Внутренняя устойчивость формаций

Лакеев А.В.

Рассматривается задача исследования внутренней устойчивости формаций нескольких управляемых движущихся объектов. Под формацией понимается конечное множество взаимосвязанных движущихся объектов, связи между которыми (типа "ведущий-ведомый") задаются некоторым ориентированным ациклическим графом. Каждой паре связанных объектов сопоставляется некоторый вектор, определяющий их требуемое (в идеале) взаимное расположение, которое реально может быть выдержано только с некоторой точностью. Изучается задача существования управлений, обеспечивающих малые отклонения формации от желаемого идеального состояния, при малом начальном отклонении и малых возмущающих внешних воздействиях. Для простейших формаций (имеющих небольшое количество объектов), динамика которых описывается линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, получены необходимые и достаточные условия разрешимости изучаемой задачи, которые с помощью разбиения формации на простейшие, переносятся на общий случай. Используя метод функций Ляпунова показано, что эти условия будут достаточными для внутренней устойчивости и для систем с квазилинейной динамикой.

Перейдем к точным формулировкам.

Определение. Будем говорить, что задана формация из l взаимосвязанных объектов, если

1) Задан ориентированный ациклический граф $G = (V, E)$, где $V = \{1, \ldots, l\},\ E \subseteq V \times V$, при этом, если $(i, j) \in V$, то i-ый объект называется ведомым и j-ый объект — ведущим.

2) Динамика движения i-го объекта задается дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathrm{x}}_i = f_i(\mathrm{x}_i, u_i),\ \mathrm{x}_i \in R^n,\ u_i \in R^m.$$

3) Если $(i, j) \in E$, то задан вектор $d_{ij} \in R^n$ (задающий требуемое

идеальное расположение i-го и j-го объектов, $\mathrm{x}_j = \mathrm{x}_i + d_{ij}$).

Если $L_i = \{j \in V \mid (i,j) \in E\} = \{j_{i1}, \ldots, j_{is_i}\}$ — множество ведущих для i-го объекта, то множество допустимых управлений $\mathcal{U}_i$ этого объекта определяется как подмножество непрерывных функций $u_i(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_{j_{i1}}, \ldots, \mathrm{x}_{j_{is_i}})$ таких, что соответствующее уравнение имеет единственное решение при любых начальных значениях, продолжимое на весь интервал времени $T = [0, +\infty)$.

Если $E = \{e_1, \ldots, e_p\}$ — множество ребер графа G и $e_k = (i_k, j_k)$, то $z = (z_1, \ldots, z_p)$ — вектор ошибок, где $z_k = \mathrm{x}_{i_k} + d_{i_k j_k} - \mathrm{x}_{j_k},\ k = \overline{1,p}$.

Обозначим также $L = \{i \in V \mid L_i = \varnothing\}$ — множество лидеров формации.

Определение. Формация называется внутренне устойчивой, если существуют функции $\gamma_i \in \mathcal{K},\ i \in L$ ($\mathcal{K}$ — класс функций Хана, т.е. $\gamma_i \in \mathcal{K}$, если $\gamma_i : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ непрерывная, строго возрастающая, $\gamma_i(0) = 0$) и функция $\beta \in \mathcal{KL}$ ($\beta \in \mathcal{KL}$, если $\beta : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}$ при фиксированном t и $\lim\limits_{t\to\infty} \beta(r,t) = 0$, при фиксированном $r \in [0, +\infty)$) такие, что для любых допустимых управлениях $u_i \in \mathcal{U}_i,\ i \in L$ найдутся управления $u_j \in \mathcal{U}_j,\ j \in V \backslash L$ такие, что при любых начальных значениях $\mathrm{x}_{0i} \in R^n,\ i = \overline{1,l}$ и любых $t \geq 0$ выполняется оценка

$$\|z(t)\| \leq \beta(\|z(0)\|, t) + \sum_{i \in L} \gamma_i(\sup_{\tau \in [0,t]} \|u_i(x_i(t))\|), \tag{1}$$

где $z(t)$ — вектор ошибок, полученный на решениях уравнений при заданных управлениях $u_i \in \mathcal{U}_i,\ i \in V$.

В кванторном виде это свойство более кратко может быть записано в виде

$$(\exists \gamma_i \in \mathcal{K} : i \in L)(\exists \beta \in \mathcal{KL})(\forall u_i \in \mathcal{U}_i : i \in L)(\exists u_j \in \mathcal{U}_j : j \in V \backslash L)$$
$$(\forall \mathrm{x}_{0i} \in R^n : i \in V)(\forall t \geq 0) \|z(t)\| \leq \beta(\|z(0)\|, t) + \sum_{i \in L} \gamma_i(\sup_{\tau \in [0,t]} \|u_i(x_i(t))\|), \tag{2}$$

В случае, когда дифференциальные уравнения, определяющие формацию, линейные, т.е. $f_i(\mathrm{x}_i, u_i) = A_i\mathrm{x}_i + B_i u_i$, а множество допустимых управлений $\mathcal{U}_i$ определяется как множество афинных функций, т.е. $u_i(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_{i1}, \ldots, \mathrm{x}_{is_i}) = S_i\mathrm{x}_i + \sum_{r=1}^{s_i} K_{ir}\mathrm{x}_{j_{ir}} + k_i$ (S_i, K_{ir} — $n \times n$-матрицы, $k_i \in R^n$), то будем говорить, что формация линейно внутренне устойчивая.

Данное понятие является уточнением соответствующего свойства (input – to – state stability), изучавшимся в работах H.G. Tanner'a, G.J. Pappas'a, V. Kumar'a при исследовании движения группы роботов.

Доказано следующие утверждения.

Теорема 1. *Формация из двух объектов (1-ый ведущий, 2-ой ведомый), динамика которых задается уравнениями*

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = A_1\mathrm{x}_1 + B_1u_1, \\ &\dot{x}_2 = A_2\mathrm{x}_2 + B_2u_2,\ \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in R^n,\ u \in R^m, \end{aligned} \tag{3}$$

и заданного вектора $d_{21} \in R^n$ является линейно внутренне устойчивой тогда и только тогда, когда выполнены условия

1) пара (A_2, B_2) стабилизируема, т.е. существует $m \times n$-матрица S такая, что система $\dot{x}_2 = (A_2 + B_2S)x_2$ асимптотически устойчива;

2) существует вектор $k \in R^n$ и $m \times n$-матрица N, удовлетворяющие линейным уравнениям

$$\begin{aligned} B_2k &= A_2d_{21}, \\ B_2N &= A_2 - A_1. \end{aligned}$$

Замечание 1. Если в системе (3)
$u_1(\mathrm{x}_1,) = S_1\mathrm{x}_1,\ u_2(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_1) = S_2\mathrm{x}_2 + K_1\mathrm{x}_1 + k_2,\ z = x_1 + d_{21} - x_2$
то свойство (2) можно записать в следующем виде

$$(\exists\gamma_1 \in \mathcal{K})(\exists\beta \in \mathcal{KL})(\forall S_1)(\exists S_2, K_1, k_2)(\forall \mathrm{z}_0 \in R^n)(\forall t \geq 0)$$

$$\|z(t)\| \leq \beta(\|z(0)\|, t) + \gamma_1(\sup_{\tau\in[0,t]} \|u_1(x_1(t))\|). \tag{4}$$

Отметим, что при выполнении условий теоремы управление для ведомого объекта, обеспечивающее линейную внутреннюю устойчивость, может быть выбрано независимо от управления ведущего в виде $u_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = S\mathrm{x}_2 + (N - S)\mathrm{x}_1 + (k + Sd_{21})$, то есть в свойстве переставлены кванторы

$$\ldots(\exists S_2, K_1, k_2)(\forall S_1)\ldots$$

Доказательство.

Необходимость.

При заданных x_{10}, x_{20} и $S_1 = 0$ берем S_2, K_1, k_2 обеспечивающие требуемое свойство. По формуле Коши получаем

$$z(t) = -e^{t\tilde{A}_2}x_{20} + \left[\int_0^t e^{(t-\tau)\tilde{A}_2}B_2K_1e^{\tau A_1}d\tau \; - \; e^{tA_1}\right]x_{10} + \int_0^t e^{(t-\tau)\tilde{A}_2}B_2k_2d\tau + d_{21}$$

где $\tilde{A}_2 = A_2 + B_2S_2$.

При этом выполняется оценка

$$\|z(t)\| \leq \beta(\|z_0\|, t) + \gamma_1(\sup_{\tau\in[0,t]} \|u_1(x_1(t))\|) = \beta(\|z_0\|, t).$$

Обозначим $\phi(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)\tilde{A}_2}B_2k_2d\tau + d_{21}$. Тогда, при $x_{10} = x_{20} = 0$ получаем $\phi(t) \to 0$.

Отсюда при $x_{10} = 0$ получаем $e^{t\tilde{A}_2}x_{20} \to 0$. Следовательно $e^{t\tilde{A}_2}$ асимптотически устойчива.

Далее, можно показать, что $\tilde{A}_2\phi(t) = e^{t\tilde{A}_2}B_2k_2 - B_2k_2 + \tilde{A}_2d_{21}$. Поэтому $B_2k_2 = \tilde{A}_2d_{21} = A_2d_{21} + B_2S_2d_{21}$ и $B_2(k_2 - S_2d_{21}) = A_2d_{21}$.

Аналогично, при $x_{10} = x_{20} + d_{21}$ пролучаем $z_0 = 0$ и

$$\|z(t)\| \leq \beta(\|z_0)\|, t) = \beta(0, t) \equiv 0.$$

Отсюда получается разрешимость системы $B_2 N = A_2 - A_1$.

Достаточность.

При управлении ведомого

$$u_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = S\mathrm{x}_2 + (N - S)\mathrm{x}_1 + (k + Sd_{21})$$

можно показать, что ошибка удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = (A_2 + B_2 S)\mathrm{z} - B_1 u_1.$$

Поэтому

$$z(t) = e^{t\tilde{A}_2}\mathrm{z}(0) - \int_0^t e^{(t-\tau)\tilde{A}_2} B_1 u_1(x_1(\tau))d\tau$$

где $\tilde{A}_2 = A_2 + B_2 S_2$. Тогда легко получается оценка

$$\|z(t)\| \leq= Ce^{-\alpha t}\|\mathrm{z}(0)\| + C\|B_1\|\alpha^{-1} \sup_{\tau\in[0,t]} \|u_1(x_1(t))\|.$$

Что и требовалось доказать.

Аналогичное утверждение получено для формации из трех объектов, из которых два ведущих (лидеры) и один ведомый. При этом получается, что для линейной внутренней устойчивости необходимо совпадение динамики лидеров и равенство векторов, определяющих расположение объектов. Ясно, что практически второе условие является не реальным. Более точно верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Формация из трех объектов (1-ый и 2-ой ведущии для 2-го ведомого), динамика которых задается уравнениями*

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = A_1\mathrm{x}_1 + B_1 u_1,\ u_1(\mathrm{x}_1,) = S_1\mathrm{x}_1, \\ \dot{x}_2 = A_2\mathrm{x}_2 + B_2 u_2,\ u_2(\mathrm{x}_2,) = S_2\mathrm{x}_2, \\ \dot{x}_3 = A_3\mathrm{x}_3 + B_3 u_3,\ u_3(\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = S_3\mathrm{x}_3 + K_1\mathrm{x}_1 + K_2\mathrm{x}_2 + k_3, \end{array} \qquad (5)$$

и заданных векторов $d_{32}, d_{31} \in R^n$ является линейно внутренне устойчивой то выполнены условия

1) пара (A_3, B_3) стабилизируема, т.е. существует $m \times n$-матрица S такая, что система $\dot{x}_3 = (A_3 + B_3 S)x_3$ асимптотически устойчива;

2) $d_{32} = d_{31} = d$, $A_1 = A_2 = A$

3) существует вектор $k \in R^n$ и $m \times n$-матрица N, удовлетворяющие линейным уравнениям

$$\begin{aligned} B_3 k &= A_3 d, \\ B_3 N &= A - A_3. \end{aligned}$$

Если, кроме того, матрица N стабилизирующая, то есть система $\dot{x}_3 = (A_3 + B_3 N)x_3$ асимптотически устойчива, (при этом $A_3 + B_3 N = A$) то формация линейно внутренне устойчива и u_3 можно выбрать в виде

$u_3 = N x_3 + (k + Nd)$ (не зависит от S_1 и S_2).

Для получения условий линейной внутренней устойчивости произвольной формации достаточно выписать соответствующие условия для каждого ребра графа G и для каждой пары ребер в случае разных ведущих для одного ведомого.

Полученные условия уточняют и обобщают соответствующие условия H.G. Tanner'a, G.J. Pappas'a, V. Kumar'a.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 19-08-00746 и № 19-01-00301).

Конференции

1. Васильев С.Н., Лакеев А.В., Максимкин Н.Н. Исследование динамических свойств формаций и систем с переменной структурой // XXL конференция памяти Н.Н.Острякова (в рамках 1-ой Российской мультиконференции по проблемам управления), Санкт-Петербург, ЦНИИ "Электропривор 10-12 октября 2006 г.

2. Vassilyev S.N., Lakeyev A.V. Dynamics of hybrid systems and formations with control // 14th International workshop on Dynamics and Control, Moscow - Zvenigorod, 27.05-2.06. 2007.

3. Васильев С.Н., Козлов Р.И., Лакеев А.В. Развитие метода функций Ляпунова в теории гетерогенных и других динамических систем // Международный конгресс "Нелинейный динамический анализ 2007"Санкт-Петербург, 4-8 июня 2007 г. (пленарный доклад).

4. Лакеев А.В., Коркин П.А. О внутренней устойчивости формаций // 14-я Байкальская международная школа-семинар "Методы оптимизации и их приложения Иркутск-Байкал, 2-8 июля, 2008.