

МЕТОД ОПОРНЫХ МАЖОРАНТ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В.А. Дыхта

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова
Сибирского отделения РАН,
Иркутский государственный университет

dykhta@gmail.com

Семинар кафедры

2024 год, Иркутск

Необходимое условие глобальной оптимальности — позиционный принцип минимума — обобщается на гладкие задачи с терминальными ограничениями. Для этого применяется общий метод опорных мажорант, который конкретизируется для задачи управления на базе метода штрафных оценок Поляка (модифицированной функции Лагранжа с квадратичным штрафом). Но соответствующая безусловная экстремальная задача не требует решения: если исследуемый процесс оптимален в исходной задаче управления, то спуск с него в безусловной задаче на допустимую траекторию с помощью позиционного принципа минимума невозможен (при любом выборе множителя Лагранжа и штрафного параметра). Нарушение этого необходимого условия сопровождается предъявлением улучшающего процесса (который может оказаться скользящим режимом).

Задача (P) :

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$g_i(x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3)$$

$$J[\sigma] = g_0(x(t_1)) \rightarrow \inf.$$

- σ — пары функций (x, u) с $x \in AC$, $u \in \mathcal{U} = L_\infty(T, U)$;
- $U \subset R^m$ — компакт;
- $f(t, x, u)$ непрерывна, гладкая по x , удовлетворяет условию подлинейного роста;
- все функции g_i , $i = \overline{0, k}$ гладкие;
- Σ — множество пар, удовлетворяющих системе (1), (2);
- $D \subset \Sigma$ — множество допустимых пар (процессов) **задачи (P)**.

Позиционный принцип минимума (F-ПМ) для задачи (P_0) без терминальных ограничений базируется на использовании опорных мажорант функционала — **слабо убывающих (u-стабильных) функций**, являющихся решениями неравенства Гамильтона–Якоби

$$\varphi_t(t, x) + \min_{u \in U} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) \leq 0, \quad \varphi(t_1, x) = g_0(x) - g_0(\bar{x}(t_1)). \quad (4)$$

Решения φ неравенства (4) считаются липшицевыми, гладкими по x функциями, образующими пространство \mathcal{F} .

Для формулировки F-ПМ при фиксированной $\varphi \in \mathcal{F}$ вводятся:

- экстремальное отображение

$$U_\varphi(t, x) = \underset{u \in U}{\text{Argmin}} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u); \quad (5)$$

- множество \mathcal{V}_φ его селекторов $v(t, x)$ — позиционных управлений потенциального спуска (в общем случае разрывных);
- решением системы (1) при $u = v(t, x)$ считается пучок движений Кра-совского–Субботина $\mathcal{X}(v)$, дополненный решениями Каратеодори (если таковые существуют).

⇒ **Общий F-ПМ** с нелинейной φ — это

Условие $N(\varphi)$.

Если процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ оптимален в задаче (P_0) , то траектория \bar{x} оптимальна в следующей φ -присоединенной задаче:

$$g_0(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}(v), \quad v \in \mathcal{V}_\varphi.$$

Универсальный F-ПМ базируется на квазилинейной мажоранте

$$\varphi^\psi(t, x) = g_0(x) - g_0(\bar{x}(t)) + \left(\psi(t) - \nabla g_0(\bar{x}(t)) \right) \cdot (x - \bar{x}(t)) + r(t). \quad (6)$$

Здесь $\psi(\cdot)$ — котраектория процесса $\bar{\sigma}$, т.е. решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x(t, \bar{x}(t), \psi, \bar{u}(t)), \quad \psi(t_1) = g_{0x}(\bar{x}(t_1)),$$

где $H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$, а «поправка» $r(t)$ обеспечивает слабое убывание функции (6).

Универсальный F-ПМ — условие $\mathbf{N}(\psi) := \mathbf{N}(\varphi^\psi)$ — существенно усиливает принцип максимума Понтрягина задачи (P_0) , хотя формулируется в рамках совпадающих конструкций.

2. Опорные мажоранты экстремальных задач и улучшение допустимой точки

В пространстве \mathcal{Z} рассмотрим задачу (A):

$$f(z) \rightarrow \min, \quad z \in D \subset \mathcal{Z},$$

где f — конечная функция на \mathcal{Z} .

Функцию $\Phi(z)$, определенную на \mathcal{Z} , назовем *опорной сверху к f в точке $\bar{z} \in \mathcal{Z}$* , если $\Phi(\bar{z}) = f(\bar{z})$ и

$$f(z) - f(\bar{z}) \leq \Phi(z) - \Phi(\bar{z}), \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Такую функцию Φ назовем *опорной мажорантой f в точке \bar{z}* .

Под задачей *улучшения точки \bar{z}* в задаче (A) понимается нахождение точки $z_* \in D$ со свойством $f(z_*) < f(\bar{z})$. (Понятно, что при этом \bar{z} не должна быть решением (A).)

Предложение 1

Любая точка $z_* \in D$, удовлетворяющая неравенству $\Phi(z_*) < \Phi(\bar{z})$, является решением задачи улучшения точки \bar{z} в задаче (A).

Введем в рассмотрение следующую задачу сравнения (МА):

$$\Phi(z) \rightarrow \min, \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Из Предложения 1 \implies исходную задачу улучшения \bar{z} в задаче (спуска из \bar{z} по f) можно заменить задачей спуска в задаче сравнения из \bar{z} по мажоранте Φ , — если для этого имеются теоретические основания.

В случае реализуемости описанной замены задач получаем

Необходимое условие $N(\Phi)$

Если спуск из \bar{z} по Φ оказался возможным, то \bar{z} не оптимальна в задаче (А).

Замечания

1. Переход к задаче сравнения — это своеобразный способ нелокального варьирования точки \bar{z} в задаче (A).
2. Все модифицированные и штрафные лагранжианы порождают опорные мажоранты в соответствующих классах задач, для которых полное обоснование требует привлечения общей теории локального минимума Левитина, Милютина, Осмоловского [10] (для МФЛ), или штрафов со срезками целевой функции (т.е. первое слагаемое берется в виде $\bar{f}_+(z) := \max\{f(\bar{z}), f(z)\}$), следуя подходу Ащепкова, Константинова [1].

3. Позиционный принцип минимума для задачи (P)

Для доказательства F-ПМ будет использоваться МФЛ

$$M_{\lambda\gamma}(x) = g_0(x) + \lambda'g(x) + \frac{\gamma}{2}|g(x)|^2, \quad (7)$$

где λ — множитель Лагранжа, $g = (g_1, \dots, g_k)$, $\gamma > 0$ — параметр штрафа и $|\cdot|$ — евклидова норма.

Поляком [11] доказано, что в задачах на условный экстремум в гильбертовом пространстве снятие ограничений посредством функции (7) сохраняет нормальные точки строгого локального минимума с квадратичной достаточностью (при достаточно больших γ и λ , близких из условия критичности). Но для нас важно, что **функция $M_{\lambda\gamma}$ обладает опорным свойством**, что без труда обосновывается.

Доказательство. Следуя [11], перепишем МФЛ $M_{\lambda\gamma}$ в следующем виде

$$M_{\lambda\gamma}(x) = f(x) + \frac{\gamma}{2}|g(x) + r|^2 + \nu,$$

где

- $r = \lambda/\gamma$,
- $\nu = -\lambda^2/2\gamma = -\gamma/2 \cdot r^2$.

Отсюда получаем равенство

$$M_{\lambda\gamma}(x) - M_{\lambda\gamma}(\bar{x}) = f(x) - f(\bar{x}) + \frac{\gamma}{2} \left(|g(x+r)|^2 - |r|^2 \right).$$

Если при некоторых x_* , λ , γ левая часть этого равенства оказалась < 0 , то и правая часть будет < 0 , что дает неравенство

$$f(x_*) - f(\bar{x}) < \frac{\gamma}{2} (|r| + |g(x_* + r)|) (|r| - |g(x_* + r)|).$$

Но если дополнительно оказалось, что x_* допустима, то она решает задачу улучшения. Отсюда и из приведенных соотношений следует опорность $M_{\lambda\gamma}$ в точке \bar{x} . □

⇒ Мы можем применить универсальный F-ПМ по схеме п. 2 к любой из задач семейства

$$M_{\lambda\gamma}(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad \sigma \in \Sigma, \quad (8)$$

взяв $M_{\lambda\gamma}$ вместо g_0 .

Для этого вводятся:

- котраектория $\eta(t)$ процесса $\bar{\sigma}$ задачи (8);
- её возмущение

$$p(t, x) := \nabla_x \varphi^\eta(t, x) = \eta(t) + \nabla M_{\lambda\gamma}(x) - \nabla M_{\lambda\gamma}(\bar{x}(t));$$

- η -экстремальное отображение

$$U_\eta(t, x) = \underset{u \in U}{\operatorname{Argmin}} p(t, x) \cdot f(t, x, u), \quad (t, x) \in T \times R^n;$$

- множество его селекторов \mathcal{V}_η и движений Красовского–Субботина $\mathcal{X}(v), v \in \mathcal{V}_\eta$.

Обозначим через E_η объединение всех пучков движений по $v \in \mathcal{V}_\eta$, а через $E_{\lambda\gamma}^T$ — множество всех движений, удовлетворяющих терминальным ограничениям (3) (это множество может содержать траектории овыпукленной задачи (coP)).

Теорема 1

Если $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ — оптимальный процесс в задаче (P), то при любом выборе $\lambda \in R^k$, и $\gamma > 0$ выполняется неравенство

$$g_0(\bar{x}(t_1)) \leq g_0(x(t_1)) \quad \forall x \in E_{\lambda\gamma}^T. \quad (9)$$

Смысл теоремы ясен: в её предположениях спуск с $\bar{\sigma}$ на допустимую траекторию овыпукленной задачи (coP) с помощью позиционного принципа минимума невозможен ($\bar{\sigma}$ «не бракуется»). В контрпозитивном случае, когда указанный спуск окажется возможным, процесс $\bar{\sigma}$ не оптимален, а полученная траектория спуска $x^*(\cdot)$ задает допустимый процесс в задаче (coP) (на его тестировании в общем случае не будем останавливаться).

Относительно стратегии выбора параметров λ , γ : λ может наследоваться из принципа максимума, а γ — следовать рекомендациям статьи [11].

4. Примеры

Пример 1

$$\dot{x} = u, x(0) = 0, x(1) = 0, |u| \leq 1, J[\sigma] = \int_0^1 [x^2 + (u^2 - 1)^2] dt \rightarrow \inf.$$

Это знаменитый пример Больца с ограниченным управлением, в котором $\bar{\sigma} = 0$ допустимая пара. Она не оптимальна в силу принципа максимума Понтрягина, но этот критерий не даёт улучшенной пары.

Введем штрафной лагранжиан $J[\sigma] + \lambda x(1) + \frac{\gamma}{2} x^2(1)$ и применим к нему и $\bar{\sigma}$ теорему 1. Легко убедиться, что $\eta \equiv \lambda$, а экстремальное отображение $U_\eta(x)$ находится из задачи:

$$(\lambda + 2\gamma x u)u + (u^2 - 1)^2 \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1.$$

Мы достигнем (в пределе) минимума каждого слагаемого данной функции, если положим $\lambda = 0$ и выберем селектор $v(x) = -\text{sign } x$, когда $x \neq 0$, и $v(0) = +1$. Его ломаные Эйлера равномерно сходятся к движению $x^* \equiv 0$ — траектории скользящего режима с обобщенным управлением $1/2 \delta_{+1} + 1/2 \delta_{-1}$. Очевидно, что это глобально оптимальное решение расширенной версии примера Больца.

Пример 2

$$\dot{x}_1 = (t-1)u, \quad \dot{x}_2 = x_1(u-1), \quad x(0) = (0, 0), \quad \underline{x_1(2) = 0}, \quad |u| \leq 1, \\ J = x_2(2) \rightarrow \min.$$

Выпишем условия ПМП:

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2(u-1), \quad \psi_1(2) = \lambda, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \psi_2(2) = \lambda_0, \\ (\lambda_0, \lambda) \neq 0, \quad \lambda_0 \in \{0, 1\}, \quad (\psi_1(t-1) + \psi_2 x_1)u \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1,$$

при терминальной функции Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 x_2 + \lambda x_1.$$

Будем исследовать процесс $\bar{\sigma}$ с $\bar{u} \equiv 1$, $\bar{x}_1(t) = \frac{t^2}{2} - t$, $\bar{x}_2 \equiv 0$, $J[\bar{\sigma}] = 0$, для которого $\lambda_0 = 1$, а условие минимума

$$\left(\lambda(t-1) + \frac{t^2}{2} - t \right) u \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1$$

выполняется для \bar{u} только при $\lambda = 0$, причем строго на интервале $(0, 2)$.

Применим к $\bar{\sigma}$ F-ПМ с целевым лагранжианом

$$M_\gamma(x) = x_2(2) + \frac{\gamma}{2}x_1^2(2)$$

при множителе $\lambda = 0$ в соответствии с теорией. Тогда

$$\dot{\eta}_1 = -\eta_2(u - 1), \quad \dot{\eta}_2 = 0, \quad \eta_1(2) = \gamma\bar{x}_1(2) = 0, \quad \eta_2 \equiv 1,$$

$$p(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma x_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x_1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U_\eta: \quad (\gamma x_1(t - 1) + x_1)u \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1. \quad (10)$$

В окрестности начальной точки многозначности $x_1(0) = 0$ можем выбрать $v(x_1) = -1|O_+(0)$ (отличное от \bar{u}); тогда вдоль движения $x_1(t; v) = -\frac{t^2}{2} + t$ функция переключения (см. (10))

$$g(t, x_1(t; v)) = t\left(1 - \frac{t}{2}\right)(1 + \gamma t) > 0 \quad \forall t \in (0, 1).$$

Поэтому управление $v = -1$ не имеет переключений, и можно положить

$$u^0 \equiv -1, \quad x_1^0(t) = t - \frac{t^2}{2}, \quad x_2^0 = \frac{t^3}{3} - t^2.$$

Для этого допустимого процесса σ^0 $J[\sigma^0] = -\frac{4}{3} < 0 = J[\bar{\sigma}]$ и, следовательно, процесс $\bar{\sigma}$ не оптимален.

Примечательно, что процесс спуска σ^0 оказался строгой экстремалью Понтрягина на интервале $(0, 2)$, но известные достаточные условия (позиционные версии Кротова и Понтрягина) не позволили установить его оптимальность. А повторное применение к σ^0 F-ПМ не привело к его улучшению — вновь выдало σ^0 . Интересен конечный вердикт о минимали примера.

Позиционные усиления методов Понтрягина и Кротова решения задач оптимального управления

Известные результаты-антиподы объединены использованием однотипного метода позиционной минимизации бипозиционного лагранжиана (для ПМП) и лагранжиана Кротова.

Итоговые методы носят аналитический характер (не содержат итерационных процедур) и предназначены для качественного исследования модельных задач.

Традиционный подход Кротова для задачи (P_C) с терминальным ограничением $x(t_1) \in C$, C замкнуто в R^n .

Обозначим через Φ_+ множество всех функций $\varphi : T \times R^n \rightarrow R$ класса \mathcal{F} , удовлетворяющих неравенству:

$$\begin{aligned} R[\varphi](t, x, u) &:= \varphi_t(t, x) + \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) \geq 0 \\ &\forall (t, x, u) \in T \times R^n \times U, \end{aligned} \quad (11)$$

или эквивалентному неравенству Гамильтона-Якоби

$$\begin{aligned} P[\varphi](t, x) &:= \varphi_t(t, x) + \min_{u \in U} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) \geq 0 \\ &\forall (t, x) \in T \times R^n. \end{aligned} \quad (12)$$

Для любой $\varphi \in \Phi_+$ определим константу

$$\eta(\varphi) = \inf\{g_0(x) - \varphi(t_1, x) \mid x \in C, \varphi(t_1, x) \geq \varphi(t_0, x_0)\}. \quad (13)$$

Тогда имеет место оценка

$$J[\sigma] \geq \eta(\varphi) + \varphi(t_0, x_0) \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (14)$$

Если Ω — любое множество функций из Φ_+ , то из (14) следует, что

$$\min J(P_C) \geq \sup_{\varphi \in \Omega} [\eta(\varphi) + \varphi(t_0, x_0)] =: V(\Omega). \quad (15)$$

Теорема 2

(а) Для оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ в задаче (P_C) достаточно равенства

$$J[\bar{\sigma}] = V(\Omega).$$

(б) Пусть множество $f(t, x, U)$ выпукло на $T \times R^n$. Тогда существует множество гладких функций $\Omega \subset \Phi_+$ такое, что

$$\min J(P_C) = V(\Omega). \quad (16)$$

Теорема 2 ослабляет критерий из работы [14] (неравенство Гамильтона-Якоби (12) рассматривается здесь без краевого условия). Доказательство Теоремы 2 использует результаты Кларка и Ноур [15] о негладкой двойственности в оптимальном управлении.

Теорема 2 неверна для одноэлементного множества $\Omega = \{\varphi\}$ даже если расширить класс \mathcal{F} до липшицевых функций.

Следующая теорема из обзора [20] «является кульминацией многолетних усилий по обоснованию метода».

Теорема 3.

Для оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ в нормальной задаче (P_C) необходимо и достаточно существование липшицевой K -функции.

Нормальность $(P_C) \sim \bar{\sigma}$ и все оптимальные процессы задачи нормальны.

Далее будет показано, что для позиционной версии Кротова Теорема 3 неверна в части необходимости (а в части достаточности слишком груба).

Позиционная версия метода Кротова и условия глобальной оптимальности

Схема решения задачи Больца (\mathbf{P}_B) с функционалом

$$J = l(x(t_1)) + \int_T F(t, x(t), u(t)) dt \quad \text{и ограничением} \quad x(t_1) \in C,$$

где l, F непрерывны и гладкие по x , C замкнуто.

1. Фиксируем некоторую $\varphi \in \mathcal{F}$ и образуем **кротовский лагранжиан**

$$\begin{aligned} K^\varphi[x(\cdot), u(\cdot)] &= J[x(\cdot), u(\cdot)] - \varphi(t, x(t)) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_T \dot{\varphi}(t, x(t), u(t)) dt = \\ &= l(x(t_1)) - \varphi(t_1, x(t_1)) + \int_T [\dot{\varphi}(t, x(t), u(t)) + F(t, x(t), u(t))] dt + \varphi(t_0, x_0). \end{aligned}$$

Очевидно, что $K^\varphi = J$ на множестве D .

2. Задача $K^\varphi[\sigma] \rightarrow \inf, \sigma \in D$ «расщепляется»

A) на задачу минимизации **интеграла в K^φ** , т.е.

$$R^\varphi(t, x, u) \rightarrow \min, \quad x \in R^n, \quad u \in U \quad \forall t \in T; \quad (17)$$

B) на задачу минимизации **терминанта в K^φ** , т.е.

$$G^\varphi(x) := l(x) - \varphi(t_1, x) \rightarrow \min, \quad x \in E^\varphi, \quad (18)$$

где $E^\varphi = \{x \mid x \in C, \varphi(t_1, x) - \varphi(t_0, x_0) \geq 0\}$.

3. Задача А), а точнее, задача $K^\varphi \rightarrow \min, \sigma \in D$, решается позиционно (по схеме F-ПМ):

находится отображение

$$U_\varphi(t, x) = \underset{u \in U}{\operatorname{Argmin}} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u),$$

которое задаёт множество своих селекторов \mathcal{V}_φ с позиционными стратегиями

$$v(t, x) \in U_\varphi(t, x)$$

и пучками движений $\mathcal{X}(v) \forall v \in \mathcal{V}_\varphi$.

Пусть выбран борелевский селектор $\bar{v}(t, x) \in \mathcal{V}_\varphi$: система

$$\dot{x} = f(t, x, v(t, x)), \quad x(t_0) = x_0$$

имеет решение Каратеодори $\bar{x}(t)$ на T с управлением $\bar{u}(t) = \bar{v}(t, \bar{x}(t))$ класса \mathcal{U} . Теперь мы имеем некоторую пару $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in D$.

Положим $R^\varphi(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mu(t)$ на T .

- Если $\mu(t) = 0$ п.в. на T , то $\varphi \in \Phi_+$ и пара (\bar{x}, \bar{u}) — решение задачи А).

- Если же $\mu(t) \neq 0$, то перейдем к «нормированной» функции

$$\varphi^1(t, x) = \varphi(t, x) - \int_{t_0}^t \mu(s) ds \in \Phi_+,$$

для которой

$$R^{\varphi^1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0 \quad \text{п.в. на } T,$$

т.е. (\bar{x}, \bar{u}) — решение задачи А), **но для нормированной φ^1 .**

Важно, что нормировка не меняет экстремального отображения, т.е.

$$U_\varphi = U_{\varphi^1}.$$

4. Решаем терминальную задачу В) с нормированной φ^1 (это общий случай):

$$G^{\varphi^1}(x) = l(x) - \varphi^1(t_1, x) \rightarrow \min, \quad x \in E^{\varphi^1}$$

(с неравенством $\varphi^1(t_1, x) - \varphi^1(t_0, x_0) \geq 0$).

- Если $\min G^{\varphi^1}(x) = 0$ и достигается при $\bar{x}(t_1)$, то пара (\bar{x}, \bar{u}) глобально оптимальна, причем

$$\underline{J[\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)] = \varphi^1(t_0, x_0) \quad \left(= \min(P_B) \right)}.$$

- Если же $\min G^{\varphi^1}(x) = m \neq 0$, то **вывод об оптимальности $\bar{\sigma}$ остается**, но для «лаконичной» формулы значения задачи делаем **вторую нормировку**, полагая $\varphi^2(t, x) = \varphi^1(t, x) + m$. Тогда

$$\min(P_B) = \varphi^2(t_0, x_0),$$

что совпадает с ответом для проверочных функций Каратеодори.

Таким образом, в терминальной задаче В) проверяется достижение минимума в точке $\bar{x}(t_1)$. Если оно нарушено, то φ **не разрешающая**.

На общий случай разрывной стратегии описанная схема распространяется с естественными изменениями.

Замечания

- 1) При решении задач делать нормировки не обязательно, т.к. экстремальные отображения при этом не меняются. Но для теоретического сравнения с альтернативными ответами канонические формулировки полезны.
- 2) В задачах А), В) минимумы по x естественно брать по некоторому априорно заданному множеству достижимых состояний $Q(t) \supseteq R(t)$ (= множеству достижимости или управляемости).

Пример 3 (Vinter*) с нарушением условия нормальности.

$$\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = 2x_1u, x(0) = (0, 0), x_2(1) = 0, |u| \leq 1, J = x_1(1) \rightarrow \min.$$

По утверждению автора в этом примере $\bar{x} \equiv 0$ — единственная допустимая и, следовательно, оптимальная траектория. Но липшицевой K -функции не существует.

Здесь терминальная функция Лагранжа

$$l = \lambda_0 x_1 + \lambda x_2$$

и условия ПМП: $\dot{\psi}_1 = -2u$, $\psi_1(1) = \lambda_0$, $\psi_2 \equiv \lambda \in R$, $(\psi_1(t) + \lambda x_1)u \rightarrow \min$.

Отсюда для $\bar{x} \equiv 0$ получаем $\lambda_0 u \rightarrow \min \implies \underline{\lambda_0 = 0}$, т.к. **все постоянные управления генерируют \bar{x}** . Имеем бесчисленное множество аномальных экстремалей.

* Vinter R. B. Dynamic programming for optimal control problems with terminal constraints // Lecture Notes in Math. — 1985. — Vol. 1119. — Pp. 190–202.

Заметим, что функция $w = x_2 - x_1^2$ — первый интеграл управляемой системы и, следовательно, $\dot{w}(x) \equiv 0 \implies w$ сильно монотонна в любом смысле, и мы возьмем $\varphi = w$. Тогда:

$$\begin{aligned} R^\varphi(x, u) = \dot{w}(x) \equiv 0 &\implies \text{её min есть } \forall (x(\cdot), u(\cdot)) \in D, \\ G^\varphi(x) = x_1 - x_2 + x_1^2 &\text{ имеет min в точке } \bar{x}_1 = 0 \\ \text{на множестве } E^\varphi : &x_2 = 0, \quad x_2 = x_1^2. \end{aligned}$$

\implies Все пары $(\bar{x}, u(\cdot)) \in \mathcal{U}$ оптимальны.

Таким образом, гладкая нелинейная $\varphi = w$ оказалась глобально разрешающей функцией Кротова (для указанных пар), а также проверочной по Каратеодори.

Это опровергает Теорему Кларка-Винтера.

Интересно, что $\bar{x} \equiv 0$ — не единственная оптимальная траектория, причем устанавливается это с линейной K -функцией $\varphi(t, x) = \langle \psi(t), x \rangle$. Действительно, возьмем $\varphi(t, x) = x_1 + \lambda x_2$ при $\lambda_0 = 1$.

Тогда
$$\min_{|u| \leq 1} \dot{\varphi}(t, x, u) = -|1 + 2\lambda x_1| \quad \left(= P(x); \text{ см. (12)} \right).$$

Эта вогнутая функция достигает минимума по x_1 на границе множеств достижимости и управляемости уравнения

$$\dot{x}_1 = u, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 0, \quad (\text{т.к. } \min_D J = 0!), \quad |u| \leq 1,$$

т.е. на отрезках прямых $x_1^1 = t$, $x_1^2 = 1 - t$ ($x_1^3 = 0$ дает уже найденные экстремали с \bar{x}).

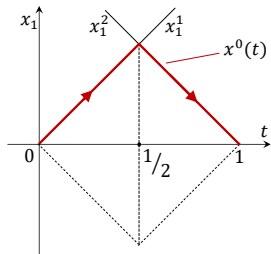


Рис. 1

Пересечение x_1^1, x_1^2 образуют допустимую траекторию $x^0(t)$ с релейным управлением
$$u^0(t) = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1]}$$
 (χ_A — характеристическая функция множества A). Пара $(x^0(t), u^0(t))$ глобально оптимальна, вместе с $\sigma^* = -\sigma^0$.

Замечание.

Использование вогнутости $P(x)$ рационально. Но его можно заменить явным использованием экстремальной стратегии

$$v(x_1) = -\text{sign}(1 + 2\lambda x_1)$$

с подбором множителя λ из финального условия $x_1(1) = 0$. Оказывается, что $\lambda = -1$.

Таким образом, два решения примера с **разными K -функциями** опровергают теорему Кларка-Винтера. Это довольно неожиданный факт: по общепринятой концепции разрешающая функция Кротова является атрибутом задачи, а не какого-либо оптимального решения.

Пример 4 с бесчисленным множеством экстремалей построен Кротовым [16, с. 55-57]:

$$\dot{x} = u, \quad x(-1) = x(1) = 0, \quad |u| \leq 1, \quad J = -\int_T tx^2 dt \rightarrow \min.$$

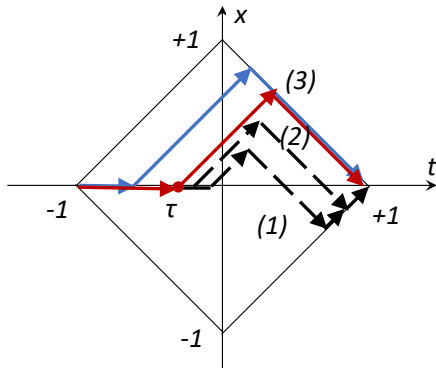


Рис. 2. Схема первого семейства экстремалей в примере 4; второе симметрично относительно оси времени

Пример 4 с бесчисленным множеством экстремалей построен Кротовым [16, с. 55-57]:

$$\dot{x} = u, \quad x(-1) = x(1) = 0, \quad |u| \leq 1, \quad J = - \int_T tx^2 dt \rightarrow \min.$$

Применим формализм Кротова с соответствующей адаптацией.
Зададимся линейно-квадратичной

$$\varphi(t, x) = \psi(t)x + \frac{1}{2}S(t)x^2, \quad S(\cdot) \in AC,$$

и образуем **кротовский лагранжиан**

$$\begin{aligned} K^\varphi[x(\cdot), u(\cdot)] &= J[x(\cdot), u(\cdot)] - \varphi(t, x(t)) \Big|_{t_0}^{t_1} + \\ &+ \int_T \dot{\varphi}(t, x(t), u(t)) dt = \int_T \left(\psi(t)u(t) + S(t)x(t)u(t) \right) dt, \end{aligned}$$

если положить

$$S(t) = c - t^2, \quad c \in R - \text{параметр,}$$

чтобы исключить x^2 в K^φ .

В итоге получим задачу:

$$K^\varphi[\sigma] = \int_T (\psi(t)u + (c - t^2)xu) dt \rightarrow \min, \quad \sigma \in D, \quad (19)$$

причем $K^\varphi = J$ на множестве D , и интегрант в (19) — это в точности $\dot{\varphi}(t, x, u)$.

$$\implies \min_{|u| \leq 1} \dot{\varphi}(t, x, u) = -|\psi(t) + (c - t^2)x| \quad (20)$$

— вогнутая функция от x , задающая экстремальную стратегию, и минимум которой по x достигается на границах множеств достижимости и управляемости системы

$$\dot{x} = u, \quad |u| \leq 1 \text{ с началом в } (\tau, 0) \text{ и концом } (1, 0).$$

Здесь τ — правый конец отрезка $[-1, \tau]$ с $x = 0$, с которого начинаются все экстремали (это \implies из ПМ).

Курсивом выделен вывод, который задает структуру оптимального процесса σ^0 с траекторией x^0 в верхней полуплоскости $x \geq 0$ и симметричное решение σ^* с $x^* = -x^0$. Эти процессы определены с точностью до конкретизации параметров $\tau \in (-1, 0)$, $c \in R$ из вспомогательной задачи минимизации. Остальные (не оптимальные) экстремали отсеиваются полученным выводом, а оптимальность σ^0 и σ^* нетрудно обосновать.

Далее (в примере 7) решение будет получено **другим** методом.

Отметим кратко ещё одно технологическое новшество — **построение разрешающей функции φ и оптимальной стратегии $v(t, x)$ из двух составляющих (в два этапа)**:

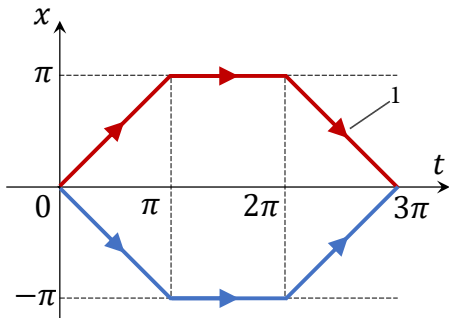
- 1) на некотором множестве позиций $Q^1 \subset [t_0, \tau] \times R^n$ находятся функция $\varphi^1(t, x)$, φ_1 -экстремальное отображение $U_{\varphi_1}(t, x)$ и отрезок движения $x^1(t)$, гипотетически нацеленные на безусловную минимизацию $g_0(x(t_1))$;
- 2) на множестве $Q^2 \subset [\tau, t_1] \times R^n$ находятся $\varphi^2(t, x)$, φ_2 -экстремальное отображение и движение $x^2(t)$ с целевого множества C (из множества управляемости), непрерывно стыкующееся с $x^1(t)$.

Составной набор $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$ является искомым.

Пример 5 (Дыхта, Гурман [14, с. 92, 93]) с бесчисленным множеством экстремалей.

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x(3\pi) = 0, \quad |u| \leq 1, \quad J = \int_T \cos x(t) dt \rightarrow \min, \quad T = [0, 3\pi].$$

Траектории экстремалей — ломаные, накапливающиеся вдоль оси t — траектории особого режима.



Особенность примера — наличие двух симметричных **магистралей** $x = \pm\pi$ с минимально возможным значением интегранта

$$\cos(\pm\pi) = -1.$$

Рис. 3

Положим $\varphi(x) = \cos x$. Тогда

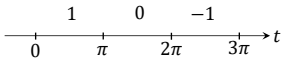
$$\dot{\varphi}(x, u) = -u \sin x, \quad \min_{|u| \leq 1} \dot{\varphi}(x, u) = -|\sin x| < 0,$$

$$U_{\varphi}(x) = \{v(x)\}, \quad v(x) = \begin{cases} 1, & \sin x > 0, \\ -1, & \sin x < 0, \\ [-1, 1], & \sin x = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Рассмотрим движение с $v(x)$.

В момент $t = 0$ $\sin x_0 = \sin 0 = 0$ и мы имеем многозначность. Выберем (наугад) $v(x) = 1$ в $O_+(0)$. Тогда $x(t) = t$ и $\sin t > 0$ до момента $\tau = \pi$ выхода на магистраль $x = \pi$. Легко убедиться, что выбор $v(x) = \pm 1$ в $O_+(\pi)$ противоречит стратегии (21). Остается только движение по магистрали с управлением $u = 0$ при сохранении равенства $\sin x = \sin \pi = 0$ для функции переключения.

Но движение по магистрали придётся прекратить в момент $\tau' = 2\pi$, чтобы прийти в цель $x(3\pi) = 0$ по траектории $x(t) = 3\pi - t$. Выбор τ' не случаен: он соответствует максимально возможному времени движения по магистрали. В итоге мы получили трехзвенную ломаную $\bar{x}(t)$ (под номером 1 на рис. 3) с релейным управлением $\bar{u}(t)$:



Пара (\bar{x}, \bar{u}) оптимальна в соответствии с позиционной схемой Кротова. В силу симметрии примера оптимальна и пара $(x^0, u^0) = -(\bar{x}, \bar{u})$ (см. рис. 3):

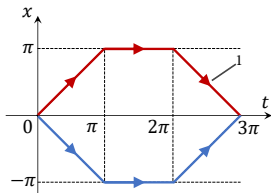


Рис. 3

Приведенное решение значительно проще и короче традиционного [14], состоящего из трех этапов на стр. 92, 93, 130-132 с привлечением условия типа Якоби.

базируется на использовании **бипозиционных функций**

$$S(t, x, \psi) : T \times R^n \times R^n \rightarrow R,$$

определенных на траекториях **канонической системы**

$$\dot{x} = H_\psi(t, x, \psi, u), \quad \dot{\psi} = -H_x(t, x, \psi, u), \quad u \in U. \quad (22)$$

Предполагается, что функции S локально липшицевые, гладкие по x, ψ . Пусть \mathcal{F}_b — класс таких функций.

Будем рассматривать задачу Больца (P_b) с ограничениями (как и выше)

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \in C \quad (23)$$

для фазовой системы в (22), но (в отличие от (P_B)) с гладко заданным целевым множеством

$$C = \{x \mid \varkappa_1(x), \dots, \varkappa_d(x) \leq 0, \quad g_1(x), \dots, g_k(x) = 0\}.$$

Тогда для котраекторий $\psi(\cdot)$ системы (22) должно выполняться условие трансверсальности (вытекающее из ПМП):

$$\begin{cases} \psi(t_1) = L_x(x(t_1), \mu), & \mu = (\lambda_0, \alpha, \beta) \neq 0, \\ \lambda_0 \in \{0, 1\}, & \alpha \in R_+^d, \quad \beta \in R^k, \quad \langle \alpha, \kappa(x(t_1)) \rangle = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Здесь $L(x, \mu) = \lambda_0 l(x) + \langle \alpha, \kappa(x) \rangle + \langle \beta, g(x) \rangle$ — терминальная функция Лагранжа.

Обозначим через Γ множество троек функций $\gamma = (x(t), \psi(t), u(t))$, связанных на отрезке $T = [t_0, t_1]$ системой условий (22)–(24).

Для любой фиксированной функции $S \in \mathcal{F}_b$ определим **бипозиционный лагранжиан**

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_S[\gamma] = & l(x(t_1)) - S(t, x(t), \psi(t)) \Big|_{t_0}^{t_1} + \\ & + \int_T \left[\dot{S}(t, x(t), \psi(t), u(t)) + F(t, x(t), u(t)) \right] dt, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\dot{S}(t, x, \psi, u)$ — полная производная функции $S(t, x, \psi)$ в силу канонической системы (22).

Множество D задачи (P_b) естественным образом вкладывается в Γ и при этом вложении $J[\sigma] = \mathcal{K}_S[\gamma]$, так что имеет место равенство

$$\inf_D J[\sigma] = \inf_{\Gamma} \mathcal{K}_S[\gamma] \quad (\forall S \in \mathcal{F}_b). \quad (26)$$

Естественно рассматривать следующую **задачу сравнения** (\mathcal{K}_S, Γ) :

$$\mathcal{K}_S[\gamma] \rightarrow \inf, \quad \gamma \in \Gamma. \quad (27)$$

Поскольку ситуация здесь вполне аналогична позиционному формализму Кротова, то задачу сравнения (27) будем решать позиционно. Правда, в этой задаче траектории стартуют с разных концов отрезка T , но связанные с этим трудности необходимо парировать удачным выбором функции S .

Введем H -экстремальное отображение

$$U_H(t, x, \psi) = \underset{u \in U}{\operatorname{Argmin}} H(t, x, \psi, u),$$

$$H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u) + F(t, x, u)$$

и множество троек функций $\Gamma_H \in \Gamma$, управление в которых удовлетворяет **условию минимума**

$$u(t) \in U_H(t, x(t), \psi(t)) \quad \text{п.в. на } T.$$

Элементы $\gamma \in \Gamma_H$ называют **биэкстремалиями** задачи, пары их компонент $(x(t), u(t)) \in D$ — **экстремалиями**, а компоненты $\psi(t)$ — **коэкстремалиями** задачи.

В автономной задаче полезно дополнить эти условия равенством

$$H = c = \text{const}$$

вдоль биэкстремали, которое весьма информативно.

Введем функции \mathcal{R}_S, G_S , образующие лагранжиан \mathcal{K}_S (см. (25)):

$$\begin{cases} \mathcal{R}_S(t, x, \psi, u) = \dot{S}(t, x, \psi, u) + F(t, x, u), \\ G_S(q) = l(x_1) - S(t_1, x_1, \psi_1) + S(t_0, x_0, \psi), \end{cases} \quad (28)$$

где $q := (x_1 = x(t_1), \psi_0 = \psi(t_0), \psi_1 = \psi(t_1))$ — концевой набор решений канонической системы; набор q должен удовлетворять ограничению $q \in Q$, включающему все условия на компоненты q .

Посредством этих функций задача (27) на $\min \mathcal{K}_S$ при $\sigma \in D$ «расщепляется» на две подзадачи.

Опишем **схему решения задачи** (P_b) при фиксированной функции $S \in \mathcal{F}_b$.

1) Введем **S -экстремальное отображение** (см. (25))

$$U_S(t, x, \psi) = \underset{u \in U}{\text{Argmin}} \mathcal{R}_S(t, x, \psi, u) \quad (29)$$

и множество W_S его селекторов $w(t, x, \psi)$ — **бипозиционных управлений**.

2) Выберем селектор $w(t, x, \psi) \in W_S$ и рассмотрим соответствующие ему **пошаговые движения** $(x_\Delta(t), \psi_\Delta(t))$ канонической системы. Определим их равномерные пределы — **пучок движений Красовского-Субботина**

$$\text{Sol}(w) = \{(x(\cdot), \psi(\cdot))\} \quad (30)$$

— **решений овыпукленной канонической системы**.

Этот шаг — решение задачи на минимум интеграла в лагранжиане \mathcal{K}_S .

3) Переходим к задаче на минимум терминанта в \mathcal{K}_S (см. (28)):

$$G_S(q) \rightarrow \min, \quad q \in Q. \quad (31)$$

4) Если на некотором движении $(\bar{x}(t), \bar{\psi}(t)) \in Sol(w)$ реализуется минимум в двух указанных задачах, то $\bar{x}(\cdot)$ — **оптимальная траектория задачи** (P_b) — в случае генерирования её «обычным» управлением $\bar{u}(\cdot)$, — или **расширенной задачи** (со P_b), с обобщенным управлением $\bar{\nu}(dt)$ (тогда $(\bar{x}, \bar{\nu})$ — скользящий режим).

5) Если условия шага 4) не выполнены, то по данной схеме тестируются другие движения пучка $Sol(w)$. При отрицательном итоге этого перебора меняется селектор w из W_S и всё повторяется.

Конечно, данная бипозиционная функция S может оказаться **не разрешающей**, и возникает дилемма — испытать другую S , или сменить подход к методу решения задачи.

Приведенная схема решения очень груба и оставляет много вопросов. Например:

- как реализовать одновременное пошаговое движение для x, ψ ? ведь это фактически двухточечная задача;
- множество наборов множителей μ в условии трансверсальности (24) соответствует фиксированной паре $(x(\cdot), u(\cdot)) \in D$, которая неизвестна и подлежит поиску; поэтому шаги 2), 3) представляются проблематичными.

В полной общности ответы на эти вопросы неизвестны. Поэтому пока **ограничимся классами задач**, в которых проблемы не возникают: это **линейные и квадратичные по состоянию задачи** с линейными терминальными ограничениями.

Для таких задач используются **билинейные** и **билинейно-квадратичные функции** вида

$$S_1(x, \psi) = \langle \psi, x \rangle, \quad S_2(t, x, \psi) = \langle \psi, x \rangle + \frac{1}{2} x' \Psi(t) x \quad (32)$$

соответственно.

Отметим, что если какая-то из этих функций оказалась **разрешающей** для некоторой полученной оптимальности $(\bar{x}, \bar{u}) \in D$, то суперпозиция

$$\varphi(x, \bar{x}(t)) = \langle \bar{\psi}(t), x \rangle, \quad \text{или} \quad \varphi(t, x(t), \psi) = S_2(t, x, \bar{\psi}(t)) \quad (33)$$

будет **разрешающей** в смысле **Кротова** для данной пары.

Пример 6

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_1 u_2 x_1, \quad x(0) = (0, 0), \quad x_1(1) = 0, \quad |u_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \\ J = -x_2(1) \rightarrow \min.$$

Это полностью линейная по состоянию задача, так что для её решения выберем билинейную $S(x, \psi) = \langle \psi, x \rangle$.

Здесь терминальная функция Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = -\lambda_0 x_2 + \lambda x_1 = -x_2 + \lambda x_1,$$

так как задача нормальна ($\lambda_0 = 1$), $H = \psi_1 u_1 - u_1 u_2 x_1$,

$$\dot{\psi}_1 = u_1 u_2, \quad \psi_1(1) = \lambda \in R, \quad \psi_2 \equiv -\lambda_0 = -1.$$

Следовательно, $S(x, \psi) = \psi_1 x_1 - x_2$, $\dot{S}(x, \psi, u) = \psi_1 u_1$ и

$$\mathcal{K}_S = \int_T \psi_1 u_1 dt, \quad (34)$$

причем внеинтегральные слагаемые равны нулю.

Лагранжиан \mathcal{K}_S не зависит от фаз (т.е. двухточечную задачу исключили), а условие трансверсальности использованы в конструкции S . Т.о., трудности, о которых говорилось выше преодолены выбором S .

Из (34) находим $\min_{|u| \leq 1} \dot{S} = -|\psi_1|$ и экстремальную **копозиционную стратегию**

$$w_1(\psi_1) = -\text{sign } \psi_1 = \begin{cases} +1, & \psi_1 < 0, \\ -1, & \psi_1 > 0, \\ [-1, 1], & \psi_1 = 0 \end{cases} \quad (35)$$

по первой компоненте управления, а по второй придется рассмотреть варианты $u_2 = w_2 = \pm 1 \vee 0$.

Наиболее прост последний вариант: $u_2 \equiv 0 \implies x_2 \equiv 0 \implies J = 0$ при любом u_1 , приводящем $x_1(t)$ в цель $x_1(1) = 0$. Последнее возможно при $u_1 \equiv 0$, если $\lambda = 0$, или на релейных управлениях

$$u_1^0(t) = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1]}, \quad u_1^*(t) = -u_1^0(t),$$

которые даёт стратегия (35).

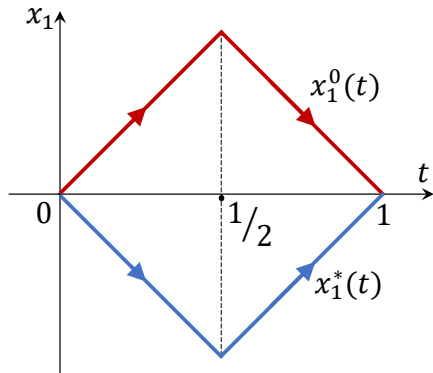


Рис. 4

В тоге этих рассмотрений получены **три допустимые пары**:

- $\bar{\sigma}$ с $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 \equiv 0, \bar{x} \equiv 0$;
- σ^0, σ^* с $u_1^0(t), u_1^*(t), u_2^0 = u_2^* \equiv 0, x_2^0(t) = x_2^*(t) \equiv 0$

с равным значением функционала $J = 0$. Легко понять из терминальной задачи (31), что **все эти пары глобально оптимальны**.

Теперь надлежит рассмотреть оставшиеся случаи $w = \pm 1$ при $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

• Пусть $w_2 = -1$, $\lambda > 0$. Тогда $\psi_1(1) = \lambda > 0 \implies w_1(\psi_1) = -1|_{O_-(1)} \implies x_1(t) = 1 - t$, $\psi_1(t) = t - 1 + \lambda$ в $O_-(1)$. Функция переключения $\psi_1(t)$ может обратиться в нуль при $\tau = 1 - \lambda \in T$, если $\lambda \in (0, 1)$. В этом варианте при $t < \tau$

$w_1 = +1$, $w_2 = -1$, $\psi_1(t) = -t + 1 - \lambda > 0 \implies$ более нет переключений w_1 .

Но чтобы выполнить начальное условие $x_1(0) = 0$, следует принять $\underline{x_1(t) = t}$, а момент переключения $\underline{\tau = 1/2}$. Получим уже знакомую ломаную $\underline{x_1^0(t)}$. Подсчет x_2 -компоненты траектории даёт

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \in [0, 1/2), \\ t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}, & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Получили пару $\sigma^1 \in D$ с $J[\sigma^1] = 0$ и, следовательно, σ^1 — **глобальная минималь** наряду с $\bar{\sigma}$, σ^0 , σ^* .

- Вариант $w = 1$, $\lambda > 0$ будет отличен от предыдущего только компонентой $x_2(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$ при $t \in [1/2, 1]$. Получим пару $\sigma^2 \in D$ с $J[\sigma^2] = 0$ — тоже оптимальную.

Разбор случая $\lambda < 0$ не даст новых экстремалей в силу инвариантности управляемой системы относительно смены знака всех переменных.

- **Позиционная версия ПМП позволила получить пять экстремалей и полное решение нелинейной невыпуклой задачи.**

Интересно отметить, что в статье [* см. внизу], из которой заимствована управляемая система разобранного примера, траектория $\bar{x}(\cdot) \equiv 0$ исследовалась на граничность во множестве достижимости. Классическое **необходимое условие граничности — условие экстремальности ПМП — выполняется**, однако оказалось, что $\bar{x}(t)$ идет по внутренности множества достижимости из $x(0) = 0$ при всех $t > 0$. Идентифицировалось это свойство нарушением условия экстремальности данной траектории в выпукленной системе (оно необходимо для граничности и в исходной системе). Тем не менее, как мы убедились, при элементарном терминальном ограничении \bar{x} оказывается оптимальной.

* Kaśkosz B., Lojasiewicz S. On a nonconvex, nonsmooth control system // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1988. – Vol. 136, no. 1. – Pp. 39–5.

Пример 7 Кротова 4

будет решен, используя билинейную функцию $S(x, \psi) = \langle \psi, x \rangle$ в позиционном формализме Понтрягина.

Предварительно обратим внимание, что в решении примера 4 использовалась линейно-квадратичная функция Кротова, котраектория которой $\psi(t)$ так и не была конкретизирована. По существу это была билинейно-квадратичная S , и $K^\varphi = \mathcal{K}_S$. Как мы убедимся, для решения «хватает» билинейной S .

Из ПМП имеем: $H = \psi u - tx^2$,

$$\dot{\psi} = 2tx, \quad \psi(-1), \quad \psi(1) \quad \text{свободны}, \quad (36)$$

$$\mathcal{R}_S = 2tx^2 + \psi u - 2tx^2 = \psi u,$$

$$\min_{|u| \leq 1} \mathcal{R}_S = -\psi \quad (\text{не зависит от } x), \quad \underline{w(\psi) = -\text{sign } \psi}. \quad (37)$$

Хотя экстремальная стратегия $w(\psi)$ копозиционная, движения с нею в канонической системе не разделяются, как это было в примере 6, поскольку сопряженное уравнение зависит от x . Но принципиальных трудностей это обстоятельство не создает.

Начинаем реализовывать стратегию (37) справа налево. Чтобы выполнить ограничение $x(1) = 0$, в полукрестности $O_-(1)$ должны выполняться условия

$$\psi(1) > 0, \quad w(\psi) = -1 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = 1 - t,$$

согласованные с (37). Тогда из (36) находим

$$\psi(t) = \psi(1) + t^2 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{3} > 0, \quad t \in O_-(1).$$

Но в некоторый момент τ' необходимо переключение управления $w(\psi)$, чтобы придти в точку $x(\tau) = 0$ (напомним, что все экстремали имеют начальный отрезок времени $[-1, \tau]$ с $x(t) = u(t) = 0 \mid [-1, \tau]$). Поэтому

$$\underline{x(t) = t - \tau, \quad u(t) = +1 \quad \text{при} \quad t > \tau, \quad \text{а точнее — при} \quad t \in [\tau, \tau']}$$

для сопряжения с движением $x(t) = 1 - t$ в конце периода управления.

Понятно, что $\tau' = \frac{1}{2}(\tau + 1)$, и в целом получены допустимые пары $\sigma^0 = \sigma^0(\tau)$, зависящие от параметра τ . Оптимальный процесс $\sigma^{00} = \sigma^0(\tau^0)$ получается дополнительной минимизацией функции $I(\tau) := J[\sigma^0(\tau)]$ при $\tau \in (-1, 0)$.

В силу симметрии также оптимальным будет процесс $\sigma^* = -\sigma^{00}$. Выводы в целом совпали с полученными в примере 4, но в последнем было двухпараметрическое семейство процессов для поиска оптимального.

Пример 8

Обобщенная изопериметрическая задача [АТФ] об облёте на самолете максимальной площади с возвращением на аэродром к заданному времени $T > 0$.

При фиксации на фазовой плоскости начальной точки (x_0, y_0) формализация этой задачи такова [АТФ, с. 108]:

$$S_* = \frac{1}{2} \int_0^T (xv - yu) dt \rightarrow \sup, \quad (38)$$

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \underline{x(T) = x_0, \quad y(T) = y_0}, \\ (u, v) \in A.$$

Здесь A — выпуклый компакт в R^2 , содержащий начало координат (для существования решения).

Для последующей интерпретации решения отметим, что если ввести векторы $z = (x, y)$, $\eta = (u, v)$, то функционал S_* (площадь) запишется в виде

$$S_* = \frac{1}{2} \int_0^T \eta' V z dt,$$

где V — матрица поворота плоскости на угол $\pi/2$, т.е. $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
 $\det V = 1 \neq 0$.

Положим $J = -S_*$, чтобы перейти к задаче минимизации, а также

$$\psi = (\psi_x, \psi_y), \quad S(\psi, z) = \langle \psi, z \rangle = \psi_x x + \psi_y y.$$

Тогда:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x = \frac{v}{2}, & \psi_x(0) = \psi_x(T), \\ \dot{\psi}_y = -\frac{u}{2}, & \psi_y(0) = \psi_y(T), \end{cases} \quad (39)$$

$$\mathcal{R}_S = \dot{S}(\psi, z) - \frac{1}{2} \eta' V z = \langle \psi, \eta \rangle,$$

$$\min_{\eta \in A} \langle \psi, \eta \rangle = c = \text{const}, \quad (40)$$

что вытекает из ПМП для автономной задачи.

Интегрируя сопряженную систему (39), получаем

$$\psi_x(t) = \frac{1}{2}y(t) + \alpha, \quad \psi_y(t) = -\frac{1}{2}x(t) + \beta, \quad \alpha, \beta - const.$$

Подставляя эти равенства в условие минимума (40), получим в развернутой форме равенство

$$\min_{\eta \in A} \left(\left(\frac{1}{2}y(t) + \alpha \right) u - \left(\frac{1}{2}x(t) - \beta \right) v \right) = c,$$

которое равносильно условию

$$\min_{\eta \in A} \left((y(t) + a)u - (x(t) - b)v \right) = C, \quad (41)$$

где $C = 2c$, $a = 2\alpha$, $b = 2\beta$.

Равенство (41) характеризует оптимальную траекторию облёта. Для его интерпретации введем функцию

$$m(p | A) = \min_{\eta \in A} \langle p, \eta \rangle$$

и множество $B = V'\eta = \left(\begin{array}{c} -v \\ u \end{array} \right)$, $\eta \in A$ (поворот A на угол $\frac{\pi}{2}$).

Тогда равенство (41) преобразуется к следующему:

$$\min_{\eta \in A} \langle p(t), V' \eta \rangle = \min_{\eta \in A} \langle V p(t), \eta \rangle = m(p(t) \mid B) = C \quad (42)$$

при $p(t) = (y(t) + a, -x(t) + b)'$. Здесь левая часть равенства поясняет переход к функции m множества B и её равенство C из (41). В итоге заключаем, что оптимальная кривая облёта — это сдвинутая на вектор (a, b) кривая уровня («высоты» C) функции m множества B .

Представленные подходы и иллюстрирующие примеры на пути обобщения позиционного принципа минимума для задач с терминальными ограничениями представляются вполне рабочим инструментом исследования, который допускает программную реализацию.

БЛАГОДАРЮ
ЗА ВНИМАНИЕ!

1. Ащепков Л. Т., Константинов Г. Н. Эффект «срезки» в задачах нелинейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1976. – Т. 16, № 4. – С. 1047–1051.
2. Дыхта В. А. Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // Доклады Академии Наук. – 2015. – Т. 462, № 6. – С. 653–656.
3. Дыхта В. А. Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона–Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 5. – С. 31–49.
4. Дыхта В. А. Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 73–86.
5. Дыхта В. А. О множестве необходимых условий оптимальности с позиционными управлениями, порожденном слабо убывающими решениями неравенства Гамильтона–Якоби // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2022. – Т. 28, № 3. – С. 83–93.

6. Дыхта В. А. Позиционный принцип минимума: вариационное усиление понятий экстремальности в оптимальном управлении // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2022. – Т. 41. – С. 19–39.
7. Дыхта В. А. Методы повышения эффективности позиционного принципа минимума в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2023. – Т. 224. – С. 54–64.
8. Дыхта В. А. Позиционный принцип минимума для квазиоптимальных процессов в задачах управления с терминальными ограничениями // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2017. – Т. 19. – С. 113–128.
9. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. – М.: Физматлит, 1974. – 456 с.

10. Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Теория условий высших порядков в гладких задачах на экстремум с ограничениями // Теоретические и прикладные вопросы оптимального управления / отв. ред. С. Т. Завалицин, А. А. Толстоногов. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ие, 1985. – С. 4–39.
11. Поляк Б. Т., Третьяков Н. В. Метод штрафных оценок для задач на условный экстремум // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1973. – Т. 13, № 1. – С. 34–46.
12. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. – N.Y.: Springer-Verlag, 1998. – 276 p.
13. Krotov V. F. Global Methods in Optimal Control Theory. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Vol. 195. N.Y.: Marcel Dekker, 1996. 384 p.
14. Дыхта В. А. Неравенства Гамильтона–Якоби в оптимальном управлении: гладкая двойственность и улучшение // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2010. – Т. 15, № 1. – С. 405–426.

15. Clarke F. H., Nour C. Nonconvex duality in optimal control // SIAM J. Control Optim. – 2005. – Vol. 43. – Pp. 2036–2048.
16. Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. – М.: Машиностроение, 1969. – 287 с.
17. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey // J. Dynamical and Control Syst. – 1995. – Vol. 1, N 1. – P. 1–48.
18. Vinter R. B. Optimal Control. – Boston: Birkhauser, 2000.
19. Warga J. A. A second order condition that strengthens Pontryagin's maximum principle // J. Differ. Equations. – 1978. – 28, № 2. – P. 284–307.
20. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey // J. Dyn. Control Syst. – 1995. – 1, № 1. – P. 1–48.