СРОЧКО В. А.

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ ЗАДАЧИ: ПОДХОДЫ К ГЛОБАЛЬНОМУ РЕШЕНИЮ

Содержание

ЛКЗ: постановка и предыстория

Фунционал

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), Cx(T)\rangle + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\Big(\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + qu^2(t)\Big)dt.$$

Фазовая система

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_0) = x^0.$$

Ограничение на управление

$$u(t) \in [u_-, u_+],\ t \in [t_0, T].$$

Оптимальное управление ЛКЗ – поточечная проекция непрерывной функции на отрезок $[u_-, u_+]$ (двусторонняя срезка).

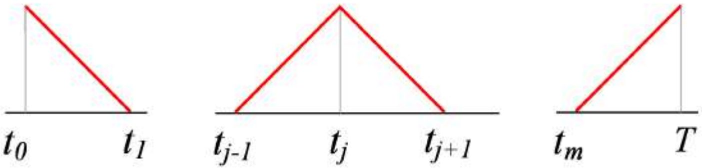
Подмножество допустимых управлений

Сетка узлов аппроксимации на $[t_0, T]$

$$t_i = t_0 + i\,h,\ i = \overline{0, m+1},\ h = \frac{T - t_0}{m+1}.$$

Опорные функции

$\varphi_0(t)$ $\qquad$ $\varphi_j(t),\ j = \overline{1, m}$ $\qquad$ $\varphi_{m+1}(t)$



$$\Downarrow$$

$$\varphi_j(t_i) = \delta_{ij},\ \varphi_j(t)\varphi_k(t) = 0,\ t \in [t_0, T],\ |j - k| > 1.$$

Подмножество допустимых управлений

Набор параметров $z = (z_0, z_1, \dots, z_{m+1})$ с условием

$$z_j \in [u_-, u_+],\ j = \overline{0, m+1}.$$

Допустимое управление

$$u(t, z) = \sum_{j=0}^{m+1} z_j \varphi_j(t),\ t \in [t_0, T]$$

(непрерывная кусочно-линейная функция с угловыми точками t_i и значениями $u(t_i, z) = z_i,\ i = \overline{0, m+1}$).

Подмножество допустимых управлений

Соответствующая фазовая траектория

$$x(t,z) = x(t,0) + \sum_{j=0}^{m+1} z_j x^j(t), \ t \in [t_0, T],$$

где $x^j(t)$ – **опорная траектория**

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)\varphi_j(t), \ x(t_0) = 0.$$

Подмножество допустимых управлений

Значение функционала Φ на управлении $u(t,z)$

$$\varphi(z) = \Phi(0) + \langle d, z\rangle + \frac{1}{2}\langle z, (D + qF)z\rangle.$$

Здесь:

D – симметричная матрица с элементами

$$d_{jk} = \langle x^j(T), Cx^k(T)\rangle + \int_{t_0}^{T} \langle x^j(t), Q(t)x^k(t)\rangle dt;$$

F – симметричная, трехдиагональная, положительно определенная матрица с элементами

$$f_{jk} = \int_{t_0}^{T} \varphi_j(t)\varphi_k(t)dt, \; j,k = \overline{0, m+1}, \; |j-k| \leqslant 1.$$

Конечномерная модель ЛКЗ (КМ-задача)

$$\varphi(z) \to \min,\ \ z \in [u_-, u_+].$$

Возможности «конечного» решения:

$\varphi(z)$ – <u>выпуклая функция</u> $\Rightarrow$ метод особых точек $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ конечное число итераций

$\varphi(z)$ – <u>вогнутая функция</u> $\Rightarrow$

$$\varphi(z) \to \min,\ \ z_i = u_- \vee u_+,\ \ i = \overline{o, m+1}$$

$\Rightarrow$ процедуры перебора 2^{m+2} точек.

Связь между ЛКЗ и КМЗ

1. Пусть ЛКЗ является выпуклой, т. е. матрицы $C \geqslant 0$, $Q(t) \geqslant 0$.

   Тогда функция $\varphi(z)$ является <u>выпуклой $\forall q > 0$</u>.

2. Пусть в ЛКЗ матрицы C, $Q(t)$ являются знаконеопределенными.

   Тогда функция $\varphi(z)$ является <u>выпуклой при условии</u> $q \geqslant \dfrac{|\lambda_{\min}(D)|}{\lambda_{\min}(F)}$.

3. Пусть в ЛКЗ матрицы $C \leqslant 0$, $Q(t) \leqslant 0$.

   Тогда функция $\varphi(z)$ является <u>вогнутой при условии</u> $q \leqslant \dfrac{|\lambda_{\max}(D)|}{\lambda_{\max}(F)}$.

Задача на максимум нормы

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), x(T)\rangle \to \max$$

в условиях $x^0 = 0,\ u_- = -1,\ u_+ = 1.$

Оптимальное управление – кусочно-постоянная функция со значениями ± 1.

Соответствующая параметризация

Сетка узлов $t_i = t_0 + i\,h,\ i = \overline{0, m}$ с шагом $h = \dfrac{T - t_0}{m}$.

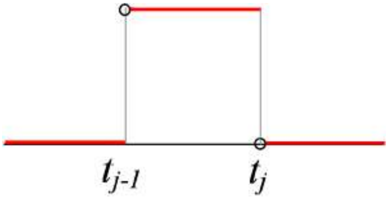
Набор параметров $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ с условием

$$y_j = \pm 1,\ j = \overline{1, m}.$$

Задача на максимум нормы

Опорные функции на $[t_0, T]$

$$\chi_j(t) = \begin{cases} 1, & t \in (t_{j-1}, t_j], \\ 0, & t \notin (t_{j-1}, t_j]. \end{cases}$$



Задача на максимум нормы

Допустимое управление

$$u(t,y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_j(t).$$

Фазовая траектория

$$x(t,y) = \sum_{j=1}^{m} y_j x^j(t),$$

$$x^j(t): \ \dot{x} = A(t)x + b(t)\chi_j(t), \ x(t_0) = 0.$$

Задача на максимум нормы

Опорная матрица $X \in R^{n\times m}$ со столбцами $x^j(T)$.

Матрица Грама $G = X^T X > 0$.

Конечномерный вариант задачи

$$\varphi_0(y) = \frac{1}{2}\langle y, Gy\rangle \to \max, \; y_i^2 = 1, \; i = \overline{1, m}. \qquad (P_0)$$

Соответствующая спектральная задача

$$\varphi_0(y) \to \max, \; \langle y, y\rangle = 1 \qquad \text{(решение } y^{max}\text{)}$$

Задача на максимум нормы

Степенной метод с нормировкой

$$y^{k+1} = \frac{Gy^k}{\|Gy^k\|}, \ k = 0, 1, \dots$$

$$\Downarrow$$

Метод условного градиента с единичным шагом

Свойство сходимости:

если $\langle y^0, y^{\max} \rangle \neq 0$, то $y^k \to y^{\max}, \ k \to \infty$.

Задача на максимум нормы

МУГ для задачи (P_0)

$$y_i^{k+1} = \operatorname{sign} \nabla_i \varphi_0(y^k), \; i = \overline{1, m}.$$

Свойство монотонности:

если $y^{k+1} \neq y^k$, то $\varphi_0(y^{k+1}) > \varphi_0(y^k)$.

Сходимость к экстремальной точке: $y^{k+1} = y^k$.

Улучшение экстремальных точек

$$y_i = \operatorname{sign} \nabla_i \varphi_0(y),\ \nabla_i \varphi_0(y) \neq 0,\ i = \overline{1, m}$$

Однокомпонентное переключение

Определим функции

$$p_i(y) = -|\nabla_i \varphi_0(y)| + \langle x^i(T), x^i(T) \rangle,$$

$$g_1(y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} p_i(y).$$

Лемма 1

Пусть $g_1(y) > 0$, и максимум достигается на индексе i_1.

Тогда экстремальная точка y **улучшается** переключением компоненты i_1 с увеличением значения $\varphi_0(y)$ на величину $2g_1(y)$.

$$y_i = \operatorname{sign} \nabla_i \varphi_0(y), \ \nabla_i \varphi_0(y) \neq 0, \ i = \overline{1, m}$$

Двухкомпонентное переключение

Определим функцию

$$g_2(y) = \max_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \Big(p_i(y) + p_j(y) + 2 y_i y_j \langle x^i(T), x^j(T) \rangle \Big).$$

Лемма 2

Пусть $g_2(y) > 0$, и максимум достигается на паре индексов i_2, j_2. Тогда экстремальная точка y **улучшается** переключением пары компонент i_2, j_2 с увеличением значения $\varphi_0(y)$ на величину $2g_2(y)$.

Список литературы

1. **Горбунов В. К., Лутошкин И. В.** *Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации*, Известия РАН. Теория и системы управления, № 5, 67–84 (2004).
2. **Измаилов А. Ф., Солодов М. В.** *Численные методы оптимизации*, М.: Физматлит (2005).
3. **Матвеев А. С., Якубович В. А.** *Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи*, СПб : Изд-во С.-Петербург. ун-та (2003).
4. **Парлетт Б.** *Симметричная проблема собственных значений. Численные методы*, М. : Мир (1983).

Список литературы

5. **Срочко В. А.** *Итерационные методы решения задач оптимального управления*, М. : Физматлит (2000).
6. **Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В.** *Параметризация некоторых задач управления линейными системами*, Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, Т. 30. С. 83–98 (2019).
7. **Стрекаловский А. С.** *Элементы невыпуклой оптимизации*, Новосибирск: Наука (2003).

Список литературы

8. **Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.** *Курс методов оптимизации*, М. : Наука (1986).
9. **Хлебников М. В., Щербаков П. С., Честнов В. Н.** *Задача линейно-квадратичного управления: I. Новое решение*, Автоматика и телемеханика, № 12. С. 65–79 (2015).
10. **Srochko V. A., Aksenyushkina E. V.** *On Resolution of an Extremum Norm Problem for the Terminal State of a Linear System*, Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, Т. 34. С. 3–17 (2020).

Линейно-квадратичная задача с возмущением в системе

$$t \in [t_0, T], \quad u(t) \in R, \quad v(t) \in R, \quad x(t) \in R^n$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) + c(t)v(t), \; x(t_0) = x^0. \qquad (1)$$

Управление $u(t)$ и **возмущение** $v(t)$ – кусочно-постоянные функции с возможными точками переключения

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = T$$

и двусторонними ограничениями

$$u(t) \in [u_-, u_+], \; v(t) \in [v_-, v_+], \; t \in [t_0, T].$$

Линейно-квадратичная задача с возмущением в системе

Формализация:

- множества возможных значений

$$Y = \left\{ y = (y_1, \dots, y_m) : \; y_j \in [u_-, u_+]. \, j = \overline{1, m} \right\},$$

$$Z = \left\{ z = (z_1, \dots, z_m) : \; z_j \in [v_-, v_+]. \, j = \overline{1, m} \right\};$$

Линейно-квадратичная задача с возмущением в системе

- характеристические функции промежутков $T_j = [t_{j-1}, t_j),\ j = \overline{1, m}$

$$\chi_j(t) = \begin{cases} 1, & t \in T_j, \\ 0, & t \in [t_0, T] \setminus T_j; \end{cases}$$

- ступенчатые функции допустимых воздействий (управление и возмущение)

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_j(t),$$

$$v(t, z) = \sum_{j=1}^{m} z_j \chi_j(t),\ t \in [t_0, T],\ y \in Y,\ z \in Z.$$

Линейно-квадратичная задача с возмущением в системе

Решение $x(t,y,z)$ системы (1) на допустимой паре $(u(t,y),\ v(t,z))$

Необходимые объекты:

- $x^0(t)$ – решение системы (1) при нулевом воздействии $(u(t)=0,\ v(t)=0)$;
- $B_\chi(t) \in R^{n\times m}$ – матрица столбцов $b(t)\chi_j(t),\ j=\overline{1,m}$;
- $X_1(t) \in R^{n\times m}$ – решение матричной системы

$$\dot{X}_1(t) = A(t)X_1(t) + B_\chi(t),\ X_1(t_0) = O;$$

- $C_\chi(t) \in R^{n\times m}$ – матрица столбцов $c(t)\chi_j(t),\ j=\overline{1,m}$;
- $X_2(t) \in R^{n\times m}$ – решение матричной системы

$$\dot{X}_2(t) = A(t)X_2(t) + C_\chi(t),\ X_2(t_0) = O.$$

Линейно-квадратичная задача с возмущением в системе

Явное представление:

$$x(t,y,z) = x^0(t) + X_1(t)y + X_2(t)z.$$

Линейно-квадратичная задача с возмущением в системе

Целевая функция

$$\varphi(y,z) = \frac{1}{2}\left[\alpha\langle x(T,y,z),\, Px(T,y,z)\rangle + \beta\int\limits_{t_0}^{T}\langle x(t,y,z),\, Q(t)x(t,y,z)\rangle dt\right].$$

P, $Q(t)$ – $(n \times n)$ симметричные матрицы,

$\alpha > 0$, $\beta > 0$ – неопределенные параметры (весовые коэффициенты).

Линейно-квадратичная задача с возмущением в системе

Минимаксная задача

$$\min_{y\in Y}\max_{z\in Z}\varphi(y,z). \tag{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\psi(y)=\max_{z\in Z}\varphi(y,z),\quad \psi(y)\to\min,\ y\in Y.$$

Параметрическая регуляризация задачи

Явное представление для целевой функции

$$\varphi(y,z) = \frac{1}{2}\langle y, (\alpha P_{11} + \beta Q_{11})y\rangle + \frac{1}{2}\langle z, (\alpha P_{22} + \beta Q_{22})z\rangle +$$
$$+\langle y, (\alpha P_{12} + \beta Q_{12})z\rangle +$$
$$+\langle y, \alpha P_1 + \beta Q_1\rangle + \langle z, \alpha P_2 + \beta Q_2\rangle + \varphi(0,0).$$

$$P_{ij} = X_i^{\mathrm{T}}(T)PX_j(T), \quad Q_{ij} = \int\limits_{t_0}^{T} X_i^{\mathrm{T}}(t)Q(t)X_j(t)dt, \ i,j = 1,2, \ i \leqslant j;$$

$$P_i = X_i^{\mathrm{T}}(T)Px^0(T), \quad Q_i = \int\limits_{t_0}^{T} X_i^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x^0(t)dt, \ i = 1,2.$$

Параметрическая регуляризация задачи

Сохранение знакоопределенности

$$P,\, Q(t) \geqslant 0 \; (\leqslant 0) \;\Rightarrow\; P_{ii},\, Q_{ii} \geqslant 0 \; (\leqslant 0).$$

Параметрическая регуляризация задачи

Спектральное свойство **выпуклости** функции $\varphi(y, z)$ по y

$$\lambda_{\min}(\alpha P_{11} + \beta Q_{11}) \geqslant 0. \tag{3}$$

Достаточное условие **выпуклости**

$$\alpha\lambda_{\min}(P_{11}) + \beta\lambda_{\min}(Q_{11}) \geqslant 0. \tag{4}$$

Параметрическая регуляризация задачи

Спектральное свойство **вогнутости** функции $\varphi(y, z)$ по z

$$\lambda_{\max}(\alpha P_{22} + \beta Q_{22}) \leqslant 0. \tag{5}$$

Достаточное условие **вогнутости**

$$\alpha\lambda_{\max}(P_{22}) + \beta\lambda_{\max}(Q_{22}) \leqslant 0. \tag{6}$$

Параметрическая регуляризация задачи

Вывод:
пара неравенств (3), (5) или пара линейных неравенств (4), (6) с условием положительности параметров α, β обеспечивает целевой функции $\varphi(y, z)$ **выпукло-вогнутую структуру**.

Результат:
минимаксная задача (2) переходит в разряд **выпуклого программирования** $\Rightarrow$ определяющие задачи на максимум и минимум являются **выпуклыми**.

Оптимизационный выбор параметров

Матрицы квадратичных форм

$$S_i(\alpha, \beta) = \alpha P_{ii} + \beta Q_{ii}, \quad i = 1, 2.$$

Числа обусловленности в спектральной норме

$$S_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cond} S_1 = \frac{\lambda_{\max}(S_1)}{\lambda_{\min}(S_1)}$$

$$S_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cond} S_2 = \frac{\lambda_{\min}(S_2)}{\lambda_{\max}(S_2)}$$

Оптимизационный выбор параметров

Задача оптимизации параметров

$$\max\left\{\operatorname{cond} S_1(\alpha,\beta),\ \operatorname{cond} S_2(\alpha,\beta)\right\} \to \min,$$

$$\lambda_{\min}(S_1) > 0,\quad \lambda_{\max}(S_2) < 0.$$

Нормировка параметров: $\alpha + \beta = 1$.

Задача на экстремум суммы квадратов отклонений

Линейная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ x(t_0) = x^0. \tag{7}$$

Многомерное управление $u \in R^r$ с ограничением

$$u(t) \in U,\ t \in [t_0, T],$$

где U – выпуклый компакт.

Задача на экстремум суммы квадратов отклонений

Множество **допустимых управлений**:

кусочно-постоянные вектор-функции $u(t)$ относительно сетки узлов

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = T$$

со значениями

$$u(t) = y^j \in U, \; t \in T_j = [t_{j-1}, t_j), \, j = \overline{1, m}.$$

Задача на экстремум суммы квадратов отклонений

Блочный вектор $y = (y^1, \ldots, y^m)$ со множеством значений

$$Y = \left\{ y = (y^1, \ldots, y^m) : \ y^j \in U, \ j = \overline{1, m} \right\}.$$

Допустимые управления

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^{m} \chi_j(t) y^j, \ t \in [t_0, T].$$

Задача на экстремум суммы квадратов отклонений

Соответствующие фазовые траектории

$$x(t, y) = x^0(t) + \sum_{j=1}^{m} X_j(t) y^j, \; t \in [t_0, T].$$

$x^0(t)$ – решение системы (7) при $u = 0$,

$X_j(t) \in R^{n \times r}$ – решение матричной задачи Коши

$$\dot{X}_j(t) = A(t) X_j(t) + B(t) \chi_j(t), \; X_j(t_0) = O.$$

$$\Downarrow$$

$$X_j(t_k) = O, \; j > k, \; k = \overline{1, m-1}.$$

$$\Downarrow$$

$$x(t_k, y) = x^0(t_k) + \sum_{j=1}^{k} X_j(t_k) y^j, \; k = \overline{1, m}.$$

Задача на экстремум суммы квадратов отклонений

Целевая функция

$$\varphi(y,z)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\|x(t_k,y^1,\dots,y^k)-z^{k-1}\|^2,\quad z=(z^0,z^1,\dots,z^{m-1}).$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(y,z)=\varphi_1(y^1,z^0)+\varphi_2(y^1,y^2,z^1)+\dots+\varphi_m(y^1,\dots,y^m,z^{m-1}).$$

$$\Downarrow$$

φ_k – выпуклая квадратичная функция по $y^1,\dots,y^k$.

Задача на экстремум суммы квадратов отклонений

Режим поступления z-информации:

значение z^{k-1} становится известным в момент времени t_{k-1} на основе уже полученных значений управления $\overline{y}^1, \ldots, \overline{y}^{k-1}$.

Например,

$$z^0 = x^0, \; z^{k-1} = x(t_{k-1}, \overline{y}^1, \ldots, \overline{y}^{k-1}).$$

Задача на экстремум суммы квадратов отклонений

Задача

$$\varphi(y,z) \to \text{extr}, \;\; y \in Y.$$

Процедура решения

Первый шаг: $k = 1$, значение z^0 известно.

Вспомогательная задача

$$\varphi_1(y^1, z^0) \to \text{extr}, \;\; y^1 \in U.$$

Решение y^1_*.

Задача на экстремум суммы квадратов отклонений

Общий шаг: $k = \overline{2, m}$, значение z^{k-1} известно.

Вспомогательная задача

$$\varphi_k(y_*^1, \dots, y_*^{k-1}, y^k, z^{k-1}) \to \mathrm{extr}, \ \ y^k \in U.$$

Решение y_*^k.

Результат:
$y_* = (y_*^1, \dots, y_*^m) \ \Rightarrow$ кусочно-оптимальное управление $u(t, y_*)$, $t \in [t_0, T]$.

Задача на экстремум суммы квадратов отклонений

Характеризация вспомогательных задач для типичного случая

$$U = [u_1^-, u_1^+] \times \cdots \times [u_r^-, u_r^+].$$

Одномерное управление ($r = 1$) – аналитическое решение.

Многомерное управление ($r > 1$) – конечные методы:

Задача на минимум (квадратичное программирование) – метод особых точек

Задача на максимум (выпуклая максимизация) – метод угловых точек допустимого множества

Литература

1. **Аргучинцев А. В., Срочко В. А.** *Решение линейно-квадратичной задачи на множестве кусочно-постоянных управлений с параметризацией функционала*, Тр. Института математики и механики УрО РАН, Т. 28, № 3, 5–16 (2022).
2. **Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М.** *Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью* Журн. вычисл. математики и мат. физики, Т. 44, № 2, 265–286 (2004).
3. **Васильев Ф. П.** *Методы оптимизации*, М. : МЦНМО (2011).

Литература

4. **Дмитрук Н. М.** *Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления*, Тр. Института математики и механики УрО РАН, Т. 28, № 3, 66–82 (2022).
5. **Измаилов А. Ф., Солодов М. В.** *Численные методы оптимизации*, М. : Физматлит (2005).
6. **Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.** *О моделировании управления в динамической системе* Известия АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, № 2, 51–60 (1983).

Литература

7. **Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.** *Основы метода динамической регуляризации*, М. : Изд-во МГУ (1999).
8. **Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В., Антоник В. Г.** *Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления на основе конечномерных моделей*, Известия Иркутского госуд. университета. Серия «Математика», Т. 37, № 3, 3–16 (2021).
9. **Субботина Н. Н., Крупенников Е. А.** *Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции*, Тр. Института математики и механики УрО РАН, Т. 27, № 2, 208–220 (2021).