УДК 519.107.58

О проблемах, возникающих у учащихся при решении задач математической логики и теории вероятностей

Н.Н. Зепнова

Иркутский национальный исследовательский технический университет (ИРНИТУ)

Статья посвящена вопросам решения логических, комбинаторных и вероятностных задач. Рассматриваются различные подходы к решению подобных задач с применением методов теории множеств, математической логики. Приведены подробные решения задач, вызывающих затруднения у студентов. Даны методические рекомендации преподавателям по совершенствованию учебного процесса. Статья может быть полезна студентам, изучающим дискретную математику и теорию вероятностей, и начинающим преподавателям.

Ключевые слова: математика, решение задач, дискретная математика, математическая логика, теория множеств, комбинаторика, теория вероятностей.

N.N. Zepnova

About problems, which difficult for the students, when discrete mathematics and probability theory problems are solved

This article is devoted to the methods of logical, combination and probability problems. The methods of solution different problems with apply methods theory of set, mathematic logic is in focus. Detailed solution problems, which difficult for the students, is examine. The methodic recommendations on improving the educational process are made. The article can be useful for students, who learn the probability theory and discrete mathematics, and for teacher of mathematics.

Keywords: mathematics, solution problems, discrete mathematics, mathematic logic, set theory, combination theory, probability theory.

Решение математических задач и, в частности, задач математической логики и теории вероятностей, зачастую сопряжено для студентов и школьников с большими трудностями. Это обусловлено, на наш взгляд, падением уровня не только абстрактного, логического мышления учащихся, но и уровня математического образования вообще.

Собственный опыт преподавательской работы в ВУЗе, ознакомление с мнениями других преподавателей в прессе и в сети Интернет, позволяют сделать вывод о крайне слабой математической подготовке большинства абитуриентов, поступающих в технические ВУЗы, и их нежелании ликвидировать пробелы в своем образовании.

Но при решении задач математической логики и теории вероятностей возникает, кроме недостаточной общей подготовки, и своя, специфическая проблема, когда субъективные восприятия мешают критично воспринять условия задачи и найти правильный способ решения.

По мнению Карла Пирсона, в математике нет другой области, в которой столь же легко допустить ошибку, как теория вероятностей. (По нашему мнению, это же утверждение можно отнести и к математической логике). Причиной этого, скорее всего, является кажущаяся «очевидность», «логичность» некоторых рассуждений, опирающихся на так называемый «здравый смысл», а не на математический подход. Только очень самонадеянный человек решает, например, дифференциальные уравнения, полагаясь не на теорию и строгие правила, а на догадки. При решении же задач теории вероятностей, а также некоторых типов логических и комбинаторных задач у аудитории, напротив, сразу возникает целый ряд предположений и допущений, якобы ведущих к решению. Но эту активность, пожалуй, следует стимулировать и уж во всяком случае нельзя подавлять. С методологической точки зрения, иная ошибка ценнее, чем безошибочные, но рутинные действия.

В простейших задачах теории вероятностей элементарные исходы пересчитываются буквально «на пальцах», но в этой кажущейся простоте часто и кроется опасность ошибки. Иногда для подсчета количества элементарных исходов лучше применить формулы комбинаторики. Но здесь основная трудность, (и, следовательно, источник ошибок) обычно состоит в выборе вида соединений (перестановки, сочетания, размещения – с повторениями или без них). Во многих случаях ввести множество элементарных исходов можно по-разному, и этому будет соответствовать выбор разных видов соединений [2].

Задача 1: Сколькими способами можно распределить 15 выпускников по трем районам, если в одном из них имеется 8, в другом – 5, а в третьем 2 вакансии?

Решение: Эту задачу можно решать по –разному.

а) Можно выбирать студентов (при этом студенты не повторяются). В первый район есть $C_{15}^{8} = \frac{15!}{8!*7!}$ способов выбора, во второй район - $C_{7}^{5} = \frac{7!}{5!*2!}$, а в третий – только один способ: C_{2}^{2}. Тогда количество всех возможных вариантов распределения $N = \frac{15!}{8!*7!} * \frac{7!}{5!*2!} * \frac{2!}{2!} = \frac{15!}{8!*5!*2!} = 19305.$

б) Можно выбирать из районов (при этом районы могут повторяться). Тогда количество способов распределения $N = \overline{P}_{15/8,5,2} = \frac{15!}{8!*5!*2!}$

Очевидно, и тем, и другим способом получили одинаковое количество распределений.

Здесь важно объяснить студентам, что одна и та же задача может решаться по различным правилам комбинаторики, в зависимости от того, из чего составляются выборки.

Задача 2: Сколько существует способов рассадить за круглым столом 10 мужчин и 10 женщин так, чтобы рядом не сидели ни двое мужчин, ни две женщины?

Решение: В условиях задачи есть очень существенное замечание, что людей рассаживают за круглым столом, так как в данной ситуации неважно, кого усадили первым – мужчину или женщину. Поэтому можно начать с того, чтобы подсчитать количество способов, сколькими можно усадить на любое выбранное место, например, мужчину: их 10. На соседнее место в выбранном по кругу порядке, например, справа, нужно усадить женщину. Количество способов выбора женщины также 10. На следующее место в выбранном направлении нужно опять усадить мужчину, но способов выбора мужчин только 9, поскольку один мужчина уже выбран. Дальше нужно снова усадить женщину, и способов выбора также 9. И т. д.

Таким образом, есть 10*9*8*…*2*1=10! способов рассаживания мужчин (то есть число перестановок из 10) и также 10*9*8*…2*1=10! способов рассаживания женщин. Значит, всего имеем 10!*10! способов. Обобщая этот результат на случай n мужчин и n женщин, получаем n!*n!.

Трудность объективного восприятия студентами данной задачи в том, что не ясно, как учитывается тот факт, что мужчины и женщины должны чередоваться. Ведь в том, что 10 мужчин и 10 женщин рассаживаются в произвольном порядке, не усматривается обязательное выполнение этого условия: кажется, что они могут рассаживаться как угодно.

В данном случае важно объяснить студентам, что все остальные возможные комбинации (когда могут рядом сидеть несколько мужчин и несколько женщин) учитываются в количестве перестановок 20! (В общем случае (2n)!). И в случае вычисления вероятности данного события 20! – это количество всех возможных исходов, а 10!*10! – количество благоприятных.

Если же людей рассаживают не за круглым столом, а на лавке (при соблюдении условия чередования), то количество благоприятных исходов увеличивается в 2 раза, так как на первом месте может сидеть как мужчина, так и женщина - и это будут разные комбинации, а количество всех возможных исходов останется таким же [4].

Задача 3: Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно: выиграть одну партию из двух или две из четырех (возможность ничьей исключается)?

Решение: Субъективное впечатление, что вероятность этих событий должна быть одинакова и равна 1/2. Однако это не так.

Пусть событие А - выигрыш первого игрока в одной партии. Вероятность появления события А в каждой партии постоянна и равна 1/2 (так как игроки равносильные). Требуется найти вероятность того, что в одних и тех же условиях событие А произойдет в m случаях из n. Такие задачи решаются по формуле Бернулли.

Если для одних и тех же условий производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p и не появляется с вероятностью $q = 1\text{-}p$, то вероятность появления события A m раз в n опытах находится по формуле Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

В данном случае q=1-p=1/2 и вероятность выигрыша одной партии из двух равна $P_2(1) = C_2^1 p^1 q^{2-1} = \frac{2!}{1!*1!} * (1/2)^1 * (1/2)^{2-1} = \frac{1}{2}$, а вероятность выиграть две партии из четырех равна соответственно

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^{4-2} = \frac{4!}{2!*2!} * (1/2)^2 * (1/2)^{4-2} = \frac{3}{8}.$$

Объективный подход к решению задачи противоречит субъективному впечатлению.

Кроме того, часто студенты задают вопрос: если первый игрок выигрывает два партии из четырех, то две партии он проигрывает. И, казалось бы, этим исчерпываются все возможные исходы данного опыта, поскольку события являются противоположными. То есть вероятность того, что игрок две партии проиграл и две партии выиграл в сумме должна быть равна 1. Однако вероятность проигрыша двух партий из четырех в данных условиях также равна 3/8. Но $3/8 + 3/8 = 6/8 \neq 1$!

И снова субъективное восприятие условий задачи мешает правильному объективному решению. Дело в том, что противоположным к событию «игрок выиграл две партии из четырех» является не «две остальные он проиграл», а «игрок выиграл **не** две партии из четырех». Иначе говоря, он выиграл 0, или 1, или 3, или 4 партии из четырех. А вероятности последних событий опять находятся по формуле Бернулли и в сумме как раз и составляют 5/8.

Определенные противоречия между субъективным и объективным восприятием условий задач встречаются и при изучении алгебры логики. В частности, при изучении действий с булевыми переменными вызывают недоумение некоторые свойства дизъюнкции и конъюнкции [5].

То, что конъюнкция дистрибутивна относительно дизъюнкции:

$A(B+C)=AB+AC$ не вызывает сомнения, поскольку соответствует нашим знаниям о правилах обычного умножения. На основании этого общий множитель можно выносить за скобки: $AB+AC+AK=A(B+C+K)$, что так же совпадает с субъективным восприятием. А вот следующее утверждение:

$A+BC=(A+B)(A+C)$, $A+BCK=(A+B)(A+C)(A+K)$

вызывает некоторое противоречие с нашими представлениями о законах математики. Поэтому данное свойство нужно доказывать. Для этого переменным, входящим в формулу, придаются все возможные значения, которые они могут принимать, и вычисляются значения выражений, стоящих в левой и правой частях доказываемой формулы. Если на одних и тех же наборах значений переменных значения левой и правой частей совпадают, следовательно, формула верна.

Докажем, например, свойство дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции для случая двух переменных, сведя данные в таблицу.

A	B	C	$A + BC$	$(A + B)(A + C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Очевидно, значения четвертого и пятого столбцов совпадают, следовательно, свойство доказано.

Рассмотрим задачу о проверке истинности сложных высказываний с применением законов алгебры логики.

Задача 4. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал дискретную математику?» получен верный ответ: «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал дискретную математику?

Решение:

Обозначим логическими переменными следующие высказывания:

А – «Первый студент изучал дискретную математику»;

В – «Второй студент изучал дискретную математику»;

С - «Третий студент изучал дискретную математику»;

Составим формулы для высказываний:

«Если изучал первый, то изучал и третий»: $A \Rightarrow C$

«Если изучал второй, то изучал и третий»: $B \Rightarrow C$

«Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий»: $(A \Rightarrow C) \& \neg(B \Rightarrow C)$

Составим таблицу истинности для полученных логических формул

A	B	C	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$\neg(B \Rightarrow C)$	$(A \Rightarrow B) \& \neg(B \Rightarrow C)$
Л	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	Л	И	И
Л	И	И	И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	Л	И	И	И	Л	Л
И	И	Л	Л	Л	И	Л
И	И	И	И	И	Л	Л

Очевидно, что истинные значения данное высказывание принимает в том случае, когда первый студент изучал дискретную математику, а второй и третий – нет, или второй изучал, а первый и третий – нет.

Часто возникает необходимость в составлении расписания занятий, экзаменов, и т.п., согласованных с различными условиями: пожеланиями преподавателей, требованиями деканата и т.д. Решить эту задачу также помогает алгебра логики.

Задача 5. Составить расписание пяти уроков в одном и том же классе, если все предметы должны быть различны, а преподаватели высказали следующие пожелания: преподаватель истории (И) – 1, или 4, или 5 урок; литературы (Л) – 1 или 2урок; физики (Ф) – 2 или 3 урок; математики (М) – 2 или 5 урок; химии (Х) – любой урок, кроме 1 и 5.

Решение:

Составим логические формулы, соответствующие заявкам учителей. Для этого обозначим приписывание каждого предмета к конкретному уроку соответствующей буквой с индексом. Например, $И_1$ означает, что урок истории стоит в расписании первым. Тогда заявке преподавателя истории будет соответствовать формула: $\varphi_и= И_1\vee И_4\vee И_5$. Заявке преподавателя литературы соответствует формула $\varphi_л= Л_1\vee Л_2$, заявке физика: $\varphi_ф= Ф_2\vee Ф_3$, математика: $\varphi_м= М_2\vee М_5$, преподавателя химии: $\varphi_х= Х_2\vee Х_3\vee Х_4$. Поскольку все заявки должны быть учтены, составим конъюнкцию этих формул:

$(И_1\vee И_4\vee И_5)$ & $(Л_1\vee Л_2)$ & $(Ф_2\vee Ф_3)$ & $(М_2\vee М_5)$ & $(Х_2\vee Х_3\vee Х_4)$, и проведем последовательные преобразования, учитывая, что на один урок не могут претендовать два предмета, то есть конъюнкция $И_4$ & $Х_4$ ложна. В результате получим следующую дизъюнкцию: $Л_1\&Ф_2\&Х_3\&И_4\&М_5 \vee Л_1\&Х_2\&Ф_3\&И_4\&М_5 \vee И_1\&Л_2\&Ф_3\&Х_4\&М_5\vee Л_1\&М_2\&Ф_3\&Х_4\&И_5$.

Таким образом, получилось четыре варианта расписаний.

Еще один пример практического применения алгебры логики – задача о подборе экипажа космического корабля, или подводной лодки, или других объектов, на которых предусматривается длительное совместное пребывание людей в замкнутом пространстве. Например, для космического полета составляют экипаж из трех человек: командир, инженер и врач. На должность командира претендуют четыре человека: A_1, A_2 ,A_3, A_4; на должность инженера – три человека: B_1, B_2, B_3; на должность врача – тоже трое: C_1, C_2, C_3. Сколько существует способов составления экипажа? Казалось бы, что может быть проще: 4*3*3=36. Но люди – не роботы, их нельзя переставлять, как угодно. Необходимо учитывать еще вопрос психологической совместимости.

Задача 6. Составить возможные экипажи для полета на космическом корабле, если известно, что инженер B_1 не совместим с врачом C_3, инженер B_2 – с врачом C_1, а инженер B_3 – с врачом C_2. Кроме того, командир

A_1 совместим с инженерами B_1, B_3, и врачами C_2, C_3;

A_2 совместим с инженерами B_1, B_2, и всеми врачами;

A_3 совместим с инженерами B_1, B_2, и врачами C_1, C_3;

A_4 совместим со всеми инженерами, и одним врачом C_3

Составим формулы, соответствующие последним четырем высказываниям:

$\Phi_1 = A_1 \& (B_1 \vee B_3) \&(C_2 \vee C_3)$; $\Phi_2 = A_2 \& (B_1 \vee B_2) \&(C_1 \vee C_2 \vee C_3)$

$\Phi_3 = A_3 \& (B_1 \vee B_2) \&(C_1 \vee C_3)$; $\Phi_4 = A_4 \& (B_1 \vee B_2 \vee B_3) \& C_3$

Составим теперь дизъюнкцию этих формул:

$A_1 \& (B_1 \vee B_3) \&(C_2 \vee C_3) \vee A_2 \& (B_1 \vee B_2) \&(C_1 \vee C_2 \vee C_3) \vee A_3 \& (B_1 \vee B_2) \&(C_1 \vee C_3) \vee A_4 \& (B_1 \vee B_2 \vee B_3) \& C_3$ и проведем преобразования (раскроем скобки). Получим: $A_1 \& B_1 \& C_1 \vee A_1 \& B_1 \& C_3 \vee A_1 \& B_3 \& C_2 \vee A_1 \& B_3 \& C_3 \vee A_2 \& B_1 \& C_1 \vee A_2 \& B_1 \& C_2 \vee A_2 \& B_1 \& C_3 \vee A_2 \& B_2 \& C_1 \vee A_2 \& B_2 \& C_2 \vee A_2 \& B_2 \& C_3 \vee A_3 \& B_1 \& C_1 \vee A_3 \& B_1 \& C_3 \vee A_3 \& B_2 \& C_1 \vee A_3 \& B_2 \& C_3 \vee A_4 \& B_1 \& C_3 \vee A_4 \& B_2 \& C_3 \vee A_4 \& B_3 \& C_3$ Однако не все из полученных конъюнкций возможны. Например, комбинация $A_1 \& B_1 \& C_3$ не может быть реализована, поскольку инженер B_1 не совместим с врачом C_3. Тогда, с учетом условий несовместимости, остаются следующие конъюнкции: $A_1 \& B_1 \& C_1 \vee A_1 \& B_3 \& C_3 \vee A_2 \& B_1 \& C_1 \vee A_2 \& B_1 \& C_2 \vee A_2 \& B_2 \& C_2 \vee A_2 \& B_2 \& C_3 \vee A_3 \& B_1 \& C_3 \vee A_3 \& B_2 \& C_3 \vee A_4 \& B_2 \& C_3 \vee A_4 \& B_3 \& C_3$

Получили 10 возможных составов экипажа. [3].

Задача 7. Виновник ночного дорожно-транспортного происшествия скрылся с места аварии. Работники ГАИ опросили трех свидетелей ДТП. Первый свидетель показал, что это был автомобиль синего цвета, первая цифра номера – 3. Второй свидетель показал, что это был автомобиль серого цвета, первая цифра номера - 8. Третий свидетель показал, что цвет автомобиля был не синий и не серый, а номер был точно не 3. В ходе дальнейшего расследования выяснилось, что каждый свидетель дал правильные показания либо только относительно цвета автомобиля, либо только относительно его номера.

Какого цвета был автомобиль, и с какой цифры начинался его номер?

Решение: Введем обозначения для элементарных логических высказываний:

A= «автомобиль синего цвета»; B= «первая цифра номера – 3»;

C= «автомобиль серого цвета»; D= «первая цифра номера – 8».

Так как известно, что каждый свидетель правильно указал либо цвет автомобиля, либо первую цифру номера, то истинными будут следующие составные высказывания:

$(A\&\overline{B}) \vee (\overline{A}\&B)$ - из показаний первого свидетеля;

$(C\&\overline{D}) \vee (\overline{C}\&D)$ - из показаний второго свидетеля;

$((\overline{A}\&\overline{C})\&B) \vee ((\overline{\overline{A}\cdot\overline{C}})\&\overline{B})$- из показаний третьего свидетеля.

Так как все перечисленные высказывания истинны, то истинна также их конъюнкция:

$((A\&\overline{B}) \vee (\overline{A}\&B))\,\&((C\&\overline{D}) \vee (\overline{C}\&D))\,\&(((\overline{A}\&\overline{C})\,\&B) \vee ((\overline{\overline{A}\cdot\overline{C}})\,\&\overline{B}))=$И

Преобразуем левую часть полученного равенства, учитывая, что

$A\&C=$Л и $B\&D=$Л:

$((A\,\&\overline{B}) \vee (\overline{A}\&B))\,\&((C\,\&\overline{D}) \vee (\overline{C}\&D))\,\&(((\overline{A}\&\overline{C})\,\&B) \vee ((\overline{\overline{A}\cdot\overline{C}})\,\&\overline{B})) = (A\&\overline{B}\&C\&\overline{D} \vee A\,\&\overline{B}\&\overline{C}\&D \vee \overline{A}\&B\&C\,\&\overline{D} \vee \overline{A}\&B\&\overline{C}\&D)\,\&(\overline{A}\&\overline{C}\&B) \vee (A \vee C)\&\overline{B}) = (A\&\overline{B}\&\overline{C}\&D \vee \overline{A}\&B\&C\&\overline{D})\&\,(\overline{A}\&\overline{C}\&B \vee A\&\overline{B} \vee C\&\overline{B}) = A\,\&\overline{B}\&\overline{C}\&D=$И

Отсюда следует, что высказывания A и D истинны, а высказывания B и C ложны, то есть автомобиль синего цвета, первая цифра его номера – 8 [3].

Сложность последних задач в том, что, исходя из предложенных условий сделать какие-то выводы непосредственно путем логических умозаключений достаточно сложно – настолько сведения разрозненны и логически не связаны. Применение же методов алгебры логики позволяет достаточно просто их решить.

Как показывает практика преподавания математики в ИРНИТУ, подобные логические задачи, связанные с практическими ситуациями, но решаемые с помощью методов дискретной математики вызывают неподдельный интерес у студентов и способствуют лучшему усвоению основных разделов дискретной математики.

Таким образом, при изучении алгебры логики, комбинаторики и основ теории вероятностей, можно существенно помочь студентам, если уделить больше внимания:

1) выстраиванию правильной схемы равновозможных элементарных исходов, что должно подсказать тому, кто решает задачу, надо ли в ней использовать элементы комбинаторики и какие именно;

2) внимательному прочтению условия задачи, уяснению всех нюансов и подробностей, анализу и выстраиванию логической схемы решения задачи;

3) привлечении методов комбинаторики, теории вероятностей, и дискретной математики к решению практических ситуаций;

4) организации учебных дискуссий – значительно более эффективной формы обучения, чем традиционные занятия с доминирующей ролью преподавателя, где работа студентов сводится к расчётам по предлагаемым формулам.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 176 с.

2. Гефан Г.Д., Кузьмин О.В. Типология ошибок и заблуждений, связанных с задачами курса теории вероятностей. Часть 1: Случайные события // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2012. № 12 (71). С. 187-193.

3. Зепнова Н.Н., Кузьмин О.В. Применение методов дискретной математики при решении логических задач // Омский научный вестник. 2014. № 2 (130). С. 14–17.

4. Зепнова Н.Н., Кузьмин О.В. Субъективный и объективный подходы к решению задач теории вероятностей и дискретной математики // Вестник Бурятского государственного университета. 2017. Вып. 7. С. 196-205.

5. Зепнова Н.Н. Повышение уровня математического мышления студентов технического ВУЗа средствами дискретной математики // Вестник ИрГТУ 2015. №. 4 (99). – С. 270–277.

6. Кузьмин О.В. Комбинаторные методы решения логических задач: учеб. пособие. – М.: Дрофа, 2006. – 187 с.

7. Мельников О.И. Обучение дискретной математике. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 224 с.

Зепнова Наталья Николаевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики ИРНИТУ, тел. 8-950-10-32-362, дом. адрес: 664007 г.Иркутск, ул. Тимирязева д.42, кв., 19, e-mail: zepnova.nat@mail.ru