К ВОПРОСУ О МИНИМИЗАЦИИ ПОГРЕШНОСТИ В ЗАДАЧАХ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В.В. Подрядчиков, В.С. Захарченко

Ключевые слова:

Минимизация погрешности, критерий Акаике, интерполяционный процесс, AIC.

Постановка задачи интерполяции

Пусть функция f(x) определена на отрезке [a, b] числовой оси. В пределах этого отрезка заданы n+1 различных точек $x_0, x_1, \dots, x_n$. В этих точках известны значения функции f(x). Требуется построить такую функцию g(x), которая была бы «близка» к f(x) на отрезке [a, b].

Стоит рассмотреть такое понятие как интерполяционный процесс и сходимость. Возьмём такие наборы точек, что $\omega_1 = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\}$, $\omega_2 = \{x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\}$, … , $\omega_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$ с возрастающим разбиением отрезка [a, b]: $k_1 = 1$; $k_2 = 2$; …; $k_n = n$. Если для данных разбиения определяются значения $P_k(x_*)$, в некоторой точке x_*, то реализуется процесс приближения, характеризующийся последовательностью $P_1(x_*), P_2(x_*), \dots, P_n(x_*), \dots$. Такой процесс сходится в точке $x_* \in$ [a, b], если существует $\lim\limits_{k\to\infty} P_n(x_*)$ = f(x_*) [1, с.]. Характер сходимости или расходимости процесса приближения зависит как от гладкости и поведения функции, так и от выбора последовательности сеток

Критерий Акаике

В процессе поисков различных методов было решено обратится к статистике, откуда и был взят в рассмотрение критерий Акаике (1), предложенный Хиротугу Акаике в 1971 году. Критерий основан на оценке потери информации при уменьшении числа параметров модели. Критерий позволяет найти компромисс между сложностью модели (числом параметров) и ее точностью.

$$AIC=2k - 2\ln(L)] \quad (1)$$

где k — число параметров модели (количество всех известных точек), L — максимизированное значение функции правдоподобия модели. Лучшей признается та модель, для которой значение AIC минимально.

Данный критерий характеризует собой объем потерянных данных при приближении рассматриваемой модели. Таким образом, имея

большое количество моделей мы можем оценить каждую и выбрать ту, которой соответствует наименьшее значение критерия, то есть ту, что имеет наименьшую потерю данных.

Будем предполагать, что ошибки модели нормально и независимо распределены. Пусть n – число наблюдений (число точек известных для таблично заданной функции), а RSS – остаточная сумма квадратов[2].

Предположим, что дисперсия наших ошибок одинакова. Тогда формула приобретает следующий вид (2)

$$AIC=2k + n[\ln(\frac{2\pi RSS+1}{n} + 1)] \quad (2)$$

где k — число всех заданных узлов таблично заданной функции, n — степень оцениваемого многочлена, RSS - остаточная сумма квадратов.

AIC позволяет нам оценить имеющееся число моделей, построенных по исходным данным и выбрать наилучшую. Так, мы можем не рассчитывать многочлены всех возможных степеней, а построить только некоторое количество и счесть оптимальным тот, что соответствует минимальному значению критерия. Таким образом, мы сократим затраты на вычисления и при этом сможем получить многочлен, который не только достаточно гладкий, но и может служить моделью для расчета значений узлов, не входящих в рассматриваемый диапазон.

Стоит понимать, что данный критерий рекомендуется использовать в том случае, если есть возможность аналитически оценить неизвестную функцию. Например, если известно, что «поведение» функции примерно одинаково на отрезке, то можно использовать для расчета лишь его часть и выбрать наилучший по AIC. В ином же случае мы рискуем получить многочлен, который не является оптимальным.

AIC прост в реализации и способен работать как с линейными, так и не линейными моделями. Может быть использован для оценки качества моделей на основе их прогнозных способностей. В этом случае, AIC позволяет выбрать модель, которая обладает наилучшей способностью предсказывать будущие значения переменных на основе имеющихся данных. Но AIC не учитывает все возможные модели и может пропустить более подходящую модель. Поэтому необходимо использовать несколько критериев для выбора наилучшей модели. На практике AIC обычно используется вместе с еще несколькими критериями, что бы было проще определить наилучший вариант.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие/В.И.Киреев, А.В. Пантелеев. – М.:Высш.шк.,2004. – 480с.: ил. ISBN 5-06-004763-6
2. Machinelearning.ru: профессиональный информационно-аналитический ресурс, «Критерий Акаике» //URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Критерий_Акаике