

О НЕКОТОРЫХ ES_I -ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА 2

Э. С. Тагласов

Среди дискретных функций в последнее время интерес вызывают функции, которые в качестве своих значений возвращают подмножества некоторого конечного множества возможных значений. К таким функциям относятся, в частности, мультифункции [1].

Пусть $E_2 = \{0,1\}$. Множество всех мультифункций ранга 2 обозначается как M_2 и определяется:

$$M_{2,n} = \{f | f: E_2^n \rightarrow 2^{E_2}\}, M_2 = \bigcup_n M_{2,n}$$

Для множества E_2 будет использоваться обозначение «—», для пустого множества — *.

Для того чтобы суперпозиция $f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ определяла некоторую мультифункцию $g(x_1, \dots, x_n)$, следуя [2], определим значения мультифункции на наборах из подмножеств множества E_2 . Если $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Операция суперпозиции приводит к континууму множеств, замкнутых относительно суперпозиции, поэтому интерес вызывают операторы замыкания, которые наряду с суперпозицией содержат и другие операции. Одним из таких операторов является оператор, содержащий суперпозицию и разветвление по предикату равенства [3].

Будем говорить, что мультифункция $g(x_1, \dots, x_n)$ получается из мультифункций $f_1(x_1, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, \dots, x_n)$ с помощью операции разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется соотношение

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } x_i = x_j; \\ f_2(x_1, \dots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим ES_I -замыкание множества $Q \subseteq M_2$ как множество всех мультифункций из M_2 , которые можно получить из множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных, S_I -суперпозиции и разветвления по предикату равенства.

В работе были получены 237 ES_I -замкнутых классов мультифункций ранга 2. Для доказательства о том, что замкнутых классов не меньше 237 и что они являются ES_I -замкнутыми, кроме девяти ES_I -предполных замкнутых множеств (см. [4]) были введены также следующие множества мультифункций:

$$K_{10} = \{f | f(0, \dots, 0) = 0\}; \quad K_{11} = \{f | f(1, \dots, 1) = 1\};$$

$$K_{12} = \{f | f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \{1, -, *\} \text{ и } f(1, \dots, 1) \in \{1, -\}\};$$

$K_{13} = \{f \mid f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \{0, -, *\} \text{ и } f(0, \dots, 0) \in \{0, -\}\};$

K_{14} – множество функций, возвращающие на противоположных наборах следующие значения: $(* *)$, $(* 0)$, $(* 1)$, $(* -)$, $(0 *)$, $(1 *)$, $(- *)$;

$K_{15} = \{f \mid f(0, \dots, 0) = * \text{ или } f(1, \dots, 1) = *\};$

$K_{16} = \{f \mid f(0, \dots, 0) = * \text{ либо } f(0, \dots, 0) = 0 \text{ и } f(1, \dots, 1) = 1\};$

$K_{17} = \{f \mid f(1, \dots, 1) = * \text{ либо } f(0, \dots, 0) = 0 \text{ и } f(1, \dots, 1) = 1\};$

Утверждение. Множества $K_{10} - K_{17}$ являются ES_I -замкнутыми множествами мультифункций.

Литература

1. Pouzet M., Rosenberg I. G. Small clones and the projection property. 2008.
2. Пантелеев В. И. О двух максимальных мультиклонах и частичных ультраклонах / В. И. Пантелеев // Известия Иркутского гос. университета. Серия: Математика. – 2012. – Т. 5, N4. – С. 46–53.
3. Марченков С. С. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций / С. С. Марченков // Дискрет. математика. – 2008. – Т. 20. – Вып. 6. – С. 80–88.
4. Тагласов Э. С., Пантелеев В. И. Критерий ES_I -полноты множества мультифункций ранга 2. В кн.: Синтаксис и семантика логических систем [Электронный ресурс]: материалы 6-й Междунар. школы-семинара. Монголия, Ханх, 11–16 авг. 2019 г. / [редкол.: С. С. Гончаров [и др.]]; ФГБОУ ВО «ИГУ». – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Загл. с этикетки диска. С. 83–87.