Инструменты решения обыкновенных дифференциальных уравнений в Matlab и Simulink

А. З. Пермякова, С. М. Кривель

Метод построения математических моделей является наиболее эффективным методом изучения различных явлений природы. Многочисленные задачи сводятся к решению дифференциальные уравнения.

Разработан ряд численных методов, которыми возможно решить дифференциальные уравнения. Однако, решение дифференциального уравнения или систем дифференциальных уравнений численными методами это не легкая задача. Необходимо иметь четкое представление о том, какой численный метод является более эффективным для решения данного дифференциального уравнения.

Простейший пример дифференциального уравнения дает задача о нахождении закона движения материальной точки по заданной скорости ее движения. Если S(t) – неизвестный путь, пройденный точкой за время t, то получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dS(t)}{dt} = v(t). \qquad (1)$$

В случае, когда, например, $v(t)$ – заданная непрерывная функция $t \geq 0$, все решения уравнения (1) задаются формулой

$$S(t) = \int_0^t v(t)dt + C, \qquad (2)$$

где C – произвольная действительная постоянная.

Решив дифференциальное уравнение, описывающее некоторый процесс во времени, нельзя однозначно указать зависимость от времени характеристик процесса, удовлетворяющей этому уравнению. Нужны дополнительные условия, в качестве которых, на практике, выступают начальные условия. Так, например, однозначное решение уравнения (1) можно получить, задав начальное положение точки:

$$S(0) = S_0.$$

Тогда находим из формулы (2), что $\mathrm{C} = \mathrm{S}_0$ и, значит, формула

$$S(t) = \int_0^t v(t)dt + S_0$$

однозначно определяет закон движения точки.

Задача о нахождении решения y=y(x) дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

Рассмотрим простейшие методы численного решения задачи Коши: формула $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n-1}$, представляет собой метод Эйлера. Еще одним способом решения дифференциальных уравнений является метод Рунге-Кутты, общая схема, которого имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{m} p_j k_j, \ i = \overline{1, n-1}, \qquad (7)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$\dots$$

$$k_m = f\left(x_i + \alpha_m h, y_i + \beta_{m1} h k_1 + \cdots + \beta_{m,m-1} h k_{m-1}\right).$$

Здесь $p_1, \dots, p_m$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, β_{lq}, $0 < q < l \leq m$- параметры метода, подлежащие выбору.

Matlab & Simulink содержат уникальные коллекции реализаций современных численных методов компьютерной математики, которые имеют большие возможности для решения дифференциальных уравнений. Синтаксис решения уравнений выглядит следующим образом:

$odeXY = (\text{Функция}, \text{Интервал расчета}, \text{Начальные условия}, \text{Опции}).$

В качестве аргументов следует подать правую часть системы в виде MATLAB-функции.

Если функция простая, то её можно записать прямо в поле аргумента, однако, когда речь идёт о системах уравнений, имеет смысл записывать систему уравнений в виде отдельной функции. Интервал задаётся строкой из двух чисел: начальной величины независимого аргумента t и его конечного значения. Далее задаются начальные условия. Значения всех неизвестных искомых переменных в начале расчёта задаются в виде столбца соответствующей размерности. Затем, при необходимости, задаются опции. Значения параметров записываются в управляющую структуру, которая создается функцией odeset. Для решения систем ОДУ в MATLAB реализованы различные численные методы. Их реализации названы решателями ОДУ: ode45, ode23, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb, bvp4c.

Обыкновенные дифференциальные уравнения в Simulink решаются с помощью блоков. Основным элементом модели уравнения является блок интегрирования, который посредством обратной связи получает на выходе решение уравнения. Решать дифференциальные уравнения в Simulink можно двумя способами: используя передаточные функции или записав уравнение в форме Коши.