Вычислительная сложность анализа контурных изображений

Мартьянов В.И., Каташевцев М.Д.

Введение

Важнейшим направлением развития современных информационных технологий (и в целом, прогресса, так как невозможно представить современную науку и технику без использования компьютеров) является создание математических методов быстрого решения информационных задач.

В идеале, эти методы должны обеспечивать скорость решения ряда важных информационных задач вне зависимости от объема данных. И действительно, есть ряд важных информационных задач, где это возможно.

Наглядным (и очень важным) примером этого являются реляционные базы данных (БД), где вычислимость запросов определенных типов не зависит от объема данных, а только линейно от сложности проекта самой БД.

В основе этого лежит следующий, довольно просто доказываемый, факт – сложность проверки принадлежности кортежа ***(a₁, a₂, …, aₙ)***, где $a_1 \vdash A_1, a_2 \vdash A_2, \dots, a_n \vdash A\_n_n$, отношению $\boldsymbol{H}$, определенному на конечных множествах $A_1, A_2, \dots, A_n$, линейна от $\boldsymbol{n}$ (т.е. не зависит от числа кортежей, составляющих отношение $\boldsymbol{H}$). Естественно данное высказывание верно только при наличии соответствующего индекса заданного на множествах $A_1, A_2, \dots, A_n$. При компьютерной реализации конечные множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ являются доменами, а отношение $\boldsymbol{H}$ - таблицей реляционной БД. [1]

В данном докладе показывается, что при правильной формализации, такого же эффекта можно достичь и для задачи распознавания образов.

Формализация описания плоских контурных изображений

Рассмотрим четырехосновную алгебраическую системы (***а.с.***) [2, 3] вида

$$W = < A, R, V, M; Sector, Metric, Angle, Relation > \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

где основное множество A – совокупность дуг; основное множество R – совокупность связей дуг; основное множество V – совокупность допустимых углов (например, от 0 до 360 градусов или долей градусов); одноместная функция $Sector: A \to V$, т.е определяет количество градусов (или долей градуса) сектора окружности дуги; одноместная функция $Angle: R \to V$, т.е определяет количество градусов угла пересечения дуг; одноместная функция $Metric: A \to M$ (сопоставляет каждой дуге ее относительный (относительно других дуг) размер) трехместное отношение $Relation$ задает связь между дугами, т.е. $Relation$ – подмножество декартова произведения

$$A \times A \times B$$

Система вида **(1)** задает связное изображение.

Примечание 1. Множества A и R технические и определяются в соответствии с функциями $Angle$ и $Relation$. Множества V и M конечны. Их размеры зависят от технической реализации и от требуемой точности. Для анализа рукописного текста отсканированного стандартным сканером (600dpi), достаточно шкалы целых значений от 0 до 360 для множества A, и шкалы десятых долей от -100 до 100 для множество M.

Построение модели по растровому изображению

Для формализации процедуры перехода от растрового изображения к многоосновной алгебраической системы вида **(1),** будем рассматривать растровое изображение как функцию вида:

$$f : X \times Y \to \{0,1\}, X \in \mathrm{Z}, Y \in \mathrm{Z}$$

Переход осуществляется в три этапа. Сначала с помощью волновой скелетизации [4] строится граф $G(V, E)$, интуитивно адекватно соответствующий исходному растровому изображению. Далее граф разбивается на простые пути особыми вершинами (к особым вершинам относятся вершины имеющие более 2 соседей, а также некоторые другие узлы, которые могут быть определены как точки перегиба и точки смены направления). На последнем этапе простые пути аппроксимируются дугами и рассчитываются соответствующие связи между этими дугами, и относительные размеры дуг.

Интерпретация изображения

Общую схему решения комбинаторных задач высокой сложности логико-эвристическими методами [4] можно трактовать как преобразование начальной (инициальной) многоосновной алгебраической системы [6, 7] (например, (***1***))

$$M_{ini} =< A_1,\ldots,A_s; f_1,\ldots,f_n; p_1,\ldots,p_k > \qquad \textbf{(2)}$$

где A_i - основные множества, f_i - операции (функции) на основных множествах, p_i - предикаты (отношения) на основных множествах, в конечную (финальную) M_{fin}, удовлетворяющую ограничениям $R_1, R_2, \ldots, R_m$.

Пусть $Arc_1, Arc_2, \ldots, Arc_n$– множества дуг <u>*всех характеристик*</u>, т.е.

Далее, пусть $Rel_1, Rel_2, \ldots, Rel_{n-1}$ – множества связей дуг <u>*всех характеристик*</u>.

Тогда дерево ***TreeImage*** (универсум всех изображений, имеющих не более **n** дуг, и **k** вариантов дуг и связей дуг) можно представить следующим образом.

$$Arc_1 \times Rel_1 \times Arc_2 \times Rel_2 \times \ldots \times Rel_{n-1} \times Arc_n$$

<table>
<tr><td>№ этажа</td><td colspan="13">Значения вершин дерева TreeImage</td></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="13">Корень дерева</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="4">${}_{1}ar_{1,1}$</td><td colspan="4">${}_{2}ar_{1,2}$</td><td>…</td><td colspan="4">${}_{m1+k-1}ar_{1,k}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>${}_{1}re_{1,1}$</td><td>${}_{2}re_{1,2}$</td><td>…</td><td>${}_{k}re_{1,k}$</td><td>${}_{k+1}re_{1,1}$</td><td>${}_{k+2}re_{1,2}$</td><td>…</td><td>${}_{2k}re_{1,k}$</td><td>…</td><td>${}_{m2}re_{1,1}$</td><td>${}_{m2+1}re_{1,2}$</td><td>…</td><td>${}_{m2+k-1}re_{1,k}$</td></tr>
<tr><td>…</td><td colspan="8">…</td><td>…</td><td colspan="4">…</td></tr>
<tr><td>2n-1</td><td>${}_{1}ar_{n,1}$</td><td>${}_{2}ar_{n,2}$</td><td>…</td><td>${}_{k}ar_{n,k}$</td><td>${}_{k+1}ar_{n,1}$</td><td>${}_{k+2}ar_{n,2}$</td><td>…</td><td>${}_{2k}ar_{n,k}$</td><td>…</td><td>${}_{t}ar_{n,1}$</td><td>${}_{t+1}ar_{n,2}$</td><td>…</td><td>${}_{t+k1}ar_{n,k}$</td></tr>
</table>

Структуру дерева на универсуме будем задавать отношениями $Parent(x, y)$ и $Brother(x, y)$. Которые определяет соответственно отношение «родитель-потомок» и отношение «быть братом».

В рамках этой схемы имеет место следующая

<u>***Теорема 1.***</u> *Пусть каждая из многоосновных а.с.* $R_1, R_2, \ldots, R_m$ *имеет не более* **n** *дуг и представляет связное изображение. Тогда анализ связного изображения* **(1)** *имеет*

верхнюю границу сложности не превышающую $\boldsymbol{O}\left(\left((\boldsymbol{w} + \boldsymbol{t}) * \boldsymbol{w}\right) + \boldsymbol{m}\right)$, *где* $\boldsymbol{w}$ *– количество дуг соответственно,* $\boldsymbol{t}$ *– связей дуг изображения* ***(1)****, причем множества дуг и связей дуг представлены выражениями* ***(3).***

$$Arc = \{ar_1, ar_2, \dots, ar_w\}, w \le n, Rel = \{re_1, re_2, \dots, re_t\} \qquad (3)$$

Примечание 2. *Данный результат достигается за счет конструктивизма отношений* ***Parent*** *и* ***Brother*** *(эффективная вычислимость за один шаг).*

Примечание 3. *Следует отметить также, что на практике универсум не строится, а строится только его часть, состоящая из дуг и связей дуг многоосновных а.с.* $R_1, R_2, \dots, R_m$*. Вообще говоря, это замедляет скорость интерпретации, но незначительно, не более, чем на* $ln(k)$.

Список литературы

1. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Сортировка и поиск. – М.: Мир, 1978, 848 с.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы// М.: Наука. 1967. 324 с.
3. Кокорин А.И., Пинус А.Г. Вопросы разрешимости расширенных теорий// УМН. – 1978.- Т.33, вып.2.-С.49-84.
4. М.Д. Каташевцев. Волновая скелетизация // Вестник Иркутского Государственного Технического Университета. 2013. С. 89–92.
5. И. Мартьянов В., М.Д. Каташевцев. Комбинаторные задачи высокой сложности и анализ плоских контурных изображений // Известия Иркутского Государственного Университета серия «Математика». 2013. С. 31–47.
6. М.Д. Каташевцев. Анализ плоских контурных изображений с метрикой // Известия Иркутского Государственного Университета серия «Математика». 2014. С. 39–48.