В этом определении все коэффициенты матрицы и правой части связаны кванторами существования $\exists$.

Позднее стали изучаться и некоторые другие множества решений системы: множество допустимых решений (или допустимое множество (*tolerable solution set*)) (В.В. Шайдуров, С.П. Шарый [12], С.П. Шарый [13], J. Rohn [14])

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A \in \mathbf{A} \;\; \exists b \in \mathbf{b} \;\; Ax = b\}$$

и управляемое множество решений (*controllable solution set*) (Н.А. Хлебалин, Ю.И. Шокин [15], С.П. Шарый [16, 17])

$$\Xi_{ctr}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall b \in \mathbf{b} \;\; \exists A \in \mathbf{A} \;\; Ax = b\},$$

которое возникло при решении задачи автоматического регулирования в интервальной постановке, и др.

На этих примерах видно, что отличие этих множеств друг от друга состоит в том, что различные элементы из $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ связываются различными кванторами, а также порядком этих кванторов.

Заметим, что еще до появления этих работ в статье А.А. Ватолина [18] было введено понятие множества решений интервальной системы с произвольной кванторной приставкой, однако с дополнительным ограничением неотрицательности на переменные $x \in \mathbb{R}^n$. Это ограничение существенно упрощает задачу описания этих множеств. В частности, именно за счет неотрицательности x А.А. Ватолин получил описание этих множеств в виде разрешимости некоторой системы линейных неравенств, что совершенно не характерно для интервальных систем.

Некоторый промежуточный, но весьма удачный во многих отношениях вариант между произвольной кванторной приставкой и отдельными частными случаями был найден С.П. Шарым. В работе [19] он определил так называемые обобщенные множества решений ($\forall\exists$-решения) как множества, в кванторной приставке которых все кванторы всеобщности предшествуют кванторам существования. Эти множества, с одной стороны, включают в себя рассмотренные выше, а с другой – поддаются бескванторному описанию.

Определим $\forall\exists$-решения с учетом модификации, предложенной И. Роном [20]. Будем считать, что заданы две интервальные матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и два интервальных вектора $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$. Тогда

$$\begin{aligned}\Xi_{\forall\exists}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A_2 \in \mathbf{A}_2 \;\; \forall b_2 \in \mathbf{b}_2 \\ \exists A_1 \in \mathbf{A}_1 \;\; \exists b_1 \in \mathbf{b}_1 \;\; (A_2 + A_1)x = b_2 + b_1\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что перечисленные выше множества будут частными случаями множества (3). В частности, $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ получается при $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{b}_2$, равных нулю, $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ – при $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{b}_2$, равных нулю и $\Xi_{ctr}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ – при $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{b}_1$, равных нулю. Обобщенные множества решений, рассматривавшиеся С.П. Шарым [19, 21] содержали дополнительные ограничения на интервальные матрицы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ и интервальные вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. А именно, предполагалось, что один из элементов матриц $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ и одна из координат векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, стоящие на одинаковых местах, должны быть равны нулю. Сама идея ввести две разные матрицы, одну для кванторов всеобщности и другую (никак не связанную с первой) – для кванторов существования, была сообщена И. Роном в ноябре 1995 г. в личном письме С.П. Шарому и А.В. Лакееву [20].

Бескванторное описание множества (3) получается из следующих двух утверждений. Для интервальной матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим $\mathbf{A}x = \{Ax \mid A \in \mathbf{A}\}$.

Теорема 1 (С.П. Шарый [19]). Если заданы интервальные матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и интервальные вектора $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, то

$$\Xi_{\forall\exists}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}_2 x - \mathbf{b}_2 \subseteq \mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 x\}.$$

В качестве следствия этой теоремы получаем следующие описания множеств $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{ctr}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Следствие. Если заданы интервальная матрица $\mathbf{A}$ и интервальный вектор $\mathbf{b}$, то

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{0} \subseteq \mathbf{b} - \mathbf{A}x\}, \qquad \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}\},$$

$$\Xi_{ctr}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{b} \subseteq \mathbf{A}x\}.$$

Прежде чем сформулировать второе утверждение, введем следующие обозначения. Будем записывать интервалы (а также интервальные матрицы и интервальные вектора) в центрально-симметричной форме. То есть, если $\mathbf{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$ – интервал ($\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$ – интервальная матрица, $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}]$ – интервальный вектор), то, полагая

$$\check{a} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \underline{a}),\ \delta_0 = \frac{1}{2}(\overline{a} - \underline{a})\ (\check{A} = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A}),\ \Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A});\ \check{b} = \frac{1}{2}(\overline{b} + \underline{b}),\ \delta = \frac{1}{2}(\overline{b} - \underline{b})),$$

получаем

$$\mathbf{a} = [\check{a} - \delta_0, \check{a} + \delta_0]\ \left(\mathbf{A} = \left[\check{A} - \Delta, \check{A} + \Delta\right];\ \mathbf{b} = \left[\check{b} - \delta, \check{b} + \delta\right]\right).$$

Отметим также, что в литературе имеются и другие обозначения для этих величин, а именно $\operatorname{mid}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\overline{a} + \underline{a})$ и $\operatorname{rad}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\overline{a} - \underline{a})$ (аналогично для интервальных матриц и векторов [5, 6]).

Теорема 2 (W. Oettli, W. Prager [7]). Если $\mathbf{A}$ – интервальная $m \times n$-матрица и $x \in \mathbb{R}^n$, то $\mathbf{A}x$ – интервальный m-вектор и $\mathbf{A}x = \left[\check{A}x - \Delta|x|, \check{A}x + \Delta|x|\right]$ ($|x|$ берется покоординатно).

Заметим, что эта теорема неоднократно переоткрывалась, в том числе иркутскими математиками (Б.И. Белов, Е.Г. Анциферов [22]). Ее доказательство для некоторого класса упорядоченных векторных пространств (содержащего все конечномерные векторные решетки и K_σ-пространства) получено в работе А.В. Лакеева, С.И. Носкова [23, 24].

Из этих теорем уже легко получить описание множества $\Xi_{\forall\exists}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ в виде разрешимости системы линейных неравенств от x и $|x|$, учитывая, что для двух интервалов $\mathbf{a_1} = [\underline{a}_1, \overline{a}_1]$, $\mathbf{a_2} = [\underline{a}_2, \overline{a}_2]$ включение $\mathbf{a_1} = [\underline{a}_1, \overline{a}_1] \subseteq \mathbf{a_2} = [\underline{a}_2, \overline{a}_2]$ эквивалентно двум неравенствам $\underline{a}_2 \le \underline{a}_1$, $\overline{a}_1 \le \overline{a}_2$.
Таким образом получаем следующую теорему.

Теорема 3 (С.П. Шарый [19], И. Рон [20]). Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству $\Xi_{\forall\exists}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$|(\check{A}_1 + \check{A}_2)x - (\check{b}_1 + \check{b}_2)| + \Delta_2|x| + \delta_2 \le \Delta_1|x| + \delta_1.$$

Перейдем теперь к рассмотрению интервально-кванторных уравнений общего вида. В работе И.А. Шарой [25] было введено понятие интервально-кванторных уравнений и неравенств вида (далее приводится дословная формулировка этого понятия из [25])

$$Ax \ \sigma \ b, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad \sigma \in \{=, \ge, \le\}^m,$$

где x — вектор неизвестных, σ — вектор отношений с компонентами $=$, $\ge$ и $\le$, а всякий параметр $u \in \mathbb{R}$ (элемент матрицы A или правой части b) может принимать значение в пределах заданного одноименного интервала $\mathbf{u}$ из $\mathbb{IR}$. С каждым параметром u свяжем квантор всеобщности либо существования и соответствующую элементарную кванторную приставку $(\forall u \in \mathbf{u})$ либо $(\exists u \in \mathbf{u})$. Такую интервальную неопределенность параметров можно задать интервальной матрицей $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, матрицей кванторов $\mathcal{A}$ тех же размеров, что и $\mathbf{A}$, интервальным вектором $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ и вектором кванторов β длины m. Запишем все элементарные кванторные приставки в произвольном порядке и обозначим полученную приставку длины $m(n+1)$ как $Q(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathcal{A}, \beta)$.

Определение (И.А. Шарая [25]). Интервально-кванторной системой линейных отношений или, в кратком варианте, интервально-кванторной линейной системой, будем называть предикат $Q(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathcal{A}, \beta)Ax \ \sigma \ b$, а ее решением — всякий вектор $x \in \mathbb{R}^n$, для которого предикат принимает значение “истина”.

В работе [25] (Теорема 2) получено полное описание решений интервально-кванторной линейной системы неравенств, т.е. когда $\sigma \in \{\ge, \le\}^m$. Отметим, что в этом случае (удивительный факт!) множество решений не зависит от порядка кванторов в $\mathcal{A}$ и β! Кроме того, показано ([25], формула (3.3)), что достаточно получить описание соответствующего множества для одного уравнения.

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать одно интервально-кванторное уравнение вида

$$\mathbf{c}x = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i x_i = \mathbf{d}, \tag{4}$$

где $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)$ – интервальная вектор-строка, x – вектор-столбец размерности n и $\mathbf{d}$ – интервал, с кванторной приставкой $Q(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \alpha, \beta)$ (α – вектор из кванторов размерности n и β – один квантор).

Кроме того, если имеется несколько перемен смысла кванторов в кванторной приставке то, развивая идею И. Рона, вводя дополнительные $2k$ (число k зависит от количества таких перемен) интервальных векторов $\mathbf{a}_{2k}, \mathbf{a}_{2k-1}, \ldots, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1$ и $2k$ интервалов $\mathbf{b}_{2k}, \mathbf{b}_{2k-1}, \ldots, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1$, мы можем фиксировать кванторную приставку и записать ее в следующем виде (вместе с уравнением):

$$\begin{gathered}(\forall a_{2k} \in \mathbf{a}_{2k})(\forall b_{2k} \in \mathbf{b}_{2k})(\exists a_{2k-1} \in \mathbf{a}_{2k-1})(\exists b_{2k-1} \in \mathbf{b}_{2k-1}) \ldots (\forall a_2 \in \mathbf{a}_2)(\forall b_2 \in \mathbf{b}_2) \\ (\exists a_1 \in \mathbf{a}_1)(\exists b_1 \in \mathbf{b}_1)((a_{2k} + a_{2k-1} + \ldots + a_2 + a_1)x = b_{2k} + b_{2k-1} + \ldots + b_2 + b_1),\end{gathered} \tag{5}$$

где каждое a_i – n-мерная вектор-строка из $\mathbf{a}_i$, а b_i – число из $\mathbf{b}_i$, $i = \overline{1, 2k}$.

Возможность такого сведения следует из того, что если в любое место кванторной приставки $Q(\mathbf{c},\mathbf{d},\alpha,\beta)$ вставить квантор $(\forall u\in\mathbf{u})$ (или $(\exists u\in\mathbf{u})$) с нулевым интервалом $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, а в уравнение $\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{c}_i x_i=\mathbf{d}$ добавить слагаемое с нулевым коэффициентом, то его множество решений не изменится.

Ообозначим множество решений интервально-кванторного линейного уравнения (*interval-quantifier solution set*) (5) через $\Xi_{iq}^k(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{2k},\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_{2k})$.

Описание этого множества, аналогичное теореме 1, содержится в следующем утверждении.

Теорема 4. Вектор $x\in\mathbb{R}^n$ принадлежит множеству $\Xi_{iq}^k(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{2k},\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_{2k})$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{k}(\mathbf{a}_{2i}x-\mathbf{b}_{2i})\subseteq\sum\limits_{i=1}^{k}(\mathbf{b}_{2i-1}-\mathbf{a}_{2i-1}x)\,,\\ \sum\limits_{i=1}^{l}\operatorname{rad}(\mathbf{a}_{2i}x-\mathbf{b}_{2i})\le\sum\limits_{i=1}^{l}\operatorname{rad}(\mathbf{a}_{2i-1}x-\mathbf{b}_{2i-1}),\quad l=\overline{1,k-1}.\end{cases}$$

Возвращаясь к центрально-симметричной форме представления интервальных вектор-строк и интервалов, то есть $\mathbf{a}_i=[\check{a}_i-\Delta_i,\check{a}_i+\Delta_i]$, $\mathbf{b}_i=[\check{b}_i-\delta_i,\check{b}_i+\delta_i]$, из теоремы 4 и теоремы 2 (W. Oettli, W. Prager), получаем утверждение аналогичное теореме 3.

Теорема 5. Вектор $x\in\mathbb{R}^n$ принадлежит множеству $\Xi_{iq}^k(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{2k},\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_{2k})$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия

$$\begin{cases}|\sum\limits_{i=1}^{2k}(\check{a}_i x-\check{b}_i)|+\sum\limits_{i=1}^{k}(\Delta_{2i}|x|+\delta_{2i})\le\sum\limits_{i=1}^{k}(\Delta_{2i-1}|x|+\delta_{2i-1}),\\ \\ \sum\limits_{i=1}^{l}(\Delta_{2i}|x|+\delta_{2i})\le\sum\limits_{i=1}^{l}(\Delta_{2i-1}|x|+\delta_{2i-1}),\ \ l=\overline{1,k-1}.\end{cases}$$

Замечание. Отметим, что формулы из теоремы 5 можно получить и с помощью процедуры элиминации кванторов из работы В. Крейновича [26] (с некоторой модификацией).

Список литературы

[1] Moore R.E. Interval Analysis.–N.J., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.– 159 pp.

[2] Шокин Ю.И. Интервальный анализ.– Новосибирск: Наука, 1981.– 112 с.

[3] Назаренко Т.И., Марченко Л.В. Введение в интервальные методы вычислительной математики. Учебное пособие.– Иркутск: Иркутский государственный университет, 1982.– 108 с.

[4] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа.– Новосибирск: Наука, 1986.– 221 с.

[5] Neumaier A. Interval Methods for Systems of Equations.– Cambridge: Cambridge University Press.– 1990.– 255 pp.

[6] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: XYZ, 2018.– 622 с. http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf

[7] Oettli W., Prager W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // Num. Math.–1964.–V.6.–P. 405–409.

[8] Oettli K.W. On the solution set of a linear system with inacurate coefficients // SIAM J. Numer. Anal.–1965.–V. 2.–P. 115–118.

[9] Beeck H. Ueber structur und abschatzungen der loesungsmenge von linear gleichungssystemen mit intervallkoeffizienten // Computing.– 1972.–V. 10.–P. 231–244.

[10] Rohn J. Systems of Linear Interval Equations, Linear Algebra and its Applications.–1989.–V.126.–P. 39-78.

[11] Шарый С.П. О характеризации объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы // Деп. в ВИНИТИ.–1990.–N 726-B91.– 20 с.

[12] Шайдуров В.В., Шарый С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках.– Красноярск: Препринт ВЦ АН АН СССР. –1988– N 5.– 27 с.

[13] Шарый С.П. О разрешимости линейной задачи о допусках // Интервальные вычисления.– 1991.–N 1.–С. 92–98.

[14] Rohn J. Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics .–Freiburg.–1985.

[15] Хлебалин Н.А., Шокин Ю.И. Интервальный вариант метода модального управления // Докл. АН СССР.–1991.–Т. 316.– N 4.–С. 846–850.

[16] Shary S.P. On controlled solution set of interval algebraic systems // Interval Computations, 4(6), 1992, pp. 66-75.

[17] Shary S.P. Controllable solution sets to interval static systems // Applied Mathematics and Computation. – 1997. – Vol. 86, No. 2-3. – P. 185-196.

[18] Ватолин А.А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журн. вычислит. математики и мат. физики.–1984.–Т. 24.–N 11.–С. 1629–1637.

[19] Shary S.P. Algebraic solutions to interval linear equations and their applications // Numerical Methods and Error Bounds, Proceedings of IMACS-GAMM International Symposium on Numerical Methods and Error Bounds, Oldenburg, Germany, July 9-12, 1995, G. Alefeld and J. Herzberger, eds. (Mathematical Research, Vol. 89). – Akademie Verlag, Berlin, 1996. – P. 224-233. (URL: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/Herz.pdf)

[20] J. Rohn J. Private communication // Letter of November 18, 1995.

[21] Shary S.P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // Reliable Computing. – 1999. – Vol. 5. – P. 323-335. (URL: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/GOuter.pdf)

[22] Белов Б.И., Анциферов Е.Г. К установлению линейных зависимостей в условиях неопределенности исходных данных // Информационный сборник трудов Вычислительного центра Иркутского государственного университета. Вып. II. Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1968. – С. 143-147.

[23] Лакеев А.В., Носков С.И. Описание множества решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Докл. АН СССР.–1993.–Т.330(4).–С. 430-433.

[24] Лакеев А. В., Носков С. И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сиб. матем. журн.–1994–Т. 35, N 5.–С. 1074–1084.

[25] Шарая И.А. Бескванторные описания для интервально–кванторных линейных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН.– Т. 20, № 2.– 2014.– С.311–323.

[26] Kreinovich V. Asymptotically Optimal Algorithm for Checking Whether a Given Vector Is a Solution to a Given Interval-Quantifier Linear System // University of Texas at El Paso.– Department of Computer Science.– Technical Report: UTEP-CS-14-69. – Departmental Technical Reports (CS). Paper 878.–2014.–11 p. http://digitalcommons.utep.edu/cs_techrep/878