Невыпуклая задача оптимального управления линейной системой с терминальными ограничениями

О.В. Хамисов

ИСЭМ СО РАН, Иркутск

Семинар кафедры ВМиО, 31 октября 2024 г.

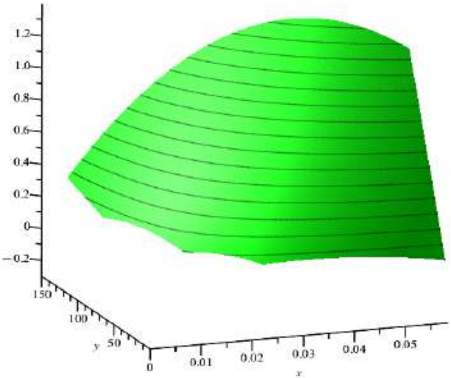
$$l_1(x) = c_1^\top x + r_1,\ l_2(x) = c_2^\top x + r_2$$

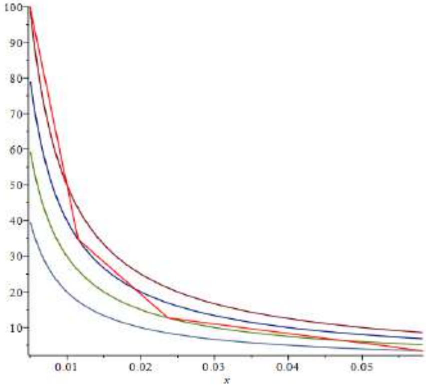
Table 5.3. The Product $l_1 \cdot l_2$

	l_2	
l_1	≥ 0	≤ 0
≥ 0	s. qcv	s. qcx
≤ 0	s. qcx	s. qcv

s.qcv — полустрогоквазивогнтутая, s.qcx — полустрогоквазивыпуклая

$q(x) = x^\top Q x + c^\top x$, Q имеет одно отрицательное собственное число





$$q(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

Постановка задачи:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x^0, \tag{1}$$

$$u(t) \in U, \ t \in [0, T], \tag{2}$$

$U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество,

$$X = \{x : f_i(x(T)) \leq 0, i = 1, \ldots, \ell\}, \tag{3}$$

$$I(u) = f_0(x(T)) \to \min . \tag{4}$$

Множество досижимости $D(T) \subset R^n$ — выпуклое, замкнутое, ораниченное множество.

Конечномерный вариант

$$f_0(v) \to \min, \tag{5}$$

$$f_i(v) \le 0, i = 1, \dots, \ell, \tag{6}$$

$$v \in D(T). \tag{7}$$

Функции с вогнутой минорантой

Определение 1. *Будем говорить, что функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *имеет вогнутую опорную функцию-миноранту на множестве* $X \subset \mathbb{R}^n$*, если существует функция* $\psi(x,y)$, $\psi : \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}$*, непрерывная и вогнутая по x для каждого фиксированного y и такая, что*

$$f(x) \geq \psi(x,y) \ \ \forall (x,y) \in X \times X, \tag{8}$$

$$f(y) = \psi(y,y) \ \ \forall y \in X. \tag{9}$$

$CM(X)$ – множество функций, удовлетворяющих Опр. 1;
$f(x)$ – c.m. функция $\Leftrightarrow f \in CM(X)$;
c.m. – concave minorant.

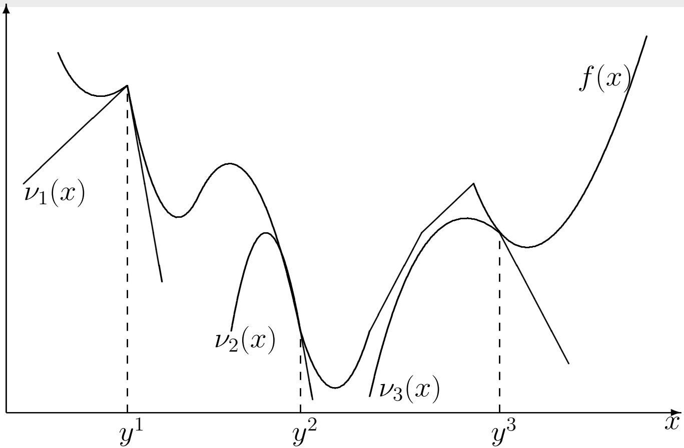


Рис. 1. $X \subset \mathbb{R}$, *функция* $f(x)$ *и вогнутые опорные функции-миноранты:*
$\nu_1(x) = \psi(x, y^1)$ – *кусочно-линейная, опорная в точке* y^1,
$\nu_2(x) = \psi(x, y^2)$ – *дифференцируемая, опорная в точке* y^2,
$\nu_3(x) = \psi(x, y^3)$ – *кусочно-дифференцируемая, опорная в точке* y^3.

Свойства с.т. функций

Теорема 1. *Каждая функция $f \in CM(X)$ является полунепрерывной снизу на X функцией.*

Пример 1. $X = [0, 2] \subset \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x^2}, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - \sqrt{1 - (x-2)^2}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

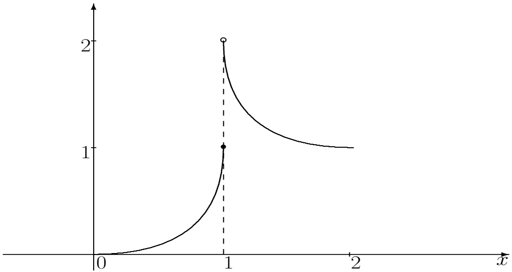


Рис. 2. *Пример полунепрерывной снизу функции, не являющейся с.т. функцией.*

Обобщение теоремы Коровкина[1]**.** *Ограниченная функция* $f(x), f : X \to \mathbb{R}$ *является полунепрерывной снизу функцией на компактном множестве* X *тогда и только тогда, когда существует непустое семейство непрерывных вогнутых функций* $\phi_y(x),\ y \in Y$ *такое, что* $f(x)$ *есть верхняя огибающая (поточечный супремум) этого семейства*

$$f(x) = \sup_{y \in Y} \phi_y(x).$$

[1] С.С. Кутателадзе, А.М. Рубинов *Двойственность Минковского и её приложения.* – Новосибирск, Наука, 1976. – 254 с.

Теорема Норкина. *Пусть функция* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *может быть представлена в виде*

$$f(x) = \sup_{y \in Y} \phi_y(x),$$

где $\phi_y(x), \quad y \in Y, \quad Y \neq \emptyset$ *- семейство равностепенно непрерывных вогнутых функций. Тогда* f *есть непрерывная функция.*

ОБЩИЕ ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ВОГНУТЫХ ОПОРНЫХ МИНОРАНТ.

Теорема 5. *Пусть заданы с.т. функции* f_i, $i = 1, \dots, m$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *линейная комбинация* $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *есть с.т. функция, если* $\lambda_i \geq 0, i = 1, ..., m$;

(ii) *функция максимумов* $\max\limits_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$ *есть с.т. функция;*

(iii) *функция минимумов* $\min\limits_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$ *есть с.т. функция.*

Теорема 6. *Пусть* $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$ *и* $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *есть с.т. функции. Если для каждого фиксированного* $y \in \mathbb{R}^m$ *существует монотонно неубывающая вогнутая миноранта* $\psi_h(x, y)$ *функции* h*, то* $f(x) = h(g(x))$ *есть с.т. функция.*

Следствие 1. *Пусть* $f_i(x), f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \ i = 1, \ldots, k$ *- с.т. функции. Тогда функция*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} [max\{0, f_i(x)\}]^q,\ \ q \geq 1$$

есть с.т. функция.

Следствие 2. *Пусть f - с.т. функция. Тогда $e^{f(x)}$ также будет с.т. функцией.*

Следствие 3. *Пусть f такая с.т. функция, что $\psi(x,y) > 0\ \forall x, y \in X$. Тогда функции $\ln(f(x)), \sqrt{f(x)}, -\frac{1}{f(x)}$ являются с.т. функциями на X.*

Следствие 4. *Пусть $f_i, i = 1, ..., k$ такие с.т. функции, что $\psi_i(x,y) > 0\ \forall x, y \in X$, где $\psi_i(x,y)$ - вогнутая опорная миноранта функции $f_i(x)$. Тогда $F(x) = \prod_{i=1}^{k} f_i(x)$ есть с.т. функция на X.*

Определение 5. *Будем говорить, что функция f(x) имеет выпуклую опорную мажоранту на множестве* X, *если существует функция* $\varphi(x,y)$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}$, *непрерывная и выпуклая по x для каждого фиксированного* y:

$$f(x) \leq \varphi(x,y) \;\; \forall (x,y) \in X \times X,$$
$$f(y) = \varphi(y,y) \;\; \forall y \in X.$$

Определение 6. *Пусть функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет включениям*

$$f \in CM(X), -f \in CM(X).$$

Тогда f *называется с.т. симметричной функцией на* X.

$CMS(X)$ – множество всех с.т. симметричных функций на X.

Теорема 7. *Пусть* $f \in CMS(X)$ *и* $f_i \in CMS(X)$, $i = 1, \ldots, m$, X *- компактное множество . Тогда*

$$(i) \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \in CMS(X), \lambda_i \in \mathbb{R};$$

$$(ii) \quad f^2 \in CMS(X);$$

$$(iii) \quad f_1 \cdot f_2 \in CMS(X);$$

$$(vi) \quad \text{если } \; f(x) > 0, \; \forall x \in X, \; \text{то } \frac{1}{f(x)} \in CMS(X).$$

ГЛОБАЛЬНЫЙ ПОИСК: ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ПИЯВСКОГО.

$$f(x) \to \min,$$

$$x \in X,$$

$f : X \to \mathbb{R}$ – с.т. функция, X – выпуклый многогранник.

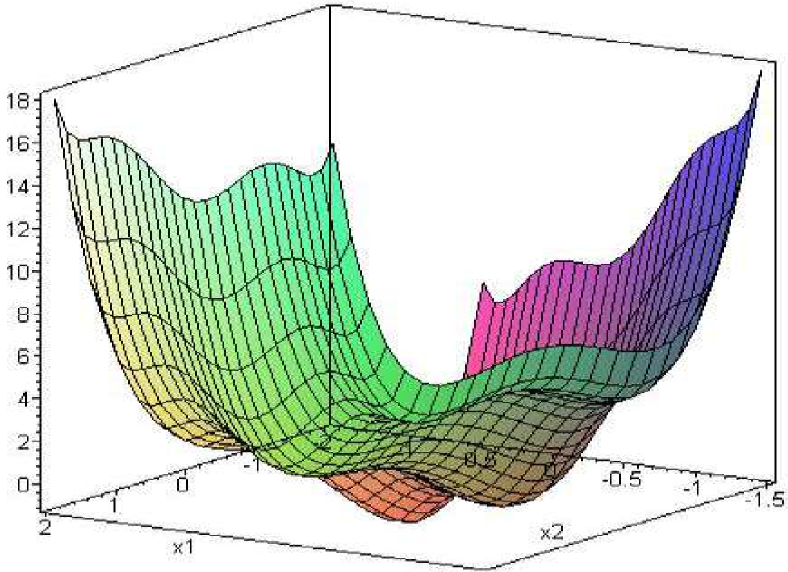
Итеративный процесс:

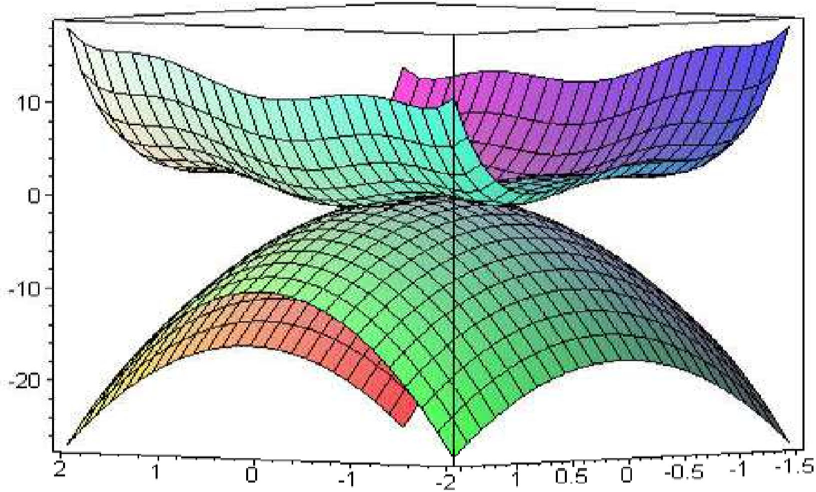
$$\max_{0 \le j \le k} \psi(x, x^j) \to \min,$$

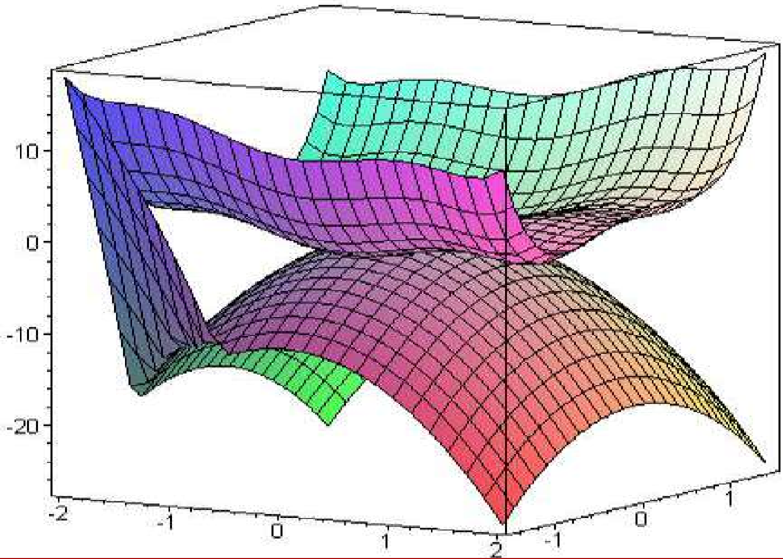
$$x \in X,$$

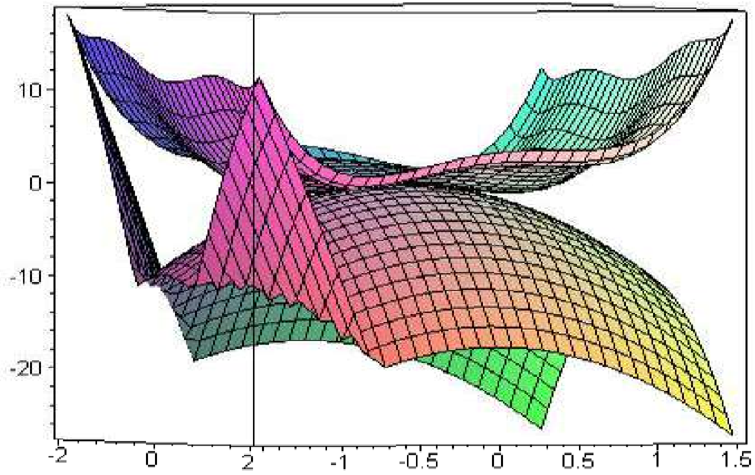
x^{k+1} – глобальный минимум.

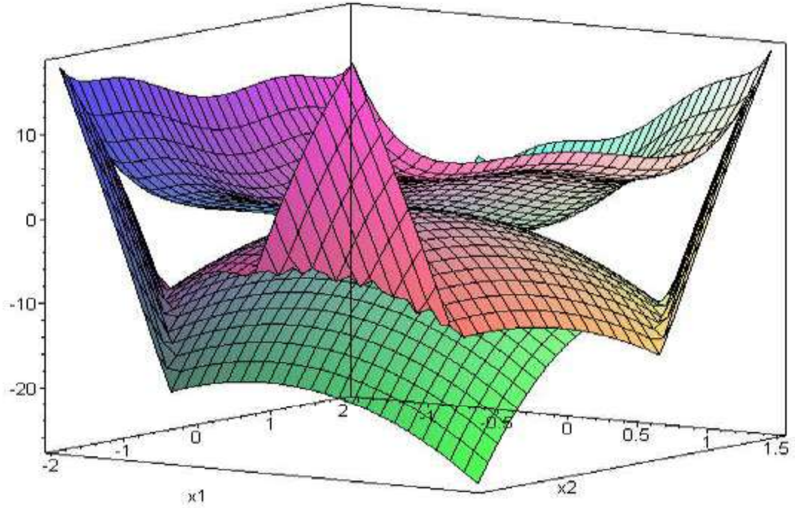
Теорема Булатова. *Если семейство функций $\{\psi(x, x^j\}$ равностепенно непрерывно, то каждая предельная точка последовательности $\{x^k\}$ есть точка глобального минимума.*

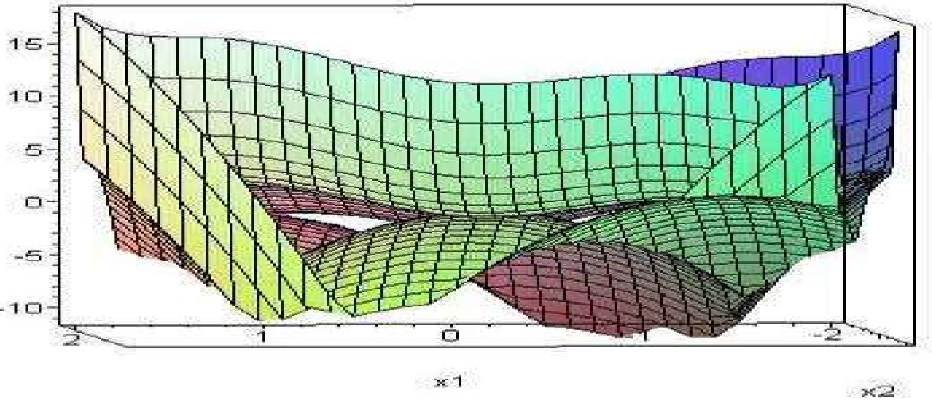

18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
2
1
0
-1
x1
-0.5
-1
-1.5
x2


10
0
-10
-20
2
1
0
-1
-2
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5


10
0
-10
-20
-2
-1
0
1
2
-1
0
1


10
0
-10
-20
-2
0
2
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5


10
0
-10
-20
-2
-1
0
1
2
x1
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
x2


15
10
5
0
-5
-10
2
1
0
1
-2
x1
x2

$$\max_j \psi(x, x^j) = f_k^+(x) - f_k^-(x),$$

$$f_k^+(x) = -\min_{1\le i\le k}\{\sum_{j=1, j\ne i}^{k} \psi(x, x^k)\},$$

$$f_k^-(x) = -\sum_{j=1}^{k} \psi(x, x^k),$$

$f_k^+(x), f_k^-(x)$ – выпуклые функции.
Вспомогательная переменная x_{n+1}

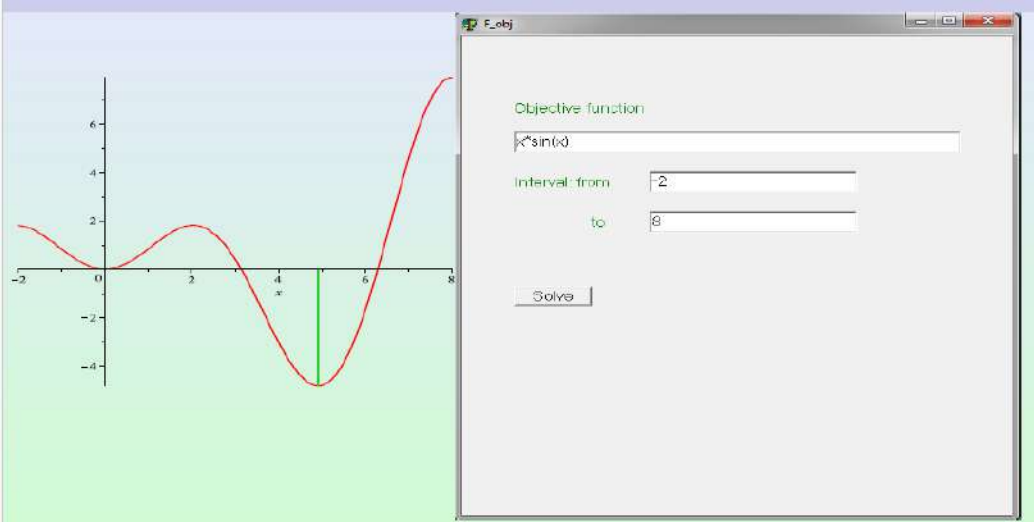
$$\min\{x_{n+1} - f_k^-(x)\},$$

$$f_k^+(x) \le x_{n+1},$$

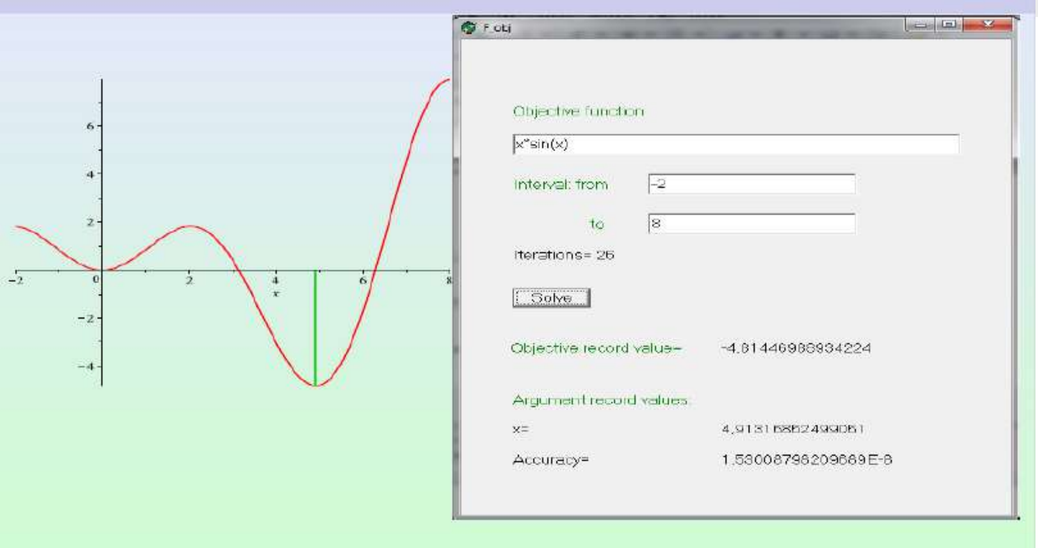
$$x \in X$$

- задача минимизации вогнутой функции на выпуклом множестве.

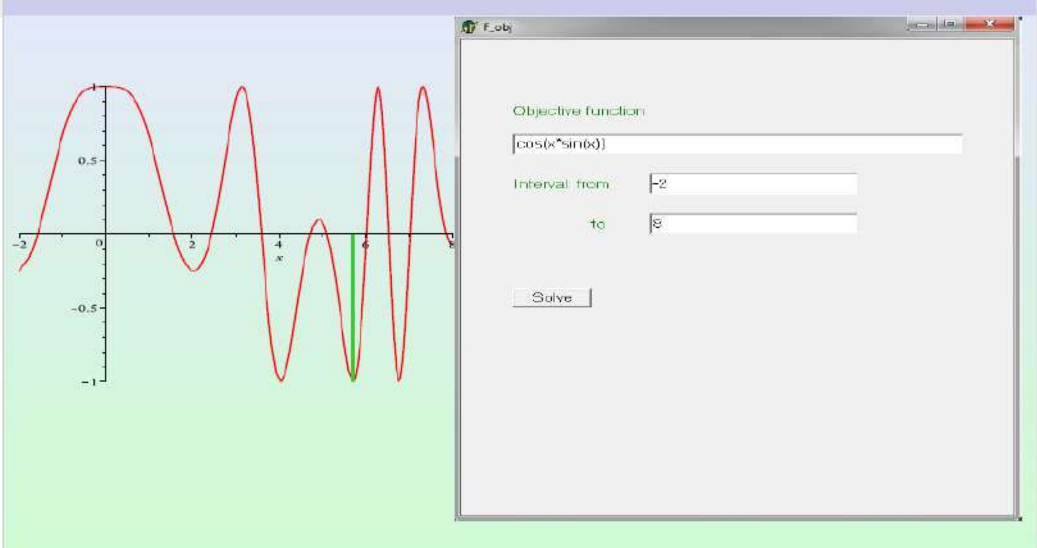

A translator



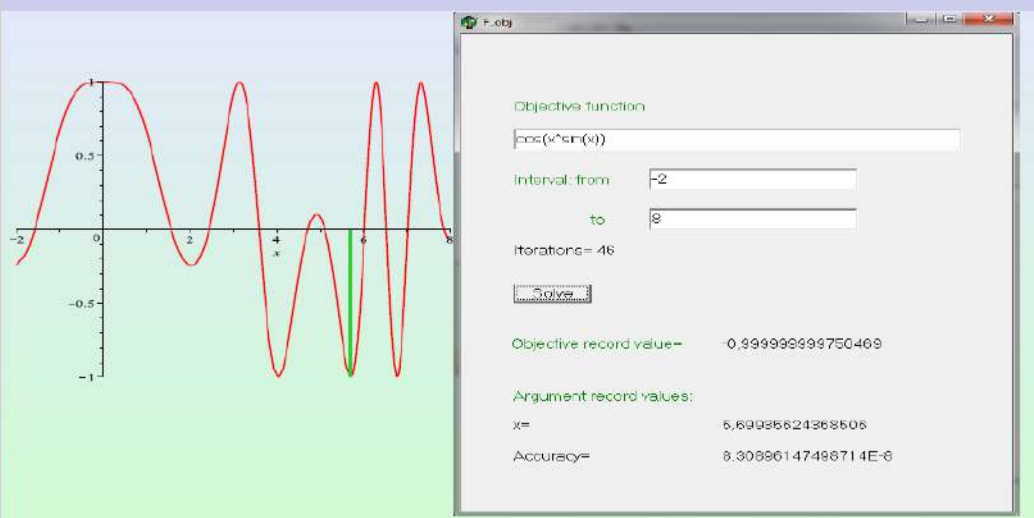
$$f(x) = x\sin(x),\ x \in [-2, 8]$$



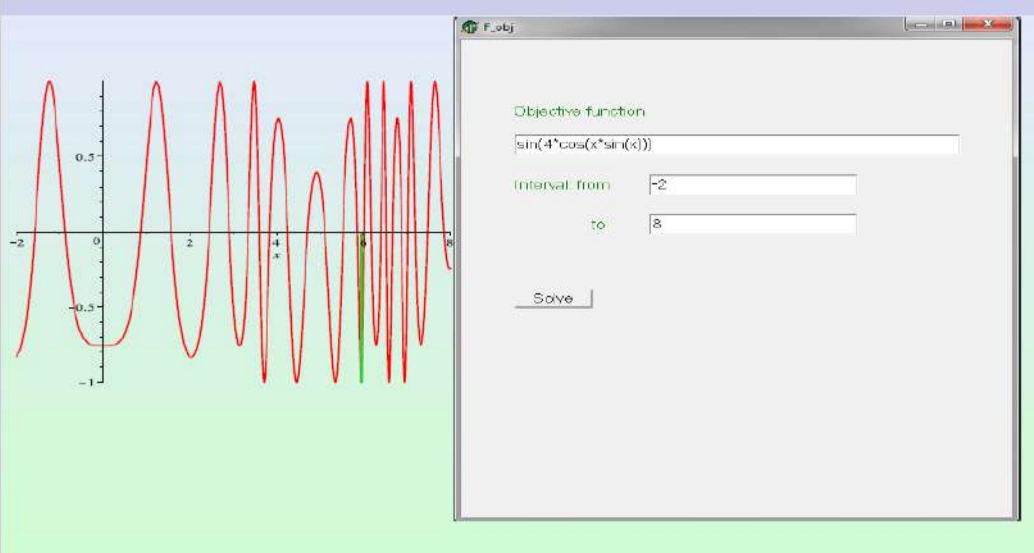
$$f(x) = x\sin(x), \; x \in [-2, 8]$$



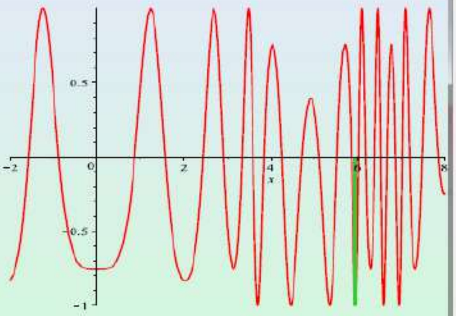
$$f(x) = \cos(x \sin(x)), \; x \in [-2, 8]$$

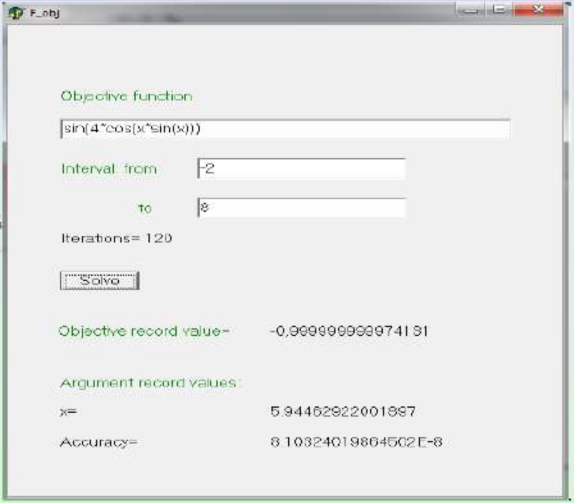


$$f(x) = \cos(x \sin(x)),\ x \in [-2, 8]$$

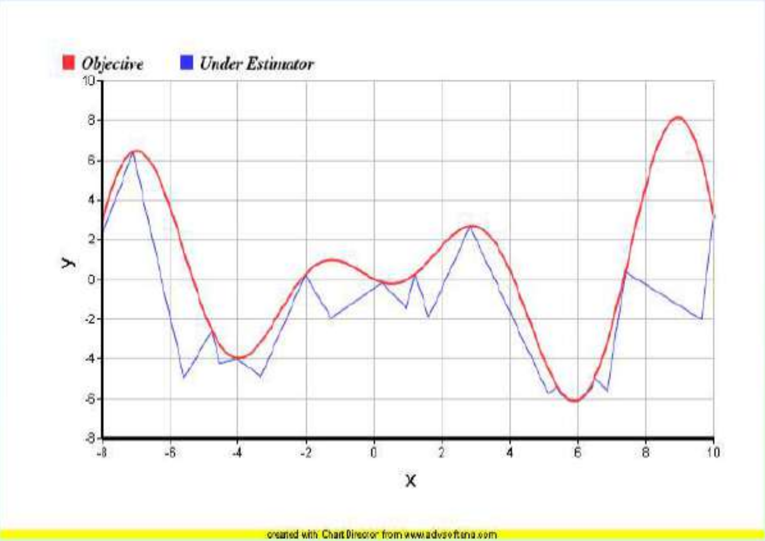


$$f(x) = \sin(4\cos(x\sin(x))),\ x \in [-2, 8]$$





$$f(x) = \sin(4\cos(x\sin(x))), \ x \in [-2, 8]$$


Objective
Under Estimator
y
x
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
created with ChartDirector from www.advsofteng.com

Конечномерный вариант

$$f_0(v) \to \min, \tag{10}$$

$$f_i(v) \le 0, i = 1, \dots, \ell, \tag{11}$$

$$v \in D(T). \tag{12}$$

Свойство: $\tilde{v} \notin D(T) \;\Rightarrow\; \exists(\tilde{p}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}:$

$$\tilde{p}^\top \tilde{v} > \tilde{\alpha}, \tag{13}$$

$$\tilde{p}^\top v \leqslant \tilde{\alpha} \;\; \forall v \in D(T). \tag{14}$$

Итеративный процесс:

1. $v_0 = \arg\min\{f_0(v) : f_i(v) \leqslant 0,\ i = 1, \dots, \ell\}$, $k \leftarrow 0$;
2. Если $v_k \notin D(T)$, то построить отсекающую плоскость $p_k^\top = \alpha_k$::

$$p_k^\top v_k > \alpha_k, \tag{15}$$

$$p_k^\top v \leqslant \alpha_k \quad \forall v \in D(T). \tag{16}$$

3. Определить

$$v_{k+1} = \arg\min\{f_0(v) : f_i(v) \leqslant 0,\ i = 1, \dots, \ell,\ p_i^\top v \leqslant \alpha_i, \quad i = 0, \dots, k\}. \tag{17}$$

4. Присвоить $k \leftarrow k + 1$ и перейти на п.1.

Основное свойство: каждая предельная точка $\{v_k\}$ является точкой глобального минимума задачи (10)-(12).

Пример. $n=2, m=2, T=1, \ell=2,$

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 4x_2 + u_1 - u_2,\ x_1(0) = 0,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + 7u_1 + u_2,\ x_2(0) = 0,$$

$$|u_i| \leqslant 1,\ i = 1, 2,$$

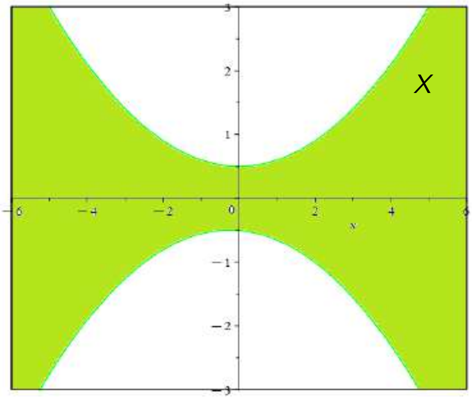
$$f_0(x(T)) = x_1(T) + 8x_2(T),$$

$$f_1(x(T)) = -0.5 - 0.1(x_1(T) + 0.25)^2 - x_2(T),$$

$$f_2(x(T)) = -0.5 - 0.1x_1(T)^2 + x_2(T),$$

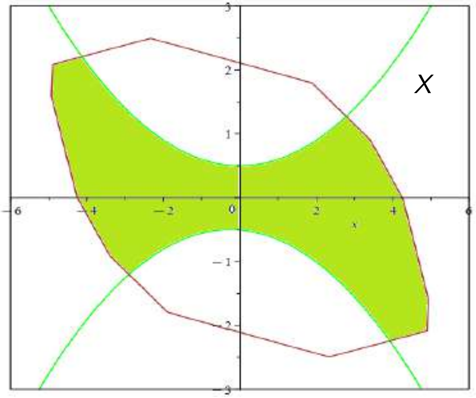
$$|x_1(T)| \leqslant 6,\ |x_2(T)| \leqslant 3.$$

$$X = \{(x_1(T), x_2(T)) : f_1(x(T) \leqslant 0,\ f_2(x(T)) \leqslant 0,\ |x_1(T)| \leqslant 6,\ |x_2(T)| \leqslant 3\}$$



$$X = \{(x_1(T), x_2(T)) : f_1(x(T) \leqslant 0,\ f_2(x(T)) \leqslant 0,\ |x_1(T)| \leqslant 6,\ |x_2(T)| \leqslant 3\}$$

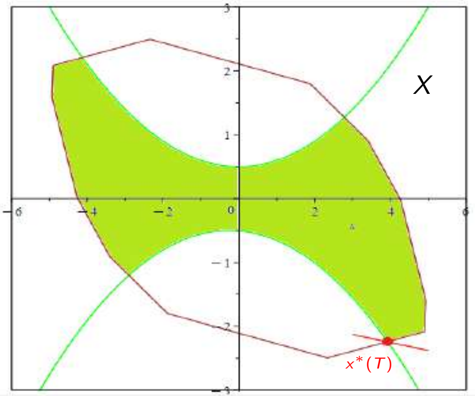
$D(T)$ – множество достижимости



$$X = \{(x_1(T), x_2(T)) : f_1(x(T) \leqslant 0,\ f_2(x(T)) \leqslant 0,\ |x_1(T)| \leqslant 6,\ |x_2(T)| \leqslant 3\}$$

$D(T)$ – множество достижимости

$x^*(T)$ – глобальный минимум



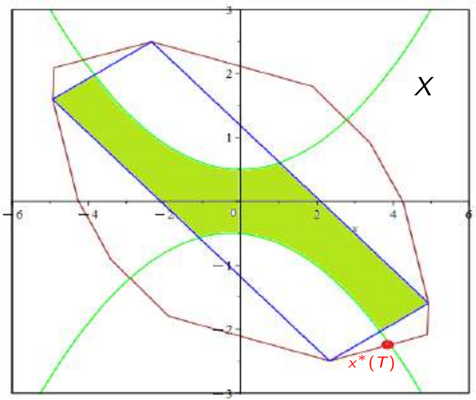
$$X = \{(x_1(T), x_2(T)) : f_1(x(T) \leqslant 0,\ f_2(x(T)) \leqslant 0,\ |x_1(T)| \leqslant 6,\ |x_2(T)| \leqslant 3\}$$

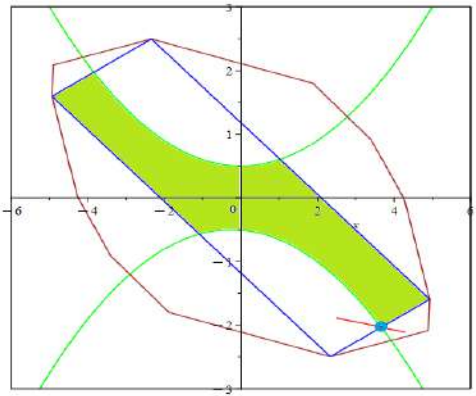
$D(T)$ – множество достижимости

$x^*(T)$ – глобальный минимум

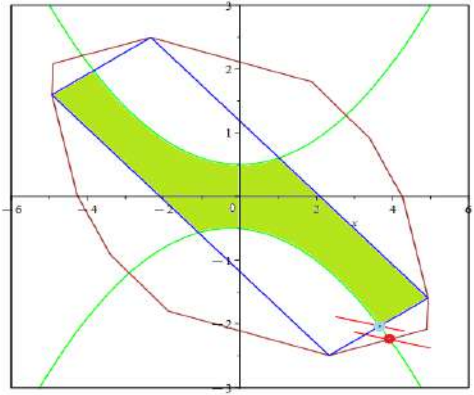
Внутренняя аппроксимация:

$\pm v_j \to \min,\ x \in D(T)$

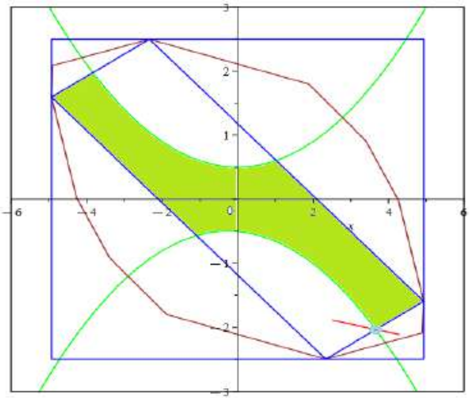




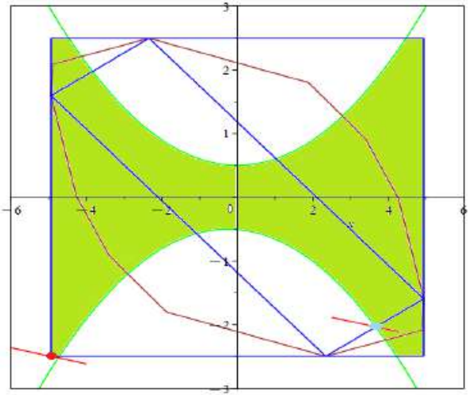
3
2
1
−1
−2
−3
−6
−4
−2
0
2
4
6
x

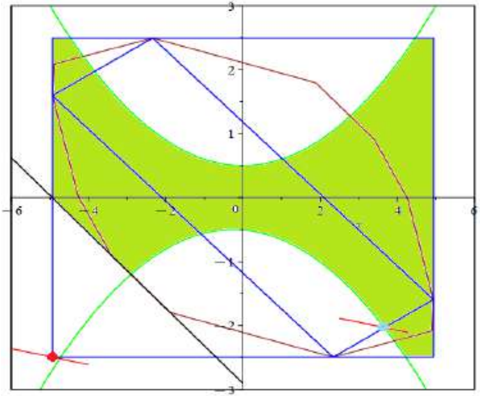


3
2
1
0
−1
−2
−3
−6
−4
−2
2
4
6

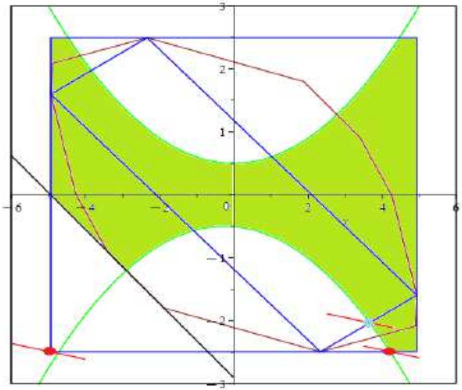


3
2
1
−6
−4
−2
0
2
4
6
x
−1
−2
−3

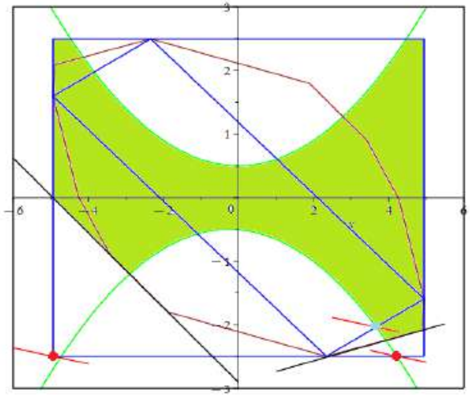

3
2
1
−1
−2
−3
−6
−4
−2
0
2
4
6
x



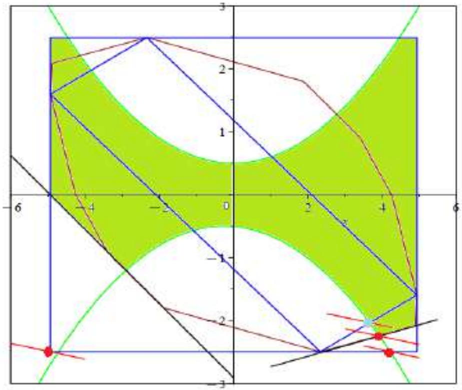
2
1
−1
−2
−3
−6
−4
−2
0
2
4
6



3
2
1
0
−1
−2
−3
−6
−4
−2
0
2
4
6



3
2
1
-1
-2
-3
-6
-4
-2
0
2
4
6



3
2
1
0
−1
−2
−3
−6
−4
−2
2
4
6

Спасибо за внимание