УДК 372.851

О КОНСТРУИРОВАНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

Казаков Н.А.
ГОУ ВО МО «Московский государственный областной университет», г. Мытищи

Кузнецова Т.И.
Институт русского языка и культуры ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», г. Москва

Аннотация. *Данная статья является вспомогательным материалом для подготовки учителей и учащихся к решению задач с параметром графическим методом на плоскости. Для учителей она выступит руководством к разработке учебно-методического материала для конструирования типовых задач с параметром в целях дифференциации обучения*, учащимся *поможет сформировать первичные представления о некоторых типах задач с параметром, которые могут быть решены графическим способом, что в перспективе позволит им с первого взгляда определять способ решения.*

Ключевые слова: *ЕГЭ; задачи с параметром; конструирование задач; разработка учебно-методического материала.*

Задачи с параметром входят в состав профильного ЕГЭ по математике и, как правило, вызывают у учащихся старших классов наибольшую трудность, которая обусловлена многими причинами, отметим некоторые из них:

- отсутствие комплексного представления материала о способах решения задач с параметром в школьных учебных пособиях;
- пробелы в знаниях учащихся и отсутствие у них осознанного понимания связи между способами решения задач: графическим, аналитическим, алгебраическим и т. д.;
- неподготовленность учителей в связи с отсутствием единой методики подготовки учащихся к решению задач с параметром;
- нехватка времени в рамках учебной программы.

Данное исследование посвящено методике разработки вспомогательного материала для подготовки учителей и учащихся к решению задач с параметром графическим методом в плоскости xOy.

Суть графического метода состоит в следующем. Пусть задано уравнение вида $f(x;a)=g(x;a)$, где f и g – некоторые функции, и поставлена задача о нахождении количества решений уравнения в зависимости от параметра a. Тогда в координатной плоскости xOy построим графики функций $y_1=f(x;a), y_2=g(x;a)$, и рассмотрим все принципиально различные (с точки зрения условия задачи) случаи их взаимного расположения. Количество точек пересечения графиков в каждом случае будет равно количеству решений.

Подготовительным этапом является повторение основных семейств функций, образованных с помощью параллельного переноса. Это означает, что семейство функции $y=f(x+p)+q$ можно получить путём сдвига (параллельного переноса) каждой точки графика функции $y=f(x)$. При этом

если $p>0$, то сдвигаем график по оси Ox на p единиц влево;

если $p<0$, то сдвигаем график по оси Ox на p единиц вправо;

если $q>0$, то сдвигаем график по оси Oy на q единиц вверх;

если $q<0$, то сдвигаем график по оси Oy на q единиц вниз;

если $p=0$ или $q=0$, то сдвиг по соответствующим осям не производится.

Перейдём к рассмотрению основных семейств функций, где $y=f(x)$ – заданная функция, a, b, k, R – числа.

Семейство 1. $y=a$ — семейство прямых, параллельных оси *x*. См. рис. 1.

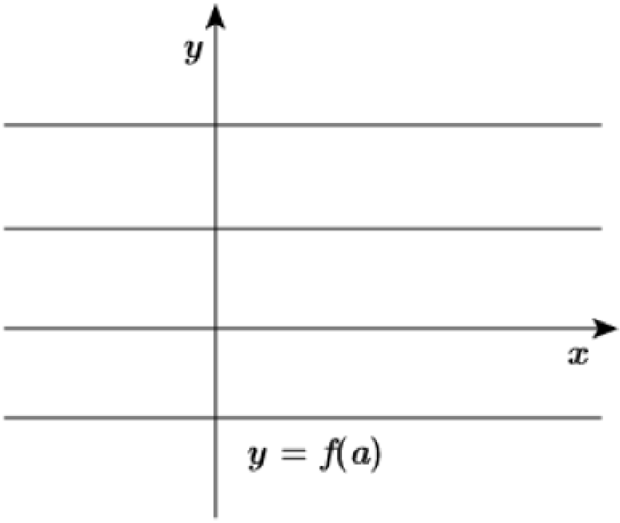


Рис. 1

Семейство 2. $y = kx + a,\ k \neq 0,$ — семейство прямых, параллельных прямой $y = kx$. См. рис. 2.

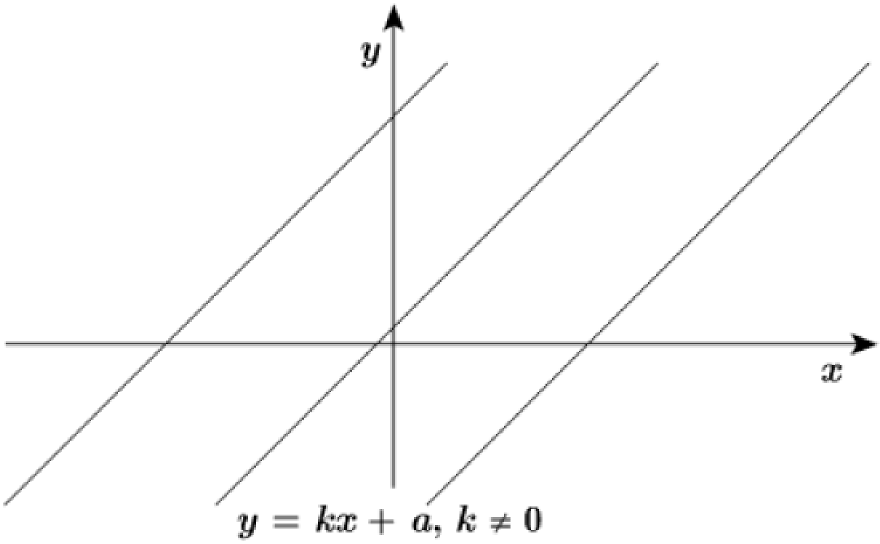


Рис. 2

Семейство 3. $y - y_0 = a(x - x_0)$ — семейство прямых, поворачивающихся вокруг точки $A(x_0; y_0)$. См. рис. 3.

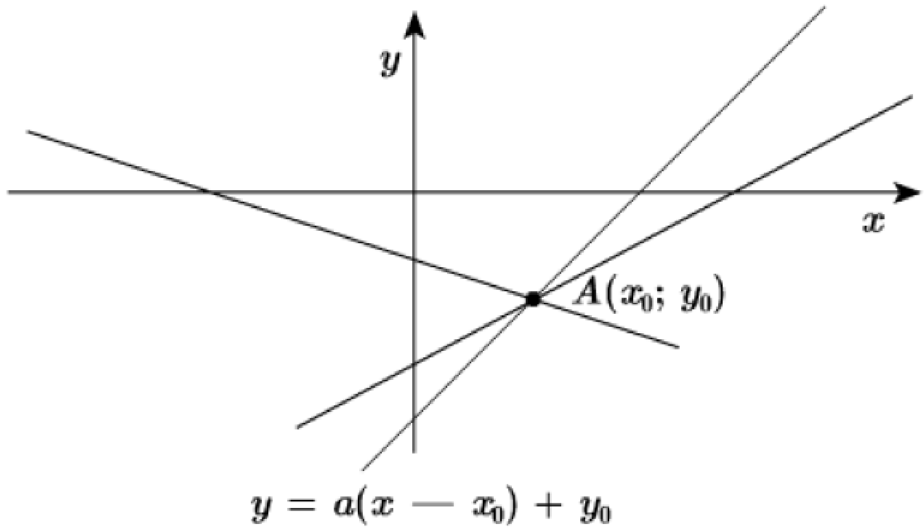


Рис. 3

Семейство 4. $y = |x - a| + b$ — семейство "уголков", вершины которых имеют координаты $(a; b)$. Все они расположены не ниже прямой $y = b$. См. рис. 4.

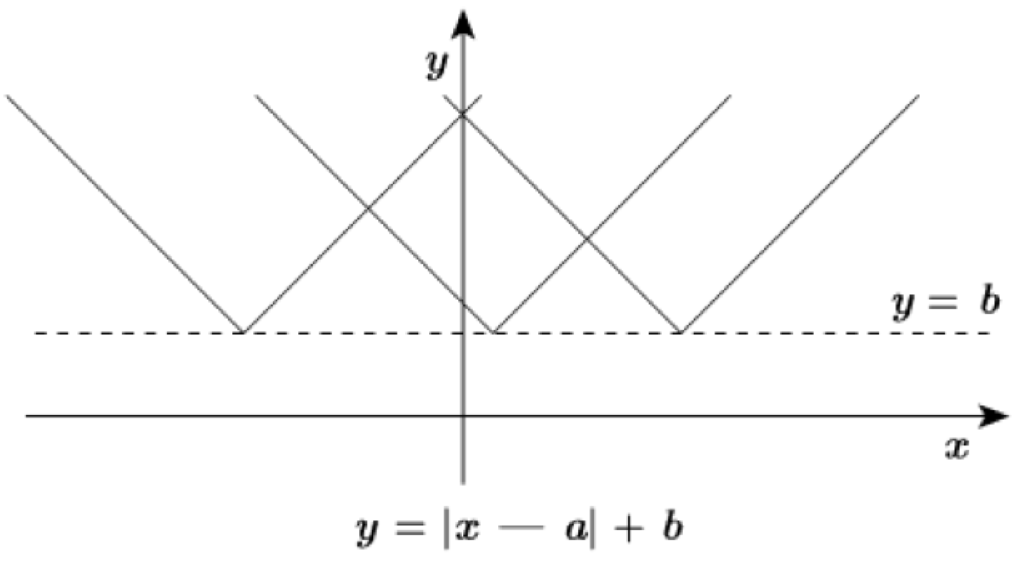


Рис. 4

Семейство 5. $y = \sqrt{x - a} + b$ — семейство полупарабол вида $y = \sqrt{x}$, вершины которых имеют координаты $(a; b)$. Все они расположены не ниже прямой $y = b$. См. рис. 5.

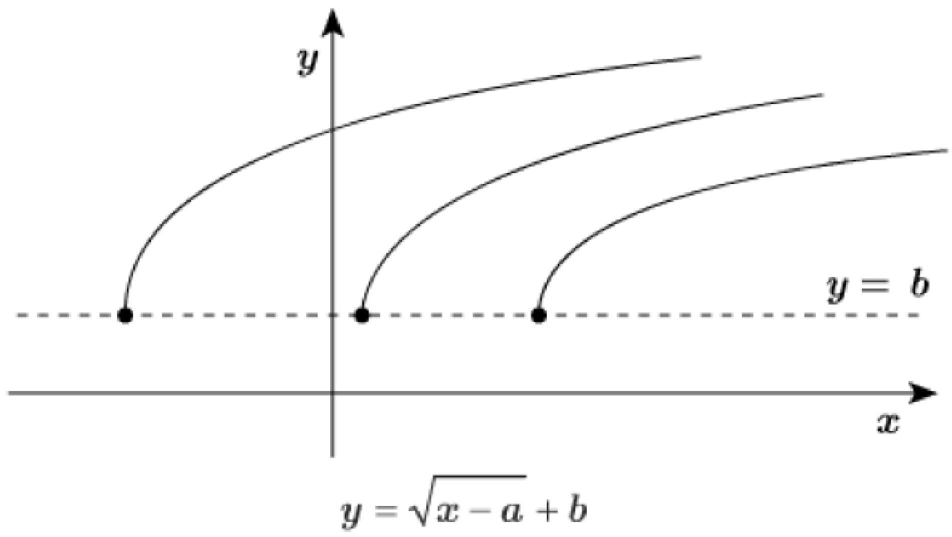


Рис. 5

Семейство 6. $\sqrt{y-b}=x-a$ — семейство полупарабол вида $y=x^2$, вершины которых имеют координаты $(a;b)$. Каждая из этих полупарабол расположена не ниже прямой $y=b$, справа от прямой $x=a$. См. рис. 6.

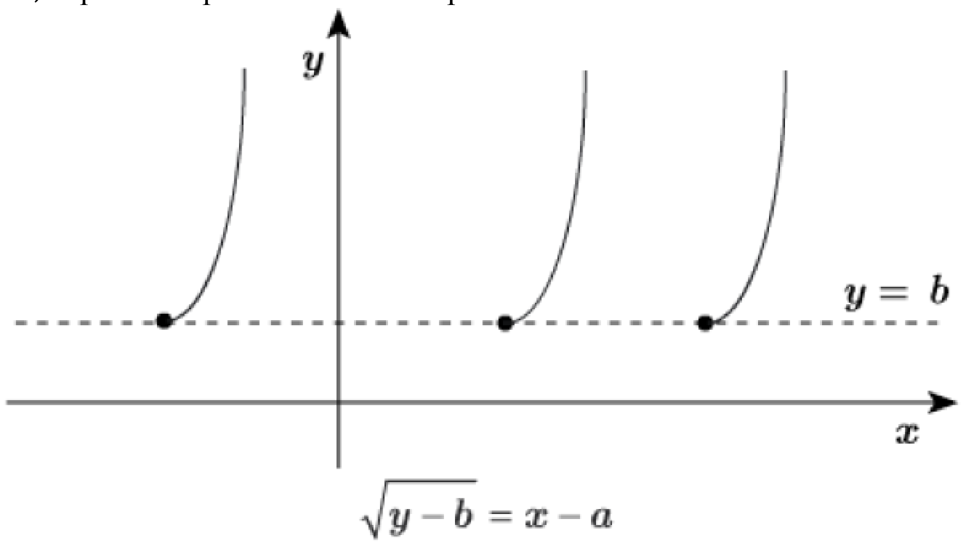
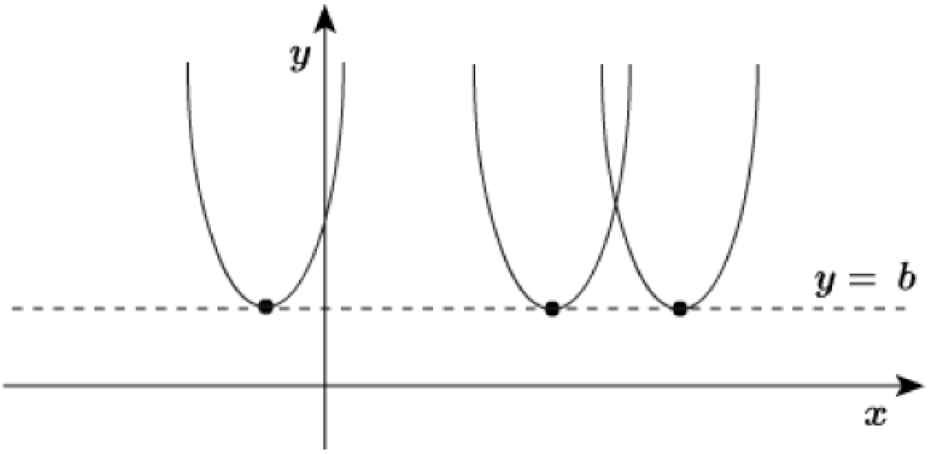


Рис. 6

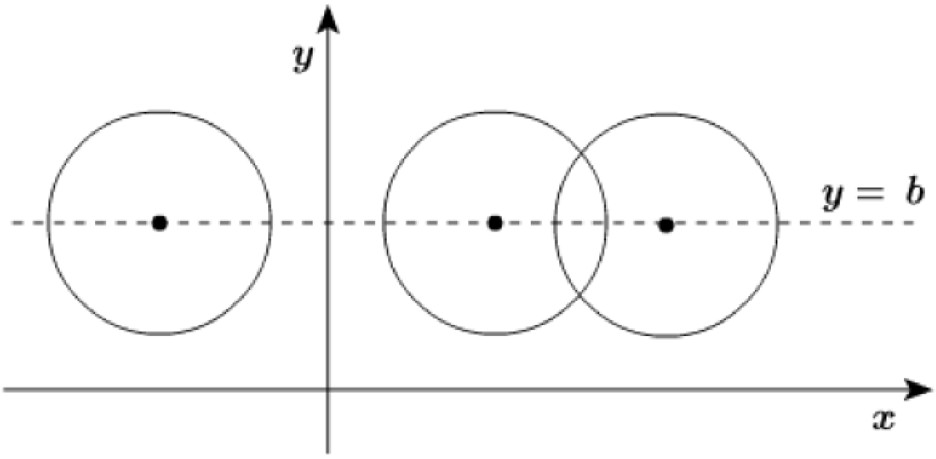
Семейство 7. $y=(x-a)^2+b$ — семейство парабол вида $y=x^2$, вершины которых имеют координаты $(a;b)$. Все они расположены не ниже прямой $y=b$. См. рис. 7.



$y = (x - a)^2 + b$

Рис. 7

Семейство 8. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ — семейство окружностей с центрами $O(a;b)$ и радиусом, равным $|R|$. См. рис. 8.



$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Рис. 8

Семейство 9. $y=\sqrt{R^2-(x-a)^2}+b$ — семейство полуокружностей с центрами $O(a;b)$ и радиусом, равным $|R|$. Все они расположены не ниже прямой $y=b$. См. рис. 9.

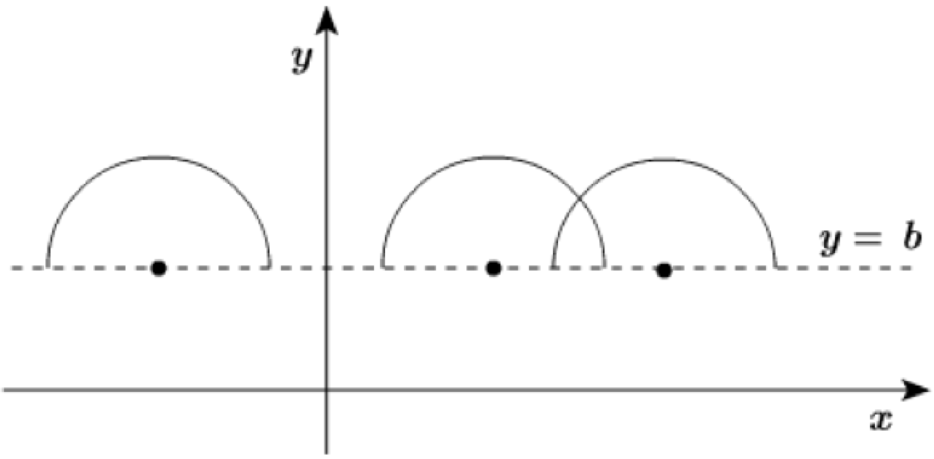


Рис. 9

Семейство 10. $|x - x_0| + |y - y_0| = a,\ a > 0,$ — семейство "ромбов" с общим центром $A(x_0;\ y_0)$, диагонали которых равны $2a$. См. рис. 10.

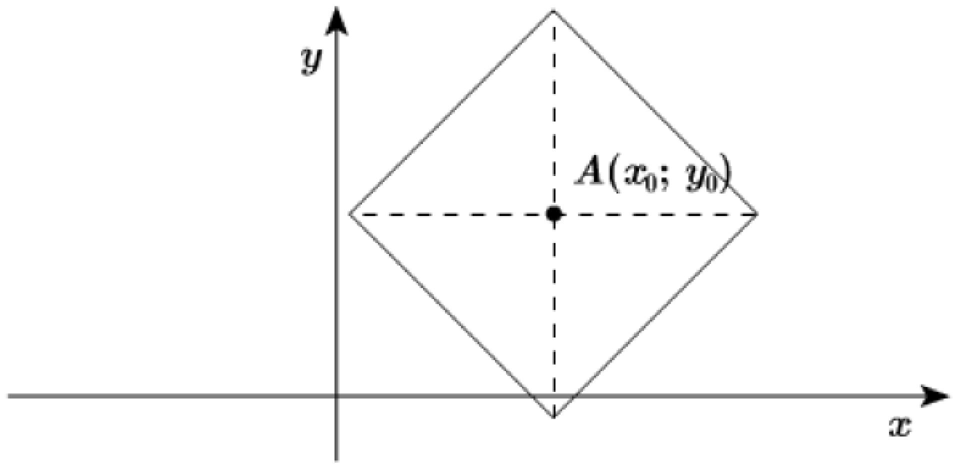


Рис. 10

Семейство 11. $|x - y| + |x + y| = 2a,\ a > 0,$ — семейство "квадратов" с общим центром в начале координат и со сторонами, длины которых равны $2a$. См. рис. 11.

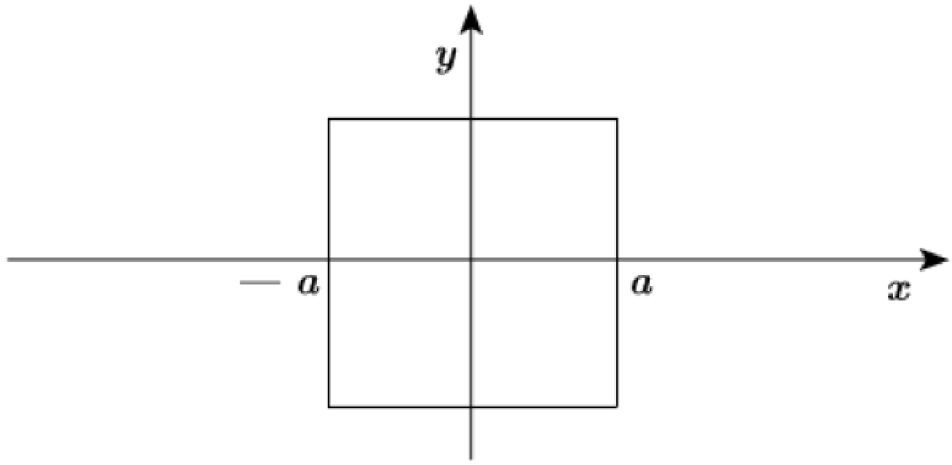


Рис. 11

Семейство 12. $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-a)^2}$ — сумма расстояний от точки с координатами $(x; y)$ до точек с координатами $(a; 0)$ и $(0; a)$. См. рис. 12.

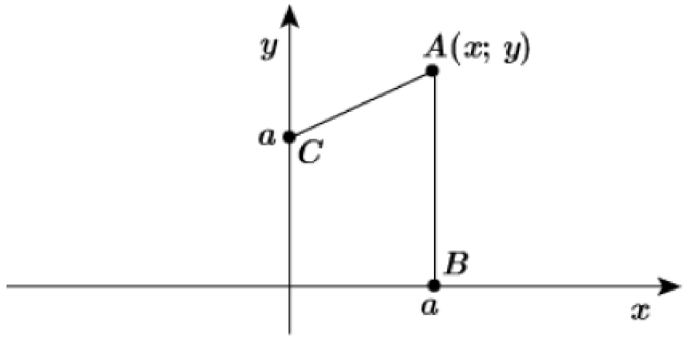


Рис. 12

Полезно также вспомнить о преобразованиях графиков: растяжение (сжатие), отражение относительно осей:

1. График функции $y = k \cdot f(x)$, $k > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в k раз вдоль оси ординат (причем при $k > 1$ это действительно растяжение, а при $0 < k < 1$ – сжатие).

2. График функции $y = f(k \cdot x)$, $k > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз вдоль оси абсцисс ((причем при $k > 1$ это действительно сжатие, а при $0 < k < 1$ – растяжение).

3. График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отображением всех его точек, расположенных ниже оси абсцисс, в верхнюю координатную полуплоскость.

4. График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отображением, относительно оси ординат всех его точек, расположенных справа от оси ординат, в левую координатную полуплоскость.

5. График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ отображением всех его точек симметрично относительно оси абсцисс, т. е. происходит визуальное «переворачивание» графика функции.

Так, используя графические представления семейств простейших функций, а также свойства преобразований графиков, появляется возможность конструирования простейших задач с параметром.

Приведём некоторые примеры, на основании которых можно составить типовые задачи с параметром соответствующих видов.

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $\big||kx| - b\big| = x - a$ имеет ровно 3 решения?

Здесь рассмотрим случай $k \neq 0,\ b > 0$ – числовые коэффициенты на выбор. Случай $b < 0$ читателю предлагается рассмотреть самостоятельно.

Указания к решению. График функции $y = \big||kx| - b\big|$ при $b > 0$ представляет собой визуально «W», где $\left(-\left|\frac{b}{k}\right|; 0\right), \left(\left|\frac{b}{k}\right|; 0\right)$ – точки пересечения с осью абсцисс, а $(0; |b|)$ — точка пересечения с осью ординат (см. рис. 13). Графики семейства функции $y = x - a$ представляют собой прямые, параллельные биссектрисе I и III координатных четвертей. Рис. 13, как и рис. 14 и 15, построен с помощью ИГС GeoGebra.

Из рисунка видно, что уравнение $\big||kx| - b\big| = x - a$ будет иметь 3 решения в том случае, когда прямая $y = x - a$ будет проходить через точки A и B.

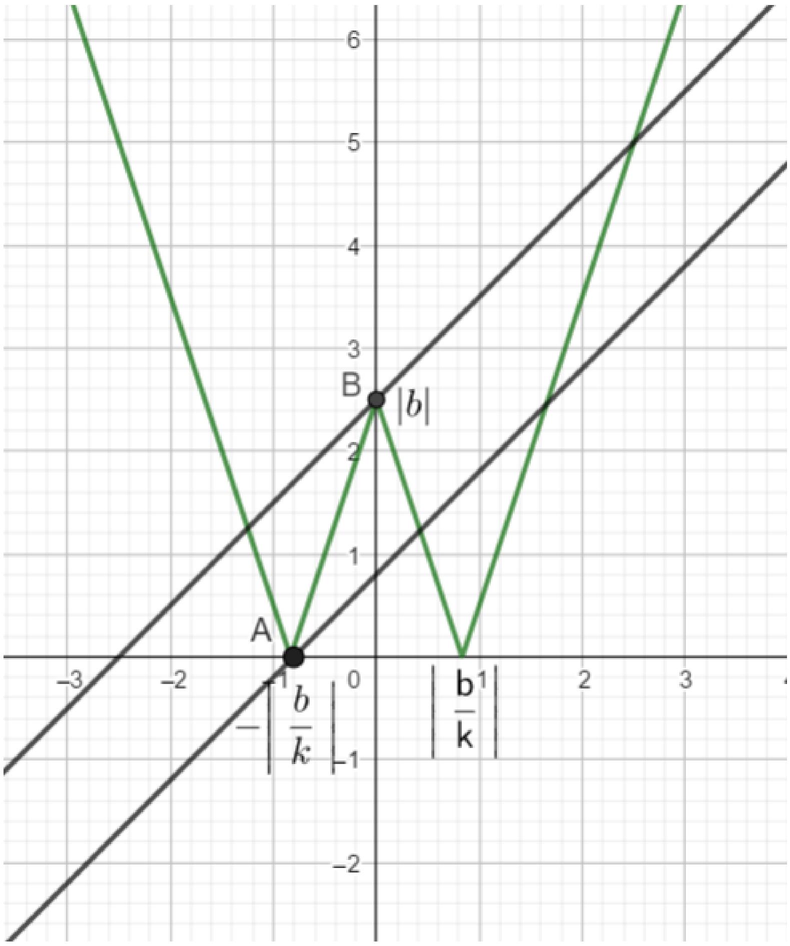


Рис. 13

В первом случае прямая $y = x - a$ проходит через точку $\left(-\left|\frac{b}{k}\right|; 0\right)$, следовательно: $0 = -\left|\frac{b}{k}\right| - a$, откуда $a = -\left|\frac{b}{k}\right|$.

Во втором случает прямая $y = x - a$ проходит через точку $(0; |b|)$, следовательно: $|b| = 0 - a$, откуда $a = -|b|$.

Таким образом, в рассматриваемом случае данное уравнение имеет ровно три решения: при $a = -\left|\frac{b}{k}\right|$ и при $a = -|b|$.

В конструировании условия данной задачи педагог может варьировать количество требуемых решений, например, искать такие значения параметра, при которых уравнение:

- не имеет решений;
- имеет одно решение (два, три, четыре решения);
- имеет не менее одного решения (двух, трех решений);
- имеет не более одного решения (двух, трёх, четырёх решений).

Пример 2. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y - k^2 = x^2 - k(2x + 1) \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2(kx - ay) \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Здесь $k > 0$ — некоторое число, коэффициент выбора.

Указания к решению. Преобразуем уравнения в системе:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2kx + k^2 - k \\ x^2 - 2kx + k^2 + y^2 + 2ay + a^2 = k^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y = (x - k)^2 - k \\ (x - k)^2 + (y + a)^2 = k^2 \end{cases}.$$

Графиком первой функции является парабола $y = x^2$ с вершиной в точке $(k;\,-k)$. Графиком второй функции является окружность с центром в точке $(k;\,-a)$ и радиусом, равным $|k|$. См. рис. 14. Определить значение параметра a, удовлетворяющее условию, легко, построив графики и оценить их взаимное расположение. Из уравнений следует, что на рисунке точки D, E, A, C имеют следующие координаты:

$$\mathrm{D}(k;0), \mathrm{E}(k;-k); \mathrm{A}(k;-a); \mathrm{C}(0;-k). \quad (*)$$

Очевидно, что единственное решение уравнение будет иметь в том случае, когда парабола касается окружности, что возможно при условии равенства отрезков DE и EA. А это означает, что центр окружности A имеет координаты $(k;-2k)$. Сравнив их с координатами (*), получаем $a = 2k$.

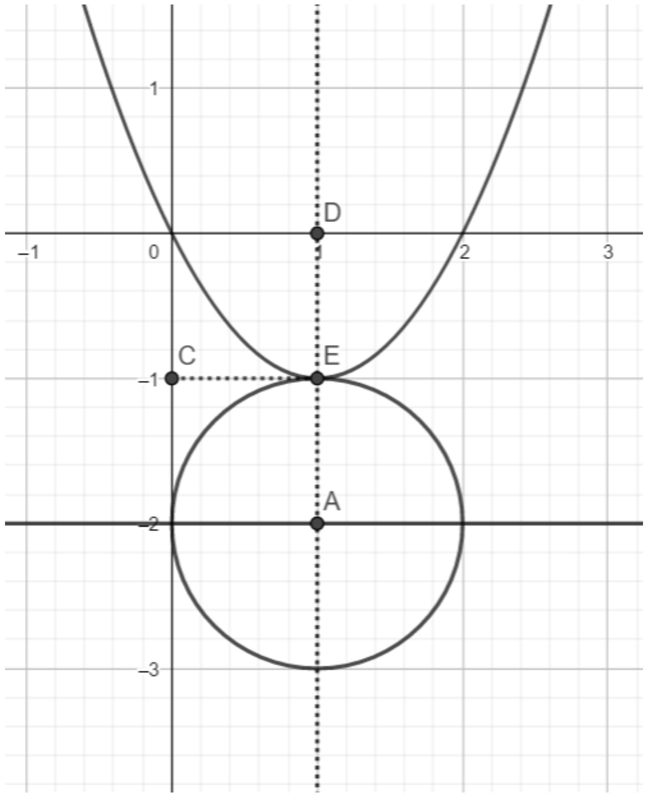


Рис. 14

Таким образом, рассматриваемая система имеет единственное решение при $a = 2k$.

В конструировании условия данной задачи учитель (педагог) может, как и в примере 1, варьировать количество требуемых решений, например, искать такие значения параметра, при которых система:

- не имеет решений;
- имеет одно решение (два, три решения);
- имеет не менее одного решения (двух, трех решений);
- имеет не более одного решения (двух, трёх решений).

Пример 3. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax - m = \sqrt{2px - x^2 + q^2 - p^2}$$

имеет единственное решение? Здесь $m, p, q -$ коэффициенты выбора, не равные 0. При конструировании задачи разность $q^2 - p^2$ может быть задана в неявном виде, т. е. представлена в виде конкретного числового значения, являющегося(имся) результатом вычисления данной разности. При такой ситуации необходимо сводить уравнение к изначальному виду путём подбора коэффициентов, обращая внимание на одночлен $2px$.

Указания к решению. Рассмотрим случай $m > 0$, предлагая читателю рассмотреть остальные случаи самостоятельно. Функция $y = ax - m$ представляет собой семейство (пучок) прямых, проходящих через точку $A(0; -m)$. Таким образом, имеем

$$y = \sqrt{2px - x^2 + q^2 - p^2}.$$

Возведем в квадрат обе части этого уравнения при условии $y \geq 0$ (для собдюдения равносильности) и преобразуем его:

$$\begin{cases} y^2 = 2px - x^2 + q^2 - p^2 \\ y \geq 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (x - p)^2 + y^2 = q^2 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

График данной функции представляет собой полуокружность с центром в точке $(p; 0)$ и радиусом $|q|$. См. рис. 15.

Чтобы удовлетворить условию, необходимо, чтобы прямая $y = ax - m$ проходила через точку D – точку касания, а также между точками B и C, не включая последнюю, как показано на рисунке.

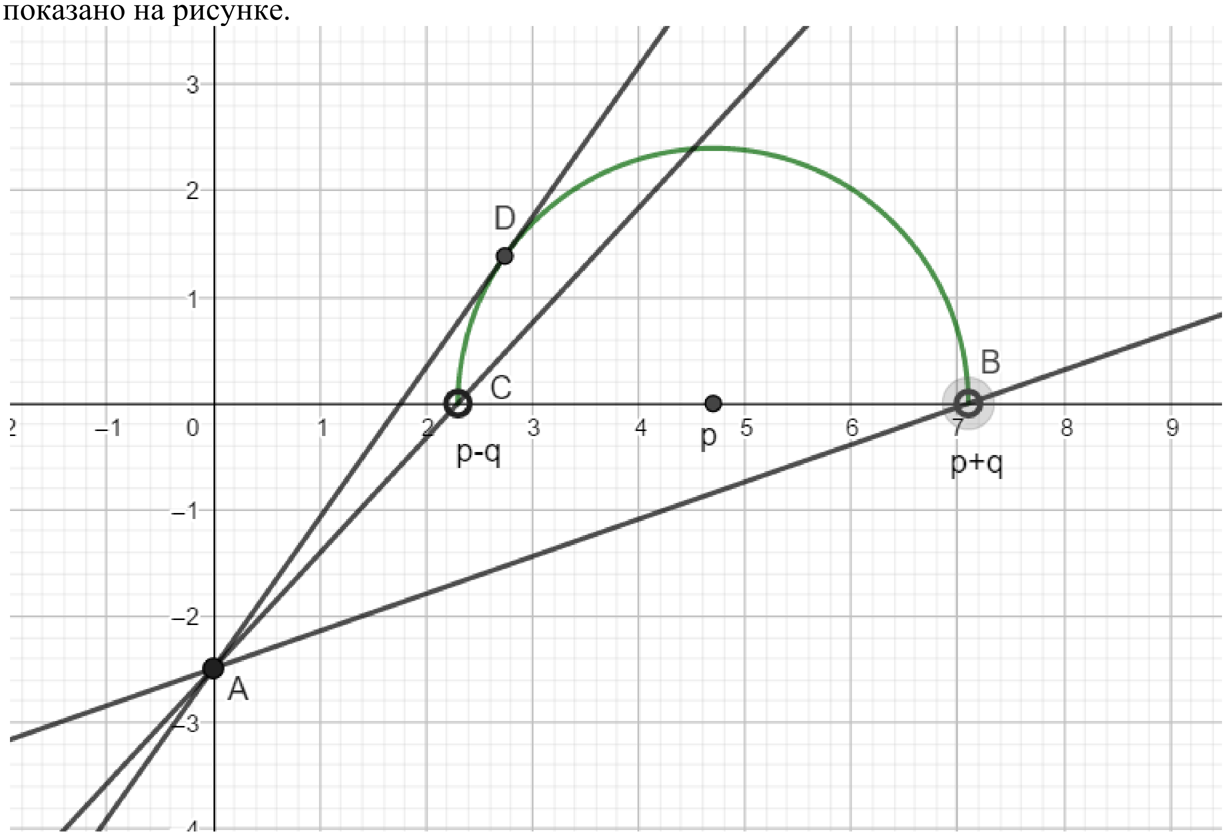


Рис. 15

Итак, прямая $y = ax - m$ проходит через точки $C(p - q; 0)$ и $B(p + q; 0)$, следовательно, имеет место совокупность уравнений:

$$\left[\begin{aligned} 0 &= a(p - q) - m \\ 0 &= a(p + q) - m \end{aligned}\right.,$$

откуда получаем

$$\left[\begin{aligned} a &= \frac{m}{p - q} \\ a &= \frac{m}{p + q} \end{aligned}\right..$$

Значит, единственная точка пересечения будет при $a \in \left[\frac{m}{p+q}; \frac{m}{p-q}\right)$.

Теперь исследуем точку касания. Поскольку точка пересечения единственная, то уравнение

$$(ax-m)^2 = 2px - x + q^2 - p^2$$
должно иметь 1 решение.

Преобразовав это уравнение, получим квадратное уравнение:

$$x^2(a^2+1) - 2px + m^2 + p^2 - q^2 = 0, \qquad (**)$$

которое имеет одно решение, если его дискриминант равен 0. Запишем это условие и найдём из него искомые значения искомого параметра:

$$D = 4p^2 - 4(a^2+1)(m^2+p^2-q^2) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{\dfrac{p^2}{m^2+p^2-q^2} - 1} \\ a = -\sqrt{\dfrac{p^2}{m^2+p^2-q^2} - 1} \end{array}\right. .$$

Для последних найденных значений параметра нужно осуществить проверку, подставив в функцию $y = ax - m$ и проверить количество пересечений с полуокружностью. Посторонние значения могут возникать в результате осуществлённого нами перехода к квадратному уравнению (**), который не является равносильным (квадратное уравнение является уравнением-следствием исходного уравнения).

В конструировании условия данной задачи, как и двух предыдущих, педагог может варьировать количество требуемых решений.

Заключение. Настоящее исследование является продолжением исследований [1–3], оно поможет учащимся сформировать первичные представления о некоторых типах задач с параметром, которые будут решаться графическим способом, что в перспективе позволит им с первого взгляда в перспективе определить способ решения задачи. Для учителей данное исследование может выступить, в соответствии с ФГОС [4], отличным средством для конструирования типовых задач с параметром — в целях дифференциации обучения, разработки учебно-методического материала. Использование ИГС, в том числе GeoGebra, начатое в работах [5–8], свидетельствует о современном подходе к решению научно=методических задач.

Литература

1. *Васильева В.А., Забелина С.Б., Кузнецова Т.И.* Применение пучка прямых на плоскости при решении уравнений и систем уравнений с параметром (из опыта работы на подготовительных курсах вузов естественно-математического и экономического профилей) / Вестник ЦМО МГУ, № 6, ч. 3, 2006. С. 32–39.

2. *Жарков Д.В.* Основные методы решения задач с параметрами и текстовых задач с параметрами: Статья // Вестник МГОУ, 2014 (март). – 20 с.

3. *Жарков Д.В., Кузнецова Т.И.* Текстовые задачи с параметрами как класс задач повышенной трудности в школьном курсе элементарной математики» / Интеграционные процессы в естественнонаучном и математическом образовании: Сборник научных трудов участников международной конференции. Москва, РУДН, 4–6 февраля 2013 г. / Под общей ред. Е.И. Саниной. – М.: РУДН, 2013. С. 245–255.

4. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования/ М-во образования и науки Рос. Федерации. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 48 с.

5. *Казаков Н.А.* Интерактивные средства и технологии визуализации учебного материала в современном образовании / Современное технологическое образование: проблемы и решения [Электронный ресурс]: сборник научных статей Международной научно-практической интернет-конференции (г. Москва, 21 февраля 2019 г.) / отв. ред. Л.Н. Анисимова, С.С. Хапаева. – Электрон. текстовые дан. (7,02 Мб). – М.: ИИУ МГОУ, 2019. С. 81–86.

6. *Казаков Н.А., Пантелеймонова А.В.* Моделирование. Применение интерактивных геометрических сред как методическое средство повышения качества подготовки к ЕГЭ по

математике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2018. № 3. С. 117–128.
7. *Казаков Н.А., Солдатенков Р.М.* Использование интерактивных геометрических сред при обучении математике / Актуальные проблемы математики, физики и математического образования [Электронный ресурс] : сборник трудов кафедры математического анализа и геометрии / под ред. Г.В. Кондратьевой, Е.А. Бедриковой, Д.А. Графова – Электрон. текстовые дан. (7,50 Мб). – М. : ИИУ МГОУ, 2018. С. 73–76.
8. *Казаков Н.А., Кузнецова Т.И.* Из истории терминов «Модель» и «Моделирование». Часть 5. Систематизация возможностей использования интерактивных геометрических сред на уроках математики // Проблемы учебного процесса в инновационных школах: сб. науч. тр. / под ред. О. В. Кузьмина. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2019. – Вып. 23. – С. 86–90.

Kazakov N.A.
Moscow State Regional University
Kuznetsova T.I.
Lomonosov Moscow State University, Institute of Russian Language and Culture

ABOUT DESIGNING TASKS WITH PARAMETER

Summary. This article is an auxiliary material for preparing teachers and students to solve tasks with the parameter graphical method on the plane. For teachers, she will guide the development of a teaching and methodological material for designing standard tasks with a parameter in order to differentiate learning, students will help to form primary ideas about some types of tasks with a parameter, which can be solved graphically, which in the future will allow them to determine the method of solution at first sight.

Keywords: USE; tasks with parameter; designing of tasks; development of educational and methodical material.