

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Иркутский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий

А. В. Аргучинцев
Н. Н. Шеломенцева

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Учебное пособие



УДК 519.816
ББК 22.18
А79

*Публикуется по решению ученого совета
Института математики и информационных технологий ИГУ*

Рецензенты:

д-р экон. наук, доц. *О. В. Грушина*
д-р физ.-мат. наук, проф. *В. А. Срочко*

*Учебное пособие подготовлено в рамках проекта,
получившего поддержку Фонда Потанина*

Аргучинцев А. В.

А79

Методы принятия решений в многокритериальных задачах : учебное пособие / А. В. Аргучинцев, Н. Н. Шеломенцева. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2025. – 94 с.

ISBN 978-5-9624-2401-9

Рассматриваются основы математической теории многокритериальных задач. Классические понятия оптимальности по Парето и Слейтеру вводятся как частные случаи оптимальности по произвольному бинарному отношению. Излагаются основные подходы к построению решений векторной оптимизации: свертки критериев, оптимизация по последовательно применяемым критериям, целевое программирование. В качестве прикладных примеров изучаются двухкритериальная модель формирования портфеля ценных бумаг и задача расчета стимулирующих выплат.

Предназначено для магистрантов программ «Цифровая бизнес-аналитика», «Математическое моделирование» направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика». Может быть полезным для студентов бакалавриата, аспирантов, преподавателей и практикующих специалистов.

УДК 519.816
ББК 22.18

ISBN978-5-9624-2401-9

© Аргучинцев А. В., Шеломенцева Н. Н., 2025
© ФГБОУ ВО «ИГУ», 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ПОНЯТИЕ О МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ.....	7
1.1. Введение в векторную оптимизацию	7
1.2. Свертки критериев	13
Вопросы и задания	19
2. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО ПАРЕТО И СЛЕЙТЕРУ	21
2.1. Бинарные отношения. Оптимальность по бинарным отношениям	21
2.2. Существование решений в многокритериальных задачах. Монотонные функции векторного аргумента	31
2.3. Принятие решений в многокритериальных задачах с конечным числом значений целевых функций	37
Вопросы и задания	41
3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ПРИМЕНЯЕМЫМ КРИТЕРИЯМ.....	44
3.1. Лексикографическая задача оптимизации	44
3.2. Метод последовательных уступок.....	54
Вопросы и задания	60
4. МЕТОД ЦЕЛЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	63
4.1. Понятие о целевом программировании.....	63
4.2. Общий подход к решению задач целевого программирования	70
Вопросы и задания	73
5. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ	75
5.1. Формирование портфеля ценных бумаг.....	75
5.2. Расчет стимулирующих выплат	82
Вопросы и задания	87
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	91
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	93

ВВЕДЕНИЕ

Теория и методы векторной оптимизации образуют достаточно большой раздел современной прикладной математики. Классическая оптимизация имеет дело с функциями (функционалами), множества значений которых лежат в пространстве действительных чисел. Скалярные действительные числа можно сравнивать между собой, используя отношения «больше» или «меньше», а следовательно, можно и пытаться решать соответствующие задачи на минимум или максимум.

В реальной жизни принятие решений очень часто связано с необходимостью поиска экстремумов сразу нескольких скалярных критериев. Этими вопросами и занимается многокритериальная (векторная, многоцелевая) оптимизация. В частности, классическая экономическая проблема достижения максимальной прибыли при минимальных затратах уже может рассматриваться как задача двухкритериальной оптимизации.

При всем многообразии подходов к исследованию подобных проблем необходимо отметить следующие основные моменты.

Во-первых, в многокритериальных задачах не существует единого обобщения классических определений минимума или максимума. Есть несколько, вообще говоря, различных определений (оптимальность по Парето, оптимальность по Слейтеру, оптимальность в лексикографическом смысле и др.).

Во-вторых, так или иначе при исследовании многокритериальных задач возникает необходимость решения одной или целой серии задач скалярной оптимизации. Поэтому для изучения данного курса необходимо иметь хотя бы элементарное представление о классических оптимизационных методах.

Предлагаемое пособие представляет собой введение в теорию и методы решения задач многокритериальной оптимизации.

Книга состоит из пяти глав.

В первой главе рассматриваются наиболее распространенные методы сверток критериев, т. е. способы перехода от задачи векторной оптимизации к поиску экстремума одного скалярного критерия. Часть из этих методов в последующих главах получит более строгое математическое обоснование.

Вторая глава посвящена двум общепризнанным определениям оптимальности по Парето и Слейтеру в многокритериальных задачах. До введения этих терминов вводится понятие оптимальности по общему бинарному отношению. Такой подход позволяет унифицировать изложение сразу для нескольких определений оптимальности. Исследуются вопросы существования решений, анализируются основные виды сверток, которые приводят к оптимальным решениям. Приведен алгоритм решения задач, в которых множество значений векторной целевой функции содержит конечное число элементов.

В третьей главе задачи многокритериальной оптимизации рассматриваются для случаев, когда скалярные критерии ранжированы по важности. Наиболее жесткий вариант – это задачи так называемой лексикографической оптимизации. Далее излагается метод последовательных уступок, который позволяет ослабить жесткость лексикографического подхода.

Четвертая глава содержит элементарное введение в методы целевого программирования.

В пятой главе рассмотрены два приложения из финансовой области. Проблема формирования портфеля ценных бумаг изучается как двухкритериальная задача максимизации доходности и минимизации риска. Далее приведен пример расчета стимулирующих выплат на основе линейных сверток нескольких критериев эффективности трудовой деятельности работников. Авторы благодарны одному из основных разработчиков системы «Эффективный контракт» Иркутского государственного университета доценту В. С. Кедрину за предоставленную методику расчета.

В книге принята двойная система нумераций рисунков, формул, определений, теорем и свойств. Первое число – номер главы, второе – номер рисунка, формулы, определения, теоремы или свойства в этой главе.

Под вектором понимается вектор-столбец. Евклидовы пространства обозначаются символом R^m , где m – размерность пространства.

Рекомендуемая литература содержит наименования источников, которые доступны для обучающихся в том числе через федеральные электронные библиотечные системы. Частью книг из этого списка авторы воспользовались при подготовке примеров и задач.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность А. И. Беникову, много лет проработавшему на кафедре методов оптимизации Иркутского государственного университета. Его курс «Исследование операций», прочитанный в конце 80-х – начале 90-х гг. XX в., во многом инициировал интерес к данному предмету. Материалы конспектов лекций и практических занятий Анатолия Исааковича частично использованы при подготовке данного пособия.

Авторы выражают признательность Благотворительному фонду Владимира Потанина, поддержавшему подготовку данной книги в рамках конкурса на предоставление грантов преподавателям магистратуры благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина», договор № ГСГК-055/24 от 4 марта 2024 г.

1. ПОНЯТИЕ О МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

1.1. Введение в векторную оптимизацию

Классические задачи оптимизации – это задачи поиска экстремума (максимума, минимума) скалярной функции на некотором множестве, т. е. задачи вида

$$f(x) \rightarrow \min (\max), \quad x \in X, \quad (1.1)$$

где функция f отображает некоторое множество D , $X \subset D$, во множество действительных чисел: $f: D \rightarrow R^1$. Область определения D функции f может быть некоторым подмножеством конечномерного евклидова пространства, какого-либо функционального пространства, пространства матриц и т. п. Главное – это то, что значениями функции f обязательно являются действительные числа. Поэтому их можно сравнивать между собой по отношениям «меньше», «больше», «равно», а значит, и пытаться искать максимумы и минимумы. Множество X , которое в некоторых случаях может и совпадать с областью определения D функции f , называется множеством ограничений (множеством допустимых значений, допустимым множеством) задачи (1.1). Напомним, что в случае $X \subset R^n$ (множество ограничений – подмножество конечномерного евклидова пространства) задачу (1.1) называют задачей *математического программирования*.

В реальных ситуациях люди (фирмы, компании, иногда даже страны) часто пытаются одновременно добиться сразу нескольких целей. С математической точки зрения это означает, что одновременно нужно максимизировать или минимизировать сразу *несколько скалярных критериев*. Например, при покупке автомобиля хотелось бы, чтобы он был экономичным, надежным, вместительным, да к тому же еще и дешевым. При планировании производства хорошо было бы добиться в течение определенного времени максимальной прибыли, минимизировать число не выполненных в установленное время заказов, использование сверхурочного времени и т. п. При разработке планов транспортного обслуживания могут стоять цели минимизации общей стоимости перевозок, среднего времени доставки

грузов потребителям, суммарного пробега транспорта, расхода топлива и т. п.

Понятно, что цели нередко противоречат друг другу и очень редко удается добиться достижения сразу нескольких критериев. В классической оптимизации обычно поступают следующим образом. Один из критериев объявляется главным (основным), а по остальным ставится цель добиться значения, которое не хуже (не меньше или не больше, в зависимости от смысла задачи) заданного. Например, можно поставить задачу минимизации суммарной стоимости перевозок при ограничении использования бензина не больше какого-то количества тонн или литров. Это означает, что задача сводится к виду (1.1), в котором главный критерий будет функцией f , а остальные критерии будут участвовать в формировании множества ограничений X . Однако данный подход не является единственным в случае множественности целей.

Соответствующий раздел теории оптимизационных задач называется *многокритериальной (векторной) оптимизацией*.

С формальной точки зрения задачи многокритериальной оптимизации могут быть также записаны в виде (1.1), но критерий f уже будет являться не скалярной, а векторной функцией: $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, где каждая скалярная функция f_i принимает значения из области действительных чисел:

$$f_i: D \rightarrow R^1, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Ограничимся случаем, когда $X \subset R^n$, и будем рассматривать в теории только задачи на *максимум*:

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in X \subset R^n, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_m). \quad (1.2)$$

Если ставится задача *минимизации* одного или нескольких критериев f_i , то можно перейти к задаче максимизации соответствующих функций $-f_i$. Также ограничимся случаем *глобальных максимумов*, хотя ряд дальнейших рассуждений справедлив и для локальных экстремумов.

Говоря строгим математическим языком, постановка задачи многокритериальной оптимизации в форме (1.2) не является корректной. Действительно, в чрезвычайно редких случаях максимум всех m скалярных критериев в (1.2) достигается в одной и той же точке (точ-

ках) множества X . Обычно же первый критерий достигает глобального максимума в какой-либо одной точке (точках), второй критерий – в другой и т. д. Поэтому пока не понятно, как определить, что является решением задачи (1.2). Многокритериальные задачи тем и интересны, что в них нет единого понятия оптимальности. Есть несколько подходов и принципов, которые позволяют либо найти оптимальное в том или ином смысле решение, либо сузить множество возможных решений, убирая заведомо неоптимальные (опять-таки в том или ином смысле) варианты. Тем не менее будем использовать (1.2) в качестве формальной постановки произвольной многокритериальной задачи.

В дальнейшем понадобится некоторая специальная терминология, обычно используемая в теории многокритериальных задач.

Определение 1.1. Множество значений векторного критерия f , когда независимые переменные пробегают все множество ограничений X , будем называть *множеством достижимости* или *множеством оценок* многокритериальной задачи (1.2). То есть множество оценок можно записать в виде

$$Y = \{y \in R^m: y = f(x), x \in X\}. \quad (1.3)$$

Таким образом, множество достижимости (оценок) – это не что иное, как множество значений вектор-функции f при всех допустимых значениях $x \in X$.

Определение 1.2. *Идеальной точкой* в задаче (1.2) называется m -мерный вектор

$$f^* = \left(\max_{x \in X} f_1(x), \max_{x \in X} f_2(x), \dots, \max_{x \in X} f_m(x) \right).$$

Максимум здесь понимается в глобальном смысле.

Отметим, во-первых, что идеальная точка в задаче может и не существовать в том случае, когда хотя бы для одного скалярного критерия f_i глобальный максимум не достигается.

Во-вторых, идеальная точка, вообще говоря, не должна принадлежать множеству достижимости Y . Если $f^* \in Y$, то это означает, что в соответствующей точке максимума x^* из допустимого множества X все скалярные критерии достигают своих глобальных макси-

мумов. Это действительно идеальная ситуация, не требующая специального рассмотрения. В этом варианте не надо никаких новых подходов: многокритериальная задача сводится к m задачам классической максимизации скалярных функций. Уже упоминалось, что подобная ситуация встречается крайне редко. Поэтому в дальнейшем, как правило, будем считать, что $f^* \notin Y$.

Необходимо уметь решать простейшие задачи на построение множества достижимости.

Пример 1.1. Построить множество достижимости и найти идеальную точку в двухкритериальной задаче

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - 2 \rightarrow \min, \\ f_2(x) &= x + 1 \rightarrow \max, \quad x \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Решение. Сначала приведем задачу к задаче максимизации всех скалярных критериев:

$$\begin{aligned} -f_1(x) &= 2 - x^2 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= x + 1 \rightarrow \max, \quad x \in [0; 1]. \end{aligned}$$

В нашем примере $m = 2$, $f = (-f_1, f_2)$, $X = [0, 1]$. Построим множество достижимости $Y \subset R^2$. Для этого введем новые переменные y_1 и y_2 :

$$y_1 = 2 - x^2, \quad y_2 = x + 1.$$

Вторая зависимость является линейной. Исключим из нее x , а затем выразим y_1 через y_2 :

$$x = y_2 - 1, \quad y_1 = 2 - (y_2 - 1)^2.$$

y_2 линейно зависит от x . Поэтому, когда переменная x пробегает отрезок $[0, 1]$, значения функции y_2 будут изменяться от 1 до 2. Итак, множество достижимости в рассматриваемом примере имеет следующий вид:

$$Y = \{y \in R^2: y_1 = 2 - (y_2 - 1)^2, \quad y_2 \in [1, 2]\}.$$

График множества достижимости – это участок параболы, изображенный на рис. 1.1. Идеальная точка в рассматриваемом примере –

это точка, абсцисса которой есть глобальный максимум первого критерия на множестве X , а ордината – глобальный максимум второго критерия на этом же множестве:

$$f_1^* = \max_{x \in X} (2 - x^2), \arg \max_{x \in X} (-f_1(x)) = 0;$$

$$f_2^* = \max_{x \in X} (x + 1), \arg \max_{x \in X} f_2(x) = 1.$$

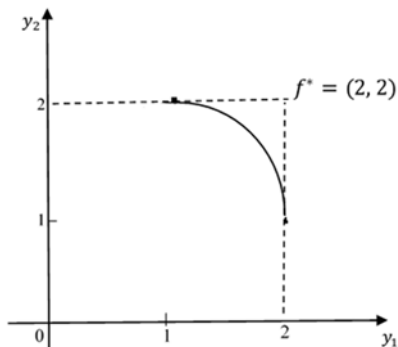


Рис. 1.1. Множество достижимости для примера 1.1

Таким образом, $f^* = (2, 2)$. Точки глобального максимума для скалярных критериев различны (0 для первого критерия и 1 для второго). Это и означает, что идеальная точка не принадлежит множеству оценок Y .

Обратим внимание на часто допускаемую ошибку. При определении границ изменения y_2 существенна линейная зависимость y_2 от x : $y_2 = x + 1$. Подставив в эту зависимость предельные значения $x = 0$ и $x = 1$, мы получили, что y_2 изменяется от 1 до 2. Однако такой прием можно использовать лишь для случая линейных функций.

Пример 1.2. Построить множество достижимости и найти идеальную точку в задаче

$$f_1(x) = x_1 \rightarrow \max,$$

$$f_2(x) = -x_1^2 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$x \in X = \{x \in R^2: 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2\}.$$

В этом примере независимая переменная x является уже не скалярной величиной, а двумерным вектором. Но можно воспользоваться тем, что в первый критерий входит только x_1 , и притом линейно. Введем, как и в предыдущем примере, новые переменные y_1 и y_2 :

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = -x_1^2 + x_2.$$

Тогда $x_2 = y_1^2 + y_2$. Учитывая, что $x_2 \in [0, 2]$, получим

$$0 \leq y_1^2 + y_2 \leq 2.$$

График множества достижимости приведен на рис. 1.2. Он заключен между участками парабол $y_1^2 + y_2 = 0$ и $y_1^2 + y_2 = 2$.

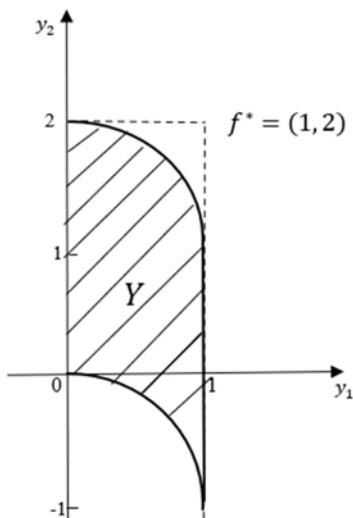


Рис. 1.2. Множество достижимости для примера 1.2

Глобальный максимум первого критерия находится легко:

$$\max_{x \in X} f_1(x) = 1, \quad \arg \max_{x \in X} f_1(x) = (1, a),$$

где a — любое число из отрезка $[0, 2]$. Максимум второго критерия можно вычислить, воспользовавшись, например, утверждением об экстремуме сепарабельной функции. Критерий $f_2(x)$ есть сумма

двух слагаемых, одно из которых зависит от x_1 , а второе от x_2 . Допустимое множество является декартовым произведением двух отрезков: $X = [0,1] \times [0,2]$. Следовательно, задача максимизации функции двух переменных $f_2(x)$ на прямоугольнике X распадается на две задачи одномерной максимизации на соответствующих отрезках. Имеем

$$\max_{x \in X} f_2(x) = 2, \quad \arg \max_{x \in X} f_2(x) = (0, 2).$$

Идеальная точка $f^* = (1, 2)$. Как и в примере 1.1, она не принадлежит множеству оценок. Это означает, что нет ни одной допустимой точки из множества X , в которой оба критерия $f_1(x)$ и $f_2(x)$ достигли бы своих максимальных значений.

1.2. Свертки критериев

Одним из распространенных подходов к решению многокритериальных задач является приведение векторного критерия к скалярному и последующее решение задачи максимизации (минимизации) этого скалярного критерия обычными оптимизационными методами. Существует несколько вариантов такого подхода, называемого *сверткой критериев*. Остановимся на основных видах сверток.

I. Выделение главного критерия

В зависимости от смысла задачи один из критериев объявляется главным (основным). По остальным критериям устанавливаются минимально приемлемые для данной задачи значения. Пусть, например, главным в задаче является первый критерий (этого, кстати, всегда можно добиться простой перенумерацией скалярных критериев). По остальным критериям лицо, принимающее решение (ЛПР), устроит следующая ситуация: по второму критерию достаточно добиться значения, которое не меньше некоторой константы K_2 ; по третьему – не меньше константы K_3 и т. д. Тогда задача (1.2) сводится к задаче максимизации скалярного критерия f_1 :

$$f_1(x) \rightarrow \max,$$

$$f_2(x) \geq K_2, \quad f_3(x) \geq K_3, \dots, f_m(x) \geq K_m, \quad (1.4)$$

$$x \in X.$$

Таким образом, в данном типе свертки к ограничениям, задающим множество X , добавляются еще $m - 1$ ограничений типа неравенств. Естественно, что числа $K_2, K_3, \dots, K_m$ должны быть не больше соответствующих максимальных значений критериев в рассматриваемой задаче. Отметим также, что при достаточно больших значениях K_i множество ограничений задачи (1.4) может оказаться и пустым.

II. Линейная свертка

Вместо векторного критерия $f(x)$ рассматривается линейная комбинация, составленная из скалярных критериев:

$$g(x) = \sum_{i=1}^m c_i f_i(x) \rightarrow \max, \quad x \in X. \quad (1.5)$$

Коэффициенты c_i определяют степень важности того или иного критерия и называются *весовыми коэффициентами*. Понятно, что все весовые коэффициенты должны быть неотрицательными. Ведь для отрицательного коэффициента задача максимизации соответствующего скалярного критерия превращается в задачу минимизации этого критерия. Кроме того, простой нормировкой всегда можно добиться, чтобы сумма коэффициентов равнялась 1. Таким образом, стандартными условиями на весовые коэффициенты в (1.5) являются

$$\sum_{i=1}^m c_i = 1; \quad c_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Очевидно, что в частном случае, когда $c_i = 1$ для некоторого индекса i , все остальные коэффициенты $c_j = 0$, $i \neq j$. Поэтому при таком наборе весовых коэффициентов задача (1.5) представляет собой задачу максимизации только одного скалярного критерия $f_i(x)$, а все остальные скалярные критерии, составляющие вектор-функцию $f(x)$, просто игнорируются.

Отметим некоторые особенности данной свертки.

Во-первых, при использовании линейной свертки не возникает новых ограничений.

Во-вторых, во многих многокритериальных задачах, имеющих конкретный физический (технический, экономический и т. п.) смысл, простое суммирование слагаемых для формирования $g(x)$ в (1.5) некорректно. Ведь скалярные функции $f_i(x)$ могут иметь различную размерность. Например, в многокритериальных транспортных задачах один из скалярных критериев может определять стоимость перевозок (измеряется в рублях), другой – расход топлива (литры или

тонны), третий – время (часы или дни) и т. п. Говорят, что скалярные критерии должны удовлетворять требованию *соизмеримости*, т. е. иметь одну и ту же единицу измерения или вообще быть безразмерными. Поэтому до составления линейной свертки часто проводят так называемую операцию *обезразмеривания* критериев.

В-третьих, нередко слагаемые линейной свертки могут иметь очень отличающиеся по величине типовые значения. Например, в двухкритериальной задаче формирования портфеля ценных бумаг обычно в качестве одного из скалярных критериев рассматривается доходность портфеля, а в качестве второго критерия – риск этого портфеля. Но доходность часто измеряется миллионами (рублей, долларов и т. п.), а риск десятками и сотыми долями. Поэтому при суммировании двух скалярных критериев доходность в большинстве случаев будет значительно превосходить риск, и задающее риск слагаемое не будет влиять на результат. Чтобы избежать этого эффекта, рекомендуется использовать операцию *масштабирования* критериев. Тем самым будет выполнено требование, называемое *сопоставимостью значений* скалярных критериев. Добиться обезразмеривания и нужной степени масштабирования нередко удается с помощью одного приема – деления соответствующего скалярного критерия на какое-либо его характерное значение (например, среднее).

Наконец, очень важно, что линейная свертка не ухудшает гладкости задачи. Например, если все скалярные критерии являются непрерывно дифференцируемыми функциями, то и свертка $g(x)$ также будет непрерывно дифференцируема.

III. Максиминная свертка (свертка Гермейера)

В данном виде свертки есть аналогия с теорией игр (наилучшие гарантированные результаты). Для каждого $x \in X$ определяется наихудшее значение среди всех скалярных критериев и решается следующая задача на максимум:

$$g(x) = \min_{i=1,2,\dots,m} c_i f_i(x) \rightarrow \max, \quad x \in X. \quad (1.6)$$

Здесь неотрицательные числа c_i играют роль весовых коэффициентов, или коэффициентов обезразмеривания и масштабирования. Если обезразмеривание и масштабирование уже произведены, то часто считают $c_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Вернемся к примеру 1.1. На рис. 1.3 совмещены графики обоих критериев и показана их нижняя огибающая (коэффициенты $c_1 = c_2 = 1$).

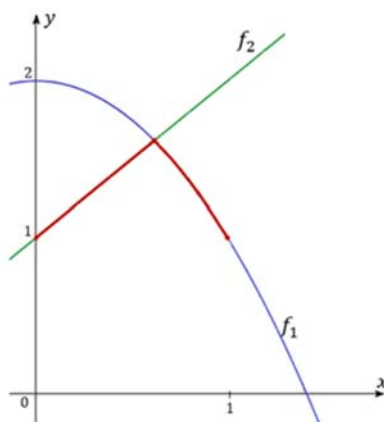


Рис. 1.3. Пример максиминной свертки

Решение задачи на максимум функции, графиком которой является выделенная красным цветом нижняя огибающая, есть точка пересечения графиков. Решим квадратное уравнение $2 - x^2 = x + 1$. Оно имеет два корня. Нас интересует тот, который принадлежит отрезку $[0, 1]$: $x^* \approx 0,618$.

Отметим возможную потерю гладкости функции свертки $g(x)$. Если каждый из скалярных критериев $f_i(x)$ обладает определенной степенью гладкости, то линейная свертка (1.5) не ухудшает гладкости итоговой скалярной функции свертки. В то же время скалярные функции $f_i(x)$ могут быть сколь угодно гладкими, но их максиминная свертка (1.6) может даже и не быть дифференцируемой на всем множестве X . Для приведенного выше примера в точке x^* функция свертки не дифференцируема (левая производная не равна правой), хотя каждый из скалярных критериев $f_1(x)$ и $f_2(x)$ является бесконечно дифференцируемой на множестве X функцией. Это может сильно ограничить применение классических оптимизационных методов для решения задачи (1.6).

IV. Минимизация отклонений

Поставим следующий вопрос. Пусть глобальный максимум некоторого скалярного критерия $f_i(x)$ равен 10. В некоторой допустимой точке множества X получено значение 9,9. Хорошее или плохое это значение с точки зрения задачи на максимум? Ответить на данный вопрос невозможно, если мы не знаем глобальный минимум (или инфимум) данного критерия на множестве X . Если, например, $\inf_{x \in X} f_i(x) = 9,9$, то полученный вариант $f_i(x) = 9,9$ не только не является хорошим. Он наихудший с точки зрения задачи на максимум. Если же $\inf_{x \in X} f_i(x) = -100$, то значение x , для которого $f_i(x) = 9,9$, можно считать весьма неплохим с точки зрения максимизации этого критерия.

Обозначим $\bar{f}_i = \sup_{x \in X} f_i(x)$, $\underline{f}_i = \inf_{x \in X} f_i(x)$. Будем предполагать, что для всех рассматриваемых индексов i соответствующие супремумы и инфимумы конечны. Тогда разность $\bar{f}_i - \underline{f}_i \geq 0$ – это максимальная амплитуда изменения i -го критерия; $\bar{f}_i - f_i(x) \geq 0$ – абсолютное отклонение значения i -го скалярного критерия в точке $x \in X$ от максимально возможного значения этого критерия. Дробь

$$\frac{\bar{f}_i - f_i(x)}{\bar{f}_i - \underline{f}_i} \geq 0$$

характеризует относительное отклонение значения i -го критерия по сравнению с максимальной амплитудой изменения этого критерия. Отметим, что знаменатель этой дроби можно считать заведомо не равным нулю, так как в противном случае $f_i(x) \equiv \text{const}$ для любых допустимых значений $x \in X$ и максимизация i -го критерия не имеет смысла.

Задача скалярной оптимизации в данном случае имеет следующий вид:

$$g(x) = \sum_{i=1}^m c_i \frac{\bar{f}_i - f_i(x)}{\bar{f}_i - \underline{f}_i} \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (1.7)$$

Здесь неотрицательные коэффициенты c_i имеют смысл весов, характеризующих степень важности соответствующих критериев. Заме-

тим, что в отличие от ранее рассмотренных видов сверток (1.7) является задачей на минимум, а не на максимум. Так как знаменатель каждой дроби есть константа, а скалярные критерии f_i умножаются на -1 , то данную свертку можно рассматривать как частный случай линейной свертки (1.5). Наличие знаменателей $(\bar{f}_i - \underline{f}_i)$ уже обеспечивает необходимые обезразмеривание и масштабирование целевой функции.

V. Метод идеальной точки

Выше уже говорилось, что в случае принадлежности идеальной точки f^* множеству достижимости Y ничего делать не надо – эта идеальная точка и будет «абсолютным» решением многокритериальной задачи (1.2).

Пусть $f^* \notin Y$. Метод заключается в поиске ближайшей (ближайших) к f^* точки (точек) множества Y . Для этого необходимо решить следующую задачу проецирования:

$$\|y - f^*\| \rightarrow \min, \quad y \in Y.$$

В терминах независимых переменных эта задача имеет вид

$$g(x) = \|f(x) - f^*\| \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (1.8)$$

В качестве нормы в (1.8) обычно выбирается классическая евклидова норма

$$g(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i^*)^2}.$$

Чтобы избавиться от квадратного корня и возможной недифференцируемости евклидовой нормы, обычно переходят к эквивалентной задаче минимизации квадрата евклидовой нормы:

$$\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i^*)^2 \rightarrow \min, \quad x \in X.$$

Нередко в методе идеальной точки применяются и другие виды норм векторов, используемые в конечномерных евклидовых пространствах (сумма модулей, максимум модулей). Их недостатком является уже указанный выше эффект потери гладкости функции свертки по сравнению с исходными скалярными функциями f_i .

Итак, кратко рассмотрены пять наиболее часто используемых видов сверток, позволяющих свести многокритериальную задачу (1.2) к классическим задачам оптимизации скалярных критериев. Существуют и другие виды сверток: мультипликативные, квадратичные и т. п. Разные виды сверток нередко дают разные результаты. Что можно рекомендовать лицу, принимающему решение? Если несколько разных видов сверток приводят к одному и тому же ответу, то это является веским основанием рекомендовать полученный результат в качестве решения исходной задачи векторной оптимизации. Некоторые из рассмотренных выше сверток (линейная, максимальная, метод идеальной точки) имеют серьезное теоретическое обоснование с точки зрения общей теории многокритериальных задач.

Вопросы и задания

1.1. Чем множество оценок в многокритериальной задаче отличается от множества значений векторного критерия этой задачи?

1.2. Докажите, что свертка (1.7) является частным случаем линейной свертки. Вычислите коэффициенты линейной свертки и запишите соответствующую задачу на максимум скалярного критерия.

1.3. Как выглядит свертка (1.7) для многокритериальной задачи, в которой все критерии необходимо минимизировать?

1.4. Рассматривается решение задачи векторной оптимизации методом идеальной точки. В качестве нормы в конечномерном пространстве выбрана евклидова норма. При каких условиях на множество оценок Y проекция идеальной точки на это множество существует и единственна? Возможно ли, что решение задачи методом идеальной точки даст несколько разных оценок из множества Y ? Подтвердите ответ соответствующими примерами.

1.5. Решите примеры 1.1 и 1.2 методом идеальной точки, используя все известные нормы в конечномерных линейных пространствах. Решения проиллюстрируйте графиками, построив линии уровня соответствующих целевых функций.

1.6. Для приведенных ниже многокритериальных задач постройте на координатной плоскости множество оценок, найдите идеальную точку, решите задачи методами линейной свертки и минимизации отклонений (весовые коэффициенты принять равными 1).

а) $f_1(x) = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max,$
 $f_2(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
 $x_1 + 2x_2 \leq 10,$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 18,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

б) $f_1(x) = 0,5x_1 \rightarrow \max,$
 $f_2(x) = -(10x_1 - 1)^4 + x_2 \rightarrow \max,$
 $x_1 \in [-10, 10],$
 $x_2 \in [0, 2].$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & f_1(x) = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ & f_2(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ & x_1 - x_2 \geq -6, \\ & 3x_1 - x_2 \leq 27, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad & f_1(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ & f_2(x) = x_1 - 4x_2 \rightarrow \max, \\ & -4x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1 + x_2 \leq 12, \\ & x_1 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д)} \quad & f_1(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ & f_2(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ & -4x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1 + x_2 \leq 12, \\ & x_1 - x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{е)} \quad & f_1(x) = x_1 \rightarrow \max, \\ & f_2(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ & x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ж)} \quad & f_1(x) = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ & f_2(x) = x_2 \rightarrow \max, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ & x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{з)} \quad & f_1(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ & f_2(x) = 2x_2 \rightarrow \max, \\ & x_1 + x_2 \leq 10, \\ & x_1 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1.7. Решите методом максиминной свертки. Коэффициенты принять равными 1. При необходимости алгебраические уравнения можно решить с помощью любого программного пакета.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & f_1(x) = \cos x \rightarrow \max, \\ & f_2(x) = -x^2 \rightarrow \max, \\ & f_3(x) = 2x \rightarrow \max, \\ & x \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & f_1(x) = \sin x \rightarrow \max, \\ & f_2(x) = x^2 \rightarrow \max, \\ & f_3(x) = 5x \rightarrow \max, \\ & x \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

2. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО ПАРЕТО И СЛЕЙТЕРУ

2.1. Бинарные отношения. Оптимальность по бинарным отношениям

В классической задаче максимизации *скалярной* функции

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in X \subset D \subset R^n; \quad f: D \rightarrow R^1$$

даже не возникает вопрос о том, какой из двух разных допустимых векторов множества X «лучше». Пусть имеются два вектора $a, b \in X$. Все зависит от скалярных значений $f(a)$ и $f(b)$. Если $f(a) > f(b)$, то в задаче на максимум a лучше b ; если $f(a) < f(b)$, то b лучше a ; если же $f(a) = f(b)$, то a и b с точки зрения максимизации целевой функции равноправны.

Как же поступить в случае векторной оптимизации? Пусть, например, поставлена задача максимизации векторной функции $f = (f_1, f_2)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &\rightarrow \max, \\ f_2(x) &\rightarrow \max, \\ x \in X \subset D \subset R^n; \quad f_i: D &\rightarrow R^1, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Предположим, что в трех разных точках a, b, c из множества X получены следующие значения:

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что точка c «хуже» двух других. Но как сравнить между собой a и b ? Однозначного ответа на этот вопрос нет.

В теории векторной оптимизации наиболее распространен следующий подход. Предполагается, что на множестве значений векторного критерия f , соответствующих допустимым независимым переменным $x \in X$, т. е. на множестве оценок (множестве достижимости) многокритериальной задачи, введено некоторое отношение предпочтения, позволяющее сравнивать между собой разные значения из каких-либо соображений. При этом некоторые значения могут быть и несравнимыми. В зависимости от типа такого отношения и вводится соответствующее понятие оптимальности.

В дальнейшем будут полезны элементы общей теории бинарных отношений.

Определение 2.1. Бинарным отношением $\mathfrak{R}$, заданным на некотором множестве A , называется подмножество декартова произведения множества A самого на себя ($A \times A$), т. е. $\mathfrak{R} \subset A \times A$.

В частности, самым «широким» бинарным отношением является множество $\mathfrak{R} = A \times A$. Если a и b – элементы множества A и имеет место включение $(a, b) \in \mathfrak{R}$, то обычно пишут $a \mathfrak{R} b$ и говорят, что элемент a находится в отношении $\mathfrak{R}$ с элементом b . Заметим, что в общем случае из $a \mathfrak{R} b$ не следует выполнение соотношения $b \mathfrak{R} a$.

Определение 2.2. Элементы a и b из множества A называются *сравнимыми* по бинарному отношению $\mathfrak{R}$, если выполнено хотя бы одно из условий $a \mathfrak{R} b$ или $b \mathfrak{R} a$ (в некоторых ситуациях возможно и одновременное выполнение обоих условий). В противном случае эти элементы называются *не сравнимыми* по данному бинарному отношению.

В дальнейшем будут использоваться следующие бинарные отношения в конечномерных евклидовых пространствах. Пока будем считать, что $A = R^m$. Пусть a и b – два m -мерных вектора ($a, b \in R^m$).

1. Отношение $>$ («больше»)

Будем говорить, что $a > b$, если каждая компонента вектора a больше соответствующей компоненты вектора b , т. е. $a_i > b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. На рис. 2.1 изображено множество всех векторов $a \in R^2$, находящихся в этом отношении с заданным вектором $b \in R^2$. Отметим, что точки, лежащие на сторонах изображенного на рисунке угла, включая вершину угла (точку b), не находятся с точкой b в данном отношении.

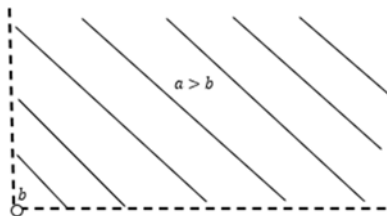


Рис. 2.1. Иллюстрация отношения $a > b$

Таким образом, соответствующее множество – это внутренность угла.

2. Отношение $\geq$ («больше или равно»)

Считаем, что $a \geq b$, если каждая компонента вектора a больше или равна соответствующей компоненте вектора b , т. е. $a_i \geq b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. На рис. 2.2 изображено множество всех векторов $a \in R^2$, находящихся в этом отношении с заданным вектором $b \in R^2$.

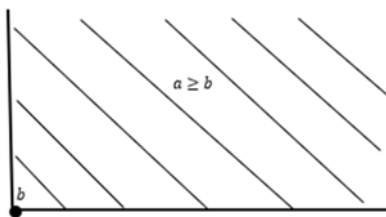


Рис. 2.2. Иллюстрация отношения $a \geq b$

Это множество содержит не только внутренность угла, но и его границы, включая вершину угла – точку b .

3. Отношение $\geq$ («обобщенное больше или равно»)

$a \geq b$, если каждая компонента вектора a больше или равна соответствующей компоненте вектора b , $a \neq b$, т. е. $a_i \geq b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$, но существует по крайней мере один индекс $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, для которого справедливо строгое неравенство $a_j > b_j$. На рис. 2.3 изображено множество всех векторов $a \in R^2$, находящихся в рассматриваемом отношении с заданным вектором $b \in R^2$. Множество содержит внутренность угла, его границы, но без вершины угла – точки b .

Введение данного отношения имеет смысл только в конечномерных пространствах R^m при $m \geq 2$. Действительно, для скалярных величин $a, b \in R^1$ из выполнения условий $a \geq b, a \neq b$ вытекает, что $a > b$. В векторном же случае ($m \geq 2$) данное утверждение, вообще говоря, неверно. В вышеприведенном примере $f(a) \geq f(c)$, $f(a) \neq f(c)$. Но отсюда не следует, что $f(a) > f(c)$.

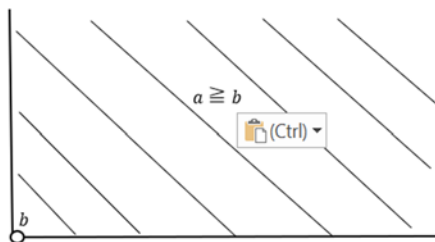


Рис. 2.3. Иллюстрация отношения $a \geq b$

Из курсов математического анализа и математической логики известны такие свойства бинарных отношений, как рефлексивность, симметричность, транзитивность и т. п. Наша цель сейчас – рассмотреть только такие отношения в пространстве значений векторного критерия $f(x)$, которые разумны с точки зрения задачи векторной максимизации (1.2). Очевидно, что с точки зрения здравого смысла такие отношения должны иметь следующие свойства:

1) *Иррефлексивность*. Любой элемент множества не может быть лучше самого себя. Это означает, что никакой элемент не может находиться в отношении $\mathcal{R}$ сам с собой.

2) *Асимметричность*. Если элемент a лучше элемента b , то элемент b не может быть лучше элемента a . Это свойство означает, что из выполнения условия $(a, b) \in \mathcal{R}$ обязательно следует, что $(b, a) \notin \mathcal{R}$.

3) *Транзитивность*. Если элемент a лучше элемента b , а элемент b лучше элемента c , то элемент a должен быть лучше элемента c . Таким образом, из выполнения $a \mathcal{R} b$ и $b \mathcal{R} c$ всегда должно следовать $a \mathcal{R} c$.

Вернемся к рассмотренным выше трем бинарным отношениям. Легко проверить, что отношения $>$ и $\geq$ обладают всеми этими тремя свойствами. Классическое отношение «больше или равно» ($\geq$) не является иррефлексивным, так как для любого элемента a выполняется $a \geq a$. Это же отношение не является и асимметричным. При $a = b$ из $a \mathcal{R} b$ следует, что $b \mathcal{R} a$.

Утверждение 2.1. Любое асимметричное отношение иррефлексивно.

Докажем данное утверждение от противного. Пусть некоторое бинарное отношение является асимметричным, но не иррефлексивным. Это означает, что найдется элемент $a \in A$, который находится в этом отношении сам с собой, т. е. $a \mathcal{R} a$. Но это невозможно в силу свойства асимметричности.

Утверждение 2.2. Если бинарное отношение иррефлексивно и транзитивно, то оно асимметрично.

Также проведем доказательство от противного. Пусть некоторое бинарное отношение $\mathcal{R}$ иррефлексивно и транзитивно. Предположим, что оно не является асимметричным. Тогда существует такая пара элементов $a, b \in A$, что одновременно $a \mathcal{R} b$ и $b \mathcal{R} a$. Из свойства транзитивности вытекает, что $a \mathcal{R} a$, т. е. рассматриваемое отношение не является иррефлексивным. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

В силу доказанных утверждений нет необходимости проверять бинарное отношение на одновременное выполнение всех трех свойств (иррефлексивность, асимметричность, транзитивность). Достаточно либо асимметричности и транзитивности (иррефлексивность автоматически следует из утверждения 2.1), либо иррефлексивности и транзитивности (асимметричность вытекает из утверждения 2.2).

Теперь можно перейти к основному вопросу данной главы – понятию оптимальности по произвольному бинарному отношению. Будем вести рассуждения в терминах многокритериальной задачи (1.2) и множества оценок (1.3).

Определение 2.3. Пусть $>$ – некоторое бинарное отношение в m -мерном пространстве значений векторного критерия $f(x)$, обладающее свойствами иррефлексивности, асимметричности и транзитивности. Будем говорить, что некоторая оценка $y^* \in Y$ называется *оптимальной по отношению $>$* , если не существует оценок $y \in Y$, находящихся с y^* в данном отношении, т. е. ни для каких $y \in Y$ не выполнено $y > y^*$.

Таким образом, для оптимальной по отношению $>$ оценки y^* множество точек из Y , находящихся с y^* в этом бинарном отношении, является пустым.

Если в качестве бинарного отношения выбрано отношение $\geq$, то такая оценка называется *оптимальной по Парето* (*парето-оптимальной, эффективной*).

Если в качестве бинарного отношения выбрано отношение $>$, то такая оптимальная оценка называется *оптимальной по Слейтеру* (*слабо оптимальной по Парето* или просто *слабо оптимальной, слабо эффективной*).

Множество оптимальных по Парето оценок будем обозначать $P(Y)$, а множество оптимальных по Слейтеру оценок – $S(Y)$.

Вспомним, что решить классическую задачу на максимум – это найти точку (точки) максимума и сам максимум. В многокритериальной оптимизации оценки – это значения векторной целевой функции. Каждой оценке соответствует не менее одной независимой переменной $x \in X$. Независимые переменные из множества X , соответствующие оптимальным по Парето оценкам, будем называть *оптимальными по Парето решениями*, а множество оптимальных по Парето решений обозначать $P_f(X)$. Аналогично *оптимальными по Слейтеру решениями* будем называть переменные из множества X , которые соответствуют оптимальным по Слейтеру оценкам. Множество таких решений будем обозначать $S_f(x)$.

Введенное понятие оптимальности названо по имени итальянского экономиста Вильфредо Парето, работавшего в конце XIX – начале XX в.¹ В его честь назван знаменитый принцип 20/80, с удивительной точностью работающий в абсолютно разных сферах: 20 % усилий дают 80 % результата, 20 % населения Земли владеют 80 % земных богатств, 20 % офисных работников делают 80 % всей офисной работы и т. п.

Поиск оптимальных по Парето или Слейтеру решений – это поиск *неулучшаемых* решений по соответствующему бинарному отношению. Очень часто полученные множества содержат много элементов. Можно сказать, что поиск оптимальных по Парето или Слейтеру решений является первым, но очень важным этапом – этапом отсеивания *заведомо неоптимальных вариантов*. Далее обычно следует так называемый процесс *сужения* множеств Парето или Слейтера. Однако для конкретной рекомендации, какое именно окончательное решение выбрать, нужны дополнительные соображения.

¹ С биографией Вильфредо Парето (1848–1923) можно ознакомиться в Википедии по ссылке https://ru.wikipedia.org/wiki/Парето,_Вильфредо (дата обращения 31.05.2025).

Утверждение 2.3. Справедливы следующие включения:

$$P(Y) \subset S(Y) \text{ и } P_f(X) \subset S_f(X).$$

Действительно, пусть какая-либо оценка $\bar{y} \in P(Y)$. Тогда не существует никакой другой оценки $y \in Y$, для которой справедливо неравенство $y \geq \bar{y}$. Следовательно, и подавно не существует ни одной такой оценки $y \in Y$, что $y > \bar{y}$. Доказательство справедливости утверждения на множестве решений проводится аналогично.

Рекомендуется осмыслить данный результат. Отношение $>$ является более жестким, чем отношение $\geq$. При этом множество неумлучшаемых решений (оценок) по отношению $>$, вообще говоря, шире, чем по отношению $\geq$. Это связано с тем, что определение 2.3 оптимальности по бинарному отношению сформулировано в виде отрицания существования оценок, находящихся в этом бинарном отношении к оптимальной оценке.

Итак, множество оптимальных по Парето оценок (решений) всегда содержится во множестве оптимальных по Слейтеру оценок (решений). Однако в некоторых случаях эти множества совпадают. Одно из достаточных условий совпадений выглядит следующим образом.

Утверждение 2.4. Если в задаче (1.2) множество X выпукло, а функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, строго вогнуты на X , то

$$P(Y) = S(Y) \text{ и } P_f(X) = S_f(X).$$

В силу утверждения 2.3 достаточно доказать, что

$$P(Y) \supset S(Y) \text{ и } P_f(X) \supset S_f(X).$$

Пусть $\bar{x} \in S_f(X)$. Предположим, что утверждение неверно, т. е. $\bar{x} \notin P_f(X)$. Это означает, что существует точка $\tilde{x} \in X$, для которой выполнено неравенство $f(\tilde{x}) \geq f(\bar{x})$. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Рассмотрим точки $x(\alpha) = \alpha\bar{x} + (1-\alpha)\tilde{x}$, которые являются внутренней частью отрезка, соединяющего $\bar{x}$ и $\tilde{x}$. В силу выпуклости множества ограниченный задачи $x(\alpha) \in X$. Воспользуемся строгой вогнутостью функций $f_i(x)$:

$$f_i(x(\alpha)) > \alpha f_i(\bar{x}) + (1-\alpha)f_i(\tilde{x}) \geq f_i(\bar{x}), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Следовательно, $\bar{x} \notin S_f(X)$. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Перейдем к методам поиска оптимальных по Парето и Слейтеру оценок и соответствующих им решений. Начнем с геометрических иллюстраций в пространстве двух критериев.

На рис. 2.4 изображено множество оценок Y некоторой задачи с двумя скалярными критериями. Геометрический подход к поиску оптимальных по Парето или Слейтеру оценок заключается в следующем. В точках y множества оценок нужно мысленно восстановить угол (иногда его называют северо-восточным углом), изображенный на рис. 2.3 (при поиске оптимальных по Парето оценок), или угол, изображенный на рис. 2.1 (при поиске оптимальных по Слейтеру оценок).

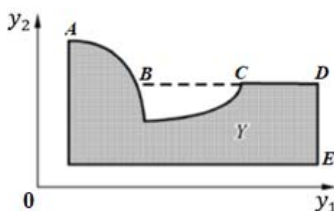


Рис. 2.4. Иллюстрация оптимальности по Парето и Слейтеру

Если этот угол не будет иметь никаких других общих точек со множеством Y , то исследуемая оценка оптимальна. По ней восстанавливается соответствующее решение (решения) из множества X . Заведомо не могут быть оптимальными все внутренние точки множества оценок. Поэтому оптимальными оценками могут быть только точки, лежащие на границе множества Y . На рис. 2.4 оптимальными по Парето являются оценки, соответствующие точкам дуги $[A, B)$ (точка B не входит) и точке D . Из утверждения 2.3 следует, что все оценки, оптимальные по Парето, автоматически являются оптимальными по Слейтеру. Оптимальными по Слейтеру дополнительно также являются все точки полуинтервалов $[C, D)$, $(D, E]$ и точка B .

Еще несколько примеров приведены на рис. 2.5.

Критерии могут принимать и конечное число значений. В этом случае график множества оценок будет состоять из конечного числа точек. На рис. 2.6 оптимальными по Парето будут изображенные

красным точки E и D . Оптимальными по Слейтеру будут оценки, оптимальные по Парето, и в дополнение к ним выделенная зеленым цветом точка A , ордината которой равна ординате точки E . Отметим, что у точки B абсцисса совпадает с абсциссой оптимальной по Парето оценки E . Однако точка B не является ни оптимальной по Парето, ни оптимальной по Слейтеру оценкой. Это объясняется тем, что абсцисса и ордината точки D больше соответствующих абсциссы и ординаты оценки B .

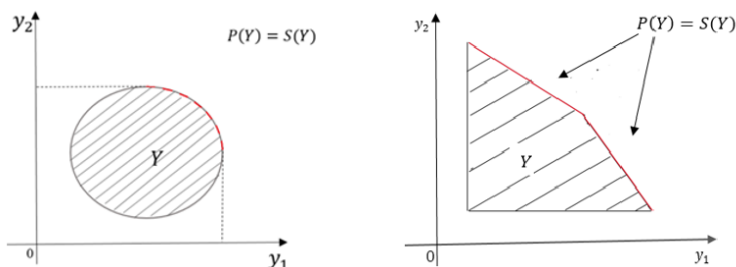


Рис. 2.5. Совпадение оптимальных по Парето и Слейтеру оценок

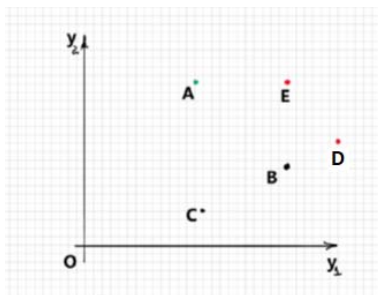


Рис. 2.6. Случай конечного числа значений критериев

Пример 2.1. Рассмотрим задачу с двумя критериями:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + (x - 1)^2 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= 3 - x \rightarrow \max, \quad x \in [0, 3]. \end{aligned}$$

Для начала построим множество оценок, введя переменные y_1 и y_2 :

$$y_1 = 1 + (x - 1)^2,$$

$$y_2 = 3 - x.$$

Второй критерий является линейным. Выразим x через y_2 и подставим в первый критерий:

$$y_1 = 1 + (2 - y_2)^2, \quad y_2 \in [0, 3].$$

Множество оценок имеет вид, изображенный на рис. 2.7. Из геометрических соображений ясно, что парето-оптимальные оценки – это точки дуги $(B, C]$ (B не входит) и точка A . Множество оптимальных по Слейтеру оценок отличается тем, что в него входит точка B , что соответствует $y_2 = 1$.

Остановимся на том, как правильно записать ответ для подобных примеров. Ответом должны быть два множества: множество оптимальных по Парето или Слейтеру оценок (в пространстве значений критериев) и множество оптимальных по Парето или Слейтеру решений (в пространстве значений независимых переменных).

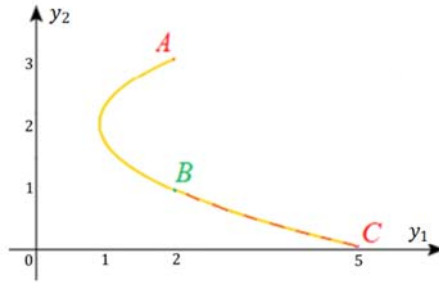


Рис. 2.7. Множество оценок для примера 2.1

Оптимальные по Парето оценки образуют множество

$$P(Y) = \{(2; 3)\} \cup \{y \in R^2: y_1 = 1 + (2 - y_2)^2, \quad y_2 \in [0; 1)\}.$$

Множество оптимальных по Слейтеру оценок отличается от $P(Y)$ только одной точкой:

$$S(Y) = \{(2; 3)\} \cup \{y \in R^2: y_1 = 1 + (2 - y_2)^2, \quad y_2 \in [0; 1]\}.$$

Для поиска оптимальных решений на множестве ограничений задачи воспользуемся тем, что в силу линейности второго критерия каждой точке множества оценок соответствует единственная точка множества ограничений X , которая находится по формуле $x = 3 - y_2$. Поэтому

$$P_f(X) = \{0\} \cup (2; 3], S_f(X) = \{0\} \cup [2; 3].$$

2.2. Существование решений в многокритериальных задачах. Монотонные функции векторного аргумента

В классических задачах оптимизации скалярных функций есть достаточные условия, гарантирующие существование глобальных экстремумов. Одно из самых известных условий – теорема Вейерштрасса. Для нее существует аналог в многокритериальном случае.

Теорема 2.1 (*обобщенная теорема Вейерштрасса*). Пусть в задаче многокритериальной оптимизации (1.2) множество ограничений X компактно, а все скалярные функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ непрерывны на множестве X . Тогда множества оптимальных по Парето оценок и решений (а следовательно, и множества оптимальных по Слейтеру оценок и решений) не пусты.

Доказательство. Рассмотрим линейную свертку критериев с единичными коэффициентами:

$$F(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x).$$

Скалярная функция $F(x)$ непрерывна на компактном множестве X как сумма непрерывных функций. Согласно классической теореме Вейерштрасса эта функция достигает глобального максимума на множестве X . Это означает, что существует точка $x^* \in X$, такая что $F(x^*) \geq F(x) \forall x \in X$. Докажем, что $x^* \in P_f(X)$, т. е. является одним из парето-оптимальных решений. Предположим, что это не так. Тогда существует точка $z \in X$, такая что

$$f_i(z) \geq f_i(x^*), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

причем для хотя бы одного из индексов i неравенство строгое (в терминах введенного ранее бинарного отношения справедливо $f(z) \geq f(x)$). Суммируя все эти неравенства по i от 1 до m , приходим к противоречию: x^* не является точкой глобального максимума функции $F(x)$, так как $F(z) > F(x^*)$. Теорема доказана.

Замечательно, что обобщенная теорема Вейерштрасса носит *конструктивный характер*: она позволяет найти по крайней мере одно оптимальное по Парето решение. Для этого нужно просто рассмотреть задачу на максимум линейной свертки с единичными коэффициентами.

Более универсальные способы поиска оптимальных по бинарному отношению оценок и решений можно получить, воспользовавшись обобщением классического понятия монотонности функции на случай функций векторных переменных.

Определение 2.4. Скалярная функция $\varphi(y)$, определенная на множестве Y из пространства R^m , называется *возрастающей по бинарному отношению* $>$ на множестве Y , если для любых двух элементов $y, z \in Y$, таких что $y > z$, выполняется $\varphi(y) > \varphi(z)$.

Теорема 2.2. Пусть скалярная функция $\varphi(y)$ возрастает по бинарному отношению $>$ на множестве оценок Y многокритериальной задачи (1.2). Если точка $x^* \in X$ доставляет глобальный максимум скалярной функции $\varphi(f(x))$ на множестве X , то эта точка является оптимальным по данному бинарному отношению решением задачи (1.2).

Доказательство. Итак, по условию теоремы $\forall x \in X$ выполнено неравенство $\varphi(f(x^*)) \geq \varphi(f(x))$. Предположим, что точка x^* не является оптимальной по бинарному отношению $>$. Тогда найдется некоторая точка $\bar{x} \in X$, такая что $f(\bar{x}) > f(x^*)$. В силу монотонности функции φ получим противоречие: $\varphi(f(\bar{x})) > \varphi(f(x^*))$, что и доказывает теорему.

Таким образом, чтобы найти оптимальное по бинарному отношению решение многокритериальной задачи, достаточно решить задачу на глобальный максимум любой скалярной функции, являющейся монотонно возрастающей по этому бинарному отношению.

В приведенной ниже теореме доказывается, что линейная свертка при определенных условиях как раз и является монотонно возрастающей функцией по бинарным отношениям $\geq$ и $>$.

Теорема 2.3. Скалярная функция $\varphi(y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$ является:

а) монотонно возрастающей по отношению $\geq$ на R^m , если все коэффициенты линейной свертки строго положительны ($\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$);

б) монотонно возрастающей по отношению $>$ на R^m , если все коэффициенты линейной свертки неотрицательны и хотя бы один из них отличен от нуля ($\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \geq 0$, где 0 – нулевой вектор из R^m).

Доказательство

а) Пусть даны две оценки y и z , удовлетворяющие условию $y \geq z$. Тогда $y_i \geq z_i$ для всех индексов i , причем хотя бы одно из неравенств обязательно является строгим. Умножая обе части i -го неравенства на положительный коэффициент λ_i и суммируя все неравенства от 1 до m , получим

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i > \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i = \varphi(z), \quad (2.1)$$

что и доказывает утверждение а) теоремы.

б) Доказывается аналогично. Если для двух оценок y и z выполнено $y > z$, то $y_i > z_i$ для всех индексов i . Умножим обе части каждого i -го неравенства на неотрицательный коэффициент λ_i . Получим $\lambda_i y_i \geq \lambda_i z_i$, причем хотя бы для одного индекса i неравенство строгое, так как $\lambda \geq 0$. Суммируя все неравенства от 1 до m , снова приходим к (2.1), означающему монотонность функции φ .

Таким образом, точка максимума любой линейной свертки с положительными коэффициентами есть парето-оптимальное решение, а точка максимума любой линейной свертки с неотрицательными коэффициентами, хотя бы один из которых отличен от нуля, является оптимальным по Слейтеру решением.

Из утверждения б) доказанной теоремы следует, что точка глобального максимума любого скалярного критерия $f_i(x)$ на множестве X оптимальна по Слейтеру. Действительно, достаточно положить $\lambda_i = 1$ для выбранного индекса i , а все остальные $\lambda_j = 0$, $j \neq i$.

Отметим также, что функция $\varphi(y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$ непрерывна во всех точках пространства R^m .

Используемая при доказательстве обобщенной теоремы Вейерштрасса функция $F(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)$ является частным случаем только что рассмотренной свертки при $\lambda_i = 1$ для всех индексов i .

Остался невыясненным вопрос: все ли оптимальные по Парето (Слейтеру) решения можно найти, перебирая коэффициенты линейной свертки? Приведем без доказательства соответствующую теорему².

Теорема 2.4. Пусть в многокритериальной задаче (1.2) множество X выпукло и все скалярные функции $f_i(x)$ вогнуты на X . Если $x^* \in X$ является оптимальным по Слейтеру решением, то существуют такие числа

$$\lambda_i^* \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i^* = 1,$$

что

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x).$$

Таким образом, в данной теореме сформулировано необходимое условие того, чтобы решение являлось оптимальным по Слейтеру. Так как любое оптимальное по Парето решение оптимально по Слейтеру, то теорема 2.4 определяет также и необходимое условие парето-оптимальности.

Рассмотрим теперь функцию, используемую в методе максимальной свертки.

Теорема 2.5. Скалярная функция $\varphi(y) = \min_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i y_i$ является монотонно возрастающей по отношению $>$ на R^m , если все коэффициенты свертки строго положительны ($\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$).

Действительно, пусть даны две оценки y и z , удовлетворяющие условию $y > z$. Тогда для всех индексов i и положительных констант λ_i справедливы неравенства

$$\lambda_i y_i > \lambda_i z_i.$$

Отсюда сразу следует доказывающее теорему неравенство

$$\varphi(y) = \min_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i y_i > \min_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i z_i = \varphi(z).$$

² Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Физматлит, 2007. 256 с.

Таким образом, максиминные свертки порождают оптимальные по Слейтеру решения. Обратное утверждение справедливо при дополнительном предположении о положительности оптимальных оценок.

Теорема 2.6. Пусть $x^* \in X$ является оптимальным по Слейтеру решением задачи (1.2) и $f_i(x^*) > 0$ для всех индексов $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда существуют такие числа

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad (2.2)$$

что

$$\min_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i f_i(x^*) = \max_{x \in X} \min_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i f_i(x). \quad (2.3)$$

Действительно, пусть $x^* \in S_f(X)$. Введем скалярную величину

$$\mu = \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{f_i(x^*)} \right]^{-1}.$$

$\mu > 0$ в силу условий теоремы. Докажем, что утверждение теоремы выполнено для следующих коэффициентов λ_i :

$$\lambda_i = \frac{\mu}{f_i(x^*)}.$$

Выполнение условий (2.2) проверяется простой подстановкой в эти условия выбранных чисел λ_i . Для всех индексов i имеем

$$\lambda_i f_i(x^*) = \mu. \quad (2.4)$$

Так как число μ не зависит от i , то

$$\min_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i f_i(x^*) = \mu.$$

Поскольку точка x^* является оптимальным по Слейтеру решением, то для любого элемента $x \in X$ найдется такой индекс $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, что $f_j(x^*) \geq f_j(x)$. Следовательно,

$$\mu = \min_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i f_i(x^*) = \lambda_j f_j(x^*) \geq \lambda_j f_j(x) \geq \min_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i f_i(x).$$

А это и есть утверждение (2.3), доказывающее теорему.

В теореме 2.6 сформулировано необходимое условие оптимальности по Слейтеру (и, соответственно, по Парето). Равенство (2.4) показывает, что при соответствующем подборе коэффициентов максиминной свертки в оптимальной по Слейтеру точке значения всех скалярных критериев многокритериальной задачи, умноженные на весовые множители, совпадают.

Таким образом, если все скалярные критерии $f_i(x)$ положительны на множестве ограничений X , то *все* слабо эффективные решения $S_f(X)$ могут быть найдены путем решения параметрической задачи максимизации скалярного критерия

$$F(x, \lambda) = \min_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i f_i(x) \rightarrow \max, \quad x \in X,$$

где векторный параметр $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ удовлетворяет (2.2).

Требование положительности на множестве X всех скалярных критериев не умаляет общности задачи (1.2) в случае ограниченности снизу всех функций f_i . Если эти функции принимают отрицательные значения, то можно перейти к эквивалентной многокритериальной задаче, увеличив каждую функцию f_i на величину, равную наибольшей по модулю нижней границе всех скалярных критериев.

Наконец, рассмотрим еще один тип свертки. Пусть все скалярные критерии в (1.2) ограничены сверху. Обозначим $K_i = \sup_{x \in X} f_i(x) < \infty$, $i = 1, 2, \dots, m$. Введем функцию

$$\varphi(y) = - \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i (K_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Очевидно, что в случае равенства единице всех коэффициентов λ_i эта функция является сверткой, используемой в методе идеальной точки с евклидовой нормой.

Теорема 2.7. Скалярная функция $\varphi(y)$ является монотонно возрастающей по отношению $\geq$, если $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Для доказательства рассмотрим две оценки y и z из множества Y , удовлетворяющие условию $y \geq z$. По определению этого бинарного отношения

$$0 \leq K_i - y_i \leq K_i - z_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

причем хотя бы для одного индекса i неравенство является нестрогим. Учитывая положительность коэффициентов λ_i , имеем

$$\varphi(y) = - \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i (K_i - y_i)^2 \right]^{1/2} > - \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i (K_i - z_i)^2 \right]^{1/2} = \varphi(z),$$

что и доказывает теорему.

Итак, данная свертка для любых положительных коэффициентов (следовательно, и для единичных коэффициентов, используемых в методе идеальной точки) порождает оптимальные по Парето решения.

2.3. Принятие решений в многокритериальных задачах с конечным числом значений целевых функций

В ряде реальных ситуаций лицу, принимающему решение в многокритериальных задачах, приходится делать выбор из *конечного* числа вариантов. Это означает, что каждая скалярная функция, входящая в векторную целевую функцию, а значит, и весь векторный критерий могут быть заданы в табличной форме.

Рассмотрим простейший пример. Пусть поставлена задача максимизации векторной функции, состоящей из двух скалярных критериев:

$$\begin{aligned} f_1(x) &\rightarrow \max, \\ f_2(x) &\rightarrow \max, \\ x \in X &= \{a, b, c\}; f_i: X \rightarrow R^1, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Таким образом, выбор нужно сделать всего лишь из трех допустимых вариантов – a, b или c . Предположим, что векторный критерий принимает в данных точках следующие значения:

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти оптимальные по Парето и Слейтеру оценки и решения.

Отметим, что для решения задачи нам не нужна никакая информация о том, что представляют собой элементы a, b, c . Это могут быть числа, вектора, матрицы, функции, какие-то другие объекты.

Главное, что их всего три, и для каждого варианта (a , b или c) известны значения целевой вектор-функции f . Для решения данного примера не нужны никакие специальные методы. Достаточно вспомнить определения оптимальности по бинарному отношению. Оценка $f(c)$ может быть улучшена в смысле отношения $\geq$, т. е. она не оптимальна по Парето. Оценки $f(a)$ и $f(b)$ не могут быть улучшены по этому отношению. Следовательно, оценки $f(a)$, $f(b)$ и соответствующие независимые переменные (решения в нашей терминологии) a и b оптимальны по Парето. Никакая оценка, в том числе и $f(c)$, не может быть улучшена в смысле отношения $>$. На первый взгляд, это противоречит здравому смыслу. Ведь $f(c)$ заведомо хуже, чем $f(a)$ и $f(b)$. Однако $f(a)$ и $f(b)$ лучше $f(c)$ лишь только по одному из двух скалярных критериев. По другому критерию имеет место равенство ($0 = 0$). Все три варианта оптимальны по Слейтеру. Поэтому оптимальность по Слейтеру иногда и называют *слабой оптимальностью*.

В рассмотренном примере было всего три варианта решений, а целевая вектор-функция состояла из двух скалярных функций. А если число вариантов составляет несколько тысяч, а скалярных критериев несколько десятков или сотен? В этом случае задачу все равно можно решить методом простого перебора. Однако резко сократить объем вычислений позволяет идея *направленного перебора*, которая изложена ниже.

Рассмотрим идею метода в общем виде, параллельно иллюстрируя ее на примере.

Пример 2.2. Необходимо принять решение о производстве нового автомобильного двигателя. Представлено 9 различных вариантов. Основные характеристики каждого варианта эксперты оценили по 10-балльной шкале (чем больше балл, тем лучше данная характеристика). Результаты оценки сведены в таблицу.

Характеристики	Варианты двигателей								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Мощность	9	8	9	8	7	8	8	9	7
Экономичность	7	8	8	7	10	8	6	6	7
Надежность	6	5	6	6	9	4	5	10	4
Простота изготовления	6	5	6	5	6	4	4	8	4
Себестоимость	8	8	8	6	7	5	7	9	7
Экологическая чистота	2	7	2	2	5	5	1	7	2

Требуется найти оптимальные по Парето и Слейтеру варианты. Итак, имеется шесть скалярных критериев (характеристики двигателей) и девять возможных вариантов, т. е. множество X состоит из девяти элементов. Каждому элементу множества X (варианту двигателя) соответствует 6-мерный вектор значений критерия – столбец таблицы.

В общем виде будем предполагать, что имеется k различных вариантов и m скалярных критериев, а множество оценок Y состоит из m -мерных векторов: $Y = \{y^1, y^2, \dots, y^k\}$ (в рассматриваемом примере $k = 9, m = 6$).

Шаг 1. Обозначим $Y^1 = Y$ и будем постепенно уменьшать число элементов множества оценок. Идея метода очень проста. Первый элемент множества сравнивается по бинарному отношению со всеми другими элементами. Будем искать сначала оптимальные по Парето оценки, т. е. в качестве бинарного отношения выберем $\geq$. В конце шага первый элемент удаляется из новой таблицы в *любом случае*. При этом, если не найдется никакого другого элемента, который лучше первого в смысле рассматриваемого бинарного отношения, то первый элемент не просто удаляется, а запоминается как одна из оптимальных по Парето оценок. В противном случае первый элемент просто удаляется. Если первый элемент лучше какого-либо другого элемента таблицы, то этот другой элемент заведомо не может быть оптимальным, и он тоже удаляется.

В нашем примере $Y^1 = Y = \{y^I, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, y^V, y^{VI}, y^{VII}, y^{VIII}, y^{IX}\}$. Первый элемент не сравним со вторым ($9 > 8$, но $7 < 8$), хуже третьего, лучше четвертого, не сравним с пятым и шестым, лучше седьмого, не сравним с восьмым и лучше девятого. Итак, в новой таблице не будет первого элемента (первый элемент удаляется всегда). При этом первый элемент не может быть оптимальным по Парето, так как он хуже третьего. Удаляются также все элементы, которые хуже первого, т. е. четвертый, седьмой и девятый. Поэтому новая таблица будет по сравнению с исходной содержать сразу на 4 столбца меньше.

Характеристики	Варианты двигателей				
	II	III	V	VI	VIII
Мощность	8	9	7	8	9
Экономичность	8	8	10	8	6
Надежность	5	6	9	4	10
Простота изготовления	5	6	6	4	8
Себестоимость	8	8	7	5	9
Экологическая чистота	7	2	5	5	7

Шаг 2. Рассматривается новое множество оценок, состоящее из меньшего числа элементов. В нашем примере $Y^2 = \{y^{II}, y^{III}, y^V, y^{VI}, y^{VIII}\}$. По той же схеме первый элемент уже нового множества (т. е. y^{II}) сравнивается со всеми остальными. Сохраним названия элементов. Столбец с номером II не сравним со столбцами III, V и VIII, но лучше столбца VI. Столбец II вычеркнем из таблицы. Но поскольку на данном шаге не нашлось ни одного столбца, который лучше этого столбца II, то данный столбец не просто вычеркивается, а заносится во множество оптимальных по Парето оценок. Столбец VI, как мы поняли, хуже столбца II, т. е. эта оценка заведомо не может быть оптимальной, и столбец VI просто вычеркивается. Получаем новую таблицу, уменьшенную еще на 2 столбца.

Характеристики	Варианты двигателей		
	III	V	VIII
Мощность	9	7	9
Экономичность	8	10	6
Надежность	6	9	10
Простота изготовления	6	6	8
Себестоимость	8	7	9
Экологическая чистота	2	5	7

Шаг 3. Новое множество оценок $Y^3 = \{y^{III}, y^V, y^{VIII}\}$. Перейдем к сравнению оценки y^{III} со всеми оставшимися. Вектор-столбец y^{III} не сравним с векторами y^V и y^{VIII} . Удаляем оценку y^{III} , внося ее во множество оптимальных оценок. Новая таблица будет содержать всего 2 столбца.

Характеристики	Варианты двигателей	
	V	VIII
Мощность	7	9
Экономичность	10	6
Надежность	9	10
Простота изготовления	6	8
Себестоимость	7	9
Экологическая чистота	5	7

Шаг 4. $Y^4 = \{y^V, y^{VIII}\}$. Вектор-столбец y^V не сравним с y^{VIII} . Удалим этот столбец, внося его во множество оптимальных оценок. В последней таблице останется только один столбец. Его тоже внесем в итоговое множество оптимальных оценок.

Окончательно имеем следующий ответ. Множество парето-оптимальных оценок состоит из четырех элементов: $P(Y) = \{y^{\text{II}}, y^{\text{III}}, y^{\text{V}}, y^{\text{VIII}}\}$. Соответственно, парето-оптимальными решениями будут второй, третий, пятый и восьмой варианты двигателей.

Итак, в нашей задаче получено 4 оптимальных по Парето варианта. Какой из них предпочесть? Ответить на этот вопрос без дополнительных данных невозможно. С точки зрения оптимальности по Парето все критерии равноправны. Мы просто отсеяли заведомо худшие варианты. В том случае, если критерии каким-то образом ранжированы по важности (например, мощность важнее себестоимости или экология важнее простоты изготовления), можно пойти дальше. Некоторые подходы к решению многокритериальных задач при наличии упорядоченности по важности скалярных критериев рассмотрены в следующей главе.

Вопросы и задания

2.1. Докажите, что в случае вырождения задачи векторной оптимизации (1.2) в классическую задачу скалярной оптимизации ($m = 1$) определение оптимальности по Парето и Слейтеру совпадают с обычным определением глобального максимума.

2.2. Докажите, что $x^* \in X$ является оптимальным по Слейтеру решением в задаче (1.2) в том и только том случае, когда для любого $x \in X$ существует хотя бы один индекс $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, такой, что выполняется неравенство $f_i(x^*) \geq f_i(x)$.

2.3. Приведите примеры задач многокритериальной оптимизации, в которых множества оптимальных по Парето и Слейтеру оценок совпадают.

2.4. Докажите, что любые две оптимальные по Парето оценки являются несравнимыми по отношению $\geq$, а любые две оптимальные по Слейтеру оценки являются несравнимыми по отношению $>$.

2.5. Докажите, что функция

$$\varphi(y) = \prod_{i=1}^m y_i^{\mu_i},$$

где μ_i — некоторые фиксированные положительные числа, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, является монотонно возрастающей по отношению $\geq$ функцией векторного аргумента y на множестве $\{y \in R^m: y_i > 0, i = 1, 2, \dots, m\}$.

2.6. Докажите, что функция $\varphi(y)$, рассмотренная в задании 2.5, является монотонно возрастающей по отношению $\geq$ функцией векторного аргу-

мента y на множестве $\{y \in R^m: y_i > 0, i = 1, 2, \dots, m\}$, если μ_i – фиксированные неотрицательные числа, хотя бы одно из которых строго положительно, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

2.7. Докажите, что используемая в теореме 2.5 функция $\varphi(y) = \min_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i y_i$ непрерывна по y для всех значений $y \in R^m$.

2.8. В примере 2.2 § 2.3 найдите множества оптимальных по Слейтеру оценок и решений.

2.9. Пусть a – количество букв в вашем имени, b – количество букв в вашей фамилии. Даны два вектора $q, s \in R^4$:

$q = (a + b, a - b, a + 2b, 2), s = (a + 2b - 5, b - a + 1, 2a - b, 10 - a)$. Выясните, находятся ли данные вектора в бинарных отношениях $>, \geq, \leq$. Ответ необходимо обосновать.

2.10. Пусть a – количество букв в вашем имени, b – количество букв в вашей фамилии. Дан вектор $q = (a + b - 4, a - b)$. Постройте на координатной плоскости множество векторов, находящихся с данным вектором в бинарных отношениях $>$ и $\geq$.

2.11. Для всех вариантов задания 1.6 гл. 1 найдите множества оптимальных по Парето и Слейтеру оценок и решений.

2.12. К условиям нижеприведенного примера следует относиться как к исключительно шуточной иллюстративной задаче.

Осуществляется подбор жениха/невесты. В таблице приведены качества возможных восьми кандидатов и оценки этих качеств в баллах (больше – лучше). Баллы могут быть и отрицательными.

- Отсеять заведомо негодных кандидатов, найдя парето-оптимальные решения.

- Отсеять заведомо негодных кандидатов, найдя оптимальные по Слейтеру решения.

Для каждого из заданий ответ дать в виде соответствующего множества, например $P(Y) = \{IV, VII\}$.

Качества кандидатов	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Красота	a	$a + b$	$a - b$	4	$b - a$	$2a$	18	18
Ум	7	9	6	a	$a + 1$	$b - 1$	$a - 2$	9
Богатство	10	0	$a - 6$	$a + b$	b	$a - 1$	1	6
Юмор	8	$a + 4$	6	$a + 1$	a	5	a	$a + 4$
Возраст	8	9	a	1	2	10	$a + b$	10
Карьерные перспективы	5	1	a	2	b	6	$a - 2$	a

Здесь a – число букв в вашем имени, b – число букв в вашей фамилии.

2.13. Завод реализует муку через сеть магазинов и через прямые поставки неторговым организациям. Известно, что ежемесячно магазины могут реализовать не более 50 тыс. т муки, а ежемесячные поставки торговым базам не должны превышать 35 тыс. т. Для продажи в каждом месяце выделяется не более 45 тыс. т муки. При продаже одной тонны муки через магазины расходы на реализацию составляют 70 тыс. руб., а цена – 100 тыс. руб.; при втором способе реализации расходы и цена составляют 50 и 80 тыс. руб. соответственно. Решается задача минимизации затрат и максимизации прибыли. Найти множества всех парето-оптимальных оценок и решений.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ПРИМЕНЯЕМЫМ КРИТЕРИЯМ

3.1. Лексикографическая задача оптимизации

При постановке многокритериальной задачи (1.2) все скалярные критерии, образующие вектор-функцию f , считались равноправными. Поиск парето-оптимальных или оптимальных по Слейтеру оценок и решений во многих задачах приводит к наборам возможных вариантов, причем соответствующие множества могут содержать бесчисленное число элементов. В реальной жизни обычно приходится выбирать лишь один из возможных вариантов. Для этого необходима дополнительная информация о рассматриваемой задаче. В частности, сужение множеств оптимальных по Парето или Слейтеру оценок и решений возможно в случае ранжирования скалярных критериев по важности. Сама процедура ранжирования является достаточно сложной проблемой, которая с трудом поддается строгой математической формализации. Если же такое ранжирование уже осуществлено, то существуют весьма эффективные методы исследования соответствующих задач векторной оптимизации.

Наиболее жестким является ранжирование, основанное на так называемом лексикографическом бинарном отношении.

Определение 3.1. Пусть в многокритериальной задаче элементы a и b принадлежат множеству оценок: $a, b \in Y \subset R^m$. Говорят, что оценка a *лексикографически больше* оценки b ($a >_{\text{lex}} b$), если выполнено одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} a_1 &> b_1; \\ a_1 &= b_1, a_2 > b_2; \\ a_1 &= b_1, a_2 = b_2, a_3 > b_3; \\ &\dots \\ a_1 &= b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{m-1} = b_{m-1}, a_m > b_m. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Таким образом, предполагается, что критерии ранжированы по важности, причем первый критерий настолько важен для лица, принимающего решение, что из двух оценок всегда предпочтительнее

та, у которой больше значение по первому критерию. Лишь в случае равенства значений первого критерия рассматривается второй критерий и т. д.

На рис. 3.1 для случая $m = 2$ изображено множество точек a , таких что $a >_{\text{lex}} b$. Правая полуплоскость, отмеченная красной штриховкой, определяется неравенством $a_1 > b_1$. Лишь при $a_1 = b_1$ начинается анализ второго критерия. Множество точек, удовлетворяющих условиям $a_1 = b_1, a_2 > b_2$, – это вертикальный луч с началом в точке b (сама точка b не входит во множество).

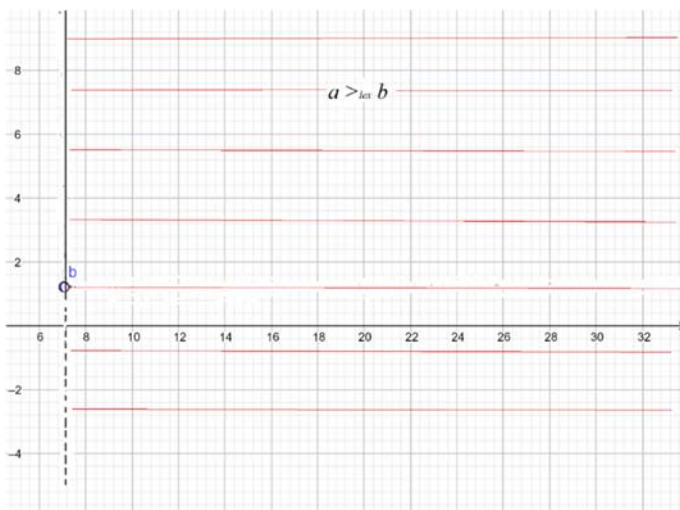


Рис. 3.1. Иллюстрация отношения $a >_{\text{lex}} b$

Само слово «лексикография» возникло из двух древнегреческих слов: $\lambda\epsilon\chi\iota\kappa\acute{o}\nu$ [lexikon] – «словарь» и $\gamma\rho\alpha\phi\acute{o}$ [grapho] – «пишу». Оно обозначает раздел языкознания, занимающийся вопросами составления словарей. Вспомним, что слова в словарях размещаются по алфавиту. Допустим, речь идет о русском алфавите. Словарь начинается с буквы «а». Если два слова начинаются с этой буквы, то порядок размещения слов определяется второй буквой. Например, слово «АКСИОМА» предшествует слову «АЛГЕБРА». В случае совпадения первых двух букв решение о порядке слов в словаре принимается по третьей букве и т.д. Можно сказать, что СЛОВО 1 предшествует СЛОВУ 2, если выполнено одно из следующих условий:

- первая буква СЛОВА 1 в рассматриваемом алфавите размещена раньше первой буквы СЛОВА 2;
- первые m букв этих слов совпадают, а $(m + 1)$ -я буква СЛОВА 1 в рассматриваемом алфавите размещена раньше $(m + 1)$ -й буквы СЛОВА 2;
- СЛОВО 1 является началом СЛОВА 2 (например, слово «МАТЕМАТИК» будет размещено раньше слова «МАТЕМАТИКА»).

Если считать, что m может быть равно нулю, то первое условие можно исключить. В случае векторной оптимизации аналога третьему условию нет, так как предполагается, что все сравниваемые между собой векторные критерии имеют одинаковую размерность.

Докажем ряд свойств данного отношения.

Свойство 3.1. Отношение «лексикографически больше» иррефлексивно, асимметрично и транзитивно.

Доказательство. Пусть элементы a, b и c принадлежат множеству оценок многокритериальной задачи: $a, b, c \in Y \subset R^m$. Ограничимся только доказательством иррефлексивности и транзитивности, так как в силу утверждения 2.2 из выполнения этих свойств автоматически следует асимметричность.

а) *Иррефлексивность.* Элемент не может находиться в отношении «лексикографически больше» сам с собой, так как в случае векторного равенства $a = b$ не выполнено ни одно из условий (3.1).

б) *Транзитивность.* Пусть $a >_{\text{lex}} b$ и $b >_{\text{lex}} c$. Докажем, что $a >_{\text{lex}} c$. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих неравенств:

$$a_1 > b_1, b_1 > c_1.$$

Даже если строгое неравенство выполнено только для одной пары компонент, то для другой пары (в силу $a >_{\text{lex}} b$ и $b >_{\text{lex}} c$) обязательно выполняется равенство. Это означает, что $a_1 > c_1$, т. е. $a >_{\text{lex}} c$.

В противном случае найдутся индексы $k, l \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$, для которых справедливы цепочки равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k, a_{k+1} > b_{k+1}; \\ b_1 &= c_1, b_2 = c_2, \dots, b_l = c_l, b_{l+1} > c_{l+1}. \end{aligned}$$

Обозначим через r наименьшее из чисел k и l (конечно, не исключен и вариант равенства этих чисел; в этом случае $r = k = l$). Тогда

$$a_1 = c_1, a_2 = c_2, \dots, a_r = c_r, a_{r+1} > b_{r+1}.$$

А это и означает, что $a >_{\text{lex}} c$. Свойство доказано.

Данное свойство позволяет использовать для определения оптимальности по отношению «лексикографически больше» введенное ранее общее определение оптимальности по бинарному отношению.

Определение 3.2. Оценка $y^* \in Y$ называется *оптимальной по отношению $>_{\text{lex}}$* («лексикографически больше») в задаче (1.2), если не существует ни одной оценки $y \in Y$, находящейся с y^* в данном отношении, т. е. ни для каких $y \in Y$ не выполнено $y >_{\text{lex}} y^*$.

В дальнейшем множество оптимальных в лексикографическом смысле оценок будем обозначать $\text{Opt}_{\text{lex}}(Y)$.

Свойство 3.2. Пусть $a, b \in Y \subset R^m$. Если $a \geq b$, то $a >_{\text{lex}} b$.

Действительно, если $a \geq b$, то $a_i \geq b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$, причем хотя бы для одной из компонент неравенство является строгим. А это и означает, что выполнено одно из условий (3.1).

Свойство 3.3. Любая оценка, оптимальная в лексикографическом смысле, оптимальна и по Парето (а следовательно, и по Слейтеру).

Действительно, пусть оценка y^* оптимальна в лексикографическом смысле, но не является оптимальной по Парето. Это означает, что найдется хотя бы одна оценка $z \in Y$, для которой выполнено $z \geq y^*$. Поэтому в силу предыдущего свойства $z >_{\text{lex}} y^*$. А это означает, что оценка y^* не удовлетворяет определению 3.2, т. е. не является оптимальной в лексикографическом смысле. Полученное противоречие и доказывает свойство.

Свойство 3.4. Для любых двух оценок $a, b \in Y \subset R^m$ выполнено только одно из следующих трех отношений:

- $a >_{\text{lex}} b$,
- $b >_{\text{lex}} a$,
- $a = b$.

Доказательство осуществляется покомпонентным сравнением координат векторов a и b :

Шаг 1. Если $a_1 > b_1$, то $a >_{\text{lex}} b$; если $b_1 > a_1$, то $b >_{\text{lex}} a$; если $a_1 = b_1$, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. Если $a_2 > b_2$, то $a >_{\text{lex}} b$; если $b_2 > a_2$, то $b >_{\text{lex}} a$; если $a_2 = b_2$, то переходим к шагу 3.

...

На последнем шаге (если до него дойдет дело) имеем следующие варианты:

Шаг m . Если $a_m > b_m$, то $a >_{\text{lex}} b$; если $b_m > a_m$, то $b >_{\text{lex}} a$; если $a_m = b_m$, то, учитывая все предыдущие шаги, можно сделать вывод, что $a = b$.

Свойство 3.5. Множество лексикографически оптимальных оценок, если оно не пусто, может состоять только из одного элемента.

Доказательство непосредственно следует из предыдущего свойства. Действительно, предположим, что множество оптимальных в лексикографическом смысле оценок содержит две разные оценки a и b . Обратимся к свойству 3.4. Случай $a = b$ невозможен, так как мы предположили, что эти оценки различны. Остаются следующие варианты: $a >_{\text{lex}} b$, либо $b >_{\text{lex}} a$. Первый вариант означает, что оценка b не является оптимальной (существует оценка a , которая «лексикографически больше» b). Второй вариант означает, что не является оптимальной оценка a .

Отметим, что доказанное свойство единственности оценок не означает обязательной единственности соответствующих решений из множества ограничений X , так как одной оценке может соответствовать несколько значений аргументов. Также заметим, что оптимальных в лексикографическом смысле оценок может и вообще не существовать.

Пусть y^* – оптимальная в лексикографическом смысле оценка. В силу свойства 3.3 $\{y^*\} = \text{Opt}_{\text{lex}}(Y) \subset P(Y) \subset S(Y)$. Таким образом, переход к лексикографически оптимальным оценкам и решениям можно рассматривать как один из возможных способов сужения множества оптимальных по Парето вариантов.

Из определений 3.1 и 3.2 вытекает алгоритм поиска оптимальных в лексикографическом смысле оценок и решений. Схема алгоритма весьма проста.

Шаг 1. Решается задача на максимум первого скалярного критерия:

$$f_1(x) \rightarrow \max, x \in X. \quad (3.2)$$

Пусть максимум в задаче (3.2) достигается и равен f_1^* (напомним, что максимум мы условились понимать в глобальном смысле). Если множество точек максимума состоит только из одного элемента, то решение задачи прекращается и остальные критерии не рассматриваются. Полученная точка максимума и есть оптимальное по бинарному отношению «лексикографически больше» решение. Естественно, если решения задачи (3.1) нет, то алгоритм также прекращает работу. В этом случае в задаче вообще нет оптимальных по данному отношению решений.

Шаг 2. Осуществляется, если множество точек максимума задачи (3.1) состоит более чем из одного элемента. На данном множестве решается задача максимизации второго критерия:

$$f_2(x) \rightarrow \max, x \in X, f_1(x) = f_1^*. \quad (3.3)$$

По аналогии с шагом 1 реализация алгоритма прекращается, если множество точек глобального максимума задачи (3.3) состоит только из одного элемента или решения этой задачи нет. Пусть решение задачи (3.3) существует и глобальный максимум равен f_2^* и достигается на множестве, состоящем более чем из одного элемента. Переходим к следующему шагу.

Шаг 3. Задача на максимум третьего скалярного критерия решается уже при двух дополнительных ограничениях:

$$f_3(x) \rightarrow \max, x \in X, f_1(x) = f_1^*, f_2(x) = f_2^*.$$

...

Шаг m. Пусть $f_1^*, f_2^*, \dots, f_{m-1}^*$ – глобальные максимумы, полученные на предыдущих шагах. Тогда к лексикографически оптимальному решению задачи приводит следующая задача на максимум:

$$f_m(x) \rightarrow \max, x \in X, f_1(x) = f_1^*, f_2(x) = f_2^*, \dots, f_{m-1}(x) = f_{m-1}^*.$$

Разумеется, до этого шага алгоритм дойдет только в том случае, когда на всех предыдущих шагах решения существуют, а соответствующие глобальные максимумы $f_1^*, f_2^*, \dots, f_{m-1}^*$ достигаются более чем в одной точке множества X .

Свойство 3.6 (обобщенная теорема Вейерштрасса для лексикографической задачи оптимизации). Пусть в задаче многокритериальной оптимизации (1.2) множество ограничений X компактно, а все скалярные функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ непрерывны на X . Тогда множества оптимальных в лексикографическом смысле оценок и решений не пусты.

Доказательство следует из приведенного выше алгоритма. Решение задачи (3.2) существует в силу классической теоремы Вейерштрасса. Из-за непрерывности скалярных функций, образующих векторную целевую функцию, добавление к множеству X ограничений вида $f_i(x) = f_i^*$ сохраняет компактность множества ограничений в задачах, решаемых на последующих шагах. То есть на каждом шаге алгоритма работает классическая теорема Вейерштрасса.

Приведем пример реализации алгоритма для двух линейных скалярных критериев и линейных ограничений. В этом случае максимальное количество шагов рассмотренного выше алгоритма равно лишь 2, но ход решения можно легко проиллюстрировать графически.

Пример 3.1. Решим лексикографическую задачу оптимизации, в которой первый критерий важнее второго:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= -x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 &\leq 6, \quad -x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В этой задаче допустимое множество

$$X = \{x \in R^2: x_1 + x_2 \leq 6, \quad -x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad 2x_1 - x_2 \leq 6, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

На шаге 1 нужно найти максимум первого критерия на этом множестве. Данную задачу линейного программирования легко решить графическим методом. На рис. 3.2 приведены множество ограничений и целевой вектор.

Целевой вектор $c = (1; 1)$ перпендикулярен прямой $x_1 + x_2 \leq 6$. Максимум первого критерия $f_1^* = 6$. Он достигается на отрезке, соединяющем две точки $C(2; 4)$ и $E(4; 2)$. В силу линейности целевой функции и выпуклости множества X максимум является глобальным.

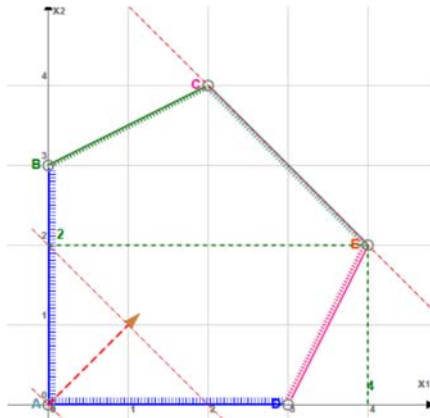


Рис. 3.2. Шаг 1 алгоритма

На шаге 2 нужно решить задачу максимизации второго критерия на множестве X при дополнительном ограничении $f_1(x) = 6(x_1 + x_2) = 6$, т. е. как раз на отрезке, соединяющем точки $C(2; 4)$ и $E(4; 2)$. Множеством ограничений в данной задаче будет множество точек $\{(4 - 2\alpha; 2\alpha + 2), \alpha \in [0; 1]\}$. Решение будет достигаться в точке $C(2; 4)$, т. е. при $\alpha = 1$. Значение второго критерия в этой точке равно 2.

Ответ. Множество оптимальных в лексикографическом смысле оценок $\text{Opt}_{\text{lex}}(Y) = \{(6; 2)\}$. Множество оптимальных в лексикографическом смысле решений состоит из единственной точки $\{(2; 4)\}$.

Проиллюстрируем также решение рассмотренного выше примера в пространстве оценок. Обозначим

$$y_1 = x_1 + x_2, y_2 = -x_1 + x_2.$$

Тогда

$$x_1 = (y_1 - y_2)/2, \quad (3.5)$$

$$x_2 = (y_1 + y_2)/2.$$

Подставляя эти выражения в ограничения задачи (3.4), получим систему из пяти неравенств, определяющих множество оценок Y :

$$\begin{aligned} y_1 &\leq 6, \\ y_1 + 3y_2 &\leq 12, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 - 3y_2 &\leq 12, \\y_1 - y_2 &\geq 0, \\y_1 + y_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

На рис. 3.3 изображено данное множество.

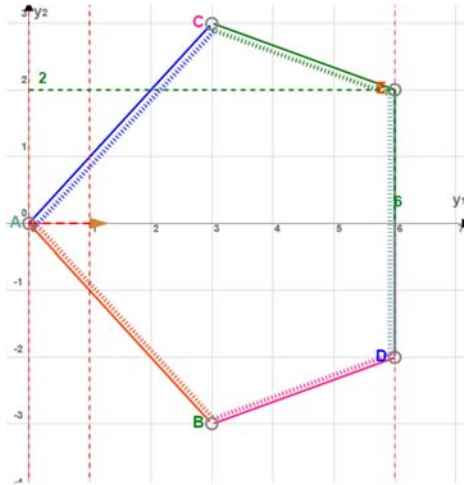


Рис. 3.3. Множество оценок в примере 3.1

На первом шаге алгоритма нужно найти оценки с максимальной абсциссой (максимальным значением по первому критерию y_1). Этим оценкам будет соответствовать отрезок $[D; E]$. На втором шаге среди точек данного отрезка найдем точку с максимальной ординатой (максимальное значение по второму критерию y_2). Это и будет лексикографически оптимальная оценка (6; 2). Для восстановления лексикографически оптимальных решений (независимых переменных, соответствующих найденной оптимальной оценке) нужно воспользоваться формулами (3.5).

Для критериев с конечным числом значений все выглядит весьма наглядно. Предположим, что целевые функции в рассмотренном ранее примере 2.2 уже ранжированы по важности (мощность важнее экономичности и т. д.). Тогда ищем максимальные значения в строке «Мощность».

Характеристики	Варианты двигателей								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Мощность	9	8	9	8	7	8	8	9	7
Экономичность	7	8	8	7	10	8	6	6	7
Надежность	6	5	6	6	9	4	5	10	4
Простота изготовления	6	5	6	5	6	4	4	8	4
Себестоимость	8	8	8	6	7	5	7	9	7
Экологическая чистота	2	7	2	2	5	5	1	7	2

Максимум равен 9 и достигается для первого, третьего и восьмого вариантов двигателей. Для дальнейшего рассмотрения оставим только эти варианты. Перейдем ко второму по важности критерию «Экономичность». Здесь максимум равен 8. Он достигается только для третьего варианта. Это и будет оптимальным по лексикографическому отношению решением. Оптимальной в лексикографическом смысле оценкой является вектор $y^* = (9; 8; 6; 6; 8; 2)$, т. е. третий столбец таблицы.

Сделаем заключительные замечания. Конечно, понятие оптимальности по лексикографическому отношению применяется в случае крайней степени ранжирования критериев. Такие случаи встречаются, но достаточно редко.

Одним из примеров может быть критерий отбора сборных в финальную часть чемпионата мира по футболу (хоккею). Например, в финал чемпионата мира по футболу 2022 г. вошли команды, победившие в своих отборочных группах. Команды, занявшие вторые места, ждал дополнительный отбор. Команды, занявшие третьи и последующие места, заведомо не попали в финал. А каким образом определяли команду, занявшую первое место в группе? Здесь имели место чисто лексикографические отношения.

Критерий 1. По очкам. В ходе встреч между собой команды отборочной группы могли сыграть либо вничью (тогда каждой команде присуждается по 1 очку), либо одна команда могла проиграть (0 очков), а другая выиграть (3 очка). Если наибольшее число очков набрала только одна команда, то она и занимала первое место в группе. Если же несколько команд в группе набирали одинаковое количество максимальных очков, то вступал в силу следующий критерий.

Критерий 2. Разница забитых и пропущенных мячей.

Следующими по важности являлись такие критерии.

Критерий 3. Количество мячей, забитых во всех играх.

Критерии 4–6. Результат игр между собой команд, имеющих равные показатели по предыдущим трем критериям (сначала очки, затем разность мячей, затем количество забитых мячей).

Теоретически возможен случай, что даже после подсчета по всем критериям победителя невозможно определить. На этот вариант предусматривалась жеребьевка.

Подобная система ранжирования применяется для определения победителей конкурсов различного вида, например при решении вопросов о присуждении грантов, премий, приеме абитуриентов в высшие учебные заведения, отборе кандидатов на работу и т. п.

Однако для большинства реальных задач более разумными представляются менее жесткие способы классификации критериев по важности. Один из них рассматривается в следующем параграфе.

3.2. Метод последовательных уступок

Для начала вернемся к рассмотренному в предыдущем параграфе примеру с выбором двигателей. Оптимальным в лексикографическом смысле являлся вариант III с мощностью в 9 баллов по 10-балльной шкале и экономичностью в 8 баллов. Однако, например, вариант V имеет мощность 7, но зато максимальную экономичность 10. Вопрос состоит в том, на какую именно уступку по мощности готово пойти лицо, принимающее решение, в угоду достижения максимальной экономичности. Можно привести и более яркий пример. Для простоты предположим, что выбор осуществляется всего между двумя вариантами.

Характеристики	Варианты двигателей	
	<i>a</i>	<i>b</i>
Мощность	9,5	9,4
Экономичность	4	10
Надежность	2	10
Простота изготовления	3	10
Себестоимость	1	10
Экологическая чистота	1	10

Предполагаем, что шесть скалярных критериев, характеризующих мощность, экономичность, надежность, простоту изготовления, себестоимость и экологическую чистоту, ранжированы по мере уменьшения важности данных критериев. Допустимое множество

содержит всего два элемента, т. е. $X = \{a, b\}$. Исходя из данных таблицы, разумно выбрать, конечно же, вариант b . Ведь по сравнению с вариантом a потеря по первому критерию составляет 0,1, т. е. всего 1 %. По всем оставшимся критериям второй вариант значительно (в несколько раз) лучше первого. Однако лексикографический подход рекомендует вариант a , поскольку формально по первому критерию для этого варианта достигается наибольшее значение. Понятно, что разумно *уступить* 1 % мощности, получив громадный выигрыш по всем другим показателям.

Перейдем к формальному изложению метода.

Продолжаем рассматривать задачу многокритериальной оптимизации (1.2), считая, что векторный критерий f состоит из m скалярных критериев, ранжированных по важности. Однако в методе последовательных уступок заложено не столь жесткое отношение предпочтений между скалярными критериями по сравнению с лексикографическим подходом. Идея метода последовательных уступок заключается в следующем. Предполагаем, как и ранее, что скалярные критерии ранжированы по важности: первый критерий важнее второго, второй важнее третьего и т. д. Однако по каждому критерию допускается некоторая уступка $\Delta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m-1$, на которую готово пойти лицо, принимающее решение, в сторону уменьшения значения критерия по сравнению с максимальным значением на соответствующем этапе (шаге).

Шаг 1. Этот шаг полностью совпадает с шагом 1 алгоритма решения задачи лексикографической оптимизации. На множестве ограничений X решается задача (3.2) скалярной максимизации первого критерия. Пусть глобальный максимум в этой задаче достигается и равен f_1^* . Предположим, что $\Delta_1 \geq 0$ – заданная уступка для первого критерия. Обозначим через X_0 исходное множество X , т. е. $X_0 = X$.

Шаг 2. Решается задача на максимум второго скалярного критерия, но не на множестве точек максимума первого критерия (как это осуществлялось при поиске лексикографически оптимального решения), а с учетом уступки Δ_1 :

$$f_2(x) \rightarrow \max, \quad x \in X, \quad f_1(x) \geq f_1^* - \Delta_1.$$

Эту же задачу можно записать в следующем виде:

$$f_2(x) \rightarrow \max, \quad x \in X_1, \quad \text{где } X_1 = \{x \in X_0 : f_1(x) \geq f_1^* - \Delta_1\}.$$

Пусть f_2^* – глобальный максимум в данной задаче.

Произвольный k -й шаг метода последовательных уступок, $k \geq 2$, можно записать в следующем виде.

Шаг k

$$f_k(x) \rightarrow \max, \quad x \in X_{k-1},$$

где

$$X_{k-1} = \{x \in X_{k-2}: f_{k-1}(x) \geq f_{k-1}^* - \Delta_{k-1}\}.$$

Предполагаем, что f_i^* – глобальный максимум, полученный на i -м шаге, а числа $\Delta_i \geq 0$ – заданная уступка для i -го критерия.

На последнем шаге решается следующая задача.

Шаг m

$$f_m(x) \rightarrow \max, \quad x \in X_{m-1},$$

где

$$X_{m-1} = \{x \in X_{m-2}: f_{m-1}(x) \geq f_{m-1}^* - \Delta_{m-1}\}.$$

Эта задача и приведет к оптимальным в смысле метода последовательных уступок оценке и решению.

Рисунок 3.4 иллюстрирует решение методом последовательных уступок двухкритериальной задачи (для трех скалярных критериев пришлось бы рисовать в трехмерном пространстве). Точка B – оптимальная в лексикографическом смысле оценка. За счет уступки Δ_1 для первого критерия удастся добиться значительного улучшения второго критерия (ордината точки A значительно больше ординаты точки B). Заметим также, что в этом примере уменьшение значения первого критерия в найденной точке A составило не максимально допустимую величину Δ_1 , а несколько меньшее значение.

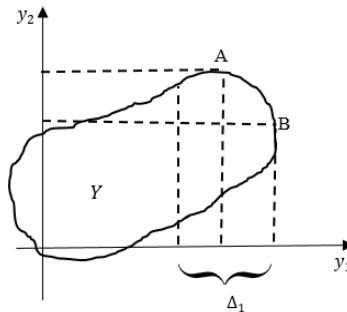


Рис. 3.4. Иллюстрация метода последовательных уступок

Разумеется, возможны и другие варианты. Рисунок 3.5 иллюстрирует случай, когда оптимальная в лексикографическом смысле оценка и оптимальная оценка, полученная методом последовательных уступок, совпадают.

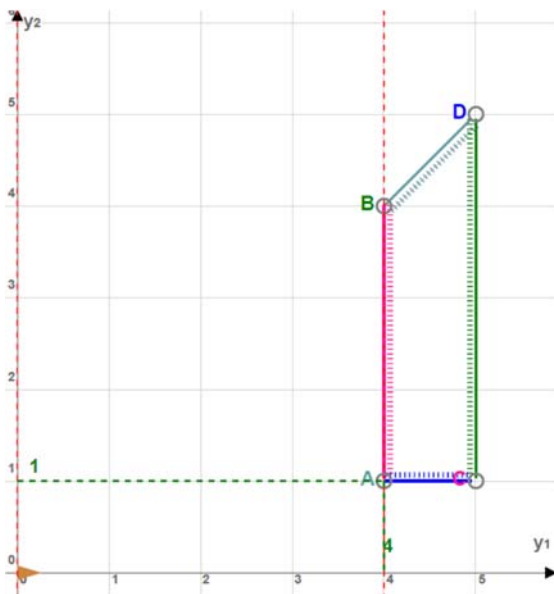


Рис. 3.5. Совпадение оценок, полученных разными методами

Множество оценок имеет вид трапеции. Решение задачи на шаге 1 дает глобальный максимум 5 (оценки, расположенные на отрезке $[C, D]$). Лексикографически оптимальная оценка – это точка $D(5; 5)$. Эта же оценка останется и оптимальной в смысле метода последовательных уступок при любой положительной уступке Δ_1 .

Очевидно, что метод последовательных уступок можно рассматривать как обобщение рассмотренного в предыдущем параграфе метода лексикографической оптимизации. Если все уступки равны нулю, т. е. $\Delta_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m - 1$, то метод последовательных уступок генерирует лексикографически оптимальную оценку.

Остается понять, как соотносится оптимальность в смысле метода последовательных уступок с оптимальностью в смысле Парето

и Слейтера. В предыдущем параграфе доказано, что любая лексикографическая оценка (решение) является очень сильной. Она заведомо оптимальна по Парето, а значит, и по Слейтеру (свойство 3.3). Можно ожидать, что метод последовательных уступок порождает более слабые оценки. Без дополнительных предположений можно гарантировать только оптимальность по Слейтеру.

Теорема 3.1. Для любого набора уступок $\Delta_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m-1$ оптимальная в смысле метода последовательных уступок оценка (решение) является оптимальной по Слейтеру.

Доказательство удобно провести в терминах решений (независимых переменных). Пусть в задаче (1.2) решение $\bar{x} \in X$ является оптимальным в смысле метода последовательных уступок при некотором наборе неотрицательных уступок $\Delta_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m-1$. Это означает, что $\bar{x}$ есть точка глобального максимума в задаче, решаемой на последнем шаге (шаге m) метода последовательных уступок. Данную задачу можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_m(x) &\rightarrow \max, \\ x \in V &= \{x \in X: f_1(x) \geq f_1^* - \Delta_1, \\ &f_2(x) \geq f_2^* - \Delta_2, \\ &f_3(x) \geq f_3^* - \Delta_3, \\ &\dots \\ &f_{m-1}(x) \geq f_{m-1}^* - \Delta_{m-1}\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь $f_1^*, f_2^*, \dots, f_{m-1}^*$ – глобальные максимумы в задачах, решаемых на соответствующих шагах метода последовательных уступок. Предположим противное, т. е. решение $\bar{x}$ не является оптимальным по Слейтеру. Это означает, что существует точка $z \in X$, для которой выполняются одновременно m неравенств:

$$f_i(z) > f_i(\bar{x}), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.7)$$

Точка $\bar{x}$ принадлежит множеству ограничений V задачи (3.6). Следовательно, для нее выполнены $m-1$ неравенств

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i^* - \Delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Усиливая эти неравенства с помощью первых $m-1$ неравенств из (3.7), получим

$$f_i(z) > f_i^* - \Delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m - 1.$$

А это означает, что точка z принадлежит множеству V . Воспользуемся последним из неравенств (3.7): $f_m(z) > f_m(\bar{x})$. Итак, мы получили, что точка z удовлетворяет всем ограничениям задачи (3.6), но значение целевой функции $f_m(x)$ в этой точке больше, чем в точке глобального максимума $\bar{x}$. То есть $\bar{x}$ не является точкой глобального максимума для задачи (3.6). Полученное противоречие и доказывает теорему.

Простейший пример иллюстрирует, что найденные методом последовательных уступок точки не обязательно оптимальны по Парето. На рис. 3.6 изображено множество оценок в двухкритериальной задаче. Лексикографически оптимальной является оценка $(6; 0)$. Меняя значения уступки Δ_1 от 0 до 2, мы видим, что оптимальные в смысле метода последовательных уступок оценки будут располагаться на отрезке $[C, D]$. Все эти оценки оптимальны по Парето. Положим теперь $\Delta_1 = 4$. Метод последовательных уступок даст нам целый отрезок $[B, C]$. При этом точки полуинтервала $[B, C)$ будут оптимальны по Слейтеру, но не по Парето. Однако одна из точек, найденных методом последовательных уступок (точка C), оптимальна по Парето. Это не случайно.

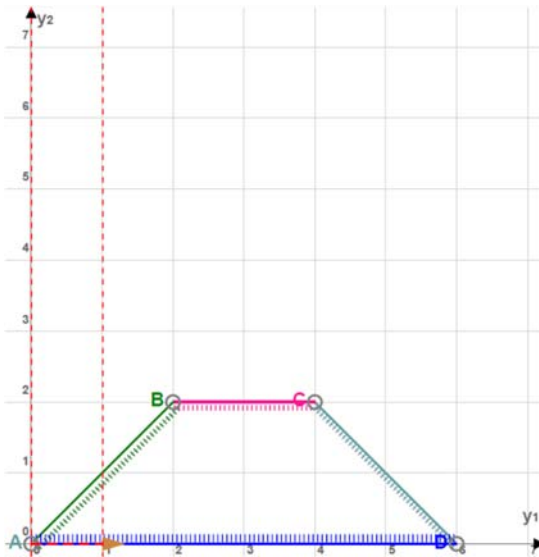


Рис. 3.6. Метод последовательных уступок и оптимальность по Парето

Приведем без доказательства соответствующую теорему³.

Теорема 3.2. Если в задаче (1.2) множество ограничений X компактно, а все скалярные функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ непрерывны на множестве X , то при любом наборе уступок $\Delta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m - 1$, среди найденных методом последовательных уступок решений имеется оптимальное по Парето.

Из данной теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия теоремы 3.2 и при некотором наборе уступок $\Delta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m - 1$, методом последовательных уступок найдена оптимальная оценка. Если эта оценка единственна, то она оптимальна по Парето.

Вопросы и задания

3.1. Пусть множество оценок в многокритериальной задаче состоит из конечного числа элементов. Докажите, что лексикографически оптимальная оценка в этом случае существует и единственна.

3.2. В многокритериальной задаче найти оценки и решения, оптимальные в лексикографическом смысле (первый критерий считать важнее второго).

а) $f_1(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
 $f_2(x) = -2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
 $x_1 + x_2 \leq 10,$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 18,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

б) $f_1(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
 $f_2(x) = -2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$
 $x_1 + x_2 \leq 10,$
 $3x_1 + 2x_2 \geq 18,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

в) $f_1(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \max,$
 $f_2(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 18,$
 $x_1 - x_2 \geq -6,$
 $3x_1 - x_2 \leq 27.$

г) $f_1(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
 $f_2(x) = x_1 - 4x_2 \rightarrow \max,$
 $x_1 + x_2 < 1,$
 $x_1 + x_2 \leq 12,$
 $x_1 \leq 4,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Примечание. Неравенство в первом ограничении является строгим.

³ Подиновский В. В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: учеб. пособие для вузов. М. : Физматлит, 2007. 64 с.

$$\begin{aligned} \text{д) } f_1(x) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= x_1 - 4x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 &\leq 1, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1 &\leq 4, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{е) } f_1(x) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1, \\ x_1 + x_2 &\leq 12, \\ x_1 - x_2 &\leq 4, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ж) } f_1(x) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= x_1 - 4x_2 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + x_2 &\geq 1, \\ x_1 + x_2 &\leq 12, \\ x_1 &\leq 4, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{з) } f_1(x) &= x_1 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= -x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10, \\ x_1 &\leq 4, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

3.3. Дан вектор $q = (a - 2, b - 4)$, a – количество букв в вашем имени, b – количество букв в вашей фамилии. Построить на координатной плоскости множество векторов, находящихся с данным вектором в отношении $>_{\text{lex}}$.

3.4. Проведена оценка эффективности деятельности 9 научных работников по 4 показателям. Оценки выставлены по 10-балльной шкале (чем больше, тем лучше). Считая, что критерии ранжированы по важности (первый важнее второго, второй важнее третьего, третий важнее четвертого), найти наилучших работников, воспользовавшись:

а) лексикографическим подходом;

б) методом последовательных уступок (принять $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 2$).

Характеристики	Научные работники								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Публикации в журналах, индексируемых Scopus	10	8	10	8	9	10	8	9	10
Публикации в журналах, индексируемых РИНЦ	7	9	8	7	10	8	6	6	8
Внебюджетное финансирование (гранты, хоздоговоры)	6	5	6	6	9	6	5	10	6
Подготовка молодых кадров (работа с аспирантами и магистрантами)	6	5	6	5	6	4	4	8	3

3.5. Выполнить задание 3.2 методом последовательных уступок, считая первый критерий важнее второго, а уступку $\Delta_1 = 2$.

3.6. Проанализируйте правила приема абитуриентов в ваш университет на вашу образовательную программу. Можно ли задачу конкурсного отбора абитуриентов сформулировать как лексикографическую задачу оптимизации? Если да, то сделать это. Если нет, то объяснить причины невозможности.

4. МЕТОД ЦЕЛЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1. Понятие о целевом программировании

Достаточно широкий класс методов векторной оптимизации объединяется под названием «методы целевого программирования» (goal programming).

В некотором смысле подход целевого программирования можно считать обобщением метода идеальной точки. Напомним, что идеальной точкой в задаче (1.2) называется следующий вектор в пространстве оценок (значений целевых функций):

$$f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_m^*), \quad f_i^* = \sup_{x \in X} f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Если идеальная точка принадлежит множеству оценок (множеству достижимости) рассматриваемой задачи (на рис. 4.1 множество оценок Y содержит идеальную точку), то она и будет единственной оптимальной оценкой в задаче (1.2). Действительно, при этом существует независимая переменная (переменные) из множества X , для которой значение векторного критерия равно f^* . Этот случай не интересен с точки зрения многокритериальной оптимизации. Гораздо чаще встречается вариант, когда идеальная точка не принадлежит множеству оценок (рис. 4.2).

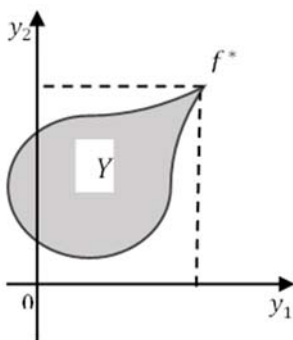


Рис. 4.1. Идеальная точка принадлежит множеству оценок

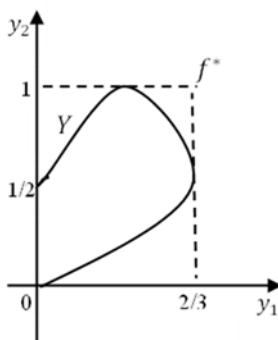


Рис. 4.2. Идеальная точка не принадлежит множеству оценок

В этом варианте идеальная точка $f^* = (\frac{2}{3}, 1)$ не принадлежит множеству оценок Y . В методе идеальной точки предлагается в качестве решения выбрать ближайшую к f^* точку множества оценок, т. е. решить задачу проецирования точки f^* на множество Y . Конечно же, ответ будет зависеть от выбора вида нормы расстояния в евклидовом пространстве R^m .

Подход целевого программирования основан на той же идее – искать оценку, наиболее близкую в смысле определенной функции расстояния к некоторому утопическому (идеальному) множеству пространства R^m . В методе идеальной точки утопическое множество содержит единственный элемент – эту самую идеальную точку. Концепция целевого программирования предполагает ослабление требования максимизации (минимизации) скалярных критериев при построении утопического множества. Вместо максимизации (минимизации) критериев ставится задача оптимального приближения к желаемым значениям критериев (диапазону желаемых значений критериев), которые иногда называют уровнями притязаний лица, принимающего решение. Начнем с примера.

Пример 4.1. Рекламным агентством, в составе которого имеется 10 рекламных агентов, получен контракт на рекламу нового продукта. Реклама может проводиться на радио и телевидении. В таблице приведены данные о количестве людей, охватываемых соответствующим видом рекламы, стоимость рекламы и необходимое количество агентов для соответствующего вида рекламы в расчете на минуту рекламы.

Данные	Радио	TV
Рекламная аудитория (млн чел.)	4	8
Стоимость (тыс. долл.)	8	24
Количество рекламных агентов	1	2

Дополнительно контрактом запрещено использовать более 6 мин рекламы на радио. Целями являются:

- максимизация рекламной аудитории, при этом крайне желательно, чтобы реклама охватила не менее 45 млн чел.;
- минимизация бюджета, при этом крайне желательно не выйти за сумму 100 тыс. долл.

Пусть x_1 – предполагаемое количество рекламного времени на радио (в минутах), а x_2 – предполагаемое количество рекламного времени на телевидении (в минутах). Пока не будем рассматривать не очень понятные пожелания («крайне желательно, чтобы ...») и составим двухкритериальную задачу оптимизации.

Рекламная аудитория (необходимо максимизировать) при покупке рекламного времени, определяемого вектором $x = (x_1, x_2)$, составит $4x_1 + 8x_2$. Стоимость рекламы (необходимо минимизировать) при плане x составит $8x_1 + 24x_2$. Тогда, умножая второй критерий на -1 , приходим к следующей задаче векторной максимизации:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 &\rightarrow \max, \\ -8x_1 - 24x_2 &\rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10, \\ x_1 &\leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

I. Для начала ответим на вопрос: может быть, есть точка, в которой достигаются глобальные максимумы сразу обоих критериев? В терминах оценок это означает, что идеальная точка принадлежит множеству оценок. Построим данное множество. Введем переменные

$$y_1 = 4x_1 + 8x_2, \quad y_2 = -8x_1 - 24x_2.$$

Тогда

$$x_1 = 3/4y_1 + 1/4y_2, \quad x_2 = -1/4y_1 - 1/8y_2.$$

Выразим теперь все ограничения задачи (4.1) через переменные y :

$$\begin{aligned} y_1 &\leq 40, \\ 3y_1 + y_2 &\leq 24, \\ 3y_1 + y_2 &\geq 0, \quad 2y_1 + y_2 \leq 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Построим данное множество (рис. 4.3).

Идеальной точкой является $f^* = (40, 0)$, и она не принадлежит множеству оценок. Ничего удивительного здесь нет. Вспомним, что второй критерий – это затраты на рекламу. Понятно, что затраты будут минимальными, если ничего не покупать. При этом все ограничения выполнены: рекламных агентов вообще не надо, количество минут на радио не превосходит 6 (оно равно нулю), обе переменные x_1 и x_2 неотрицательны (они равны нулю).

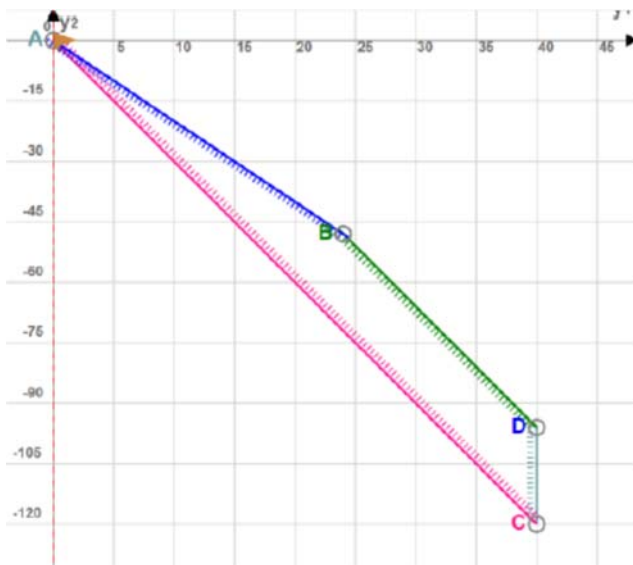


Рис. 4.3. Множество оценок в примере 4.1

II. Теперь уйдем в другую крайность: вообще не будем решать никаких экстремальных задач. В условиях задачи высказаны два пожелания:

- желательно, чтобы реклама охватила не менее 45 млн чел.;
- желательно, чтобы бюджет проекта не превысил 100 тыс. долл.

Оформим эти пожелания в виде ограничений-неравенств и присоединим к ограничениям задачи (4.1). Получим следующую систему неравенств:

$$\begin{aligned}
 4x_1 + 8x_2 &\geq 45, \\
 8x_1 + 24x_2 &\leq 100, \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 10, \\
 x_1 &\leq 6, \\
 x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Имеет ли данная система хотя бы одно решение? Ответ отрицательный. Это видно из графика (рис. 4.4).

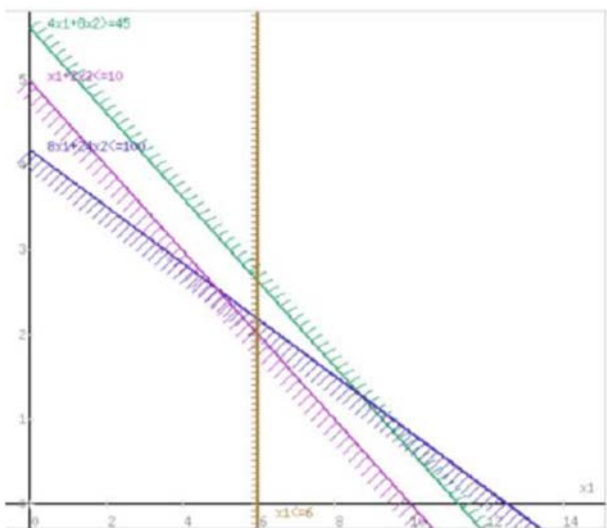


Рис. 4.4. Множество ограничений в примере 4.1

Данный результат также можно проиллюстрировать, перейдя в пространство оценок. Для этого к четырем неравенствам (4.2) добавим еще два, соответствующие обоим «пожеланиям»:

$$\begin{aligned} y_1 &\leq 40, \\ 3y_1 + y_2 &\leq 24, \\ 3y_1 + y_2 &\geq 0, \quad 2y_1 + y_2 \leq 0, \\ y_1 &\geq 45, \quad -y_2 \leq 100. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Соответствующий рисунок приведен ниже (рис. 4.5). Вообще говоря, можно было бы ничего и не рисовать. Понятно, что ограничения $y_1 \leq 40$ и $y_1 \geq 45$ противоречат друг другу.

III. Какие подходы можно рекомендовать в данной ситуации? Тот факт, что нет ни одной точки, в которой достигались бы глобальные максимумы обоих критериев, не удивляет. Это типично именно для многокритериальных задач. Ранее дано описание достаточно широкого арсенала методов, которые можно рекомендовать лицу, принимающему решения. Можно отметить, что в случае, если величина аудитории (критерий 1) значительно важнее бюджета (критерий 2), то в данном примере хорошо работает лексикографический подход –

оптимальная оценка соответствует точке D на рис. 4.3. Однако ранее изученные подходы никак не учитывают «пожелания» (некоторым исключением можно считать свертку, основанную на выделении главного критерия).

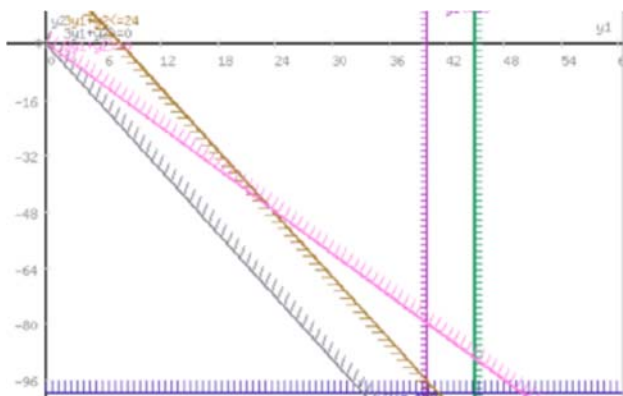


Рис. 4.5. Множество ограничений в пространстве оценок

Перейдем теперь собственно к идее целевого программирования. Высказанные пожелания были оформлены в виде неравенств $y_1 \geq 45$ и $-y_2 \leq 100$. Множество точек, удовлетворяющих этим неравенствам, будем называть *утопическим множеством*. Легко видеть, что в примере 4.1 утопическое множество не имеет общих точек с множеством ограничений задач, определяемым неравенствами (4.2). Кстати, идеальная точка в рассматриваемом примере не принадлежит утопическому множеству. Слишком уж завышенным является пожелание об аудитории (не менее 45 млн чел.). Отметим, что утопическое множество может быть и пустым в силу противоречивости пожеланий.

Далее можно проследить аналогию с методом идеальной точки. Идея подхода заключается в поиске точки из множества оценок, наиболее близко расположенной к утопическому множеству. А что означает «наиболее близко расположенному»? Это означает, что в пространстве оценок вводится некоторая метрика. В целевом программировании наиболее часто применяются простые расстояния, определяемые разностями между правыми и левыми частями ограничений-неравенств.

Каждый из критериев оформляется в виде неравенства, исходя из высказанных пожеланий. Эти неравенства иногда называются *целевыми неравенствами*, так как они порождаются целевыми функциями векторного критерия. Для этого необходимо учесть пожелания (иногда их также называют *притязаниями* лица, принимающего решения). Основными видами притязаний являются следующие:

1. Значение скалярного критерия должно быть не меньше заданного числа a (актуально для исходной задачи на максимум соответствующего скалярного критерия).

2. Значение скалярного критерия должно быть не больше заданного числа b (актуально для исходной задачи на минимум соответствующего скалярного критерия).

3. Значение скалярного критерия должно лежать в заданных пределах, например, принимать значения из отрезка $[a, b]$.

В каждом случае вводится новая неотрицательная независимая переменная, характеризующая величину отклонения. Часто переменные, характеризующие недостижение критерия, обозначают, используя верхний индекс «минус», а превышение критерия – верхний индекс «плюс».

В примере 4.1 это будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + d_1^- &\geq 45, \\ 8x_1 + 24x_2 - d_2^+ &\leq 100. \end{aligned}$$

При этом необходимо учесть условия неотрицательности:

$$d_1^- \geq 0, \quad d_2^+ \geq 0.$$

Если некоторое отклонение равно нулю, то это означает, что соответствующее пожелание (притязание) выполнено полностью. Если отклонение больше нуля (отрицательным оно быть не может), то это означает, что соответствующее притязание не выполнено. При этом величина отклонения характеризует степень невыполнения притязания. Следовательно, исходная многокритериальная задача может быть сведена опять-таки к многокритериальной задаче минимизации отклонений.

В примере 4.1 соответствующая задача выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} d_1^- &\rightarrow \min, \\ d_2^+ &\rightarrow \min, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4x_1 + 8x_2 + d_1^- &\geq 45, \\
8x_1 + 24x_2 - d_2^+ &\leq 100, \\
x_1 + 2x_2 &\leq 10, \\
x_1 &\leq 6, \\
x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\
d_1^- &\geq 0, \quad d_2^+ \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Возникает естественный вопрос: чем новая задача лучше исходной? Три особенности видны сразу:

- а) каждая целевая функция новой задачи содержит всего лишь одну переменную;
- б) все целевые функции линейны;
- в) решив задачу, можно сразу определить, насколько удалось выполнить притязания лица, принимающего решение.

Необходимо отметить, что в случае, когда для некоторого критерия притязания не сформулированы, то этот критерий включается в новую задачу без изменения, т. е. первая особенность справедлива лишь в том случае, когда для каждого критерия сформулированы притязания.

4.2. Общий подход к решению задач целевого программирования

Целевое программирование – это сравнительно молодой раздел оптимизации. Его родоначальниками считаются американцы А. Чарнес (A. Charnes), У. У. Купер (W. W. Cooper)⁴, Р. Фергюсон (R. Ferguson), опубликовавшие в 1955 г. статью⁵. В 1961 г. первые два автора подробно описали данный метод⁶. Уже из названий упомянутых работ видно, что речь идет о линейных многокритериальных задачах, которые так или иначе сводятся к задачам линейного программирования. До сих пор во многих учебных пособиях целевое программирование

⁴ У. У. Купер считается официальным отцом менеджмента (management science). С его биографией можно ознакомиться в Википедии по ссылке: URL: https://en.wikipedia.org/wiki/William_W._Cooper (дата обращения 31.05.2025).

⁵ Charnes A., Cooper W. W., Ferguson R. Optimal estimation of executive compensation by linear programming // Management Science. 1955. Vol. 1, N 2. P. 138–151.

⁶ Charnes A., Cooper W. W. Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. New York : John Wiley & Sons, Inc, 1961. 859 p.

рассматривается только для исходных линейных критериев и линейных ограничений. Но это не является правильным.

Пусть имеется набор критериев $f_1, f_2, \dots, f_m$, каждый из которых желательно максимизировать на множестве возможных решений X . В критериальном пространстве R^m задано непустое множество U , которое называют множеством идеальных (или утопических) векторов. При этом считается, что это множество не достижимо, т. е. $U \cap Y = \emptyset$, где Y означает множество достижимости рассматриваемой задачи.

В критериальном пространстве задается метрика, т. е. такая числовая функция $\rho = \rho(y, z)$, которая каждой паре векторов y, z критериального пространства сопоставляет определенное неотрицательное число, называемое расстоянием между векторами y и z .

Всякая метрика должна по определению удовлетворять таким аксиомам (для всех векторов y, z, w), как:

- 1) неотрицательность: $\rho(y, z) \geq 0$;
- 2) тождество неразличимых элементов: $\rho(y, z) = 0 \Leftrightarrow y = z$;
- 3) симметричность: $\rho(y, z) = \rho(z, y)$;
- 4) неравенство треугольника: $\rho(w, z) \leq \rho(w, y) + \rho(y, z)$.

В соответствии с методом целевого программирования решением задачи векторной оптимизации называется элемент $x^* \in X$, для которого выполнено равенство

$$\inf_{y \in U} \rho(f(x^*), y) = \min_{x \in X} \inf_{y \in U} \rho(f(x), y), \quad (4.5)$$

означающее, что вектор $f(x^*)$, соответствующий наилучшему решению x^* , должен располагаться от множества идеальных векторов (утопического множества) на минимально возможном расстоянии.

Из этого следует, что если множество X ограничений исходной задачи задается нелинейными ограничениями, то (4.5) не генерирует задачу линейного программирования. Понятно, что метод определяется видом функции расстояния между множеством оценок и утопическим множеством (множеством идеальных (утопических) векторов). В качестве метрики можно взять обычное евклидово расстояние или другие нормы, используемые в конечномерных евклидовых пространствах. При этом новая задача, вообще говоря, не обязательно будет многокритериальной.

Вернемся к рассмотренной в предыдущем параграфе «узкой» интерпретации метода целевого программирования. В качестве рас-

стояния между множеством оценок и утопическим множеством рассматривались разности, характеризующие невыполнение соответствующих пожеланий (притязаний). В результате была получена многокритериальная задача линейного программирования (4.4). Целевые функции в подобной задаче всегда линейны. Но если бы множество ограничений

$$X = \{x \in R^2: x_1 + 2x_2 \leq 10, x_1 \leq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

содержало хотя бы одно нелинейное неравенство, то в итоге мы бы не получили задачу линейного программирования. Что делать дальше? Обычно применяют один из следующих двух подходов:

1. *Архимедов подход*. Рассматривается задача на минимум линейной свертки типа

$$\alpha_1 d_1^- + \alpha_2 d_2^+ \rightarrow \min$$

с положительными коэффициентами свертки, характеризующими важность того или иного критерия. При этом не нужно забывать о необходимости выполнения таких двух требований, как:

- обезразмеривание (нельзя складывать величины разной размерности, скажем, в примере 4.1 людей с долларами);
- масштабирование (желательно, чтобы слагаемые в свертке имели одинаковый порядок).

Происхождение названия установить сейчас сложно. Одна из распространенных версий заключается в том, что Архимед первым предложил для вычисления площадей фигур, ограниченных параболой, суммировать площади треугольников. Кстати, перейдя к необходимости суммирования бесконечного числа слагаемых, он впервые подсчитал задачу вычисления суммы одного из рядов.

2. *Лексикографический подход*. Сначала пожелания (притязания) ранжируются по важности так, чтобы первый критерий был безусловно важнее второго, второй – третьего и т. п. Затем применяется уже известный метод поиска решения лексикографической задачи.

Наконец, не очень понятно, как соотносятся решения, найденные методами целевого программирования, и парето-оптимальные решения. Вообще говоря, прямой связи нет. Но советскому (российскому) математику В. Д. Ногину удалось установить достаточные условия, при которых метод целевого программирования приводит к парето-оптимальным решениям.

Вопросы и задания

- На основе приведенных ниже условий⁷ составить многокритериальную задачу без учета пожеланий (притязаний) лица, принимающего решение.

- Составить многокритериальную задачу, используя подход целевого программирования и учитывая пожелания (притязания) лица, принимающего решение. Решить задачу, используя архимедов подход (коэффициенты свертки принять равным 1) и лексикографический подход.

4.1. Руководство супермаркета планирует провести эстрадные концерты и выставки ремесел для увеличения количества потенциальных покупателей. Предполагаемых посетителей менеджеры условно разбили на три возрастные группы: подростки, группа среднего возраста и старшая возрастная группа. Затраты на проведение одного концерта и одной выставки составляют 150 тыс. и 300 тыс. руб. соответственно. Количество мероприятий не ограничено. В таблице приведена оценка количества посетителей для каждого мероприятия с разбивкой по возрастным группам.

Мероприятие	Количество посетителей		
	Подростки	Средняя группа	Старшая группа
Эстрадный концерт	200	100	0
Выставка ремесел	0	400	250

Руководство супермаркета желает, чтобы мероприятия посетило максимальное количество потенциальных покупателей. При этом желательно, чтобы количество посетителей старшего возраста было не менее 800. Необходимо решить вопрос о количестве мероприятий каждого вида.

4.2. Семейство американского профессора собирается переезжать в новый город, где главе семейства предложен новый контракт. Сейчас супруги пытаются определить идеальное местоположение своего нового дома, исходя из следующих требований:

1. Новый дом должен быть как можно ближе к месту работы профессора, желательно не дальше четверти мили по прямой.

2. Дом должен быть как можно дальше от шумного аэропорта, желательно не ближе 10 миль.

3. Желательно, чтобы супермаркет был расположен не далее одной мили по прямой от дома.

Супруги нанесли на карту координатную сетку в милях и получили следующие координаты:

- место работы – (1; 1);
- аэропорт – (20; 15);

⁷ Таха Х. А. Введение в исследование операций. М. : Вильямс, 2005. 912 с.

- супермаркет – (4; 7).

Необходимо определить оптимальное расположение дома.

4.3. Производство двух изделий требует проведения двух последовательных операций. В таблице приведено время выполнения каждой операции (в минутах).

Операция	Изделие А	Изделие В
I	5	3
II	6	2

Прибыль от единицы первого изделия составляет 10 долл., второго – 7 долл. Продолжительность рабочего дня – 8 ч. Сверхурочные работы возможны, но не желательны. Максимальная продолжительность рабочего дня вместе со сверхурочными работами – 12 ч. Целью является составление такого плана выпуска изделий, при котором (по возможности) достигается максимизация прибыли и минимизация времени сверхурочных работ. Под утопическим множеством считать идеальную точку. В качестве нормы взять максимум модулей отклонений.

4.4. Рассмотреть задачу 4.3 при наличии следующего дополнительного пожелания. Изделий типа А нужно изготовить как можно больше, желательно не менее 50 шт. в день.

5. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

5.1. Формирование портфеля ценных бумаг

В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу формирования портфеля ценных бумаг. Инвестор, принимая решение об инвестициях, стремится к максимизации своего дохода и минимизации риска. Конечно, одновременно эти цели обычно не могут быть достигнуты: ценные бумаги или другие активы, обладающие более высокой доходностью, как правило, являются и более рискованными.

Прежде всего необходимо понять, как математически описать доходность и риск. Термин «доходность» более-менее понятен любому, даже неискушенному инвестору – это описываемый в тех или иных единицах (абсолютных или процентах) доход от вложений за определенный промежуток времени.

А как и в каких единицах описывать риск? В этом вопросе нет однозначности. В данном разделе остановимся на варианте *модели Марковица*. Американский экономист-математик Гарри Марковиц (Harry Markowitz)⁸ в 1952 г. опубликовал основополагающую в этой области статью «Portfolio Selection». Интересно, что в то время он работал в той же стратегической исследовательской корпорации США, что и другой известный специалист Джордж Данциг, который считается основателем знаменитого симплекс-метода решения задач линейного программирования. В 1990 г. Г. Марковиц получил Нобелевскую премию по экономике за вклад в создание современной «теории портфеля» (характерно для Нобелевских премий: прошло почти 40 лет с момента первой публикации результата).

Перейдем к формализации задачи. Пусть x_j – доля капитала, вкладываемая в ценные бумаги j -го вида, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда

⁸ С подробной биографией Гарри Марковица (1927–2023) рекомендуется ознакомиться в англоязычном варианте Википедии по ссылке: URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Harry_Markowitz (дата обращения 31.05.2025).

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.1)$$

Прибыль за определенный промежуток времени от ценных бумаг j -го вида будем считать *случайной величиной* ξ_j . Тогда за *доходность* от единицы вложения в ценные бумаги j -го вида разумно принять *математическое ожидание* этой случайной величины:

$$m_j = M(\xi_j).$$

Прибыль от всего портфеля будет случайной величиной, являющейся линейной (точнее *выпуклой*) *комбинацией* случайных величин ξ_j :

$$\xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j.$$

Математическое ожидание суммы случайных величин есть сумма математических ожиданий, постоянный множитель выносится за знак математического ожидания. *Первый скалярный критерий (доходность)* будет выглядеть следующим образом:

$$f_1(x) = M\xi = \sum_{j=1}^n m_j x_j. \quad (5.2)$$

Естественно, что ставится задача максимизации этого критерия. С математической точки зрения задача максимизации скалярного критерия (5.2) на множестве, заданном ограничениями (5.1), т. е. задача

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^n m_j x_j \rightarrow \max, \quad (5.3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

не представляет никакого интереса. Это классическая задача линейного программирования: поиск максимума линейной функции на фундаментальном (простейшем) симплексе. Решение (5.3) будет достигаться в одной из вершин (угловых) точек множества ограничений, т. е. в той точке вида $x = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, которой будет соответствовать наибольшее значение средней ожидаемой доходности m_j . Никакой диверсификации портфеля здесь нет: все средства необходимо вкладывать в тот тип ценных бумаг, который обладает наибольшей доходностью.

Задача становится гораздо более интересной, если ввести в рассмотрение понятие риска. По-видимому, не будет большой ошибкой назвать «нобелевской» идею Г. Марковица рассматривать в качестве риска дисперсию случайной величины ξ . Ведь именно дисперсия характеризует разброс конкретных реализаций случайной величины относительно ее среднего значения – математического ожидания. Теперь нужно вспомнить, что дисперсия суммы случайных величин равна сумме дисперсий, когда случайные величины независимы. В общем случае нужно рассматривать еще и ковариационные моменты:

$$\begin{aligned}
 D\xi = M(\xi - M\xi)^2 &= D\left(\sum_{j=1}^n \xi_j x_j\right) = \\
 &= \sum_{j=1}^n D(\xi_j x_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n x_i x_j \text{Cov}(\xi_i, \xi_j) = \langle x, Vx \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

где $V = [v_{ij}]$ – ковариационная матрица (матрица ковариаций), элементы которой $v_{ij} = M[(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)]$. На главной диагонали матрицы расположены дисперсии случайных величин ξ_j . Все остальные элементы – это ковариационные моменты пар *разных* случайных величин. Матрица является симметричной.

Формулу (5.4) можно записать немного по-другому, если ввести среднеквадратичные (среднеквадратические) отклонения и коэффициенты корреляции случайных величин:

$$\sigma_j = \sqrt{D\xi_j}, \rho_{ij} = \frac{v_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$D\xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) \rho_{ij}. \tag{5.5}$$

При совпадении индексов считаем $\rho_{ii} = 1$. Таким образом, в качестве *второго скалярного критерия* в задаче формирования портфеля ценных бумаг можно выбрать дисперсию $D\xi$. Дисперсия и математическое ожидание имеют разные размерности. Математическое

ожидание измеряется в тех же единицах, что и сама случайная величина, а дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Это не очень удобно, особенно при использовании линейных и некоторых других сверток критериев. Поэтому часто в качестве второго критерия рассматривают не дисперсию случайной величины ξ , а квадратный корень из дисперсии – среднеквадратичное отклонение σ . Окончательный вариант двухкритериальной задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{j=1}^n m_j x_j \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= \sigma \xi = \sqrt{\langle x, Vx \rangle} \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_j &= 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Сделаем несколько комментариев.

Замечание 5.1. Все теоретические рассуждения в предыдущих разделах проводились для задачи максимизации векторного критерия. Поэтому для применения изложенных ранее подходов можно перейти к эквивалентной задаче максимизации функции $-f_2(x)$.

Замечание 5.2. Часто функции доходности и риска имеют разные порядки величин. Например, доходность может измеряться в миллионах рублей (долларов, евро и т. п.), а риск – в десятых и сотых долях. Поэтому при использовании целого ряда сверток сначала разумно выполнить операцию масштабирования, о которой говорилось в гл. 1. Для этого в большинстве случаев достаточно разделить функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ на характерные значения соответствующих величин. При этом одновременно будет обеспечено обезразмеривание скалярных критериев.

Замечание 5.3. Для решения задачи (5.6) необходимо знать математические ожидания каждой случайной величины и все элементы ковариационной матрицы. Откуда их можно получить в реальной жизни? Очень часто соответствующие значения заменяют их статистическими оценками из данных наблюдений за предшествующие периоды. Такой подход разумен, но он плохо работает в периоды резких экономических скачков (финансовые кризисы, перестройка экономики, экономические «паузы» во время пандемии коронавируса и т. п.).

Замечание 5.4. Имеются модификации моделей портфеля, в которых допускается операция взятия в долг ценных бумаг. В этом случае переменные x_j могут быть и отрицательными.

Замечание 5.5. Достаточно интересны также модели, в которых учитываются и безрисковые активы⁹. В этом варианте доходности соответствующих ценных бумаг считаются заранее известными константами.

Какими методами можно решать двухкритериальную задачу вида (5.6)? Для этого применяются все основные виды сверток; сужение множества вариантов путем выделения решений, оптимальных по Парето или Слейтеру и т. п. Лексикографически оптимальные решения обычно в данной задаче не ищут, так как очень мала вероятность точного совпадения двух портфелей по одному из критериев. Нередко используют более ослабленный вариант – метод последовательных уступок или же свертки с выделением главного критерия. Например, основным считается доходность; при этом требуется, чтобы риск был не больше заданного. Или же наоборот: ставится задача минимизации риска при доходности, не меньше заданной.

В ряде частных случаев выражения для риска могут быть упрощены. Остановимся на трех наиболее распространенных вариантах¹⁰.

I. Независимые (некоррелированные) ценные бумаги с ограниченными дисперсиями

В этом случае все недиагональные элементы ковариационной матрицы V равны нулю, так как равны нулю ковариационные моменты для любой пары независимых случайных величин:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Из формулы (5.5) следует, что

$$D\xi = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 x_j^2.$$

⁹ Первозванский А. А., Первозванская Т. Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М. : Инфра-М, 1994. 192 с.

¹⁰ Касимов Ю. Ф. Основы теории портфеля ценных бумаг. М. : Филинь, 1998. 144 с. ; Первозванский А. А., Первозванская Т. Н. Указ. соч.

Для простоты теперь предположим, что дисперсии всех случайных величин ξ_j ограничены сверху некоторой одной и той же положительной константой K :

$\sigma_j^2 \leq K$ для всех j , а средства распределяются равномерно по всем видам ценных бумаг, т. е. $x_j = \frac{1}{n}$. Тогда дисперсию случайной величины ξ можно оценить следующим образом:

$$D\xi = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n K = \frac{K}{n}.$$

Понятно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{n} = 0$. Это является математическим обоснованием принципа *диверсификации* портфеля: при увеличении в портфеле видов независимых ценных бумаг риск портфеля стремится к нулю («не кладите все яйца в одну корзину»). Необходимо, однако, отметить, что определить, какие ценные бумаги являются независимыми, не так просто. И уж точно можно сказать, что из юридической независимости банков, фирм и других учреждений еще не следует независимость случайных величин, описывающих прибыли от соответствующих ценных бумаг или вкладов.

В этом случае удобно рассматривать двухкритериальную задачу в следующей форме:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{j=1}^n m_j x_j \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= D\xi = \langle x, Vx \rangle \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_j &= 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Матрица V является диагональной, причем элементы ее главной диагонали являются положительными числами, так как v_{jj} — это дисперсии случайных величин ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

Для решения (5.7) можно использовать метод линейной свертки или метод выделения главного критерия, считая таковым функцию риска. Двухкритериальная задача сводится к минимизации сепарабельной квадратичной или линейно-квадратичной функции с положительно определенной матрицей. Ограничения задачи линейны. Это классическая задача квадратичного программирования, решение которой обычно вычисляется за конечное число итераций.

II. Случай прямой корреляции

Данный вариант является другой крайностью ($\rho_{ij} = 1, i \neq j$). Из теории вероятностей известно, что коэффициент корреляции равен единице для линейно зависимых случайных величин. Из формулы (5.5) имеем

$$D\xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) = \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j x_j \right)^2.$$

Для простоты снова будем предполагать, что средства распределяются равномерно по всем видам ценных бумаг ($x_j = \frac{1}{n}$). Тогда

$$D\xi = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j \right)^2, \text{ или } \sigma\xi = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j.$$

Никакого стремления риска к нулю при $n \rightarrow \infty$ в этом случае нет. Действительно, коэффициент перед суммой стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, но при увеличении n также и растет число слагаемых в сумме. Если дисперсии ограничены, то сходимости к нулю результата нет. Этот вариант обосновывает соответствующий принцип: не имеет смысла расширять портфель за счет включения в него новых видов *зависимых* ценных бумаг.

III. Случай полной обратной корреляции

Предположим, что портфель составляется всего из двух видов ценных бумаг, причем имеет место полная обратная корреляция, т. е.

$$n = 2, \rho_{12} = \rho_{21} = -1.$$

Из формулы (5.5) следует, что

$$D\xi = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1 x_1 \sigma_2 x_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2.$$

Отсюда видно, что дисперсия (риск) равна нулю в том и только том случае, когда $\sigma_1 x_1 = \sigma_2 x_2$. Для вычисления σ_1 и σ_2 необходимо решить следующую систему двух линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_1 x_1 = \sigma_2 x_2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения, например, x_2 через x_1 и подставив во второе уравнение, получим решение:

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad x_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Неотрицательность x_1 и x_2 очевидна.

Таким образом, в случае наличия полной обратной корреляции абсолютно *безрисковый портфель* можно составить всего из *двух видов* ценных бумаг. Переходить к решению двухкритериальной задачи (5.6) имеет смысл лишь в том случае, когда инвестор готов отказаться от безрискового варианта.

На практике такой вариант, конечно же, встречается редко. Например, возможен случай наличия на рынке товаров и услуг двух конкурирующих фирм-антагонистов. Успех одной из них приводит к проигрышу другой.

5.2. Расчет стимулирующих выплат

В настоящее время в большинстве организаций, предприятий, фирм действуют системы эффективных трудовых договоров. Величина ежемесячной (ежеквартальной, ежегодной) надбавки, премии, а иногда и основной части заработной платы зависит от эффективности труда работника. В некоторых случаях выплаты работникам определяются достаточно легко. Они могут основываться на процентах от прибыли, объемов фактических продаж, сумм заключенных договоров и т. п. Однако в целом ряде отраслей деятельность работников оценивается по целому ряду показателей. Соответственно руководитель организации или подразделения должен иметь алгоритм, позволяющий на основании данных о достигнутых работником за определенный период результатах получить единственное число – заработную плату, стимулирующую выплату или же премию конкретного работника за этот период. С точки зрения теории многокритериальных задач речь идет о свертке нескольких критериев (показателей) в один. Сам же работник, пытаясь увеличить свой доход, фактически должен решить соответствующую многокритериальную задачу.

Рассмотрим задачу оценки эффективности труда научно-педагогических работников (НПР) на примере реально действующей системы «Эффективный контракт» Иркутского государственного университета. В приведенном ниже примере в упрощенном виде приведены лишь основные элементы этой системы. Трудовой договор с

НПР должен не только фиксировать обязанности и права, но и служить инструментом мотивации. Для этого в него включаются четкие критерии оценки эффективности. С помощью математической модели можно рассчитать распределения стимулирующих выплат.

Для каждого учебного подразделения (института или факультета) ежемесячно устанавливается размер фонда стимулирующих надбавок Φ (в рублях). Пусть N – число работников соответствующего подразделения. Для каждого j -го работника ($j \in \{1, 2, \dots, N\}$) по итогам месяца нужно рассчитать индивидуальную стимулирующую надбавку H_j в зависимости от значений таких критериев, как:

- 1) *эффективность деятельности* P – учитывает показатели из трудового договора, кафедры и образовательно-научной деятельности;
- 2) *исполнительная дисциплина* D – зависит от количества дисциплинарных взысканий;
- 3) *справедливость распределения* S – минимизирует отклонения выплат от среднего значения в подразделении.

Фактически речь идет о двух вложенных многокритериальных задачах. Первая задача состоит из перечисленных выше трех скалярных критериев. Однако эффективность деятельности НПР определяется не одним скалярным критерием, а целым рядом показателей. Поэтому оценка эффективности является второй многокритериальной задачей, вложенной в первую. Остановимся сначала на этой задаче.

В рассматриваемом примере прежде всего выделяются две категории НПР – обычные преподаватели и заведующие кафедрами. Для первой категории учитываются лишь индивидуальные показатели работников. Для второй категории принимаются во внимание также и суммарные результаты всей кафедры.

Основными индивидуальными показателями являются:

- количество публикаций в изданиях, индексируемых международными системами цитирования;
- количество публикаций в изданиях из перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук;
- количество учебных изданий и ряд других показателей.

Показатели кафедры рассчитываются как суммы соответствующих индивидуальных показателей. Кроме того, учитываются:

- объем финансирования научно-исследовательских работ за последний календарный год (в рублях на 1 ставку);
- численность магистрантов, отнесенная к количеству ставок профессорско-преподавательского состава (ППС);
- численность аспирантов, отнесенная к количеству ставок ППС;
- доля ставок, занимаемых ППС в возрасте до 39 лет;
- доля ставок, занимаемых ППС с учеными степенями;
- доля ставок, занимаемых ППС с учеными степенями в возрасте до 35 лет.

Пусть $\Pi_1^j, \Pi_2^j, \dots, \Pi_m^j$ – показатели эффективности j -го работника. Конечно же, каждый преподаватель заинтересован в их максимизации.

На первом этапе рассматривается линейная свертка вида

$$R_j = \sum_{i=1}^m K_i \Pi_i^j. \quad (5.8)$$

Здесь K_i – весовые коэффициенты, определяемые действующим в университете коллективным трудовым договором, $0 < K_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, m$. Числа R_j , определяемые формулой (5.8), будем называть *ненормированными показателями эффективности* работников.

Затем вычисляется наибольшее из чисел R_j :

$$P_{\max} = \max_{j \in \{1, 2, \dots, N\}} R_j. \quad (5.9)$$

Отметим, что при этом автоматически определяются работник или работники с максимальными показателями эффективности. Конечно же, результат очень сильно зависит от значений весовых коэффициентов. Достаточно легко можно определить парето-оптимальные решения, т. е. множество преподавателей, соответствующее введенному в гл. 2 понятию оптимальности. Все остальные преподаватели могут быть отнесены к категории «отстающих».

Наконец, в качестве последнего шага на этом этапе вычисляется *нормированный показатель эффективности* для каждого работника. Для этого соответствующие ненормированные показатели (5.8) делятся на коэффициент нормировки $P_{\max}$, определяемый по формуле (5.9)

$$P_j = \frac{R_j}{P_{\max}}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что $P_j \in [0, 1]$. Данная нормировка одновременно обеспечивает обезразмеривание и масштабирование. Об этих операциях говорилось в гл. 1.

Перейдем к оставшимся двум основным критериям, перечисленным в начале данной главы.

Исполнительная дисциплина D для j -го работника вычисляется по формуле

$$D_j = \frac{1}{1 + n_j},$$

где n_j – количество дисциплинарных взысканий, наложенных на j -го работника в течение рассматриваемого периода. При $n_j = 0$ (нет взысканий) данный показатель принимает максимально возможное значение $D_j = 1$. При $n_j \geq 1$ эта величина уменьшается, что снижает итоговую выплату.

Справедливость распределения S определяется следующим образом:

$$S = \sum_{j=1}^N \left(H_j - \frac{\Phi}{N} \right)^2.$$

Напомним, что H_j – это величина стимулирующей надбавки j -го работника. Если все $H_j = \frac{\Phi}{N}$, то отклонения нет и распределение абсолютно равномерное. Однако в реальности выплаты должны зависеть от эффективности и дисциплины, поэтому требуется компромисс между справедливостью и мотивацией. Отметим, что данный критерий является достаточно спорным и он не применяется в ряде организаций и отраслей. Вместо суммы квадратов разностей в S можно использовать сумму модулей соответствующих отклонений. Однако это сужает возможности использования аппарата дифференцирования, так как модуль является не всюду дифференцируемой функцией.

Распределение средств возможно при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^N H_j \leq \Phi, \quad (5.10)$$

$$H_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.11)$$

Смысл ограничений понятен. (5.10) – это стандартное бюджетное ограничение: сумма всех надбавок не может превышать имеющегося фонда. Надбавки не могут быть отрицательными.

Таким образом, проблема «справедливого» назначения надбавок может быть сформулирована как задача векторной оптимизации с тремя скалярными критериями

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=1}^N P_j \cdot H_j \rightarrow \max; \\ D &= \sum_{j=1}^N D_j \cdot H_j \rightarrow \max; \\ S &= \sum_{j=1}^N \left(H_j - \frac{\Phi}{N} \right)^2 \rightarrow \min \end{aligned}$$

при ограничениях (5.10)–(5.11).

В описываемой модели задача решается методом линейной свертки. С учетом необходимости минимизации третьего критерия итоговая задача принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{j=1}^N P_j \cdot H_j + \beta \sum_{j=1}^N D_j \cdot H_j - \gamma \sum_{j=1}^N \left(H_j - \frac{\Phi}{N} \right)^2 &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^N H_j &\leq \Phi, \\ H_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Здесь α, β, γ – заданные неотрицательные весовые коэффициенты, удовлетворяющие условию $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Их значения определяются администрацией вуза. Понятно, что увеличение α приводит к большей значимости эффективности и т. п. (5.12) является задачей квадратичного программирования с вогнутой целевой функцией и линейными ограничениями. Она решается за конечное число итераций стандартными методами.

При отсутствии требования «справедливости» (5.12) превращается в задачу линейного программирования. В этом случае весьма интересно проводить постоптимальный анализ (анализ задач на чув-

ствительность)¹¹. С помощью классических методов линейного программирования достаточно просто определяются границы изменения весовых коэффициентов, при которых найденное решение остается оптимальным.

Отметим, что на основе полученных результатов легко конструируется система рейтингования сотрудников по их показателям. Подобный подход часто используется и в других областях, например при составлении рейтингов научных журналов, университетов, компаний и даже стран.

Вопросы и задания

Во всех приведенных ниже заданиях под функцией риска понимается дисперсия соответствующего портфеля ценных бумаг.

5.1. Пусть ковариационная матрица V в двухкритериальной задаче (5.7) положительно определена (в частности, это выполнено в случае независимых ценных бумаг). Ограничения на знак переменных x_j отсутствуют.

а) Решить задачу методом линейной свертки с произвольными положительными коэффициентами свертки (при этом нужно не забыть перейти от задачи минимизации риска к эквивалентной задаче максимизации). Согласно теореме 2.3 полученные решения будут являться оптимальными по Парето. Все ли парето-оптимальные решения могут быть найдены в данной задаче путем перебора коэффициентов свертки? Обосновать ответ.

б) Решить задачу, считая главным критерием риск и потребовав, чтобы доходность была равна заданной величине.

в) Решить задачу, считая главным критерием доходность и потребовав, чтобы риск был равен заданной величине.

Указание. Все задачи можно решить с помощью правила множителей Лагранжа. При этом необходимо доказать, что решения, удовлетворяющие этому необходимому условию оптимальности, доставляют глобальный максимум или минимум.

Во всех последующих заданиях предполагается, что независимые переменные x_j неотрицательны.

5.2. Портфель составляется из 2 типов ценных бумаг с коэффициентом корреляции $\rho = 0,5$, обладающих следующими характеристиками.

Тип бумаги	I	II
Средняя ожидаемая доходность	0,08	0,15
Дисперсия	0,25	0,36

¹¹ Таха Х. А. Введение в исследование операций. М. : Вильямс, 2005. 912 с.

а) Составить двухкритериальную задачу минимизации риска и максимизации доходности.

б) Решить любым методом задачу минимизации риска при доходности портфеля, равной 0,1.

в) Решить любым методом задачу минимизации риска при доходности портфеля, не меньшей 0,1.

г) Решить любым методом задачу максимизации доходности при риске, равном 0,3.

д) Решить любым методом задачу максимизации доходности при риске, не большем 0,3.

5.3. Портфель составляется из 3 типов независимых ценных бумаг, обладающих следующими характеристиками.

Тип бумаги	I	II	III
Средняя ожидаемая доходность	0,2	0,4	0,5
Дисперсия	1	4	9

а) Составить двухкритериальную задачу минимизации риска и максимизации доходности.

б) Определить риск портфеля при плане вложений $x = (1/2, 1/4, 1/4)$.

в) Найти все парето-оптимальные решения двухкритериальной задачи.

г) Считая, что доходность важнее, чем риск, решить задачу методом последовательных уступок для значений уступок $\Delta_1 = 0,05; 0,1; 0,2$.

д) Считая, что риск важнее, чем доходность, решить задачу методом последовательных уступок для значений уступок $\Delta_1 = 2; 5; 6$.

5.4. Портфель составляется из 4 типов независимых ценных бумаг, обладающих следующими характеристиками.

Тип бумаги	I	II	III	IV
Средняя ожидаемая доходность	11	9	10	8
Дисперсия	4	1	3	0,9

а) Составить двухкритериальную задачу минимизации риска и максимизации доходности.

б) Определить риск портфеля при плане вложений $x = (1/8, 1/8, 1/4, 1/2)$.

в) Найти все парето-оптимальные решения двухкритериальной задачи.

г) Считая, что доходность важнее, чем риск, решить задачу методом последовательных уступок для значений уступок $\Delta_1 = 1; 2; 5$.

д) Считая, что риск важнее, чем доходность, решить задачу методом последовательных уступок для значений уступок $\Delta_1 = 0,1; 1; 2; 4$.

5.5. Доходности по ценным бумагам двух типов являются случайными величинами, связанными нижеприведенной линейной зависимостью. Для одной из случайных величин известны математическое ожидание и дисперсия.

- Составить двухкритериальную задачу минимизации риска и максимизации доходности.

- Можно ли сформировать безрисковый портфель из данных видов ценных бумаг? Если да, сделать это и оценить ожидаемую доходность портфеля.

а) $z_1 = -4z_2 + 0,1; Mz_2 = 0,1; Dz_2 = 2.$

б) $z_1 = -z_2 + 0,2; Mz_2 = 0,5; Dz_2 = 1.$

в) $z_1 = -z_2; Mz_2 = 1; Dz_2 = 1.$

г) $z_1 = -2z_2 + 1; Mz_2 = 2; Dz_2 = 1.$

д) $z_1 = -0,5z_2 + 0,2; Mz_2 = 0,2; Dz_2 = 3.$

5.6. В таблице приведены данные, характеризующие деятельность трех научно-педагогических работников (НПР).

Показатели	НПР 1	НПР 2	НПР 3
P_1	80	60	95
P_2	70	85	65
P_3	90	75	80
n_j	0	2	1

Пусть заданы коэффициенты линейной свертки $K_1 = 0,4, K_2 = 0,3, K_3 = 0,3.$

а) Вычислить ненормированные показатели эффективности R_j каждого НПР по формуле (5.8).

б) Найти наибольшее значение $P_{\max}$ по формуле (5.9). Составить рейтинг работников в порядке убывания их показателей эффективности.

в) Рассчитать нормированные показатели эффективности P_j для каждого работника.

г) Найти показатели исполнительной дисциплины D_j для каждого работника.

д) Составить многокритериальную задачу расчета стимулирующих выплат для данного примера.

5.7. Общий фонд стимулирования $\Phi = 300\,000$ руб. распределяется между тремя НПР. Используя данные предыдущей задачи, решить задачу квадратичного программирования (5.12) для следующих весовых коэффициентов:

а) $\alpha = 0,5, \beta = 0,3, \gamma = 0,2.$

б) $\alpha = 0,7, \beta = 0,1, \gamma = 0,2.$

Сравнить результаты и объяснить, как выбор коэффициентов влияет на распределение.

5.8. Пусть в условиях задания 5.7 $\alpha = 0,7, \beta = 0,3.$ Составить и решить задачу (5.12), которая в данном случае будет являться задачей линейного программирования. Предположим, что $\alpha = 0,7.$ В каких пределах может изменяться β , чтобы найденное решение оставалось оптимальным? Пусть

$\beta = 0,3$. В каких пределах может изменяться α , чтобы найденное решение оставалось оптимальным?

5.9. Для одного из вариантов распределения из задания 5.7 рассчитать отклонения выплат от среднего значения $\frac{\Phi}{N}$. Соответствует ли распределение принципу справедливости? Предложить способ уменьшения отклонений, если они слишком велики.

5.10. Как изменятся выплаты в задании 5.7, если увеличить вес критерия справедливости γ до 0,4, уменьшив при этом веса α и β на 0,1 соответственно? Сделать вывод о том, какой набор коэффициентов наиболее сбалансирован.

5.11. Для многокритериальной задачи из задания 5.6д построить аппроксимацию множеств парето-оптимальных оценок и решений.

5.12. Используя язык программирования Python или пакет MS Excel, подготовить программу для автоматического расчета выплат H_j на основе введенных данных: $P_1, P_2, P_3, n_j, \Phi, \alpha, \beta, \gamma$. Протестировать модель на данных из заданий 5.6 и 5.7.

5.13. В учебном подразделении работает пять НПР. Таблицу с данными по их эффективности и дисциплинарным взысканиям заполнить самостоятельно. Фонд стимулирующих выплат $\Phi = 500\,000$ руб. Определить нормированные показатели работников сотрудников, составить их рейтинг. Предложить свои критерии для включения в модель распределения стимулирующих выплат (например, участие в проектах, руководство научно-исследовательской работой студентов и т. д.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы не ставили своей целью детальное изложение теории и методов принятия решений в многокритериальной оптимизации. Данное пособие следует рассматривать лишь как введение в дисциплину.

Для понимания основ векторной оптимизации можно рекомендовать ряд учебников, посвященных методам исследования операций¹². Классический учебник Х. Тахи¹³ интересен множеством учебных примеров, особенно в области задач целевого программирования.

Для дальнейшего более детального изучения математической теории и соответствующих методов весьма полезны учебники и учебные пособия по рассматриваемой тематике¹⁴. Одна из монографий В. В. Подиновского в соавторстве с В. Д. Ногиным¹⁵ содержит

¹² Есипов Б. А. Методы исследования операций : учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. СПб. : Лань, 2022. 304 с. // Лань : электрон.-библ. система. URL: <https://e.lanbook.com/book/212204> (дата обращения: 31.03.2025) ; Исследование операций в экономике : учеб. для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. 4-е изд., перераб. и доп. М. : Юрайт, 2025. 414 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. URL: <https://www.urait.ru/bcode/559655> (дата обращения: 31.03.2025) ; Колбин В. В. Методы принятия решений : учеб. пособие для вузов. СПб. : Лань, 2021. 644 с. // Лань : электрон.-библ. система. URL: <https://e.lanbook.com/book/167176> (дата обращения: 31.03.2025) ; Набатова Д. С. Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений : учеб. и практикум для вузов. М. : Юрайт, 2025. 292 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. URL: <https://urait.ru/bcode/560480> (дата обращения: 31.03.2025) ; Рубчинский А. А. Методы и модели принятия управленческих решений : учеб. и практикум для вузов. М. : Юрайт, 2025. 526 с. // Там же. URL: <https://urait.ru/bcode/560472> (дата обращения: 31.03.2025).

¹³ Таха Х. А. Введение в исследование операций. М. : Вильямс, 2005. 912 с.

¹⁴ Подиновский В. В. Многокритериальные задачи принятия решений: теория и методы анализа : учеб. для вузов. М. : Юрайт, 2025. 486 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. URL: <https://urait.ru/bcode/568317> (дата обращения: 31.03.2025) ; Теория принятия решений. В 2 т. Т. 1 : учеб.и практикум для вузов / под ред. В. Г. Халина. М. : Юрайт, 2025. 250 с. // Там же. URL: <https://urait.ru/bcode/560095> (дата обращения: 31.03.2025) ; Теория принятия решений. В 2 т. Т. 2 : учеб. и практикум для вузов / под ред. В. Г. Халина. М. : Юрайт, 2025. 431 с. // Там же. URL: <https://urait.ru/bcode/561465> (дата обращения: 31.03.2025) ; Васин А. А., Краснощечков П. С., Морозов В. В. Исследование операций : учеб. пособие. М. : Академия, 2008. 464 с. ; Лотов А. В., Поспелова И. И. Многокритериальные задачи принятия решений : учеб. пособие. М. : МАКС Пресс, 2008. 197 с. ; Подиновский В. В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: учеб. пособие для вузов. М. : Физматлит, 2007. 64 с.

¹⁵ Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Физматлит, 2007. 256 с.

детальное изложение вопросов оптимальности по Парето, а другая¹⁶ – посвящена особенностям принятия решений для последовательно применяемых критериев. Неопределенность, связанная со множеством скалярных критериев, может дополняться размытостью, нечеткостью задания ограничений. Для изучения этих вопросов можно посоветовать книгу Ю. А. Зака¹⁷.

Прикладные задачи математической экологии рассмотрены в монографии Л. А. Петросяна и В. В. Захарова¹⁸, а математические проблемы финансового рынка – в работе Ю. Ф. Касимова¹⁹. Необходимо отметить, что они не содержат формальных постановок многокритериальных задач. Однако проблемы формирования оптимального портфеля ценных бумаг, имеющие целями максимизацию доходности и минимизацию риска, легко формулируются как двухкритериальные задачи на основе представленных в этих книгах моделей.

Многокритериальная оптимизация остается важной дисциплиной в эпоху сложных систем и глобальных вызовов. Она продолжает активно развиваться, открывая новые направления для исследований и приложений. Ее будущее – в междисциплинарности, технологичности и ориентации на реальные потребности общества.

¹⁶ Подиновский В. В., Гаврилов В. М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. 2-е изд. М. : Ленанд, 2016. 194 с.

¹⁷ Зак Ю. А. Принятие многокритериальных решений. М. : Экономика, 2011. 236 с.

¹⁸ Петросян Л. А., Захаров В. В. Введение в математическую экологию. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 224 с.

¹⁹ Касимов Ю. Ф. Основы теории портфеля ценных бумаг. М. : Филинь, 1998. 144 с.; Первозванский А. А., Первозванская Т. Н. Указ. соч.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Васин А. А. Исследование операций: учеб. пособие / А. А. Васин, П. С. Краснощеков, В. В. Морозов. – Москва : Академия, 2008. – 464 с.
2. Есипов Б. А. Методы исследования операций : учебное пособие / Б. А. Есипов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 304 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/212204> (дата обращения: 31.03.2025).
3. Зак Ю. А. Принятие многокритериальных решений / Ю. А. Зак. – Москва : Экономика, 2011. – 236 с.
4. Исследование операций в экономике : учебник для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2025. – 414 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://www.urait.ru/bcode/559655> (дата обращения: 31.03.2025).
5. Касимов Ю. Ф. Основы теории портфеля ценных бумаг / Ю. Ф. Касимов. – Москва : Филинь, 1998. – 144 с.
6. Колбин В. В. Методы принятия решений : учебное пособие для вузов / В. В. Колбин. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 644 с. // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/167176> (дата обращения: 31.03.2025).
7. Лотов А. В. Многокритериальные задачи принятия решений : учеб. пособие / А. В. Лотов, И. И. Пospelова. – Москва : МАКС Пресс, 2008. – 197 с.
8. Набатова Д. С. Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений : учеб. и практикум для вузов / Д. С. Набатова. – Москва : Юрайт, 2025. – 292 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/560480> (дата обращения: 31.03.2025).
9. Подиновский В. В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: учеб. пособие для вузов / В. В. Подиновский. – Москва : Физматлит, 2007. – 64 с.
10. Подиновский В. В. Многокритериальные задачи принятия решений: теория и методы анализа : учеб. для вузов / В. В. Подиновский. – Москва : Юрайт, 2025. – 486 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/568317> (дата обращения: 31.03.2025).
11. Подиновский В. В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В. В. Подиновский, В. М. Гаврилов. – 2-е изд. – Москва : Ленанд, 2016. – 194 с.
12. Подиновский В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – Москва : Физматлит, 2007. – 256 с.

13. Рубчинский А. А. Методы и модели принятия управленческих решений : учеб. и практикум для вузов / А. А. Рубчинский. – Москва : Юрайт, 2025. – 526 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/560472> (дата обращения: 31.03.2025).

14. Таха Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. – Москва : Вильямс, 2005. – 912 с.

15. Теория принятия решений. В 2 т. Т. 1 : учеб. и практикум для вузов / под ред. В. Г. Халина. – Москва : Юрайт, 2025. – 250 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/560095> (дата обращения: 31.03.2025).

16. Теория принятия решений. В 2 т. Т. 2 : учеб. и практикум для вузов / под ред. В. Г. Халина. – Москва : Юрайт, 2025. – 431 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/561465> (дата обращения: 31.03.2025).

Учебное издание

Аргучинцев Александр Валерьевич
Шеломенцева Наталья Николаевна

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ
В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

ISBN 978-5-9624-2401-9

Редактор *А. Н. Шестакова*
Дизайн обложки: *П. О. Ершов*

Темплан 2025. Поз. 57
Подписано в печать 12.08.2025. Формат 60×90/16
Уч.-изд. л. 12,5. Усл. печ. л. 18,7. Тираж 100 экз. Заказ 71

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124