СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ НА РЕШЕТКАХ

Д. С. Павлов, Н. А. Колокольникова

Случайное блуждание — математическая модель процесса случайных изменений шагов в дискретные моменты времени. При этом предполагается, что изменение на каждом шаге не зависит от предыдущего шага и от времени.

Случайные блуждания очень удобный инструмент представления математической модели, описывающей физические процессы, динамика которых имеет стохастическую природу. Построенные при этом схемы оказываются очень удобными для наглядных объяснений общих закономерностей рассматриваемого процесса.

Существует две основные формулировки задачи о случайных блужданиях.

Математическая - расчет вероятности определенного значения координаты точки путем перебора возможных положений точки в результате пошаговых перемещений.

Физическая - случайные блуждания в результате беспорядочных столкновений с препятствиями. Это и броуновское движение, и различные варианты диффузии. Простейший случай, который соответствует, например, броуновскому движению, состоит в выдвижении гипотезы о пространственной изотропии — такая область пространства, физические свойства которой (электрические, оптические и др.) не зависят от направления.

Одномерное случайное блуждание

Простейшей моделью случайного блуждания является блуждание по целочисленным точкам прямой.. Мы можем представить себе человека (или «частицу») на лестнице, который подбрасывает монету, чтобы решить, будет ли следующий шаг вверх или вниз. На каждом шаге есть только две возможности: в этом примере шаг вперед или шаг назад. Единственный свободный параметр задачи - это вероятность того, что частица прыгнет вперед (а не назад).

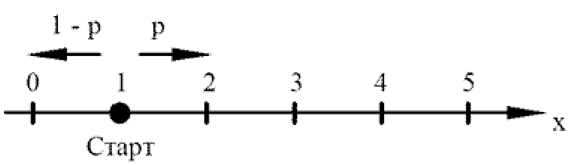
Обозначим эту вероятность действительным числом p так, что: 0<p<1, тогда q = 1 - p представляет вероятность того, что частица отскочит назад.

Схема Бернулли. Формула Бернулли (биномиальное распределение)

Если вероятность p наступления некоторого события в каждом испытании постоянна, то вероятность P_n^k того, что данное событие наступит ровно k раз в n независимых испытаниях, равна $P_n^k = C_n^k p^k q^{n-k}$, где$C_n^k$ - число «удачных» комбинаций: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Рассмотрим простейший пример случайного блуждания на прямой.

Дана целочисленная прямая. Частица начинает случайные блуждания из точки 0. За один шаг она перемещается в точку +1 с вероятностью p или в точку -1 с вероятностью q = 1 – p. И так далее: в результате каждого шага будет перемещение вправо на +1 или влево на -1.



Для описания модели используем схему Бернулли. В каждом «испытании» два исхода: шаг вправо или шаг влево. Условно их еще называют "Успехом" и "Неудачей". Частица делает n шагов.

Вероятность того, что среди n шагов будет ровно k шагов вправо равна

$$P_n^k = C_n^k p^k q^{n-k} \; k = 0,1,2,\dots,n.$$

Смещение частицы влево или вправо, а также число шагов связаны соотношением:

Следовательно, если ξ_n - положение частицы после n шагов, то

$$P(\xi_n = d) = 0, \text{ если } \frac{n+d}{2} \notin \{0,1,\dots,n\};$$

$$P(\xi_n = 2k - n) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{ при } k = 0,1,2,\dots,n.$$

Двумерное случайное блуждание

Выходя из начала координат, частица с равной вероятностью сдвигается на один шаг либо на юг, либо на север, и одновременно (и тоже с равной вероятностью) на один шаг либо на восток, либо на запад. После того, как шаг сделан, движение продолжается аналогичным образом из нового положения и так далее до бесконечности.

Для визуализации двухмерного случая, можно представить человека, случайно гуляющего по городу. Этот город фактически бесконечен и расположен в квадратной сетке тротуаров. На каждом перекрестке человек случайным образом выбирает один из четырех возможных маршрутов (в том числе тот, по которому он пришел). Формально, это случайное блуждание по множеству всех точек на плоскости с целочисленными координатами.

Трехмерное случайное блуждание

При каждом шаге частица с равной вероятностью сдвигается на единицу длины вверх или вниз, на восток или на запад, на север или на юг. Если представим себе точку как центр куба, то за один шаг частица попадает в один из восьми углов куба.

Данное случайного блуждания имеет довольно интересные геометрические свойства. При малом масштабе можно наблюдать «зазубренность» на сетке, по которой осуществляется блуждание.

Полиномиальное (мультиномиальное) распределение

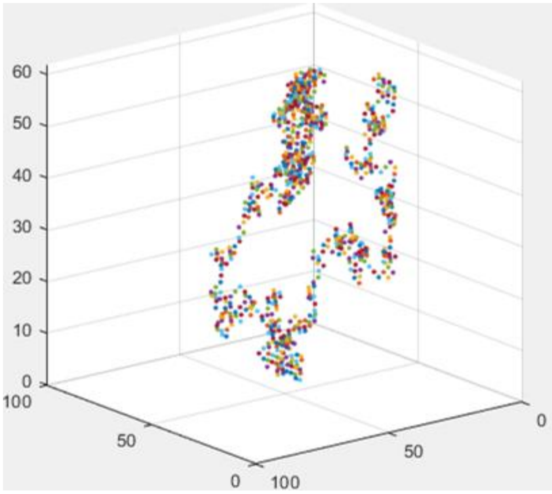
Полиномиальное (мультиномиальное) распределение - совместное распределение вероятностей случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, каждая из которых есть число появлений одного из нескольких взаимно исключающих событий A_i, i=1,…,k при повторных независимых испытаниях. Пусть при каждом испытании вероятность появления события A_i, i=1,…,k равна p_i, i=1,…,k причем $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, тогда совместное распределение величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, где ξ_i— число появлений события A_i при n испытаниях, задается определенными для любого набора целых неотрицательных чисел $n_1,\ldots, n_k$, удовлетворяющих единственному условию $n_1 +\ldots + n_k = n$, вероятностями:

$$P(\xi_1 = n_1, \ldots, \xi_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!} p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}.$$

Это так называемое полиномиальное распределение, являющееся обобщением биномиального распределения.

.

Моделирование случайного трехмерного блуждания в Matlab



КОД

```
x = 0; y = 0; z = 0;
hold on; grid on;
for k = 1:1000 % кол-во шагов
  X = [x-1,x+1];
  Y = [y-1,y+1];
  Z = [z-1,z+1];
  x = X( round(1+rand) );
  y = Y( round(1+rand) );
  z = Z( round(1+rand) );
  plot3(x,y,z, '.');
        M(k) = getframe;
end
```

Список использованной литературы

1. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. / Ф. Мостеллер. – М: Наука, 1975. – 112 с.
2. Баврин И.И. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / И.И. Баврин. – М: Высшая школа, 2005. – 160 с.