Описание и математическое моделирование движения плоского двухзвенного манипулятора с вращательными парами

Ю.А. Шапошников, С.В. Солодуша

Постановка задачи

Требуется рассмотреть три пункта:

1. Описание движения плоского двухзвенного манипулятора с вращательными парами;
2. Вывод дифференциальных уравнений движения плоского двухзвенного манипулятора в форме уравнений Лагранжа второго рода;
3. Линеаризация уравнений движения.

Подход к изучению данной темы разработан с помощью теории динамических систем. Изучение данной темы я считаю актуальным, так как теория и алгоритмы моделирования и управления двухзвенным манипулятором важны при проектировании робототехнических систем.

Описание движения плоского двухзвенного манипулятора с вращательными парами

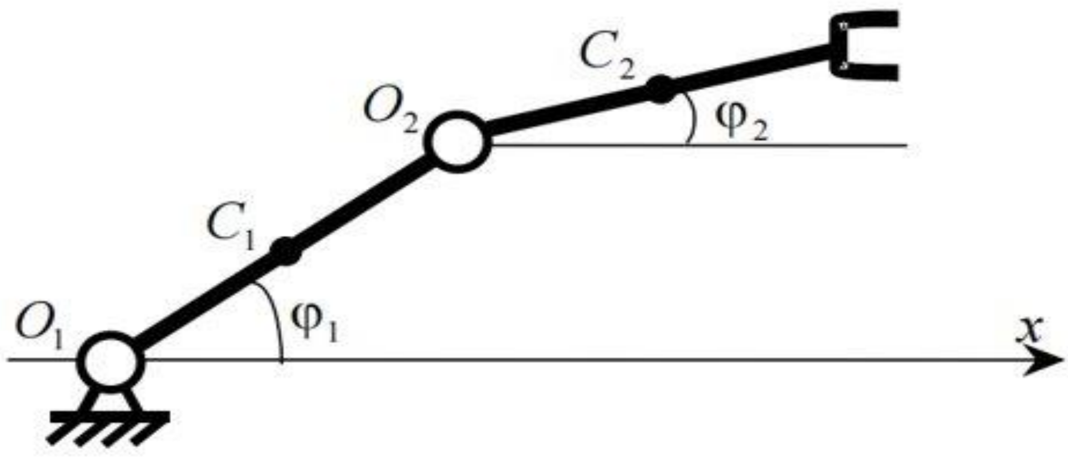

Рис. 1.

На рисунке 1 изображён плоский двухзвенный механический манипулятор, каждое звено которого представляет собой абсолютно жесткий стержень. Первое звено соединено с неподвижным основанием манипулятора вращательной парой O_1, а со вторым звеном – вращательной парой O_2.

Кинетическая энергия манипулятора определяется по формуле

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_c$$

Последовательно вычисляем кинетическую энергию первого и второго звеньев, а также кинетическую энергию схвата манипулятора. Затем подставляя найденные величины энергий в общую формулу для кинетической энергии манипулятора получаем

$$T = \frac{1}{8}\dot{\varphi}_1^2\left[l_1^2(m_1 + 4m_2 + 4m) + 4I_1\right] + \frac{1}{8}\dot{\varphi}_2^2\left[l_2^2(m_2 + 4m) + 4I_2\right] + \frac{1}{2}(2m + m_2)l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

С данным выражение нам будет трудно работать, поэтому мы введём обозначения для его упрощения

$$a = \frac{1}{4}\left[l_1^2(m_1 + 4m_2 + 4m) + 4I_1\right], \quad b = \frac{1}{4}\left[l_2^2(m_2 + 4m) + 4I_2\right], \quad c = \frac{1}{2}(2m + m_2)l_1 l_2.$$

Тогда выражение для кинетической энергии манипулятора принимает следующий вид

$$T = \frac{1}{2}\left[a\dot{\varphi}_1^2 + 2c\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + b\dot{\varphi}_2^2\right].$$

Последовательно продифференцировав выражение для кинетической энергии, мы получаем следующие выражения

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = a\dot{\varphi}_1 + c\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = a\ddot{\varphi}_1 + c\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = b\dot{\varphi}_2 + c\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = b\ddot{\varphi}_2 + c\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -c\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = c\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Дифференциальные уравнения движения плоского двухзвенного манипулятора в форме уравнений Лагранжа второго рода

Выведем дифференциальные уравнения плоского двухзвенного манипулятора в форме уравнений Лагранжа второго рода. Используя ранее полученные выражения, выпишем следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = Q_i, \quad i = 1,2.$$

В итоге получаем

$$a\ddot{\varphi}_1 + c\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + c\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = v_1,$$

$$c\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + b\ddot{\varphi}_2 - c\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = v_2.$$

Разрешим эти дифференциальные уравнения относительно старших производных

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2bv_1 - 2bc\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - 2cv_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c^2\dot{\varphi}_1^2 \sin[2(\varphi_1 - \varphi_2)]}{ab - c^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2av_2 + 2ac\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - 2cv_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + c^2\dot{\varphi}_2^2 \sin[2(\varphi_1 - \varphi_2)]}{ab - c^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Полученную систему двух дифференциальных уравнений второго порядка сведём к системе четырёх дифференциальных уравнений первого порядка с помощью замены переменных

$$y_1 = \varphi_1, \; y_2 = \varphi_2, \; y_3 = \dot{\varphi}_1, \; y_4 = \dot{\varphi}_2$$

Получаем

$$\dot{y}_1 = y_3,$$

$$\dot{y}_2 = y_4,$$

$$\dot{y}_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2bv_1 - 2bcy_4^2 \sin(y_1 - y_2) - 2cv_2 \cos(y_1 - y_2) - c^2 y_3^2 \sin[2(y_1 - y_2)]}{ab - c^2 \cos^2(y_1 - y_2)},$$

$$\dot{y}_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2av_2 + 2acy_3^2 \sin(y_1 - y_2) - 2cv_1 \cos(y_1 - y_2) + c^2 y_4^2 \sin[2(y_1 - y_2)]}{ab - c^2 \cos^2(y_1 - y_2)}$$

Линеаризация уравнений движения

Проведём линеаризацию полученных дифференциальных уравнений в окрестности пары

$$v^*(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; y^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По формулам

$$y(\cdot) = y^*(\cdot) + x(\cdot), \quad v(\cdot) = v^*(\cdot) + u(\cdot)$$

Получаем матрицы A и B

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{b}{ab-c^2} & \frac{-c}{ab-c^2} \\ \frac{-c}{ab-c^2} & \frac{a}{ab-c^2} \end{pmatrix}$$

Система дифференциальных уравнений допускает векторно-матричную запись. Таким образом, линеаризованные уравнения здесь имеют вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{b}{ab-c^2} & \frac{-c}{ab-c^2} \\ \frac{-c}{ab-c^2} & \frac{a}{ab-c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в данной работе было проведено описание движения плоского двухзвенного манипулятора, получены дифференциальные уравнения движения плоского двухзвенного манипулятора в форме уравнений Лагранжа второго рода, проведена линеаризация уравнений движения. В дальнейшем планируется с использование полученных формул провести численный эксперимент. А также провести исследование устойчивости по Гурвицу.

Литература

Лутманов С.В. Линейный задачи оптимизации. Пермь, 2005. -С. 13-16.