Схема Маркова-Пойа и ее применение при описании эпидемий

А.Б. Горох, Н.А. Колокольникова

Введение

Схема названа в честь А. А. Маркова, который впервые ввел ее в рассмотрение в 1917 году, а также Д. Пойа, опубликовавшего в 1923 году в совместной работе с Ф. Эггенбергером результаты, полученные при использовании данной схемы [1].

При рассмотрении классической схемы Маркова-Пойа и одной её модификации были использованы две схемы последовательных испытаний типа «успех-неуспех» (А- и Ф-схемы).

Классическая схема Маркова-Пойа

Первоначально имеется N шаров: M белых и $N-M$ черных. Последовательно вынимаются шары, фиксируется цвет, после чего шар возвращается с C дополнительными шарами того же цвета.

Пусть ξ_n – число вынутых белых шаров при n выниманиях (опытах). Для нахождения распределения величины ξ_n используем схему испытаний типа «успех-неуспех». При каждом вынимании успехом будет считаться вынимание белого шара, а неуспехом, соответственно, вынимание черного.

P_{nk} - вероятность успеха в -м испытании при условии, что в предыдущих испытаниях было k успехов.

В общем виде эта вероятность будет выглядеть так:

$$P_{nk} = \frac{M+kC}{N+(n-1)C},\ n = \overline{1,\infty},\ k = \overline{1,n},$$

где n – номер опыта, а k – количество вынутых до этого белых шаров.

Структура вероятностей позволяет использовать Ф-схему последовательных испытаний. В результате распределения величины ξ_n может быть представлено в виде:

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n * \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{N+iC} * \prod_{j=0}^{k-1} (M+jC),$$

где $\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + (N+(n-1)C - M - kC) * \Phi_k^{n-1}, \quad k = \overline{0,n},\ n = \overline{1,\infty}.$

$$\Phi_n^n = 1, n = \overline{0,\infty}; \quad \Phi_k^n = 0, \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Распределение может быть представлено в виде:

$$P\{\xi_n = k\} = \binom{n}{k} \frac{[M]_{kc}[N-M]_{(n-k)c}}{[N]_{nc}},$$

где $[x]_{kc} = x * (x + c) * (x + 2c) * \dots * (x + (n - 1)c)$.

В этом случае при увеличении числа опытов количество шаров будет каждый раз увеличиваться на постоянную C.

Одна модификация схемы Маркова-Пойа и ее применение к описанию эпидемии

Имеем в некотором помещении N человек, из них $M = N - 1$ здоровых и 1 больной. Каждый человек находится в отдельной секции, поэтому распространение вируса внутри помещения будем считать невозможным. Для нахождения распределения величины ξ_n используем схему испытаний типа «успех-неуспех».

Если «вынимается» здоровый человек, то он возвращается на место. Данное событие будем считать неуспехом.

Если «вынимается» больной человек, то он возвращается на место, заражая одного здорового человека, после чего возвращается в свою секцию. Таким образом, при извлечении больного человека, количество здоровых уменьшается на 1, а количество больных, соответственно, увеличивается на 1. Общее количество человек не изменяется. «Извлечение» зараженного человека будем считать успехом.

В общем виде распределение будет выглядеть так:

$$P\{\xi_n = k\} = \prod_{i=1}^{k} P_i * \mathrm{A}_k^n,\ k = \overline{0, \min{(n, N)}},$$

где A_k^n - обобщенные числа Стирлинга второго рода, строящиеся на базе $\left\{\frac{N-i}{N}\right\}_{i=1}^{\min{(n,N)}}$.

В данном случае, в отличие от классической схемы, общее количество человек будет неизменным, а будет увеличиваться только количество зараженных людей. Опыты можно проводить бесконечно, однако наступит момент, когда будут заражены все N человек и вероятность успеха («извлечь» зараженного человека) будет равна 1, поэтому дальнейшее проведение опытов будет бессмысленным.

Заключение

При рассмотрении некоторых задач удобно рассматривать модели, использующие аппарат комбинаторных чисел.

Литература

1. Ивченко Г.И. Об урновой схеме Маркова-Пойа: от 1917 г. до наших дней / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1996. – Т.3, Вып.4. – С.484-511.