Осталось заметить следующее тождество:

$$x_i \oplus y_i \oplus q_i = \overline{(x_iy_i \vee (x_i \vee y_i)q_i)} \cdot (x_i \vee y_i \vee q_i) \vee x_iy_iq_i. \qquad (5)$$

Отсюда, для двухразрядного сумматора получим:

$$z_1 = x_1 \oplus y_1 \oplus q_1 = \overline{(x_1y_1 \vee (x_1 \vee y_1)q_1)} \cdot (x_1 \vee y_1 \vee q_1) \vee x_1y_1q_1,$$

$$z_2 = q_2 = x_1y_1 \vee x_1q_1 \vee y_1q_1 = x_1y_1 \vee (x_1 \vee y_1)q_1.$$

Получим значительно более экономную СФЭ для двухразрядного двоичного сумматора (рис. 22). Здесь же приведен тест на том же наборе 1101.

Отметим, что представление (5) позволяет построить сумматор для чисел $x_nx_{n-1}\dots x_1x_0$ и $y_ny_{n-1}\dots y_1y_0$ произвольной наперед заданной длины.

Для этого нужно блок B_1 продублировать n раз, в каждом из получившихся блоков B_i, кроме n-го, выход, соответствующий q_2 переименовать в выход q_{i+1}, выход z_2 удалить. При помощи выхода q_{i+1}, блок B_i подключается к соответствующему входу блока B_{i+1}, аналогично тому, как блок B_0 посредством выхода q_1 подключен к блоку B_1 (см. рис. 22). В блоке B_n выход, соответствующий q_2 удалить, выход z_2 переименовать в z_{n+1}.

Блок B_0 остается без изменения. Полученные $n+1$ блоков следует соединить следующим образом (рис. 23):

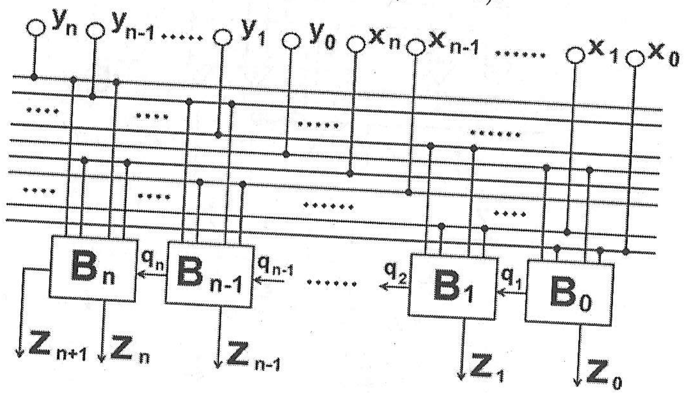

Рис. 23

Учитывая, что $L(B_0) = 4$, а $L(B_i) = 9$ для всех $i > 0$, получим значение сложности всей схемы Σ_n:

$$L(\Sigma_n) = 9n + 4.$$

Таким образом, сложность СФЭ, реализующих сложение чисел, растет линейно по отношению к числу входов, а значит кардинально отличается от схем, построенных при помощи способов, рассмотренных выше, где сложность растет экпоненциально.

Задачи для самостоятельного решения

Построить в виде СФЭ над B_0 устройство, производящее требуемое вычисление. Вычисления производятся в двоичной записи. При построении следует считать, что на входы x_1 и x_0 подается двузначное число a, на входы y_1 и y_0 подается двузначное число b. Для каждой задачи найти требуемое для вывода ответа число выходов схемы.

1. ab
2. $2a+b$
3. $2a+3b$
4. $3ab$
5. a^2+b^2
6. a^b
7. ab^2+ab+a
8. C_a^b
9. $a!+b!$
10. a^b+b^a
11. 2^a+b^2
12. $max\{a,b\}$
13. $max\{2^a,b^2\}$
14. $|(a+b)!-3^{a+b}|$
15. $min\{(a+b)!, 2^{a+b}, (a+b)^2\}$.

2 Конечные автоматы

2.1 Основные понятия, определения и задачи

Рассматривавшиеся в предыдущем разделе СФЭ являются *дискретными преобразователями информации* (ДПИ) без памяти. Это значит, что значения, которые получаются на выходе СФЭ зависят исключительно от того, что было подано на его входы в течение рассматриваемого такта. Таким образом ДПИ без памяти не могут учитывать во время работы информацию, которая поступила на его входы за один, за два и более тактов до рассматриваемого, т. е. они не в состоянии запомнить и привлечь для решения задачи ситуацию, которая сложилась ранее. Это обстоятельство резко ограничивает круг задач, которые можно решить с помощью подобных устройств. По этой причине СФЭ не имеют самостоятельного практического значения и представляют интерес в составе более сложных устройств, обладающих памятью.

Запоминание информации в ДПИ с памятью осуществляется путем введения в схему так называемых внутренних состояний устройства. Такое устройство, получив в моменты t_1 и t_2 на вход одинаковые воздействия, но находясь в разных состояниях q_1 и q_2, может на выходе сформировать разные сигналы. За внутреннее состояние ДПИ с памятью отвечает блок, содержащий в своем составе специальные элементы, называемые задержками. Принцип действия элемента задержки весьма прост: сигнал, поданный на его вход в момент времени t появляется на выходе в следующий момент времени $t+1$, т. е. он осуществляет задержку информации на один такт.

В дальнейшем будем рассматривать элементы задержки, которые могут иметь два состояния, обозначаемые 0 и 1. Очевидно, что устройства, имеющие в своем составе один такой элемент, могут находиться в одном из двух внутренних состояний, имеющие два элемента – в одном из четырех состояний, имеющие n элементов задержки – в одном из 2^n внутренних состояний.

Если в процессе решения задачи в момент времени t устройство находится в некотором состоянии q_i, это интерпретируется как сообщение о том, что ранее сложилась некая конкретная ситуация, которую необходимо учитывать для формирования выходного сигнала в рассматриваемый момент времени t.

Например, рассмотрим в общих чертах принцип действия двоичного сумматора. Он имеет 2 двоичных входа и один такой же выход. На входы в моменты $t = 1, 2, \ldots$ последовательно и синхронно поступают двоичные разряды суммируемых чисел, начиная с младшего. На выходе в эти же моменты времени снимаются соответствующие двоичные разряды их суммы. Очевидно, что для определения значения i–го разряда суммы недостаточно знать только i–е разряды суммируемых чисел. Ситуация становится полностью определенной если известно имеется ли перенос из предыдущего разряда. Таким образом, для работы двоичного сумматора необходимо и достаточно два состояния, одно из которых соответствует отсутствию переноса и в нем устройство просто складывает по mod 2 полученные на входах сигналы, второе соответствует наличию переноса и в нем устройство к сумме полученных разрядов добавляет 1. Очевидно, что два состояния могут быть реализованы введением в схему одного элемента задержки. Первоначальное состояние данного сумматора соответствует отсутствию переноса.

Все задачи, связанные с ДПИ с памятью условно можно разделить на теоретические и практические. Это разделение обусловлено следующими соображениями: для постановки и решения задач теоретического плана удобно считать, что устройство имеет один вход и один выход, на которые соответственно подаются и снимаются сигналы из некоторого произвольного множества сигналов $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, называемого алфавитом; для решения задач практического плана удобно считать, что это же устройство имеет несколько двоичных входов и несколько двоичных выходов $y_1, y_2, \ldots, y_m$, на каждый из которых может подаваться или считываться двоичный сигнал из алфавита $E = \{0, 1\}$. Еще раз подчеркнем, что одно и то же устройство может быть рассмотрено как с точки зрения первого подхода, так и с точки зрения второго. Это достигается путем перехода от k независимых множеств E к их декартовой степени E^k и наоборот.

Например, устройство с двумя двоичными входами x_1 и x_2, на каждый из которых подаются сигналы 0 или 1 можно интерпретировать как устройство с одним входом, на который может быть подан один из четырех сигналов из множества $E^2 = \{(00), (01), (10), (11)\}$. При этом, для удобства, можно ввести обозначения:
$(00) = a_0$, $(01) = a_1$, $(10) = a_2$, $(11) = a_3$. Очевидно, что можно произвести обратную операцию, и устройство с одним входом, на который подается один из шести сигналов $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, счи-

тать устройством с тремя двоичными входами x_1, x_2, x_3, на каждый из которых подаются соответствующие разряды, определяемые следующим переобозначением: $a_0 = (000), a_1 = (001), a_2 = (010), a_3 = (011), a_4 = (100), a_5 = (101), a_6 = (110)$.

Переобозначение такого вида будем называть двоичным кодированием. Обратим внимание на тот факт, что при этом удобно сохранять натуральный порядок, т. е. получающиеся двоичные наборы являются двоичной записью номеров соответствующих символов алфавита $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

Отметим, что если устройство рассматривается с первой, теоретической точки зрения, т. е. модель этого устройства содержит один вход и один выход, то эта модель носит название автомата Мили.

Моделью ДПИ с конечной памятью является конечный автомат (КА). Согласно вышеизложенным соображениям, будем считать, что КА имеет один вход, на который может подаваться за один такт один символ из алфавита входа $A_{вх} = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ и один выход, который может принимать в каждый такт одно значение из алфавита выхода $A_{вых} = \{b_0, b_1, \ldots, b_s\}$. КА может находиться в одном состоянии из конечного множества состояний $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{r-1}\}$. Чтобы полностью описать работу КА необходимо для произвольного сочетания входного сигнала и внутреннего состояния указать тот сигнал, который подается при этом на выход и то состояние, в которое переходит КА в следующий такт. Это значит, что необходимо каким-либо образом задать

а) функцию выхода $\rho : A_{вх} \times Q \to A_{вых}$, которая указывает что нужно подать на выход, если на вход получен некоторый символ $a_j \in A_{вх}$ и в этот момент КА находился в состоянии $q_i \in Q$;

б) функцию перехода $\lambda : A_{вх} \times Q \to Q$, которая указывает в какое состояние должен перейти КА в следующий момент, если на вход получен некоторый символ $a_j \in A_{вх}$ и в этот момент КА находился в состоянии $q_i \in Q$;

Если не указано, в каком состоянии находился КА в начальный момент времени $t = 0$, то будем говорить, что совокупность $< A_{вх}, A_{вых}, Q, \rho, \lambda >$ задает неинициальный КА. В инициальных же КА начальное состояние фиксировано, т. е. они начинают

функционировать из одного и того же состояния. Если не сказано обратного, договоримся начальное состояние инициального КА обозначать q_0.

Приведем замечание общего характера: всегда следует помнить, что количество сигналов на выходе КА равно количеству сигналов на его входе.

Работа с КА, как правило, включает в себя решение следующих задач:

1) построение КА с заданными свойствами;

2) минимизация заданного КА;

3) представление КА в виде системы булевых функций;

4) переход от задания КА в виде диаграммы к его заданию в виде автоматной таблицы.

2.2 Способы задания КА

КА может быть задан одним из двух способов:

1) **автоматная таблица**, обладает такими качествами как компактность и простота оформления;

2) **диаграмма**, обладает такими качествами, как наглядность и информативность.

Будем говорить, что КА задан в виде автоматной таблицы, если приведена таблица, в которой по горизонтали указаны все внутренние состояния из Q, а по вертикали все символы из $A_{вх}$. На пересечении строки a_j и столбца q_i указывается значения $\rho(a_j, q_i)$ и $\lambda(a_j, q_i)$. Например, пусть КА задан автоматной таблицей вида:

	q_0	q_1	q_2
$а$	$в / q_1$	$г / q_1$	$а / q_2$
$б$	$г / q_0$	$д / q_2$	$г / q_0$
$в$	$д / q_2$	$а / q_2$	$в / q_2$

Легко видеть, что
$A_{вх} = \{а, б, в\}$,
$A_{вых} = \{а, в, г, д\}$,
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$.

Допустим, в какой-то момент времени этот КА находится в состоянии q_1 и на его вход подали символ , тогда на выходе будет получен сигнал и автомат перейдет в состояние q_2.

Наиболее наглядно КА можно задать в виде диаграммы. Каждому состоянию КА на плоскости ставится в соответствие точка (окружность). Если при подаче на вход символа a_k КА переходит из состояния q_i в состояние q_j и на выходе формируется сигнал a_s, то соответствующие точки (окружности) соединяются дугой со стрелкой, рядом с которой помещается указание о входном и выходном сигнале (рис. 24)

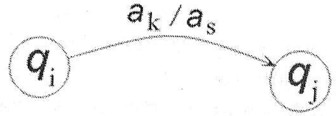

Рис. 24

Тогда автомат, заданный выше в виде автоматной таблицы, будет иметь следующее задание в виде диаграммы (рис. 25):

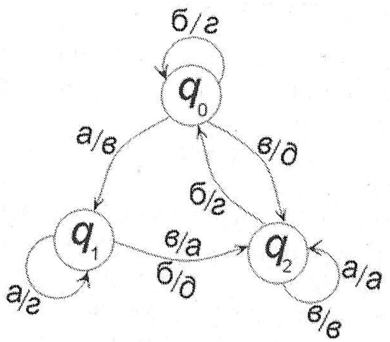

Рис. 25

Из примера видно, что если из состояния q_i в состояние q_i' КА переходит при двух и более входных воздействиях, то число дуг не увеличивается, а уже имеющаяся дуга подписывается соответствующее число раз (два и более).

В дальнейшем, как правило, КА будут задаваться в виде автоматных таблиц, строить же КА с заданными свойствами удобно в виде диаграмм, поэтому необходимо уметь переходить от одного способа задания КА к другому. Эта задача носит вспомогательный характер, порядок перехода от диаграммы к таблице и обратно

легко можно уяснить из вышеприведенного примера.

2.3 Построение КА с заданными свойствами

В задачах на построение КА необходимо построить диаграмму или автоматную таблицу КА, выполняющего определенные, четко сформулированные операции с последовательностями символов из $A_{вх}$. Эти последовательности могут быть как произвольными, так и иметь специальный вид, что так же оговаривается в условиях. Для удобства восприятия будем приводить один или несколько примеров работы задаваемого КА. Их можно рассматривать как тесты. При этом будем считать, что сигналы подаются и считываются по очереди справа налево. Например, запись $0312 \to 2110$ обозначает, что

в момент $t = 0$ на вход подается символ 2, КА преобразует его в 0;

в момент $t = 1$ на входе 1, на выходе 1;

в момент $t = 2$ на входе 3, на выходе 1;

в момент $t = 3$ на входе 0, на выходе 2.

Как правило, данные задачи несут в себе элемент творческого поиска, т. е. не имеют четко определенного алгоритма решения. Решение каждой из них схоже с процессом построения программы, в связи с чем, люди, сталкивавшиеся с программированием, решают их сравнительно быстро.

Решая задачу на построение КА, необходимо разбить процесс функционирования этого автомата на элементарные ситуации, для каждой из которых известно, что должно делать проектируемое устройство, попав в нее. Помимо этого, необходимо для всех возможных входных воздействий уметь указать, в какую ситуацию перейдет это устройство в следующий такт. Далее для каждой ситуации назначается свое внутреннее состояние КА. Как правило, данные задачи требуют посторения инициального КА, поэтому особо необходимо обратить внимание на первоначальную ситуацию, напомним, что ей соответствует состояние q_0. Осталось только построить диаграмму, соединив соответствующие состояния стрелками, обозначающими нужные переходы из состояния в состояние.

Подробно рассмотрим решение нескольких задач на построение КА с заданными свойствами.

1) $A_{вх} = A_{вых} = \{0,1\}$. *Построить двоичный сумматор. На два двоичных входа этого КА последовательно и синхронно поступают двоичные разряды суммируемых чисел, начиная с младшего. На выходе должны получаться двоичные разряды их суммы.*

Пример работы: $\left.\begin{matrix}011011\\001101\end{matrix}\right] \longrightarrow 101000.$

Решение.

Прежде всего необходимо оговорить способ записи суммируемых чисел. Так как разрядность суммы может на единицу превышать разрядность слагаемых, то договоримся, что подаваемые на вход числа имеют в своем старшем разряде 0, иначе в некоторых случаях старший разряд суммы может быть потерян. Далее перейдем от модели КА с двумя входами и одним выходом к модели КА с одним входом и одним выходом. Это достигается путем перехода от $A_{вх} = \{0,1\}$ к $A'_{вх} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, где $A'_{вх}$ есть всевозможные комбинации из двух символов $A_{вх}$, $A_{вых}$ остается прежним. Тогда пример, приведенный в формулировке задачи, запишется в виде

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow 101000.$$

Очевидно, что значение очередного разряда суммы полностью определяется поступившими в данный момент значениями разрядами суммируемых чисел и информацией о том, был ли перенос из предыдущего разряда. Таким образом, возможны две ситуации: перенос был или переноса не было. Введем для них обозначения, учитывая, что q_0 формально должно обозначать начальное состояние. Так как в начальном состоянии переноса из предыдущего разряда не было, то через q_0 обозначим ситуацию, когда переноса нет. Тогда q_1 будет соответствовать ситуации, когда перенос есть. Осталось аккуратно указать, что должно происходить, когда КА

находится в одном из состояний и получает на вход произвольный символ из $A'_{вх}$. Приведем подробно рассуждение для одного из случаев: пусть КА находится в состоянии q_1 и на вход получил символ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Это значит, что был перенос и нужно просуммировать по $mod\,2$ числа 1, 0, 1, где последняя единица получена из предыдущего разряда. Ясно, что в данном разряде суммы будет 0 и произойдет перенос в следующий разряд. Таким образом, на выход подается 0 и в следующий такт автомат переходит в состояние q_1 (фактически же – просто останется в q_1). Диаграмма будет содержать следующий фрагмент (рис. 26):

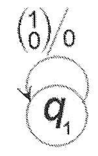

Рис. 26

Рассуждая аналогичным образом для всех возможных случаев, построим диаграмму полностью (рис. 27):

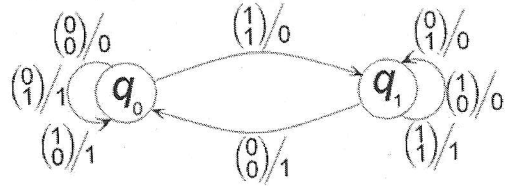

Рис. 27

Следует всегда обращать внимание на тот факт, что число дуг, выходящих из каждой вершины графа, должно равняться числу символов входного алфавита.

Протестируем построенный КА. Возьмем некоторую (допустимую) последовательность символов $A'_{вх}$, например

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow,$$

и по диаграмме отследим, что получится на выходе:

$t = 0$, находясь в q_0, КА получит $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, выдаст 1, перейдет в q_0;

$t = 1$, находясь в q_0, КА получит $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, выдаст 0, перейдет в q_1;

$t = 2$, находясь в q_1, КА получит $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, выдаст 1, перейдет в q_1;

$t = 3$, находясь в q_1, КА получит $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, выдаст 0, перейдет в q_1;

$t = 4$, находясь в q_1, КА получит $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, выдаст 0, перейдет в q_1;

$t = 5$, находясь в q_1, КА получит $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, выдаст 1, перейдет в q_0;

После этого автомат остановится, выдав в итоге последовательность $\longrightarrow$ 100101 (записываем справа налево), что и есть сумма чисел 000111 и 011110.

Автоматная таблица двоичного сумматора будет иметь вид:

	q_0	q_1
$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$0 / q_0$	$1 / q_0$
$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$1 / q_0$	$0 / q_1$
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$1 / q_0$	$0 / q_1$
$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$0 / q_1$	$1 / q_1$

2) $A_{вх} = \{0, 1, 2\}$, $A_{вых} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. *Построить КА, который выдает первый символ входной последовательности без изменения, и далее для каждого поступившего числа – его сумму с предыдущим.*

Пример работы: 1220100212 $\longrightarrow$ 3421102332.

Решение.

Воспользуемся стандартным приемом: выделим первоначальное состояние в некоторое особое, в которое больше КА в процессе работы не возвращается. Помимо этого, введем еще три состояния: в q_1 автомат переходит, получив 0, в q_2 – получив 1, в q_3 получив 2. Это так же стандартный прием – запомнить с помощью состояния

пришедший символ. Далее все очевидно: находясь в q_0 и получив некоторый сигнал $a \in A_{вх}$, автомат переходит в q_{a+1}, на выход подается a; находясь в q_{a+1} и получив $b \in A_{вх}$, автомат переходит в q_{b+1}, на выход подается $a + b \in A_{вых}$.

Диаграмма имеет вид (рис. 28):

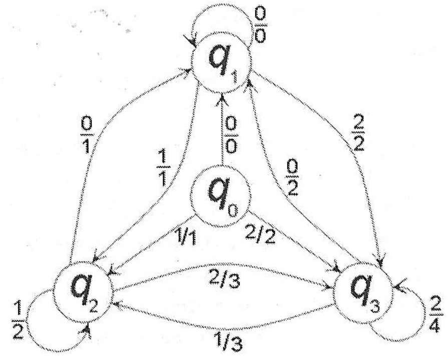

Рис. 28

Автоматная таблица имеет вид:

	q_0	q_1	q_2	q_3
0	$0 / q_1$	$0 / q_1$	$1 / q_1$	$2 / q_1$
1	$1 / q_2$	$1 / q_2$	$2 / q_2$	$3 / q_2$
2	$2 / q_3$	$2 / q_3$	$3 / q_3$	$4 / q_3$

Отметим, что данная конструкция не является самой простой из возможных: видно, что первоначальное состояние совпадает с состоянием, в котором происходит суммирование с ранее пришедшим нулем, т. е. с q_1. Эти состояния всегда реагируют одинаково на входные сигналы, иначе говоря, они эквивалентны, и их можно объединить в одно. Особенно хорошо это видно из автоматной таблицы. Однако не всегда удается найти пары эквивалентных состояний так легко. О методе построения наиболее простого КА, который решает ту же задачу, что и данный, будет говориться в следующем пункте, где мы вернемся к этому примеру.

3) $A_{вх} = A_{вых} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. *Построить КА, увеличивающий число, записанное в десятичной записи на единицу. Число подается поразрядно, начиная с младшего разряда.*

Примеры работы:
$$0127 \longrightarrow 0128$$
$$0199 \longrightarrow 0200$$
$$09999 \longrightarrow 10000.$$

Решение.

Прежде всего договоримся о том, что входное число в качестве значения старшего разряда имеет 0, чтобы прибавлять единицу к числам вида $99\dots9$. Ясно, что данный КА является частным случаем десятичного сумматора, который аналогичен двоичному. Здесь следует учесть одну тонкость: в начальном состоянии из предыдущего разряда приходит не 0, а 1, которую и нужно прибавить. Таким образом, q_0 соответствует наличию переноса и говорит, что значение текущего разряда нужно увеличить на 1, q_1 соответствует отсутствию переноса, т. е. значение текущего разряда нужно подать на выход, не меняя его.

Автоматная таблица имеет вид:

	q_0	q_1
0	$1/q_1$	$0/q_1$
1	$2/q_1$	$1/q_1$
2	$3/q_1$	$2/q_1$
3	$4/q_1$	$3/q_1$
4	$5/q_1$	$4/q_1$
5	$6/q_1$	$5/q_1$
6	$7/q_1$	$6/q_1$
7	$8/q_1$	$7/q_1$
8	$9/q_1$	$8/q_1$
9	$0/q_0$	$9/q_1$

Диаграмма имеет вид (рис. 29):

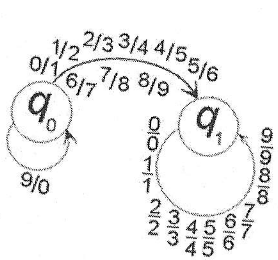

Рис. 29

Отметим, что для увеличения на единицу разряда, значением которого является 9, нужно его заменить на 0 и увеличить на 1 значение следующего разряда.

4) $A_{вх} = A_{вых} = \{0,1\}$. *Построить КА, утраивающий число, записанное в двоичной записи. Число подается поразрядно, начиная с младшего разряда.*

Пример работы: $00101011 \longrightarrow 10000001$.

Решение.

Так как три в двоичной записи имеет вид 11, то утроение может увеличить разрядность числа на 2, т. е. требуется чтобы число подавалось на вход с двумя нулевыми старшими разрядами. Далее проведем небольшое исследование, умножив на 11 произвольное число в двоичной записи, например 00101011:

$$\begin{array}{r} 00101011 \\ 11 \\ \hline 00101011 \\ 00101011 \\ \hline 010000001 \end{array}$$

Из этого примера видно, что для утроения числа в двоичной записи нужно сложить его с самим собой, сдвинутым на один разряд влево, т. е. сложить попарно все рядом стоящие цифры, учитывая переход из предыдущего разряда. Таким образом нужно помнить цифру предыдущего разряда а так же был или нет перенос. Для внутренних состояний введем следующие обозначения:

q_0 – в пред. разряде 0, переноса нет;
q_1 – в пред. разряде 1, переноса нет;
q_2 – в пред. разряде 0, перенос есть;
q_3 – в пред. разряде 1, перенос есть.

Начальному состоянию соответствует q_0, что и требуется с формальной точки зрения. Пользуясь приведенными выше рассуждениями, построим диаграмму (рис. 30). Автоматная таблица имеет следующий вид:

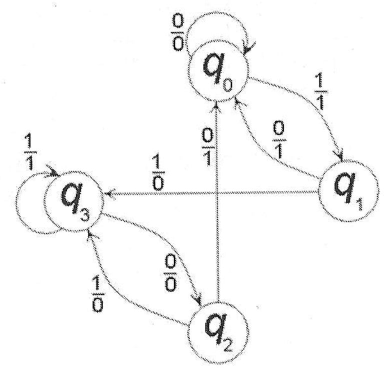

Рис. 30

	q_0	q_1	q_2	q_3
0	$0/q_0$	$1/q_0$	$1/q_0$	$0/q_2$
1	$1/q_1$	$0/q_3$	$0/q_3$	$1/q_3$

В качестве завершения данной задачи и как переход к вопросу о минимизации КА, нужно отметить следующий момент. Если КА из примера 2 данного раздела был специально построен как не самый простой, реализующий свое преобразование, то при построении КА из данного примера, построение было проведено достаточно функционально. Опыт показывает, что подобные построения являются минимальными, но данный пример показывает, что это далеко не всегда так. Действительно, минимизируя полученный автомат, можно получить, что состояния q_1 и q_2 работают абсолютно одинаково (это можно видеть и из автоматной таблицы), хотя выполняют совсем разные роли. В итоге, получен меньший КА, утраивающий число в двоичной записи:

	q_0	q_1	q_2
0	$0/q_0$	$1/q_0$	$0/q_1$
1	$1/q_1$	$0/q_2$	$1/q_2$

Как обнаружить возможность минимизации КА в общем случае рассказывается в следующем разделе.

Задачи для самостоятельного решения

Во всех следующих задачах необходимо построить в виде диаграммы или автоматной таблицы КА, производящий заданное преобразование информации.

1. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1\}$. Построить КА, осуществляющий задержку на один такт поданной на вход двоичной последовательности. Задерживающий символ – 0.

Пример работы: 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 0 $\longrightarrow$ 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 0 0.

2. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1\}$. Построить КА, осуществляющий задержку на два такта поданной на вход двоичной последовательности. При построении не использовать автомат задержки на один такт. Задерживающие символы – 00.

Пример работы: 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 0 $\longrightarrow$ 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0.

3. $A_{вх} = \{0, 1, *\}$; $A_{вых} = \{0, 1, ч, н\}$. Словом будем называть последовательность из символов 0 и 1, оканчивающуюся символом $*$, например $*110101 \longrightarrow$. Построить КА, который, не изменяя символы 0 и 1, вместо каждого символа $*$ выдает $ч$ или $н$ зависимости от четности единиц в слове, которое заканчивается данной $*$. КА должен работать на последовательностях из нескольких слов подряд.

Примеры работы: $*110101 \longrightarrow ч110101$

$*1110101 * * * 11 * 01 * 000 * 1 \longrightarrow н1110101ччч11н01ч000н1$.

4. $A_{вх} = \{0, 1, *, +\}$; $A_{вых} = \{0, 1, ч, н\}$. В двоичном слове (см. предыдущую задачу) могут встречаться символы $+$, никак не влияющие на четность числа единиц в слове. Построить КА, который вместо символа $*$ выдает четность числа единиц в слове, которое заканчивается данной $*$, а вместо $+$ – четность числа единиц во всей поданной на вход до данного символа $+$ последовательности.

Примеры работы: $* + 0111 + 1001 \longrightarrow нн0111ч1001$

$+ * 11 * 1 + 00 + 1 * 11 + 111 * 00+ \longrightarrow нч11н1ч00ч1ч11н111ч00ч$.

5. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1\}$. Построить КА, который после каждых трех символов, вместо четвертого выдает двоичную сумму трех предшествовавших (эти три символа подаются на выход без изменения).

Пример работы:

11010111101001000010 $\longrightarrow$ 01011111101011001010.

6. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1\}$. Построить КА, увеличивающий заданное в двоичной записи число на единицу. Число подается поразрядно, начиная с младшего разряда. Значение старшего разряда поданного числа равно 0.

$$\text{Примеры работы:}\quad \begin{array}{l} 0110111 \longrightarrow 01111000 \\ 0100 \longrightarrow 0101 \\ 01111 \longrightarrow 10000. \end{array}$$

7. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1\}$. Построить КА, суммирующий три числа, заданных в двоичной записи. При построении не использовать последовательного соединения сумматоров для двух чисел. Сформулировать при решении задачи необходимые условия на количество нулевых старших разрядов подаваемых на вход чисел.

$$\text{Пример работы:}\quad \left.\begin{array}{l} 0010110 \\ 0001111 \\ 0010101 \end{array}\right] \longrightarrow 0111010.$$

8. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1\}$. На вход проектируемого КА поразрядно, начиная с младшего разряда, подается число в двоичной записи. Необходимые условия на количество нулевых старших разрядов нужно сформулировать при решении каждой задачи.

а) Построить КА, увеличивающий заданное число в два раза. Пример работы: $01101 \longrightarrow 11010$.

б) Построить КА, увеличивающий заданное число в четыре раза. Пример работы: $001001 \longrightarrow 100100$.

в) Построить КА, увеличивающий заданное число в пять раз. Пример работы: $00101 \longrightarrow 11001$.

9. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1\}$. На один вход проектируемого КА подается число a, на второй – число b, в двоичной записи, начиная с младшего разряда. Построить автомат, вычисляющий $3a + 2b$,

$$\text{Пример работы:}\quad \left.\begin{array}{l} 001101 \\ 000110 \end{array}\right] \longrightarrow 110011.$$

10. $A_{вх} = \{0, 1, *\}$; $A_{вых} = \{0, 1, 2, *\}$. На вход проектируемого КА подается последовательность чисел в двоичной записи, каждое с младшего разряда. Два числа разделены символом $*$.

а) Построить КА, выдающий вместо каждого символа $*$ остаток от деления на 2 числа, которое оканчивается данной $*$.

Само число должно быть переведено в последовательность символов $*$. Пример работы:
$*110*101100*100001*0*1*11 \longrightarrow 0***0******1******0*1*1**$.

б) Построить КА, выдающий вместо каждого символа $*$ остаток от деления на 3 числа, которое оканчивается данной $*$. Само число должно быть переведено в последовательность символов $*$. Пример работы:
$*110*101100*100001*0*1*11 \longrightarrow 0***2******0******0*1*0**$.

11. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1, 2\}$. Построить троичнай сумматор. На два его входа подаются поразрядно, начиная с младшего разряда, два числа в троичной записи. Сформулировать условие на количество нулевых старших разрядов у чисел, подаваемых на вход.

$$\text{Пример работы:}\quad \left.\begin{array}{l} 010221 \\ 022222 \end{array}\right] \longrightarrow 110220.$$

12. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1, 2\}$. На вход проектируемого КА поразрядно, начиная с младшего разряда, подается число в троичной записи. Необходимые условия на число нулевых старших разрядов нужно сформулировать при решении каждой задачи.

а) Построить КА, увеличивающий заданное число в два раза. Пример работы: $02210 \longrightarrow 12120$.

б) Построить КА, увеличивающий заданное число в три раза. Пример работы: $02210 \longrightarrow 22100$.

в) Построить КА, увеличивающий заданное число в четыре раза. Пример работы: $002210 \longrightarrow 102010$.

13. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1, 2, 3\}$. Построить четверичный сумматор. На два его входа подаются поразрядно, начиная с младшего разряда, два числа в четверичной записи. Сформулировать условие на количество нулевых старших разрядов у чисел, подаваемых на вход.

$$\text{Пример работы:}\quad \left.\begin{array}{l} 0332211 \\ 0123120 \end{array}\right] \longrightarrow 1121331.$$

В следующих задачах на построение КА, работающих с числами в десятичной записи, достаточно построить автоматную таблицу.

14. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Построить КА, увеличивающий число в десятичной записи в два раза. Число подается поразрядно, начиная с младшего разряда. Сформулировать условие на число нулевых старших разрядов у числа, подаваемого на вход.

Пример работы: 09553 $\longrightarrow$ 19106.

15. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *\}$. На вход проектируемого КА подается последовательность чисел в десятичной записи, каждое, начиная с младшего разряда. Каждые два числа разделены символом $*$. Построить КА, который вместо очередного символа $*$ выдает последнюю цифру десятичной суммы всех чисел, поданных на вход до этой $*$. Сами числа переводятся в последовательность символов $*$.

Пример работы:
$*125*333*1024*111107*289 \longrightarrow 8***3***0****6******9***$.

16. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *\}$ На вход проектируемого КА подается последовательность чисел в десятичной записи, каждое, начиная с младшего разряда. Каждые два числа разделены символом $*$.

а) Построить КА, выдающий вместо $*$ остаток от деления на 3 числа, которое оканчивается данной $*$. Само число должно быть переведено в последовательность символов $*$.

Пример работы:
$*125*333*1024*111107*289 \longrightarrow 2***0***1****2******1***$.

б) Построить КА, выдающий вместо $*$ цифровой корень числа, которое оканчивается данной $*$. Само число должно быть переведено в последовательность символов $*$.

Примечание: если сложить все цифры числа, и затем с суммой производить ту же операцию до тех пор, пока не получится число из интервала от 1 до 9, то полученное число и будет цифровым корнем исходного.

Пример работы:
$*125*333*1024*111107*289 \longrightarrow 8***9***7****2******1***$.

2.4 Минимизация КА

2.4.1 Теорема о минимальном КА

При проектировании КА особое внимание следует уделять числу его внутренних состояний. Если при решении задачи на построение КА не так важно число состояний, с помощью которых осуществляется заданное преобразование информации,то при практической реализации данного процесса количество внутренних состояний становится достаточно значимым показателем. Нужное преобразование может быть осуществлено автоматами с разным числом внутренних состояний. В связи с этим возникает задача минимизации КА.

Состояния q автомата M и q' автомата M' будем называть эквивалентными, если оба автомата, получив одну и ту же (произвольную) входную последовательность в состояниях q и q' соответственно, перерабатывают ее в одну и ту же выходную последовательность.

Если $M = M'$, то q и q' являются эквивалентными состояниями одного и того же автомата. Если при этом $q \neq q'$, то, очевидно, одно из них является лишним, и автомат можно упростить.

Автоматы M и M' будем называть эквивалентными, если для каждого состояния автомата M существует эквивалентное ему состояние автомата M', и наоборот.

Автомат M', эквивалентный заданному автомату M и имеющий наименьшее возможное число состояний называется минимальным. Задача построения для заданного КА M минимального КА M', который работает так же как и M, называется задачей минимизации КА.

Данная задача имеет однозначное решение, которое может быть оформлено в виде достаточно простого алгоритма. Идея решения состоит в отыскании пар эквивалентных между собой внутренних