ПЕРИОДИЧНОСТЬ ИНТЕГРАЛА С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

Малютина М. В., студентка 2 курса ИМЭИ ИГУ

Аннотация: В данной работе решены следующие задачи: получены необходимые и достаточные условия периодичности интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной на всей числовой прямой периодической функции, изучена структура этого интеграла. Сформулирован и доказан ряд вспомогательных утверждений, а также критерий периодичности интеграла с переменным верхним пределом.

Ключевые слова: интеграл с переменным верхним пределом, периодическая функция, основной период.

Изложению основных результатов предпошлем некоторые вспомогательные сведения [1]. Рассмотрим функцию $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, где $f(x)\in R_{[a,b]}$. Известно, что интеграл с переменным верхним пределом обладает следующими свойствами:

1

$$F(a)=0;$$

2

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt;$$

3

$F(x)\in \mathrm{Lip}_{[a,b]}$, в частности, $F(x)\in C_{[a,b]}$;

4

Функция $y=F(x)$ дифференцируема в точках непрерывности $y=f(x)$, и в этих точках $F'(x)=f(x)$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *периодической с периодом* T, если существует такое число T, что на всей области определения функции выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$. Наименьший положительный период T_0 функции называется ее *основным* периодом. Если он существует, то функцию $y=f(x)$ принято называть T_0*-периодической.*

Пусть $f(x)\in C(\mathrm{R})$ и является периодической с периодом T. Интеграл $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, вообще говоря, не наследует этого свойства от функции $f(x)$. Один из примеров доставляет 2π-периодическая функция $f(x)=1-\cos x$. Очевидно, что функция $\int_0^x f(t)dt=x-\sin x$ не является периодической.

Утверждение 1 (необходимое условие периодичности интеграла с переменным верхним пределом). Если функция $y = F(x)$ является периодической с периодом T, то $f(x) \in C(\mathrm{R})$ также является периодической с периодом T.

Лемма. Пусть функция $f(x) \in C(\mathrm{R})$ является периодической с периодом T, тогда $\forall x \in \mathrm{R} \int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $G(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$. Поскольку $f(x) \in C(\mathrm{R})$, то, в силу свойств интеграла с переменным верхним пределом [1], $G(x) \in C^1(\mathrm{R})$, и $\forall x \in \mathrm{R}\ G'(x) = f(x+T) - f(x)$. С учетом периодичности функции $y = f(x)$, получаем $\forall x \in \mathrm{R}\ G'(x) = 0$, значит, $G(x) = C$, C – постоянная. В частности, $G(x) = G(0)$. **Лемма доказана.**

Теорема 1 (критерий периодичности интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной периодической функции). Пусть $f(x) \in C(\mathrm{R})$ является периодической с периодом T. Тогда для того, чтобы функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ была периодической с периодом T необходимо и достаточно, чтобы $\int_0^T f(t)dt = 0$.

Для доказательства следует рассмотреть $G(x) = F(x+T) - F(x)$ с использованием доказанной выше леммы.

Замечание 1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет минимальный период T_0, т. е. является T_0-периодической и $\int_0^{T_0} f(t)dt = 0$, тогда из теоремы 1 и утверждения 1 следует, что $y = F(x)$ также будет T_0-периодической.

Теорема 2 (о структуре интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной периодической функции). Пусть $f(x) \in C(\mathrm{R})$ является периодической с периодом T, тогда справедливо равенство

$$\int_a^x f(t)dt = \omega_T (x-a) + \varepsilon(x),$$

где $\omega_T = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$, $\varepsilon(x)$ – периодическая с периодом T функция, которая определяется однозначно при каждом значении T.

Доказательство. Путем тождественных преобразований нетрудно показать, что $\forall x \in \mathrm{R}\ \varepsilon(x+T) - \varepsilon(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt - \int_0^T f(t)dt$. Это, в силу доказанной выше леммы, влечет периодичность функции $y = \varepsilon(x)$. Кроме того, $\varepsilon(x) \in C^1(\mathrm{R})$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $\varepsilon'(x) = f(x) - \omega_T$ и начальному условию $\varepsilon(a) = 0$, т. е. определяется однозначно при каждом значении T. **Теорема 2 доказана.**

Замечание 2. Если $f(x) \in C(\mathrm{R})$ является T_0-периодической, то функция $y = \varepsilon(x)$ также является T_0-периодической и ее вид не зависит от значения периода T, поскольку $\omega_T = \omega_{T_0}$ для любого T.

Замечание 3. Из теоремы 2 легко получить утверждение теоремы 1.

В качестве приложения работы была рассмотрена следующая задача, отражающая динамику популяции биологических видов (растений, животных и др.):

$$N'(t) = \alpha(t)N(t),\ N(0) = N_0,$$

где $\alpha(t) \in C_{[0,+\infty)}$ – относительная скорость изменения численности популяции, $N(t)$ – численность популяции в момент времени t. Известно, что решением задачи является следующая функция:

$$N(t) = N_0 e^{\int_0^t \alpha(s)ds}.$$

Из выше сформулированных теорем можно с уверенностью утверждать, что динамика популяции будет иметь периодический характер, если функция $\alpha(t)$ является периодической с периодом T и $\int_0^T \alpha(s)ds = 0$.

Список использованных источников и литературы

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3-х томах: Том 2. – СПб.: Лань, 2009.