

А. В. Аргучинцев, Н. Н. Шеломенцева

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Иркутский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий

А. В. Аргучинцев, Н. Н. Шеломенцева

**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
И КОМПЬЮТЕРНЫЕ
МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ**

Учебное пособие



УДК 658.512:519.85
ББК 65.9(2)23:32.973
А79

*Публикуется по решению ученого совета
Института математики и информационных технологий ИГУ*

Рецензенты:

д-р экон. наук, доц. *О. В. Грушина*
канд. физ.-мат. наук, доц. *В. П. Поплевко*

*Проект реализуется победителем конкурса
на предоставление грантов преподавателям магистратуры
благотворительной программы «Стипендиальная программа
Владимира Потанина» Благотворительного фонда
Владимира Потанина, договор гранта № ГСГК 0113/21*

Аргучинцев А. В.

А79

Введение в математические и компьютерные методы
управления проектами : учебное пособие / А. В. Аргучинцев,
Н. Н. Шеломенцева. – Иркутск : Издательство ИГУ,
2024. – 90 с.

ISBN 978-5-9624-2265-7

Рассматриваются основы проектной деятельности с точки зрения использования математических и компьютерных методов. Дан общий обзор основных понятий управления проектами, обсуждена специфика образовательных, информационных и экологических проектов. Достаточно подробно изложены основы пакета GanttProject. На примерах задач управления ресурсами проиллюстрированы основные математические методы, применяемые при управлении проектами.

Предназначено для магистрантов программ «Математическое моделирование», «Системная и проектная аналитика» направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика. Может быть полезным для студентов бакалавриата, аспирантов и преподавателей.

УДК 658.512:519.85
ББК 65.9(2)23:32.973

ISBN 978-5-9624-2265-7

© Аргучинцев А. В., Шеломенцева Н. Н., 2024
© ФГБОУ ВО «ИГУ», 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ	6
1.1. Проекты и управление проектами	6
1.2. Обзор основных методов управления проектами.	
Agile-философия	13
1.3. SWOT-анализ в управлении проектами	18
1.4. Специфика образовательных, информационных и эко- логических проектов.....	23
1.5. Сетевые модели управления проектами. Критические работы и критические пути	24
1.6. Программное обеспечение для управления проектами	36
Вопросы и задания к главе 1	44
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ.....	46
2.1. Обзор математических методов управления проектами	46
2.2. Методы динамического программирования	52
2.3. Решение задач управления ресурсами	62
2.4. Задачи для самостоятельного решения	82
2.5. Ответы к задачам.....	86
Вопросы и задания к главе 2	86
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	88
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	89

ПРЕДИСЛОВИЕ

Управление проектами – это дисциплина, блоки дисциплин или даже образовательные программы, которые традиционны для менеджерских и экономических направлений подготовки. Для математических и информационных направлений обычно данная дисциплина включается в соответствующий блок учебного плана в качестве небольшого общеобразовательного курса. Традиционно в его рамках излагаются данные о жизненном цикле проекта; требования к его организации, выполнению и отчетности; командообразование; риски; взаимодействие с партнерами и т. п. Технологии проектного управления рассматриваются в рамках классических схем, Agile-философии, 6 сигм и т. п. В качестве программных средств используются MS Project, программы для взаимодействия Trello, Vitrix24 и т. п. Не отрицая важности подобного подхода, укажем на то, что по большинству «гуманитарных» блоков изложение ограничивается описательными рассуждениями, психологическим анализом и т. п.

В данном пособии основное внимание сосредоточено на математических и информационных аспектах управления проектами. Необходимость решения различных классов математических задач возникает на всех этапах проектной деятельности. На этапе инициации проектов используются инструменты ранжирования проектов, обработки экспертных мнений, выбора портфеля проектов. При планировании проектов важны методы анализа сетевых графиков, оптимизация на сетях, планирование расписаний, планирование ресурсов (финансов, кадров, материальных запасов и т. п.), управление качеством и др. На этапе выполнения проектов используются методы мониторинга отклонений от целей или промежуточных показателей успешности проекта («измерение разрывов»), управление рисками, методы перераспределения ресурсов в условиях изменяющихся внутренних и внешних факторов (например, задачи о замене оборудования и др.). Наконец, на завершающем этапе крайне важен послепроектный анализ.

В задачу данного пособия не входит изложение всех весьма разнородных математических методов. Дан лишь их краткий обзор, а более подробно рассмотрен один из эффективных подходов – метод динамического программирования.

Пособие состоит из двух глав.

В первой главе приведены общие понятия, связанные с проектной деятельностью, дан обзор основных методов управления проектами, обсуждена специфика образовательных, информационных и экологических проектов. В силу наметившейся тенденции к использованию открытого программного обеспечения достаточно подробно изложены основы пакета GanttProject, широко применяемого в настоящее время при планировании проектов.

Вторая глава является введением в математический аппарат, используемый при управлении проектами. Несмотря на большое разнообразие математических методов управления проектами, большинство подходов относится к области исследования операций, т. е. математической теории принятия решений. Конечно, всегда желательно, чтобы решения были оптимальными. Это означает, что большинство исследуемых проблем относится к классу задач на поиск экстремума некоторых функций, являющихся критериями успешности действий, при наличии тех или иных ограничений. В соответствующих моделях могут также присутствовать или отсутствовать неконтролируемые факторы. Целый ряд математических задач принятия решений, возникающих при управлении проектами, носит динамический (развитие во времени) и/или сетевой характер. В этом случае весьма эффективным является метод динамического программирования. Рассмотрена серия различных примеров, относящихся к классу задач управления ресурсами (запасами). Проиллюстрированы возможности их решения различными методами.

В книге принята двойная система нумераций рисунков, формул и определений. Первое число – номер главы, второе – номер рисунка, формулы или определения в этой главе.

Авторы выражают признательность Благотворительному фонду Владимира Потанина, поддержавшему подготовку данной книги в рамках конкурса на предоставление грантов преподавателям магистратуры благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина», договор гранта № ГСГК 0113/21.

Основной список литературы содержит наименования источников, которые доступны для обучающихся через федеральные электронные библиотечные системы. Дополнительный список рекомендуется для более углубленного изучения предмета. Частью книг из этого списка авторы воспользовались при подготовке примеров и задач.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

1.1. Проекты и управление проектами

Управление проектами – динамически развивающееся направление современного менеджмента. Оно органически сочетает в себе менеджерские, психологические, финансовые, математические и информационные аспекты.

Как и многие виды деятельности, проектная деятельность регулируется определенными нормативами и правилами. Существует ряд национальных и международных стандартов в этой области. Среди основных отметим следующие¹:

- ГОСТ Р 54869-2011. Проектный менеджмент. Требования к управлению проектом;

- ГОСТ Р 54871-2011. Проектный менеджмент. Требования к управлению программой;

- ГОСТ Р 56714.1-2015. Мультипроектный менеджмент. Управление проектом, портфелем проектов, программой. Часть 1. Основные положения;

- ГОСТ Р МЭК 62198-2015. Проектный менеджмент. Руководство по применению менеджмента риска при проектировании;

- ГОСТ Р ИСО 21500-2014. Руководство по проектному менеджменту;

- ГОСТ Р ИСО 21504-2016. Управление проектами, программами и портфелем проектов. Руководство по управлению портфелем проектов.

Последние два из перечисленных максимально унифицированы с соответствующими международными стандартами системы ISO.

¹ Все эти стандарты можно найти на федеральном информационном портале по стандартизации <http://standard.gost.ru/wps/portal/>

ГОСТ Р 54869-2011 «Проектный менеджмент. Требования к управлению проектом»² дает достаточно четкие определения основных понятий в этой области.

Определение 1.1. Проект – это комплекс взаимосвязанных мероприятий, направленный на создание уникального продукта или услуги в условиях временных и ресурсных ограничений.

Подобное определение является общепризнанным. Так, в германском стандарте по управлению проектами DIN 69901 говорится, что проект есть предприятие (намерение), которое в значительной степени характеризуется неповторимостью условий в их совокупности, например:

- задание цели;
- временные, финансовые, человеческие и другие ограничения;
- разграничения от других намерений;
- специфическая для проекта организация его осуществления.

Необходимо отметить две главные черты любого проекта:

- 1) всегда создает что-то новое (*уникальность*);
- 2) приводит к востребованному результату (*востребованность*).

Таким образом, рутинная ежедневная работа по производству, скажем, серийной модели автомобиля на конвейере не является проектом. Запуск же производства новой модели может рассматриваться как проект. Когда мы говорим про проект, то на самом деле подразумеваем решение некоторой актуальной проблемы.

Определение 1.2. Продукт проекта – это измеримый результат, который должен быть получен в ходе реализации проекта.

Определение 1.3. Управление проектом – это планирование, организация и контроль трудовых, финансовых и материально-технических ресурсов проекта, направленные на эффективное достижение целей проекта.

В рамках процессов управления проектом выполняются действия, относящиеся к следующим функциональным областям управления:

- управление содержанием проекта;
- управление сроками проекта;
- управление затратами в проекте;

² ГОСТ Р 54869-2011. Проектный менеджмент. Требования к управлению проектом. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200089604> (дата обращения: 08.04.2024).

- управление рисками проекта;
- управление персоналом проекта;
- управление заинтересованными сторонами проекта;
- управление поставками проекта;
- управление качеством в проекте;
- управление обменом информацией в проекте;
- управление интеграцией проекта.

Отметим, что в каждой из перечисленных функциональных областей управления имеется масса абсолютно разнородных задач. Часть из них может быть решена чисто математическими методами. Для решения некоторых (командообразование, работа команды, лидерство, разрешение конфликтов и т. п.) требуются серьезные знания в области психологии. Бюджетирование и финансовая деятельность невозможны без бухгалтерского учета и контроля. Современные проекты требуют использования специализированного программного обеспечения – от математических пакетов и бухгалтерских программ до средств коммуникации, включая инструменты для дистанционной работы команды. Общее представление об основных аспектах управления проектами дает рис. 1.1.

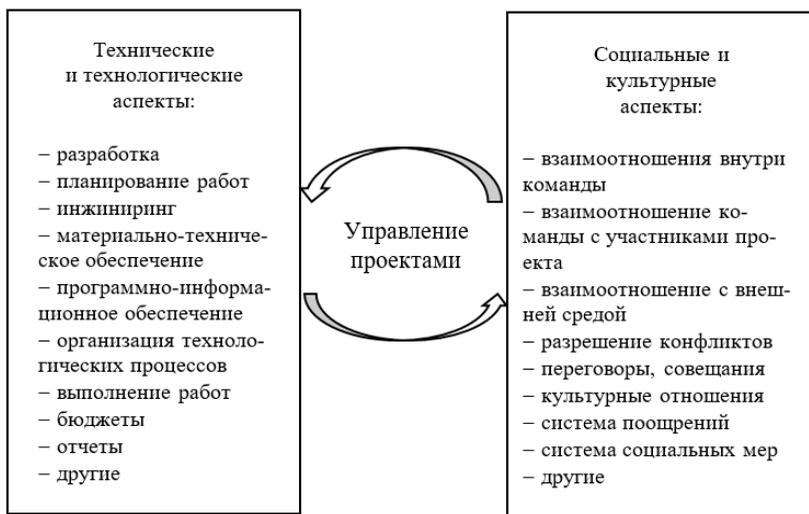


Рис. 1.1. Аспекты управления проектами

Последовательность процессов управления проектом определяется условиями конкретного проекта, при этом:

- проект должен начинаться с процесса инициации;
- проект должен оканчиваться процессом завершения;
- выполнение процессов организации исполнения и контроля начинается не раньше процессов планирования.

Ролевая (организационная) структура управления проектами может в значительной степени различаться в зависимости от специфики, но в каждом проекте должны быть определены следующие роли:

- заказчик – физическое или юридическое лицо, которое является владельцем результата проекта;
- руководитель – лицо, осуществляющее управление проектом и ответственное за результаты проекта;
- куратор – лицо, ответственное за обеспечение ресурсами и осуществляющее административную, финансовую и иную поддержку;
- команда – совокупность лиц, групп и организаций, объединенных во временную организационную структуру для выполнения работ проекта.

Рисунок 1.2 иллюстрирует основные понятия проектного менеджмента и их взаимосвязь.



Рис. 1.2. Основные понятия проектного менеджмента³

³ ГОСТ Р 54869-2011. Проектный менеджмент.

Естественно, что любой проект имеет свою цель или цели.

Определение 1.4. Цели проекта – это желаемые результаты деятельности, достигаемые при реализации проекта в заданных условиях.

Достижение целей характеризуется тремя основными показателями:

- качество;
- время выполнения;
- издержки (затраты).

Обычно выделяют следующие три уровня целей проекта:

- 1) генеральная цель (миссия);
- 2) необходимые цели;
- 3) желаемые цели.

Рисунок 1.3 иллюстрирует так называемую пирамиду проекта (от идеи к стратегии реализации).



Рис. 1.3. Пирамида проекта

Определение 1.5. Структура проекта – это основные части (элементы) проекта, необходимые и достаточные для его осуществления (рис. 1.4).



Рис. 1.4. Структура проекта

Наконец, необходимо отметить, что любой проект возникает и реализуется в некотором окружении. Кроме внутренней среды обычно выделяют ближнее (непосредственные контакты и непосредственное влияние) и дальнее окружение (рис. 1.5).

Классификация проектов проводится по различным признакам.
I. Классификация проектов по результатам.

По типу результатов выделяют следующие:

1. Фактический (продуктовый) результат:

- новые знания;
- новое устройство, прибор или прототип;
- новый художественный (музыкальный и т. п.) объект;
- сложносоставные результаты (технологии, инновации).

Обычно возникает лишь в конце работы.

2. Образовательный результат:

- вхождение в контекст профессии;
- прикладные навыки и компетенции;
- способы организации работы в проекте;
- ценности и т. п.

Может появляться на любых этапах выполнения проекта.

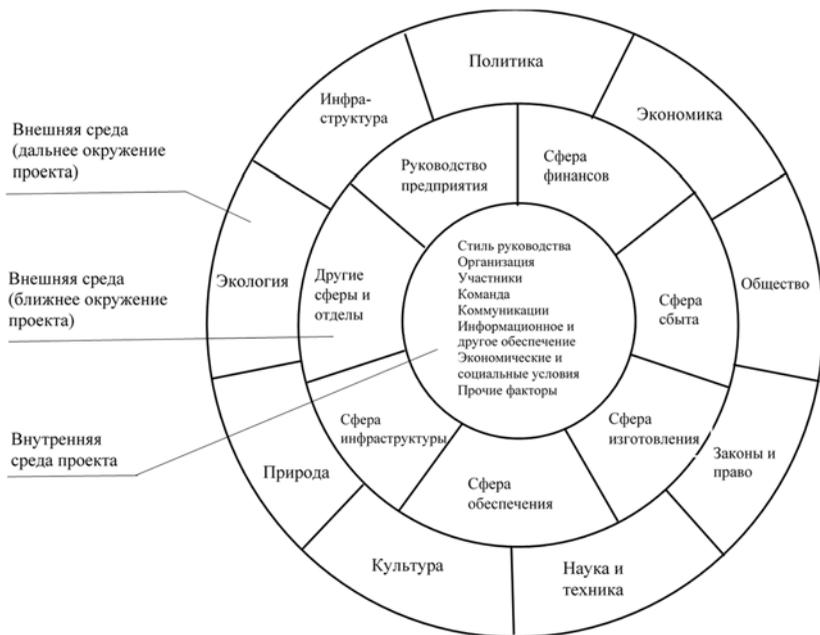


Рис. 1.5. Окружение проекта

II. Классификация проектов по типу.

Обычно выделяют:

- профессиональные проекты, которые выполняются профессионалами в их рабочее время;
- учебные проекты, выполняемые в основном в образовательных учреждениях.

Среди профессиональных проектов можно выделить исследовательские, инженерные, технологические, предпринимательские, инновационные, инфраструктурные и арт-проекты.

1.2. Обзор основных методов управления проектами. Agile-философия

В литературе по менеджменту выделяется порядка 10 основных методов управления проектами. С математической точки зрения правильно называть их не методами, а подходами. Речь идет не столько о строгих методах, а о методологии и принципах.

Грубо говоря, различают жесткое (классическое) и гибкое управление проектами.

Классическое проектное управление.

Предполагается, что выполнение проекта состоит из последовательных этапов, причем к следующему этапу нельзя перейти, не закончив предыдущий. Такая линейная структура характерна для жестко определенных проектов. Классическими примерами являются строительные и инженерные проекты.

Традиционно выделяют следующие этапы.

Этап 1. Инициирование. Руководитель проекта и команда определяют требования к проекту. На данном этапе часто проводятся совещания и «мозговые штурмы», на которых выясняется, что должен представлять из себя продукт проекта.

Этап 2. Планирование. На этом этапе команда решает, как она будет достигать цели, поставленной на предыдущем этапе. Идет уточнение и детализация цели и результатов проекта, а также состав работ по нему. На основании данной информации формируется календарный план и бюджет, оцениваются риски и выявляются заинтересованные стороны.

Этап 3. Реализация и тестирование. На этой фазе происходит основная работа по проекту. Следуя разработанным планам, начинается создаваться содержание проекта, определенное ранее, проводится контроль. Во второй части фазы происходит тестирование продукта, он проверяется на соответствие требованиям заказчика и заинтересованных сторон. В части тестирования выявляются и исправляются недостатки. Ясно, что этот этап – основной по содержанию. Он может состоять из многих работ/задач.

Этап 4. Мониторинг и завершение проекта. В зависимости от проекта данная фаза может состоять просто из передачи заказчику результатов проекта или же из длительного процесса взаимодействия с заказчиком по улучшению проекта.

Жесткая последовательность может быть сильной или слабой стороной этого подхода. От заказчика требуется определить, что же он хочет получить, уже на первом этапе проекта. Это привносит значительную стабильность в работу над проектом, а планирование позволяет упорядочить его реализацию. Кроме того, подразумевается мониторинг показателей и тестирование, что совершенно необходимо для реальных проектов различного масштаба. Благодаря тому, что классический проектный менеджмент строго привязан ко времени исполнения задач, для реализации проектов в рамках данного подхода удобно применять инструменты календарно-сетевое планирования.

Основная слабая сторона метода – отсутствие гибкости и реакции на изменения/риски.

Гибкие методы управления проектами сейчас в основном базируются на философии *Agile* (от англ. «гибкий», «маневренный»).

В феврале 2001 г. 17 специалистов в области разработки программного обеспечения и менеджмента, собравшись на горнолыжном курорте в штате Юта (США), сформулировали так называемый Agile Manifesto⁴. Манифест содержит 4 ценности и 12 принципов. При этом ценности были сформулированы в первую очередь, а принципы авторы расписали позднее.

Ценность 1. Люди и взаимодействие важнее процессов и инструментов.

Потребности взаимодействия команд первичны. Команды должны иметь возможность подстраивать под себя инструменты и процессы, но обязаны им следовать.

Ценность 2. Работающий продукт важнее исчерпывающей документации.

Отчетность очень важна, особенно та, что связана с разработкой продукта. Однако часто создается множество лишней документации – в первую очередь потому, что во многих компаниях она используется для коммуникации (технические задания, различные обоснования, бюджеты и т. п.). Сначала создайте продукт, а потом документируйте его.

Ценность 3. Сотрудничество с заказчиком важнее согласования условий контракта.

⁴ Manifesto for Agile Software Development. URL: <https://agilemanifesto.org> (дата обращения: 08.04.2024).

Если вы заключаете контракт, вокруг которого в конце проекта долго спорите и судитесь, вы проиграете. Даже если вам в итоге заплатят, то вы не только потратите силы и время, но и разрушите отношения с нынешним заказчиком, а возможно, и с будущими. В Agile основное внимание направлено на клиента. Сотрудничать с ним необходимо, и контракт должен помогать, а не мешать.

Ценность 4. Готовность к изменениям важнее следования первоначальному плану.

Гибкие подходы создавались для условий неопределенности и частых изменений. Предварительное планирование, т. е. подход, когда мы сначала долго рассчитываем проект, распределяем ресурсы и задачи, не работает. Конечно, оно несет определенную пользу, но приоритет отдается планированию оперативному. Если все вокруг часто меняется, то ваши планы тоже должны быть подвижными.

Изначально Agile-методология была ориентирована на проекты, связанные с разработкой программного обеспечения, но в дальнейшем эта философия распространилась гораздо шире.

Базовая вещь, которую важно знать для понимания Agile – это итеративно-инкрементальный подход, лежащий в основе гибких методов управления. Его суть состоит в том, чтобы не разрабатывать весь продукт целиком и поставлять результат разом в конце, как в классических проектах, а действовать постепенно, маленькими партиями. Разницу между чисто итеративным и итеративно-инкрементальными подходами шуточно проиллюстрировал Jeff Patton (рис. 1.6).



Рис. 1.6. Шуточная иллюстрация разницы в двух подходах⁵

⁵ Взято из: <https://jpattonassociates.com/>

При таком подходе возникает не только возможность раньше представить заказчику некоторый результат, но и, что гораздо важнее, организуется и работает постоянная обратная связь от клиента.

Итак, единой методологии Agile не существует. Авторы манифеста пытались ее составить, но потом решили, что создать шаблон для всех ситуаций не выйдет и что таким образом они ограничат возможности применения.

Вместо этого существует группа подходов, позволяющих реализовать ценности и принципы Agile на практике.

Одним из способов гибкой реализации проектов считается **Канбан** (Kanban, яп. **カンバン** камбан). В переводе с японского языка это слово означает «рекламный щит, вывеска, карточка». Изначально был введен корпорацией «Тойота» как система организации производства и снабжения, позволяющая реализовать принцип «точно в срок». На автомобильных заводах использовались карточки, чтобы передать информацию с одного шага на следующий о том, сколько и каких деталей потребуется. Для работы с Kanban необходимо определить этапы **потока операций** (workflow). Они изображаются как столбцы, а задачи обозначают специальные карточки. Карточка перемещается по этапам, подобно детали на заводе, переходящей от станка к станку, и с каждым передвижением процент завершения становится больше. На выходе мы получаем готовый к поставке заказчику элемент продукта. Доска со столбцами и карточками может быть как настоящей, так и виртуальной (электронной). В Kanban разрешается оставить неоконченную задачу на одном из этапов, если ее приоритет изменился и есть другие срочные работы.

Перечислим основные элементы данного подхода.

Карточки. Для каждой задачи (работы) создается индивидуальная реальная или электронная карточка, в которую заносится вся необходимая информация.

Ограничение на количество задач на этапе. Количество карточек на одном этапе строго регламентировано. Благодаря этому сразу видно, когда в потоке операций возникает «затор», который надо устранить.

Непрерывный поток. Задачи из очереди попадают в поток в порядке приоритета.

Постоянное улучшение. Постоянный анализ процесса и поиск путей повышения производительности.

В целом, часто считают, что Kanban – это только часть более широкой системы **Lean**⁶, в основе которой лежит концепция бережливого производства. Примерно за 10 лет до манифеста Agile два из его авторов Кен Швабер (Ken Schwaber, президент компании, занимающейся улучшением программного обеспечения) и Джеф Сазерленд (Jeff Sutherland, технический директор компании, занимающейся созданием программного обеспечения для медицинских учреждений) предложили подход **Scrum** (Скрам) – это фреймворк (каркас) с жесткими правилами и границами. Термин пришел из регби, где он означает «схватка».

Scrum разбивает проект на части, которые называются **заделами продуктов** (product backlog), в российской практике чаще всего используется слово «**беклог**». Затем представителем заказчика в команде устанавливаются приоритеты среди этих частей. Самые важные части первыми отбираются для выполнения в **Спринте**, итерации в Scrum (каждый Спринт обычно длится от 2 до 4 недель).

Основными процедурами Спринта являются следующие.

Встреча по упорядочиванию беклога (Backlog Refinement Meeting, «Backlog Grooming»). Аналогична фазе планирования в классическом проектном управлении. Проводится в первый день каждого Спринта. Рассматривается, что уже было сделано по проекту в целом, что ещё осталось сделать и принимается решение о том, что же делать дальше. Определяется, какие задачи на данном этапе являются наиболее приоритетными.

Планирование Спринта. Команда совместно решает, что же конкретно ее члены будут делать во время следующей итерации, как достигнуть поставленной на предыдущей встрече цели. Могут применяться различные инструменты планирования и оценки, лишь бы они не противоречили принципам и логике Scrum.

Ежедневные летучки. Каждый день Спринта, в одно и то же время, члены команды тратят около 15 мин на то, чтобы поделиться

⁶ Более подробно ознакомиться с применением Lean-принципов в проекте производстве можно по ссылкам: <https://projecto.pro/blog/theory/primenenie-lean-princzipov-v-proektnom-upravlenii/>; <https://silauion.ru/articles/lean-berezhlivoe-proizvodstvo-i-berezhlivoe-upravlenie>.

информацией о статусе задач и состоянии проекта. На встрече не происходит обсуждений проблем или принятия решений.

Подведение итогов Спринта. Команда представляет результаты деятельности всем заинтересованным лицам. Основная задача – убедиться, что продукт этапа соответствует ожиданиям участников и согласуется с целями проекта.

Ретроспектива Спринта. Команда выясняет, насколько четко и слаженно проходил процесс реализации. Обследованию подвергаются возникшие проблемы в работе, методологии и взаимодействиях.

В табл. 1.1 выделены основные составляющие Scrum и Kanban.

Таблица 1.1

Составляющие Scrum и Kanban

Scrum	Kanban
<ul style="list-style-type: none"> • Деление работы на части, которые называются Спринтами; • Спринты планируются исходя из требований для этого конкретного момента времени; • относительная оценка времени выполнения работ; • обзор каждого Спринта, чтобы понять, как он прошел и что можно было бы улучшить; • обратная связь по поставляемому продукту; • ежедневные собрания (очень короткие) 	<ul style="list-style-type: none"> • Еженедельные собрания; • непрерывная разработка; • визуализация процесса на доске; • решение сначала самых важных задач; • поэтапные улучшения

1.3. SWOT-анализ в управлении проектами

SWOT-анализ является разновидностью качественного анализа состояния организации (отрасли, фирмы, проекта, работы) и одновременно методом (инструментом) стратегического планирования.

Информация о первоначальном авторстве этого инструмента разнится. В исследовании, проведенном преподавателем из The University of Winchester Тимом Фриснером⁷ (Tim Friesner), озвучено две теории. Первая теория утверждает, что изобретение методики

⁷History of swot analysis. URL: https://www.researchgate.net/publication/288958760_History_of_swot_analysis (дата обращения: 08.04.2024).

принадлежит профессорам Harvard Business School Джорджу Сми-ту-мл. (George Albert Smith Jr.) и Си Роланду Кристенсену (C Roland Christensen), которые сформулировали теоретическое обоснование в 1950-х гг. Их коллега Кеннет Эндрюс (Kenneth Richmond Andrews) начал применять SWOT-анализ на практике в 1960-х. Второе предположение гласит, что SWOT-анализ в 1970-х создал Альберт Хэмфри (Albert Humphrey), глава исследовательской группы в Stanford Research Institute. Его команда разрабатывала концепт, который позволил менеджерам разных уровней оперативно внедрять изменения в бизнес-процессы, исходя из ключевых целей и задач компании. В любом случае начало применения этого метода датируется серединой 60-х – началом 70-х гг. XX в.

Название инструмента обусловлено применением подхода, который анализирует основные стороны организации. В дальнейшем мы будем говорить о применении метода только для **управления проектами**, хотя сфера его использования гораздо шире.

Итак, аббревиатура SWOT означает:

- S – Strengths (сильные стороны);
- W – Weaknesses (слабые стороны);
- O – Opportunities (возможности, благоприятные возможности);
- T – Threats (угрозы).

Классическим способом является оформление результатов в виде таблицы (матрицы) размерности 2*2 (рекомендуем сайт <https://www.smartsheet.com/14-free-swot-analysis-templates>) (рис. 1.7).

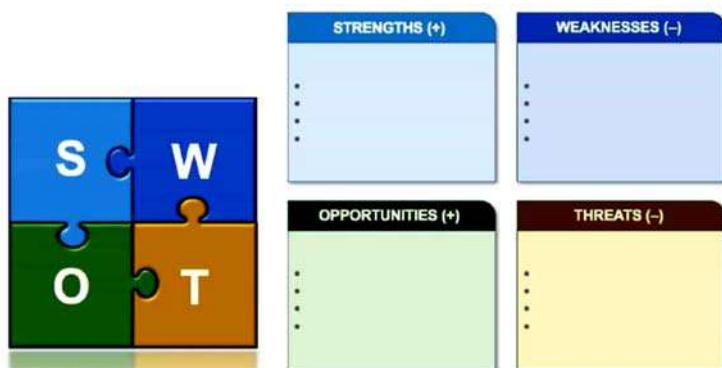


Рис. 1.7. Примеры шаблонов для SWOT-анализа

Цель анализа – оценить потенциал и окружение проекта, на основе чего запланировать действия. Категории «сильные стороны» и «слабые стороны» принадлежат к факторам, определяемым внутренними характеристиками проекта, а категории «возможности» и «угрозы» должны описывать внешние факторы, которые необходимо учитывать при планировании. Таким образом, можно говорить о следующем разделении таблицы.

- По горизонтали в первой строке приводятся внутренние факторы (сильные и слабые стороны), во второй – внешние факторы (благоприятные возможности и угрозы).

- По вертикали в первом столбце приводятся положительные для реализации проекта факторы (сильные стороны, благоприятные внешние возможности), во втором столбце – отрицательные факторы (слабые стороны, внешние угрозы).

Сильные и слабые стороны в SWOT-анализе находятся под контролем менеджеров. Эти факторы можно изменить с течением времени. Примеры для финансово-экономических проектов:

- список клиентов;
- команда проекта;
- партнерские отношения;
- интеллектуальная собственность;
- материальные и финансовые активы.

И наоборот, возможности и угрозы обычно находятся вне контроля менеджеров проекта. Примеры:

- действия конкурентов;
- валютный курс;
- налоговое законодательство;
- погодные условия;
- эпидемиологическая обстановка.

Отметим, что иногда применяют и «транспонированную матрицу». Естественно, в этом случае роли столбцов и строк меняются.

Сбор воедино всех данных дает возможность понять, каким образом минимизировать ущерб от негативных аспектов. В идеале после проведения анализа нужно модернизировать план управления проектом, чтобы обратить негативные факторы в новые точки роста.

Одной из самых **распространенных ошибок** является сведение SWOT-анализа к составлению одной таблицы. На самом деле

их должно быть две. Первая описывает результаты анализа, вторая – действия, которые планируется предпринять (или рекомендуется предпринять) по результатам анализа для достижения основной цели проекта.

Если руководство или заказчик стремятся добиться сразу несколько целей, то задача становится многокритериальной, которая в большинстве случаев не будет иметь классического решения. Можно говорить лишь о некоторых приближениях к нужному результату.

Приведем вид двух необходимых таблиц (табл. 1.2, 1.3).

Таблица 1.2

Анализ проекта

Основная цель проекта: ...		
	+	-
Внутренние факторы	<p>S</p> <p>Сильные стороны проекта, которые позволяют эффективно справляться с анализируемой ситуацией</p>	<p>W</p> <p>Слабые стороны проекта, которые могут отрицательно повлиять в анализируемой ситуации</p>
Внешние факторы	<p>O</p> <p>Возможности, которые предоставляет нам анализируемая ситуация</p>	<p>T</p> <p>Опасности, которые таит в себе анализируемая ситуация</p>

Таблица 1.3

Действия на основе анализа проекта

Основная цель проекта:		
	+	-
Внутренние факторы	<p>S</p> <p>Мероприятия, которые необходимо провести, чтобы использовать сильные стороны для увеличения возможностей проекта</p>	<p>W</p> <p>Мероприятия, которые необходимо провести для уменьшения воздействия слабых сторон проекта</p>
Внешние факторы	<p>O</p> <p>Мероприятия, которые необходимо провести с использованием благоприятных внешних возможностей</p>	<p>T</p> <p>Мероприятия, которые необходимо провести для уменьшения воздействия внешних опасностей</p>

Единого алгоритма проведения анализа проекта не существует. Здесь возможны только общие рекомендации. Обязательна ориентация на основную цель проекта. Скорее всего, потребуются консультации с заказчиком. Привлекаются эксперты в соответствующей области. Основные вопросы сильно будут зависеть от типа проекта. Ниже приведен пример типовых вопросов SWOT-анализа для бизнес-организации (рис. 1.8).

Сильные стороны	Слабые стороны	Возможности	Угрозы
Что мы делаем лучше, чем кто-либо еще?	Что мы делаем плохо? В чем наши конкуренты лучше нас?	Являются ли тенденции рынка благоприятными для нас?	Кто является нашим конкурентом?
Каково наше конкурентное преимущество?	Какие жалобы возникают у наших клиентов?	Может ли нынешняя экономика повлиять на нас позитивным образом?	Какие новые участники рынка могут угрожать нашему бизнесу?
Какие ресурсы имеются в нашем распоряжении?	Каковы недостатки нашей команды? Что сдерживает нас?	Какие новые возможности становятся доступными?	Уменьшается ли размер нашего рынка?
Какие преимущества имеют наши сотрудники?	Каких ресурсов нам не хватает? Что мы можем улучшить?	Можем ли мы приобрести дополнительные ресурсы?	Могут ли тенденции в отрасли негативно повлиять на наш бизнес?
Какие ценные активы имеет наша компания?			Увеличивается ли стоимость наших товаров?
Что в нас нравится нашим клиентам?			Является ли наш производитель надежным?

Рис. 1.8. Пример SWOT-анализа для бизнес-проекта

Для организации дальнейших действий обычно выделяют несколько направлений.

1. Грамотное календарное планирование. Параллельный инжиниринг – совмещение во времени нескольких независимых работ с целью ускорения реализации проекта. Анализ критического пути с целью оптимизации выполнения именно критических работ.

2. Грамотное планирование поступления и использования всех видов ресурсов.

3. Мониторинг отклонений от целей или промежуточных показателей успешности проекта (в англоязычной литературе иногда называется «измерение разрывов»). Здесь обычно используются измерительные шкалы отклонений. Идентификация

разрывов приводит к одному из трех вариантов действий: оставить как есть, уменьшить разрыв, ликвидировать разрыв.

Теперь перечислим очевидные **недостатки** SWOT-анализа.

1. Является качественным, а не количественным методом. Он не позволяет точно рассчитать влияние анализируемых факторов и результаты предполагаемых действий.

2. Сильно зависит от мнений экспертов и оценок внешних факторов, которые могут быть очень субъективны.

3. Основывается на анализе ситуации «сейчас», в данный момент. Спустя некоторое время обстоятельства могут резко измениться, и разработанные стратегии перестанут быть актуальными.

1.4. Специфика образовательных, информационных и экологических проектов

Для **образовательных проектов** характерно следующее:

- тип результата. Важен не столько новый материальный или виртуальный конечный результат в виде устройства технологии или компьютерной программы, сколько знания, умения, навыки, компетенции, способности;

- время получения результата. Могут возникать не только в конце, но и на всех этапах выполнения проекта;

- среда. Часто создается в искусственной образовательной среде, хотя возможны и другие варианты (получение новых навыков при работе в рамках «продуктового» проекта).

Основной особенностью **информационных (IT) проектов** является невещественность их результатов (компьютерные программы и разработки). В связи с этим можно выделить следующие их характерные черты:

- необходимость решения специфических вопросов, связанных с техническими средствами, операционными системами, программным обеспечением, базами данных, сетями и т. п.;

- специфические требования к составу команды (часто нужны узкоспециальные знания и навыки);

- сложности в количественных измерениях трудозатрат;

- наличие в большинстве случаев серьезных конкурентов, что вынуждает строить стратегию «на опережение», активно бороться за заказчиков и т. п.

Интересно, что все основоположники Agile-философии относятся к представителям IT-области.

Наконец, для проектов в областях **экологии, охраны природы и природопользования** можно указать нередкое отсутствие результата, оцениваемого в денежном эквиваленте или какой-то выгоде для людей. В области экологической экспертизы крайне нежелательно как раз применение принципов Agile-философии. Здесь основным подходом должно быть классическое проектное управление. Особенно сложно сочетать в природопользовательских проектах вопросы получения прибыли и необходимость жесткого выполнения экологических ограничений.

1.5. Сетевые модели управления проектами

Критические работы и критические пути

Перейдем к ключевым понятиям, используемым при планировании, реализации и контроле проектов.

Определение 1.6. Работа – действие, выполняемое для достижения цели проекта. При этом речь идет о достижении конкретных результатов на нижнем уровне детализации.

Является основным элементом проектной деятельности. На ее выполнение требуется время, а ее невыполнение или задержка выполнения может привести к отсрочке выполнения других работ. Момент окончания работы означает получение некоторого продукта (результата работы).

Определение 1.7. Веха – это событие или дата в ходе осуществления проекта; данное понятие используется для отображения состояния завершенности тех или иных работ.

Менеджеры используют вехи для обозначения важных промежуточных результатов, которые должны быть достигнуты в процессе реализации проекта.

Последовательность вех часто называется *планом по вехам*. Даты достижения образуют *календарный план по вехам*. Важным отличием от работ является то, что они не имеют длительности. Из-за этого свойства их часто называют *событиями*.

Определение 1.8. Сетевой диаграммой (сетью, PERT-диаграммой) называют графическое изображение работ проекта и их взаимосвязей.

В управлении проектами под словом «сеть» понимают полный комплекс работ и вех с установленными между ними зависимостями. Аббревиатура PERT расшифровывается как Program (Project) Evaluation and Review Technique. Метод был разработан в США в 1958 г. при создании ракетной системы «Поларис».

Классическим вариантом считаются диаграммы Ганта.

Определение 1.9. Диаграмма Ганта – горизонтальная линейная диаграмма, на которой задачи проекта представляются протяженными во времени отрезками, характеризующимися датами начала, окончания, возможными задержками и другими временными параметрами.

Первый формат был разработан Генри Л. Гантом (Henry L. Gantt) в 1910 г.

В основе управления проектом лежит понятие связи между его составляющими – работами.

Определение 1.10. Говорят, что работа A предшествует работе B , если работа B в силу ограничений проекта не может начаться до завершения работы A . Таким образом, работа B может начаться только после завершения работы A . При этом работа A называется *предшественником* работы B , а работа B – *последователем* работы A . Само отношение будем называть *простым отношением предшествования* и обозначать $A \rightarrow B$.

Очевидно, что

- у одной работы может быть несколько (или ни одного) предшественника или последователя;
- простое отношение предшествования обладает свойством транзитивности.

Прямым описанием простых отношений предшествования являются табличные формы.

Самый простой пример. Условно представим строительство дома как совокупность 3 работ: A – строительство фундамента, B – строительство комнат, D – настил крыши.

Таблица последователей имеет следующий вид.

Работа проекта	Работы-последователи
<i>A</i>	<i>B</i>
<i>B</i>	<i>D</i>
<i>D</i>	–

Таблица предшественников:

Работа проекта	Работы-предшественники
<i>A</i>	–
<i>B</i>	<i>A</i>
<i>D</i>	<i>B</i>

При не очень большом числе работ наглядность достигается с помощью сетевых диаграмм-графов. Различают два вида диаграмм.

I. Диаграммы «Вершина-работа»

Известны под названиями *Precedence diagram method* (метод предшествования, PDM).

Пусть в нашем примере строительство дома теперь является совокупностью 4 работ: *A* – строительство фундамента, *B* – строительство комнаты I, *C* – строительство комнаты II, *D* – настил крыши. При этом ни одну из комнат нельзя строить без полностью законченного фундамента, стелить крышу нельзя без полностью построенных комнат, а комнаты можно строить независимо друг от друга. PDM-граф представлен на рис. 1.9.

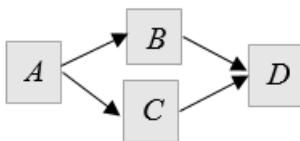


Рис. 1.9. Пример PDM-графа

Соответствующая диаграмма Ганта с отслеживанием зависимостей (рис. 1.10).

Очевидные недостатки метода PDM:

- отсутствие на графике сведений о продолжительности работ;
- большое количество возможных связей при даже относительно небольшом количестве работ.

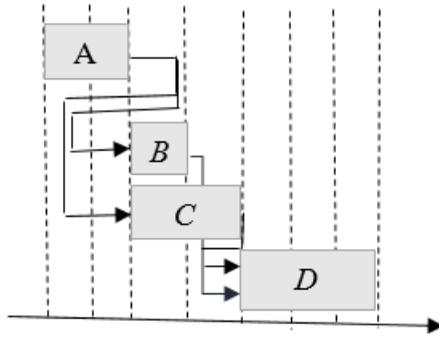


Рис. 1.10. Диаграмма Ганта, соответствующая PDM-графу

Пример. Проект состоит из 2 этапов. На первом необходимо выполнить работы *A*, *B*, *C*; на втором – *D*, *E*, *F*. Ко второму этапу можно перейти только после окончания первого. Из-за предшествования этапов имеем 9 отношений предпочтения.

Чтобы избежать подобной громоздкости можно пойти двумя путями:

- 1) объединить все работы одного этапа в одну «мегаработу»;
- 2) ввести понятие вехи (события), под которым условно можно считать работу нулевой продолжительности (рис. 1.11).

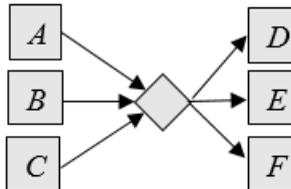


Рис. 1.11. Введение условной работы нулевой продолжительности

Понятие вехи, являющееся вспомогательным и не совсем обязательным в PDM-подходе, становится ключевым в другом варианте.

II. Диаграммы «Ребро-работа»

Известны под названиями *Arrow diagram method* (метод стрелочных диаграмм, ADM).

Вершинами графов служат *события (вехи)*, обозначающие моменты начала (начало стрелки) или окончания (конец стрелки) одной или нескольких работ.

События бывают 3 типов:

- *начальное* (до него не выполняются никакие работы);
- *промежуточное* (должны быть предшествующие уже выполненные работы);
- *концевое* (завершает выполнение проекта).

Есть одна тонкость. Рассмотрим условный пример с 4 работами *A, B, C* и *D*, причем работы *C* и *D* могут начаться только после окончания работ *A* и *B*.

Вводим событие 3, так как нам неизвестно, какое из событий 1 или 2 завершится позже (рис. 1.12). Кроме того, события 4 и 5 не обязательно должны начинаться сразу после окончания события 3. Иногда это обозначают пунктирными стрелками.

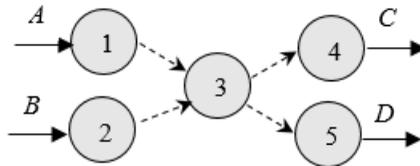


Рис. 1.12. Введение условного события

Если условиться, что любая работа, входящая в событие, может закончиться за некоторое время до наступления события, а любая работа, выходящая из события, может начаться через некоторое время после наступления события, то количество вершин и неизбежно вводимых фиктивных работ можно резко уменьшить (рис. 1.13).

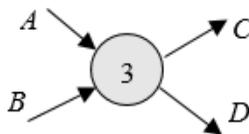


Рис. 1.13. Уменьшение количества вершин

Основными правилами построения диаграмм для ADM-метода являются следующие.

- Все события проекта нумеруются целыми (обычно неотрицательными) числами, желательно без пропусков.
- Должно быть ровно одно начальное событие (в него не входит ни одна стрелка) и ровно одно конечное событие (из него не выходит ни одной стрелки).
- Любая работа проекта должна вести от события с меньшим номером к событию с большим номером (отсюда, в частности, следует, что не может быть замкнутой последовательности работ).
- Диаграмму желательно располагать так, чтобы стрелки были направлены слева направо.

Итак, не имеют прав на существование следующие типы диаграмм (рис. 1.14).

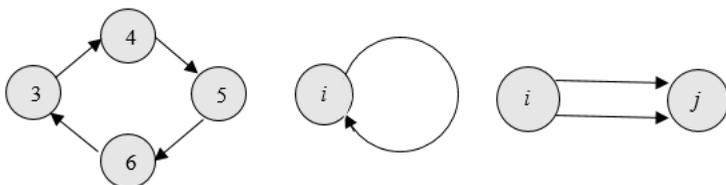


Рис. 1.14. Недопустимые варианты диаграмм

Вернемся к проекту по строительству дома. Напомним, что проект является совокупностью 4 работ: A – строительство фундамента, B – строительство комнаты I, C – строительство комнаты II, D – настил крыши. При этом ни одну из комнат нельзя строить без полностью законченного фундамента, стелить крышу нельзя без полностью построенных комнат, а комнаты можно строить независимо друг от друга.

Введем события:

- 0 – начало проекта;
- 1 – завершение работы A ;
- 2 – завершение работы B ;
- 3 – завершение обеих работ B и C ;
- 4 – завершение проекта.

При этом предшествование события 2 событию 3 не означает, что работа B завершится раньше работы C .

Можно построить несколько разных диаграмм (рис. 1.15).

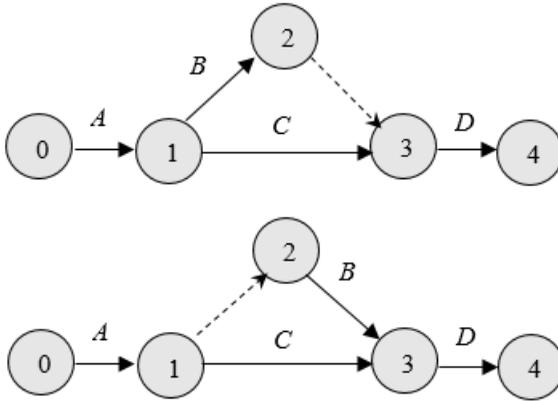


Рис. 1.15. Два варианта диаграмм для одного проекта

Пунктир в первом случае может обозначать, что реально событие 3 наступит строго после события 2. Во втором случае пунктир обозначает, что работу *B* будут делать не сразу с момента выполнения события 1.

Одним из ключевых понятий в сетевых моделях проектов является определение *критического пути*.

Рассмотрим на примере. На месте старого здания планируется строительство многоэтажной парковки. В основе конструкции – металлический каркас. Для сноса предполагается применить взрывные работы. В новом строении необходимы лифты для быстрой доставки людей на верхние этажи. Естественно, работ предстоит много. Выделим укрупненные работы и обозначим их латинскими буквами.

Работа	Описание	Работы-предшественники	Продолжительность работы (в днях)
<i>A</i>	Установить взрывные устройства, подготовить старое здание к взрыву		5
<i>B</i>	Провести эвакуацию окружения		4
<i>C</i>	Подготовить транспорт для вывоза остатков старого здания		3
<i>D</i>	Взорвать старое здание		1

Работа	Описание	Работы-предшественники	Продолжительность работы (в днях)
<i>E</i>	Разобрать образовавшиеся после взрыва завалы, вывезти мусор		7
<i>F</i>	Вырыть котлован для нового здания		12
<i>G</i>	Подвести к зданию электропроводку		15
<i>H</i>	Подготовить опалубку, залить бетон, сформировать фундамент		10
<i>I</i>	Возвести металлический каркас и внешние стены		8
<i>J</i>	Установить электропроводку (на внешних стенах)		15
<i>K</i>	Установить внутренние перегородки		20
<i>L</i>	Смонтировать лифты		7
<i>M</i>	Провести отделочные работы		14

В нашей таблице мы пока не заполнили столбец 3.

Каждая работа может рассматриваться как некоторый отдельный этап, требующий своих материальных и финансовых ресурсов, специализированных кадров и т. п.

Первый возникающий вопрос: сколько времени потребуется для реализации проекта в целом? Простейшим решением будет просуммировать продолжительность всех работ. Получим 121 день. Для большинства проектов такой ответ будет неверным. Он правилен лишь в том случае, когда каждая следующая работа может начаться только после окончания предыдущей и между ними нет никакого перерыва. Все это справедливо, если 3-й столбец нашей таблицы имел бы следующий вид:

Работа	Описание	Работы-предшественники	Продолжительность работы (в днях)
<i>A</i>	Установить взрывные устройства, подготовить старое здание к взрыву	–	5
<i>B</i>	Провести эвакуацию окружения	<i>A</i>	4
<i>C</i>	Подготовить транспорт для вывоза остатков старого здания	<i>A, B</i>	3
<i>D</i>	Взорвать старое здание	<i>A, B, C</i>	1
<i>E</i>	Разобрать образовавшиеся после взрыва завалы, вывезти мусор	<i>A, B, C, D</i>	7
<i>F</i>	Вырыть котлован для нового здания	<i>A, B, C, D, E</i>	12
<i>G</i>	Подвести к зданию электропроводку	<i>A, B, C, D, E, F</i>	15

Работа	Описание	Работы-предшественники	Продолжительность работы (в днях)
<i>H</i>	Подготовить опалубку, залить бетон, сформировать фундамент	<i>A, B, C, D, E, F, G</i>	10
<i>I</i>	Возвести металлический каркас и внешние стены	<i>A, B, C, D, E, F, G, H</i>	8
<i>J</i>	Установить электропроводку (на внешних стенах)	<i>A, B, C, D, E, F, G, H, I</i>	15
<i>K</i>	Установить внутренние перегородки	<i>A, B, C, D, E, F, G, H, I, J</i>	20
<i>L</i>	Смонтировать лифты	<i>A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K</i>	7
<i>M</i>	Провести отделочные работы	<i>A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L</i>	14

С точки зрения управления продолжительностью, такой вид проекта не является интересным. Его PDM-диаграмма имеет последовательную («линейную») структуру.

Посмотрим внимательно на содержание работ. Очевидно, что некоторые можно проводить независимо от других, распараллелить. Уточним применительно к нашему проекту 3-й столбец.

Работа	Описание	Работы-предшественники	Продолжительность работы (в днях)
<i>A</i>	Установить взрывные устройства, подготовить старое здание к взрыву	–	5
<i>B</i>	Провести эвакуацию окружения	–	4
<i>C</i>	Подготовить транспорт для вывоза остатков старого здания	–	3
<i>D</i>	Взорвать старое здание	<i>A, B</i>	1
<i>E</i>	Разобрать образовавшиеся после взрыва завалы, вывезти мусор	<i>C, D</i>	7
<i>F</i>	Вырыть котлован для нового здания	<i>E</i>	12
<i>G</i>	Подвести к зданию электропроводку	<i>E</i>	15
<i>H</i>	Подготовить опалубку, залить бетон, сформировать фундамент	<i>F</i>	10
<i>I</i>	Возвести металлический каркас и внешние стены	<i>H, G</i>	8

Работа	Описание	Работы-предшественники	Продолжительность работы (в днях)
<i>J</i>	Установить электропроводку (на внешних стенах)	<i>I</i>	15
<i>K</i>	Установить внутренние перегородки	<i>I</i>	20
<i>L</i>	Смонтировать лифты	<i>I</i>	7
<i>M</i>	Провести отделочные работы	<i>J, K, L</i>	14

Как это обычно делается в подобных таблицах, мы указываем только непосредственных предшественников работы, т. е. ближайшую предысторию.

Уже отсюда можно видеть, что 121 день – это лишь верхняя граница для общей продолжительности проекта, и ее можно попытаться уменьшить. Для этого как раз удобно применить PERT-диаграмму (рис. 1.16).

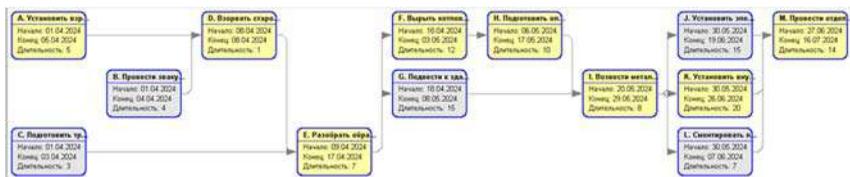


Рис. 1.16. PERT-диаграмма для проекта строительства парковки

Посмотрим на эту диаграмму пока просто с точки зрения здравого смысла. Работы *A* и *B* предшествуют *D*, они независимы друг от друга. Следовательно, они могут быть выполнены за 5 дней (максимальное число из продолжительностей этих работ, т. е. максимум из чисел 4 и 5). После этого нужно перейти к работе *D*, продолжительность которой составляет 1 день. Итак, для *A*, *B* и *D* нам потребуется 6 дней.

На работу *C* требуется 3 дня, но она не зависит от работ *A* и *B*. То есть ее можно провести в течение каких-либо из 6 дней, отведенных на работы *A*, *B* и *D*.

Следовательно, до начала работы *E*, без которой нам не обойтись (разбор завалов), наш проект потребует минимум 6 дней. Прямая сумма строк *A*, *B*, *C*, *D* последнего столбца дает нам 13. То есть уже экономия составила $13 - 6 = 7$ дней.

Работа E займет 7 дней. Пока у нас уже набралось снова 13 дней.

Нам предстоят работы F , G и H , причем работы F и H выполняются последовательно, одна за другой, а работа G от них не зависит. Суммарная продолжительность работ F и H составляет $12 + 10 = 22$ дня, а работа G потребует 15 дней. Понятно, что работу G вполне можно провести во время выполнения F и H . Следовательно, к работе I можно приступить спустя 22 дня после окончания работы E . При этом с момента начала проекта пройдет $13 + 22 = 35$ дней.

Работа I , продолжительность которой составляет 8 дней, неизбежна, ее нельзя распараллелить ни с какой другой. Ее продолжительность составляет 8 дней. Таким образом, в нашем оптимальном плане к моменту окончания работы I проект продлится $35 + 8 = 43$ дня.

После работы I должны быть выполнены J , K , L продолжительностью соответственно 15, 20 и 7 дней. Только после их окончания можно переходить к заключительной работе M . Так как они могут выполняться независимо друг от друга, то 20 дней хватит на выполнение всех работ. Имеем общую продолжительность $43 + 20 = 63$.

Наконец, заключительная работа M занимает 14 дней. Таким образом весь проект займет $63 + 14 = 77$ дней. Сравните с первоначальной оценкой сверху в 121 день.

Часто возникает вопрос об уменьшении сроков выполнения проекта. И здесь важнейшим является определение критической работы.

Определение 1.11. Работа (стадия, этап) выполнения проекта называется *критической*, если ее выполнение не может быть увеличено во времени или отложено без увеличения продолжительности всего проекта.

Вспомним нашу диаграмму (см. рис. 1.16). С точки зрения сокращения общей продолжительности проекта, бессмысленно стремиться к уменьшению продолжительностей работ B , C , G , J , L . В то же время, уменьшение длительности этапов, определяемых работами A , D , E , F , H , K , M , приведет к уменьшению продолжительности проекта.

Вместе критические работы образуют так называемый *критический путь*.

Определение 1.12. *Критическим путем сетевого графика* называют полный путь от исходного до завершающего события

(окончания последней работы), имеющий наибольшую длину (продолжительность) из всех полных путей. Его временная длина определяет срок выполнения всех работ в сетевом графике.

Обратим внимание на то, что при попытке сократить общую продолжительность проекта за счет уменьшения длительности одной или нескольких сетевых работ можно дойти и до изменения критического пути за счет изменения входящих в него критических работ. Например, если время выполнения работы F уменьшить до 3 дней, то суммарная длительность работ F и H составит $3 + 10 = 13$ дней, что меньше продолжительности работы G (15 дней). Следовательно, работа G станет критической, и критический путь изменится.

Отметим также, что критический путь в проекте может быть неединственным.

Скажем, если продолжительность работы L составит также 20 дней, то у нас будет 2 критических пути, один из которых включает работу K , а другой – работу L .

Большинство современных программ управления проектами (в частности, MS Project) автоматически рассчитывает критические пути при вводе соответствующих исходных данных.

Для поиска критических путей существует ряд логически понятных математических методов. Желаящим с ними познакомиться можно рекомендовать книгу [18, глава 4].

Планирование и предварительный анализ проекта в части составляющих его работ должны давать ответы на следующие вопросы.

1. Какой путь является критическим, какова его продолжительность, т. е. длительность всего проекта?
2. Какие допустимые интервалы времени имеются для осуществления некритических этапов (работ) проекта?
3. Как отсрочка (задержка) каждой стадии повлияет на продолжительность всего проекта? С этим вопросом тесно связан анализ рисков проекта.
4. Как можно сократить длительность выполнения проекта?
5. Как скажутся возможные дополнительные риски (сокращение финансовых, материальных и других ресурсов) на времени выполнения проекта?

1.6. Программное обеспечение для управления проектами

Стандартным пакетом программ, обеспечивающим решение большинства рутинных задач, которые возникают при планировании и выполнении проектов, считается пакет MS Project.

В качестве бесплатных вариантов с открытой лицензией, позволяющих реализовать основные функции MS Project, можно рекомендовать пакеты OpenProject и GanttProject.

Остановимся на основных функциях GanttProject.

Инсталляция для компьютеров, работающих под операционной системой MS Windows, производится с официального сайта <https://www.ganttproject.biz/download#download30>.

Базовая версия является бесплатной (кнопка Free Download) в нижней части (рис. 1.17).

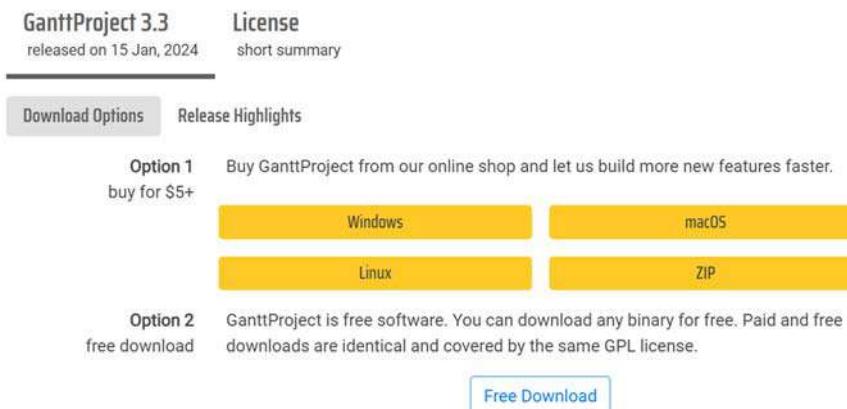


Рис. 1.17. Инсталляция GanttProject

На рис. 1.18 приведен начальный вид экрана при первом запуске установленной программы.

В меню «Правка» / «Настройки» / «Диаграмма Гантта» можем сразу внести некоторые заголовки в разделе «*Всякие мелочи вокруг задач*» (изначально ничего не задано) (рис. 1.19).

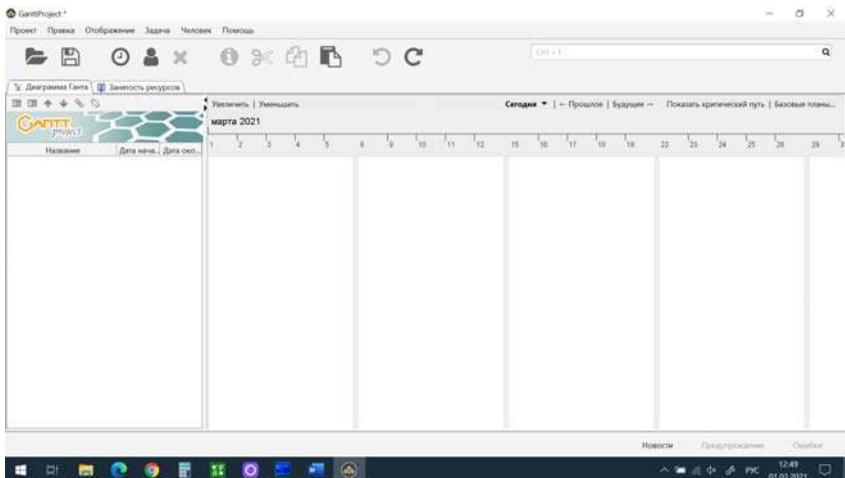


Рис. 1.18. Вид экрана при первом запуске GanttProject

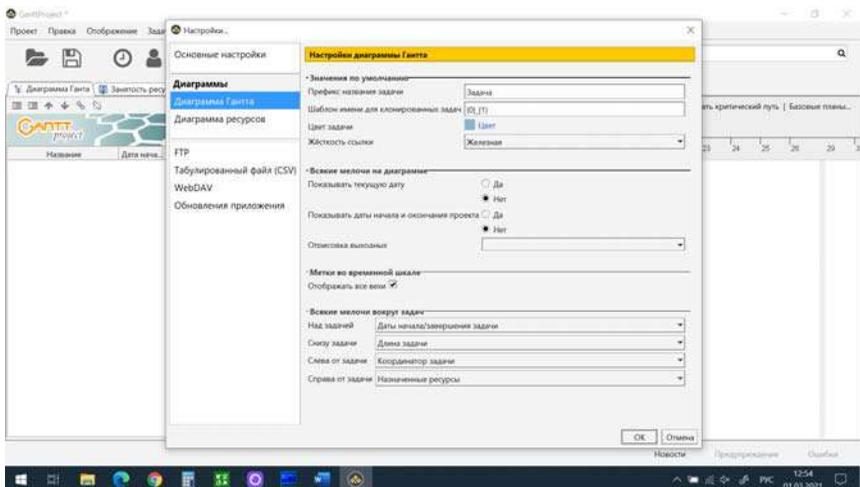


Рис. 1.19. Настройки диаграммы

Потренируемся с задачей о строительстве парковки, рассмотренной в предыдущем разделе.

1. Организуем новый проект (крайняя левая кнопка «Проект» в меню) (рис. 1.20).

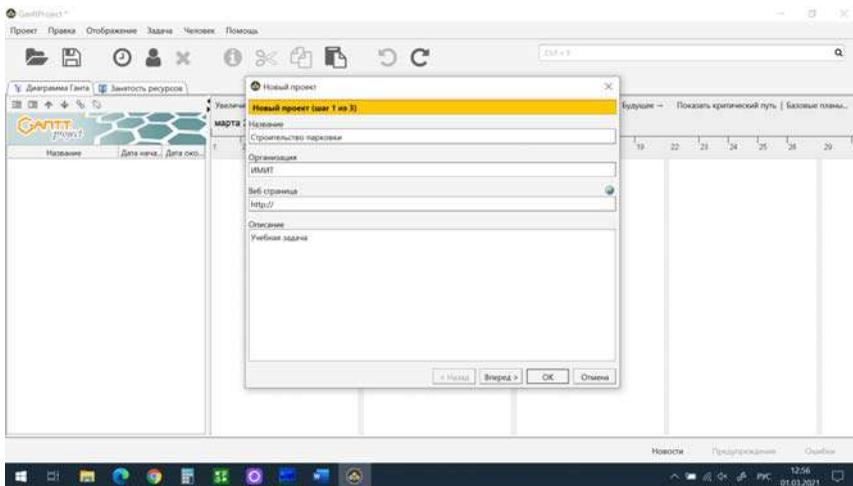


Рис. 1.20. Организация нового проекта в GanttProject

2. Введем задачи, соответствующие нашим 13 работам (от *A* до *M*) (кнопка «Задача» в верхнем меню). Раздел подменю «Свойства задачи» или правая кнопка мыши в левом столбце основного поля (для соответствующей работы) позволяют ввести свойства задания. Ограничимся пока лишь датой начала (сегодняшним днем) и продолжительностью (в днях). Зависимость работ друг от друга в данный момент рассматривать не будем. Скрин экрана на этапе ввода свойств одной конкретной задачи приведен ниже на рис. 1.21.

После ввода данных о всех 13 задачах имеем следующий вид (рис. 1.22).

Все задачи (работы) начинаются в один день, нет зависимостей работ друг от друга. Отметим, что контекстное меню (рис. 1.23), открываемое правой кнопкой мыши на соответствующей работе, позволяет:

- перемещать работы по списку (стрелки «Вверх», «Вниз»);
- делать задачу подзадачей другой работы (стрелка «Уровень вглубь»);
- выполнять стандартные операции копирования, вырезания, вставки и удаления.

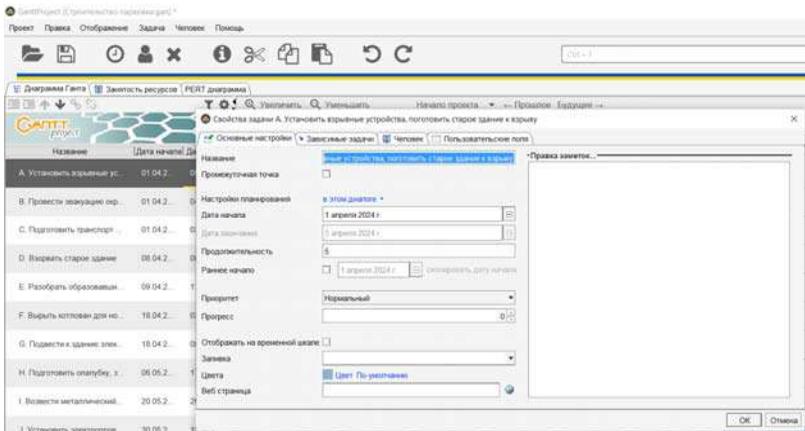


Рис. 1.21. Ввод данных конкретной задачи (работы)

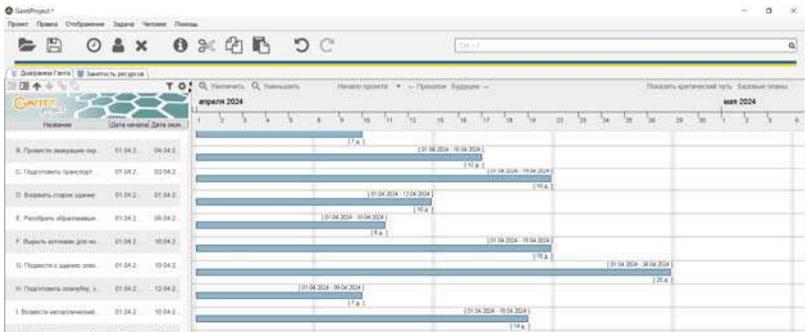


Рис. 1.22. Данные о всех работах без учета зависимостей между ними

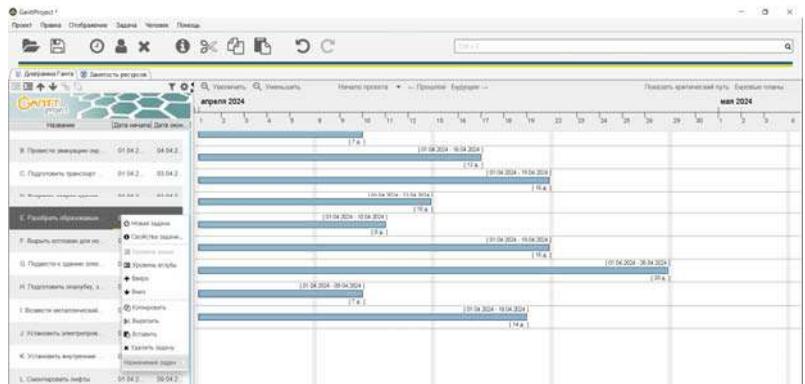


Рис. 1.23. Контекстное меню для конкретной работы

Раздел подменю «Свойства задачи» позволяет вручную ввести начало каждой задачи. Но нам удобнее посмотреть, каким образом учесть зависимость задач друг от друга.

3. Теперь один из самых важных моментов. Нам надо определить логическую последовательность задач. Это осуществляется на основе таблицы с информацией о работах-предшественниках. Достаточно ввести данные только о непосредственно предшествующей задаче (или задачах, так как непосредственных предшественников может быть несколько). Например, задаче *D* предшествуют две независимые друг от друга задачи *A* и *B*. Открываем вкладку «Свойства задачи» для задачи *D* (рис. 1.24).

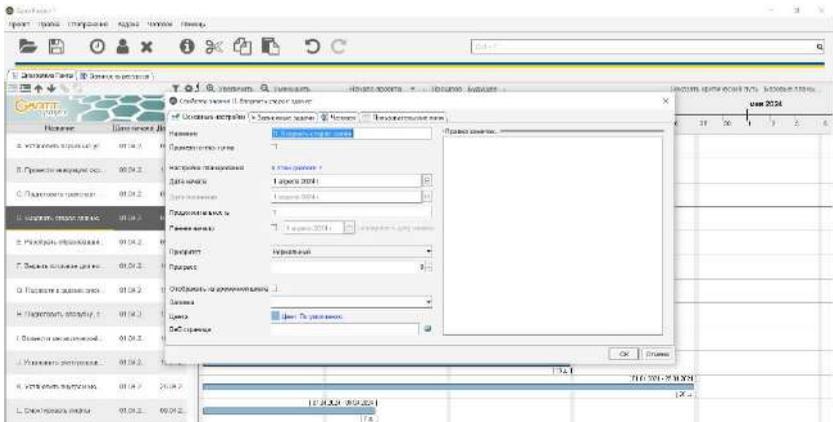


Рис. 1.24. Вкладка «Свойства задачи»

Нажимаем «Добавить» и вводим работы *A* и *B* (рис. 1.25).

В результате на экране мы уже видим часть диаграммы Ганта со связями (рис. 1.26).

Третья слева кнопка главного меню «Отображение» позволяет получить PDM (PERT)-диаграмму (рис. 1.27).

4. Закончим построение диаграмм, указав для каждой работы ее предшественника.

Вспомним, что задаче *E* предшествуют *C* и *D*; задаче *F* – *E*; *G* – *E*; *H* – *F*; *I* – *H* и *G*; *J*, *K*, *L* – *I*; *M* – *J*, *K* и *L*. Регулируя масштаб изображения кнопками «Увеличить», «Уменьшить», получим итоговый вариант диаграммы (рис. 1.28, 1.29).

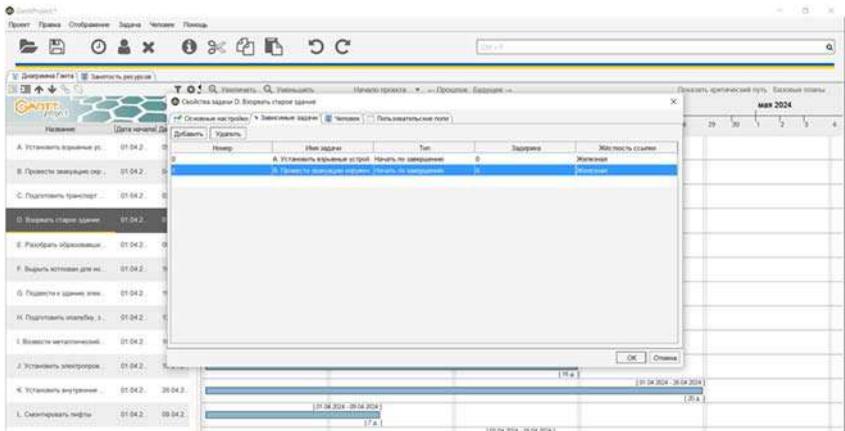


Рис. 1.25. Ввод зависимых работ

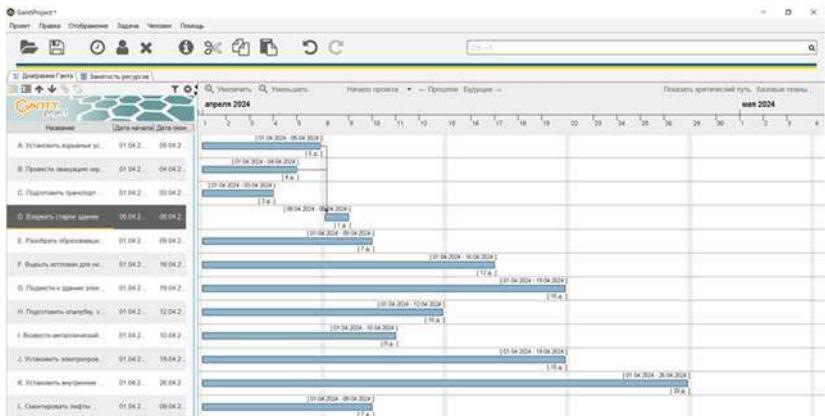


Рис. 1.26. Диаграмма Ганта с учетом введенных зависимостей работ

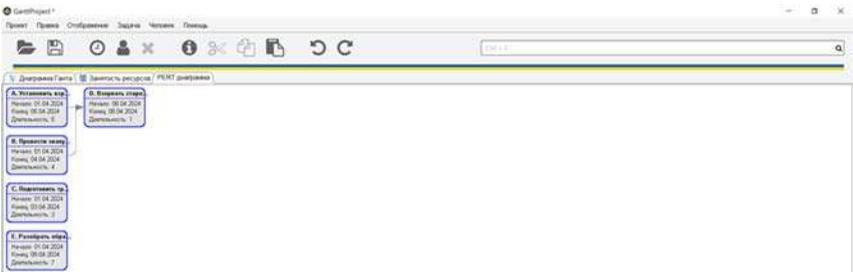


Рис. 1.27. PERT-диаграмма

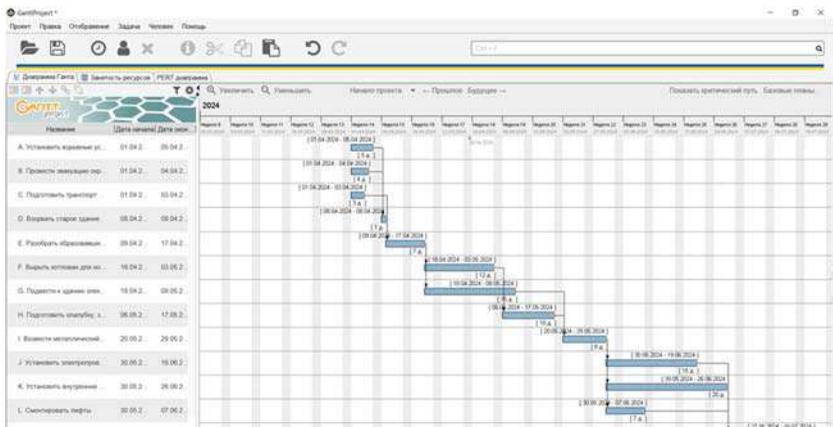


Рис. 1.28. Итоговый вариант диаграммы Ганта

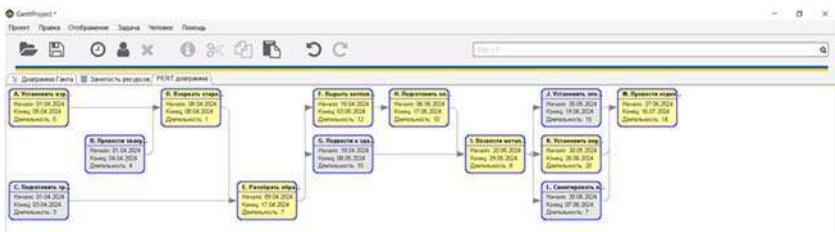


Рис. 1.29. Итоговый вариант PERT-диаграммы

Мы получили два варианта диаграмм, описывающих логическую схему последовательности задач и их продолжительность. Что можно сделать еще?

- Показать критический путь (рис. 1.30).
- Заметим, что на PERT-диаграмме критический путь уже указан (соединяет желтые прямоугольники).
- Назначить исполнителей («Человек» в главном меню).
 - Оценить занятость исполнителей (вкладка «Занятость ресурсов»).
 - Распределить работу исполнителей с учетом их занятости, отпусков и т. п.
 - Автоматически учесть при реализации проекта выходные и праздничные дни.

- Использовать специальный шаблон для проектов по разработке программного обеспечения (есть уже предварительное распределение функций исполнителей).
- Экспортировать текущую информацию о проекте в pdf, html и других форматах (рис. 1.31).

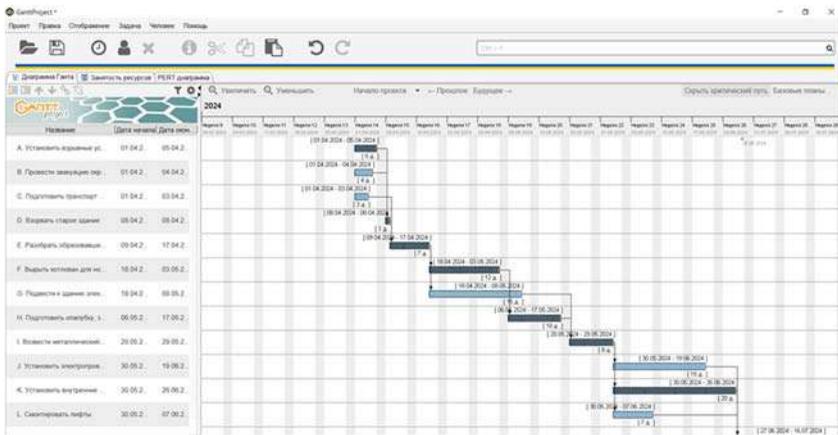


Рис. 1.30. Критический путь

Строительство парковки		1 апр. 2024 г.
		http://
Управляющий проектом		
Сроки проекта		1 апр. 2024 г. - 17 июл. 2024 г.
Выполнено	0%	
Задачи	13	
Исполнители	0	

Рис. 1.31. Пример экспорта информации

Отметим, что построение диаграмм Ганта, являющихся основной календарного планирования проектов, заложено в любом программном обеспечении проектной деятельности (MS Project, OpenProject, Webix Gantt Chart и др.).

Пример диаграммы Ганта в MS Project представлен рис. 1.32.

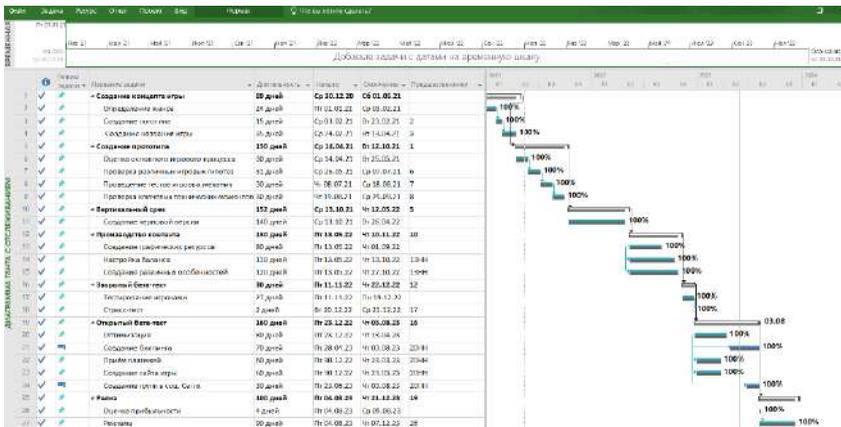


Рис. 1.32. Пример диаграммы Ганта в MS Project

Вопросы и задания к главе 1

1. Какие важные специфические характеристики присущи любому проекту?
2. Перечислите основные элементы ближнего и дальнего окружений проектов. Как связана сфера деятельности проекта с его окружением? Приведите примеры такой связи.
3. Приведите классификацию проектов по различным признакам.
4. Назовите и охарактеризуйте этапы классического проектного управления.
5. В чем суть Agile Manifesto?
6. В чем состоит цель SWOT-анализа в управлении проектами?
7. Какой путь является критическим? Как связаны длина критического пути и продолжительность всего проекта?
8. В чем заключается отличие PDM- и ADM-диаграмм?
9. Какими программными продуктами можно воспользоваться при планировании и выполнении проектов?
10. В приведенной ниже таблице для некоторого проекта указаны наименования работ, их продолжительность в днях и последователи для каждой работы.

Работа	Продолжительность	Последователи
A	a	B, E, H
B	b	C
C	$a + b$	—

Работа	Продолжительность	Последователи
D	4	E, H
E	$b - 1$	C, F
F	$a + 1$	–
G	$a - 1$	H
H	2	C, F, I
I	5	–

Здесь a – количество букв в Вашем имени, b – количество букв в Вашей фамилии.

- Построить для этого проекта таблицу предшественников.
- Построить диаграмму Ганта и PERT-диаграмму проекта.
- Определить критический путь и общую продолжительность проекта с учетом того, что некоторые работы могут выполняться одновременно.
 - Пусть продолжительность каждой работы уменьшится на 1 день. Как изменится продолжительность всего проекта? Обосновать ответ.
 - Пусть продолжительность каждой критической работы уменьшится на 1 день. Как изменится продолжительность всего проекта? Обосновать ответ.
 - Пусть продолжительность каждой работы увеличится на 1 день. Как изменится продолжительность всего проекта? Обосновать ответ.
 - Пусть продолжительность каждой критической работы увеличится на 1 день. Как изменится продолжительность всего проекта? Обосновать ответ.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ

2.1. Обзор математических методов управления проектами

При управлении проектами возникает необходимость решения различных классов математических задач. На этапе инициации проектов используются инструменты ранжирования проектов, обработки экспертных мнений, выбора портфеля проектов. При планировании проектов важны методы анализа сетевых графиков, оптимизация на сетях, планирование расписаний, планирование ресурсов (финансов, кадров, материальных запасов и т. п.), управление качеством и др. На этапе выполнения используются методы мониторинга отклонений от целей или промежуточных показателей успешности проекта («измерение разрывов»), управление рисками, методы перераспределения ресурсов в условиях изменяющихся внутренних и внешних факторов (например, замена оборудования и др.). Наконец, на завершающем этапе крайне важен послепроектный анализ.

Несмотря на большое разнообразие математических методов управления проектами, большинство подходов относится к области *исследования операций*, т. е. *математической теории принятия решений*. Конечно, желательно, чтобы решения были оптимальными. Это означает, что большинство решаемых задач относится к классу задач на поиск экстремумов некоторых функций, являющихся критериями успешности действий, при наличии тех или иных ограничений. В задачах могут также присутствовать или отсутствовать неконтролируемые факторы.

Определение 2.1. Под *операцией* будем понимать действие или последовательность действий, которые производятся для достижения некоторой цели. Операции осуществляются некоторым субъектом, называемым *оперирующей стороной*. Это может быть физическое лицо, группа лиц, руководство предприятием или фирмой или даже целая страна, правительство которой проводит определенные

действия. Словосочетание «исследование операций (Operations Research)» стало устойчивым во время Второй мировой войны, в ходе которой возникла необходимость планирования и осуществления на уровне целых стран громадного количества абсолютно разнородных операций.

С математической точки зрения, класс рассматриваемых задач описывается следующей моделью:

$$F(x, y) \rightarrow \max (\min), \quad x \in X, \quad y \in Y. \quad (2.1)$$

Предполагается, что у оперирующей стороны есть выбор из нескольких вариантов действий. Иначе оптимизационная задача теряет смысл. Выбор осуществляется из множества X , каждый элемент которого соответствует конкретному плану действий и называется *стратегией оперирующей стороны*. Соответственно, все множество называется *множеством стратегий оперирующей стороны*, или *множеством допустимых стратегий*.

Эффективность выбора стратегии оценивается критерием $F(x, y)$, который в большинстве случаев будем считать функцией со значениями в области действительных чисел. Так как значения – это действительные числа, то можно между собой их сравнивать и пытаться искать наибольшие или наименьшие. Одно исключение составляют так называемые *многокритериальные задачи*, в которых максимизируются или минимизируются сразу несколько скалярных критериев.

Традиционной постановкой будем считать задачу на максимум. Задачи на минимум легко сводятся к задачам на максимум умножением целевой функции (критерия) на -1 . Принципиальным отличием задачи (2.1) от классических оптимизационных задач является то, что на результат (значение критерия $F(x, y)$) влияет не только выбор допустимой стратегии $x \in X$, но и действие других факторов $y \in Y$, которые не контролируются оперирующей стороной (*неконтролируемые факторы*). Остановимся на их классификации, которая была разработана советским математиком Юрием Борисовичем Гермейером. Хотя она и не является общепризнанной в мировой литературе, но помогает разобраться в природе неконтролируемых факторов.

Классификация неконтролируемых факторов

I. Фиксированные факторы. Факторы, которые не контролируются оперирующей стороной, но значения которых к моменту совершения операций известны. Например, решение о введении налога с 2021 г. на банковские вклады, превышающие 1 млн руб., еще в 2020 г. повлияло на текущие стратегии инвесторов.

II. Случайные фиксированные факторы. Здесь речь идет о неконтролируемых факторах, являющихся случайными величинами. Предполагается, что для этих случайных величин известны законы распределения или, по крайней мере, их основные характеристики (математическое ожидание, дисперсия и т. п.).

III. Неопределенные факторы. К ним относятся все остальные виды факторов, которые в свою очередь делятся на несколько больших групп.

A. Неопределенные факторы, связанные с действием *других оперирующих сторон* (или только одной стороны). В случае военных действий – это *стратегии противника*.

B. Часто в явном виде физически не существует других оперирующих сторон (могут действовать природные факторы – засуха, ливни и т. п.). В некоторых случаях их так много, что действия каждой стороны просто невозможно описать (стихия рынка в экономике). Все эти факторы называются *природными факторами*, причем «природа» может пониматься в обобщенном смысле (например, тот самый рынок).

B. Факторы, отражающие *нечеткость знания цели* или критерия эффективности. Сюда, в частности, относятся многокритериальные задачи, когда оперирующая сторона хочет добиться сразу нескольких целей. В этом случае формально функция $F(x, y)$ в (2.1) является векторной, т. е. принимает значения из R^m .

Сделаем два замечания.

Замечание 1. Если неконтролируемых факторов нет, т. е. множество Y является пустым, тогда (2.1) превращается в классическую оптимизационную задачу. В частности, если при этом $X \subset R^n$, а F – скалярная функция со значениями в области действительных чисел, то (2.1) – это задача математического программирования.

Замечание 2. В одной и той же модели могут фигурировать одновременно несколько разных неконтролируемых факторов, относящихся к одной и той же или же разным категориям, т. е. возможен вариант

$$Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_k,$$

в котором фигурирует k разных неконтролируемых факторов.

Пример. Продавец решает вопрос о приобретении оптовой партии товара для последующей розничной перепродажи. Доход от продажи единицы товара составляет 20 долл. Расходы на приобретение, транспортировку и хранение товара составляют 12 долл. за единицу товара, если количество товара в партии меньше 1000 единиц. Если же количество товара в партии больше или равно 1000 единиц, то расходы составляют 11 \$ за единицу товара. Спрос является случайной величиной, распределенной по равномерному закону на отрезке $[500, 1500]$. Составить модель операции, считая целью продавца максимизацию его прибыли.

Решение. Будем придерживаться следующей схемы. Составить модель операции – это означает, что нужно ответить на следующие вопросы.

1. Кто (что) является оперирующей стороной? В нашем случае – продавец, который одновременно является и оптовым покупателем.

2. Что является стратегиями оперирующей стороны и множеством стратегий оперирующей стороны? Стратегии – количество товаров в партии. По смыслу задачи X – это множество целых неотрицательных чисел.

3. Что является неконтролируемыми факторами и каково их множество? После ответа на эти вопросы надо определить, к какому классу (классам) они относятся. По смыслу задачи неконтролируемый фактор – это спрос, множество $Y = [500, 1500]$. Так как в условиях говорится о том, что случайная величина спроса распределена по равномерному закону, то мы имеем дело со случайным фиксированным неконтролируемым фактором.

4. Что является критерием эффективности действий оперирующей стороны? После ответа на данный вопрос надо поставить задачу на максимум или минимум.

Критерий эффективности – это прибыль, которую требуется максимизировать:

$$F(x, y) = 20 \min(x, y) - 12x, \text{ если } x < 1000 \text{ и}$$

$$F(x, y) = 20 \min(x, y) - 11x, \text{ если } x \geq 1000.$$

Минимум в обоих выражениях – это просто наименьшее значение из двух чисел. Продавец реализует заказанное количество единиц партии товара, если заказ меньше спроса. А если заказ превышает спрос, то удастся реализовать только количество товара, соответствующее спросу.

Рассмотрим модель (2.1). Предполагаем, что оперирующая сторона заинтересована в максимизации критерия $F(x, y)$. Как оценить эффективность той или иной стратегии x оперирующей стороны? Если есть две разные стратегии, то какая из них лучше? Если мы сможем ответить на эти вопросы, то нам будет ясно, как решать задачу на максимум функции F .

В силу наличия неконтролируемых факторов однозначного ответа на эти вопросы нет. Имеются лишь определенные подходы к оценке эффективности стратегий. Одним из самых распространенных является следующий. Будем предполагать, что для оперирующей стороны все складывается наихудшим образом. Так как цель заключается в максимизации критерия F , то будет хуже, если значение этого критерия меньше. Если z – конкретная стратегия оперирующей стороны, $z \in X$, то наихудшим вариантом при применении этой стратегии будет

$$\omega(z) = \inf_{y \in Y} F(z, y).$$

Это число и будем считать оценкой эффективности стратегии z . Отметим еще раз: для любой стратегии оценка эффективности – это нижняя грань, т. е. какое-либо число или же $-\infty$.

Умея оценить эффективность каждой стратегии, мы теперь в состоянии перейти к задаче поиска наиболее эффективной стратегии, т. е. к задаче следующего вида:

$$\inf_{y \in Y} F(x, y) \rightarrow \max, \quad x \in X. \quad (2.2)$$

Глобальный максимум в этой задаче может не достигаться, но всегда существует супремум, который называется *наилучшим гарантированным результатом* (НГР):

$$\text{НГР} = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y).$$

Если внешний супремум в НГР достигается на некоторой стратегии x^* , т. е. x^* – точка глобального максимума в задаче (2.2), то x^* называется *оптимальной гарантирующей стратегией*.

Гарантирующий подход широко применяется в теории игр, когда одновременно действуют несколько оперирующих сторон, цели которых различны. Данный метод не является единственно возможным. Его можно рассматривать как некоторую «оценку снизу», максимизацию наилучших результатов.

Кратко остановимся на классификации оптимизационных задач, возникающих при управлении проектами. Если множество Y в (2.1) является пустым, а $X \subset R^n$, то эта задача является задачей математического программирования.

В частности, если функция F линейна, а множество X задано линейными ограничениями, то (2.1) есть задача *линейного программирования*, для которой эффективные методы давно разработаны. Классическим считается симплекс-метод, позволяющий в большинстве случаев найти точное решение путем последовательного направленного перебора угловых точек множества X [4, 5]. Однако в последние десятилетия особенно эффективным показал себя *алгоритм Кармаркара*, основанный на идее приближения к решению изнутри допустимой области (класс так называемых методов внутренних точек). Соответствующие функции, реализующие данный алгоритм, выбраны в качестве основных при решении задач линейного программирования в пакетах MATLAB и Scilab. При управлении проектами часто возникают специфические типы задач линейного программирования, для которых разработаны специальные методы. Это прежде всего задачи *транспортного* типа, задачи *целочисленного линейного программирования* (методы ветвей и границ, методы отсечений) [4] и др.

Если множество X задано линейными ограничениями, а целевая функция F является квадратичной (обычно в случае задачи на максимум требуют ее вогнутость, т. е. неположительную определенность соответствующей квадратичной формы), то задача относится к классу задач *квадратичного программирования*. Путем модификаций методов линейного программирования точное решение может быть в большинстве случаев найдено за конечное число итераций.

Классическим аналитическим методом решения общих задач нелинейного программирования является правило множителей Лагранжа. Его применение заключается в решении системы алгебраических уравнений, получаемых после дифференцирования функции

Лагранжа. Отметим, что необходимо найти все решения нелинейной системы. А затем еще требуются дополнительные исследования, чтобы понять, чем на самом деле являются найденные подзрительные на экстремум точки. Для реальных нелинейных задач большой размерности это обычно весьма сложно. Поэтому в случае общих нелинейных задач используется широкая палитра методов, основанных на идеях аппроксимации первого или второго порядков (градиентные методы, методы Ньютона и их модификации), проекции (метод проекции градиентов), штрафов и барьеров (методы штрафных и барьерных функций), седловых точек (численные методы множителей Лагранжа), отсечений, перебора и др. [4, 9]. Большинство методов позволяет найти решение лишь приближенно, причем очень часто приходится ограничиться локальным, а не глобальным решением задачи.

Целый ряд математических задач принятия решений, возникающих при управлении проектами, носит динамический (развитие во времени) и/или сетевой характер. Для подобных задач весьма эффективным является метод *динамического программирования*.

2.2. Методы динамического программирования

Динамическое программирование – специальный математический аппарат, позволяющий осуществлять многошаговое оптимальное планирование управленческих процессов. Данный подход был предложен в конце 40-х годов XX в. американским математиком Ричардом Эрнстом Беллманом⁸ (Richard Ernest Bellman, 1920–1984).

Термин «программирование», как и в случае математического программирования, правильнее было бы заменить словом «планирование». Сам Р. Беллман рассматривал предложенный им подход не как строгий метод, который можно однозначно алгоритмизировать, а именно как подход, прием решения многошаговых задач.

Общая формальная постановка может быть описана следующим образом. Имеется некоторая управляемая система, которую нужно перевести из состояния X_0 в состояние X_n с суммарным оп-

⁸ Подробное описание биографии Р. Беллмана имеется в англоязычном варианте Википедии: https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_E._Bellman.

тимальным (минимальным или максимальным) значением критерия эффективности. Процесс перевода можно разбить на конечное число (n) шагов (рис. 2.1).

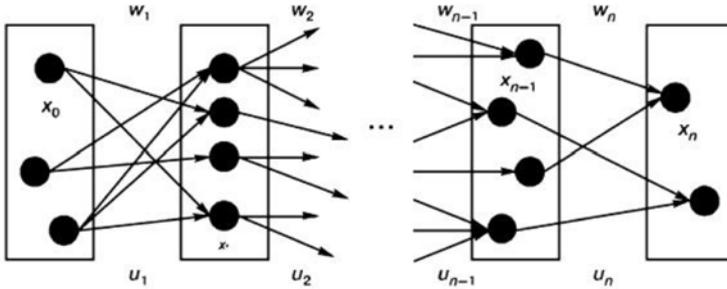


Рис. 2.1. Общая схема многошаговой системы управления

Перевод системы из состояния X_{i-1} в состояние X_i осуществляется с помощью управления u_i . При этом возможны *разные* значения управлений на каждом шаге, приводящие на следующем этапе к состояниям, характеризующимся *разными* параметрами. Эффективность перехода оценивается некоторым критерием эффективности $W_i(X_{i-1}, u_i)$, как правило, зависящим от управления.

Подход Беллмана применим только при выполнении двух основных предположений.

Предположение 1. Условие аддитивности целевой функции (критерия эффективности). Общая эффективность всего процесса перевода системы из состояния X_0 в состояние X_n является суммой функций, определяющих эффективность на каждом шаге процесса:

$$F = \sum_{i=1}^n W_i(X_{i-1}, u_i).$$

Предположение 2. Отсутствие влияния предыстории. Состояние X_i , в которое пришла система на i -м шаге, однозначно определяется состоянием системы X_{i-1} на предыдущем шаге и выбором управления u_i . По аналогии с теорией игр конкретное значение целевой функции, т. е. критерия эффективности (на каждом шаге или в сумме по нескольким шагам), иногда называется *выигрышем*.

Фундаментальным результатом является принцип оптимальности Беллмана: *каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, управление на этом шаге нужно выбрать так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным или минимальным (в зависимости от того, ставится ли задача на максимум или минимум).*

Значит, планируя многошаговую операцию, надо выбирать управление на каждом шаге с учетом всех его будущих последствий на еще предстоящих. Не так, чтобы выигрыш именно на данном шаге был максимален (минимален), а так, чтобы была максимальной (минимальной) сумма выигрышей на всех оставшихся до конца шагах плюс данный.

Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов есть один, который может планироваться без оценки будущего, – последний.

Поэтому процесс динамического программирования обычно разворачивается от конца к началу. Для этого нужно сделать все возможные предположения о том, чем кончился предпоследний шаг, и для каждого из этих предположений найти условное оптимальное управление, приводящее к последнему состоянию («условное», так как оно выбирается из условия, что предпоследний шаг кончился так-то и так-то, возможно, не оптимально с точки зрения задачи в целом). С формальной точки зрения, это означает составление рекуррентных соотношений. Для определенности рассмотрим задачу на максимум. Пусть $F_i(x)$ – оптимальное значение критерия эффективности на шаге i . Тогда формализованный процесс поиска решения задачи имеет вид:

$$F_{i-1}(x) = \max_{u_i} (W_i(X_{i-1}, u_i) + F_i(X_i)), i = n, n-1, \dots, 1.$$

Области, в которых применим метод динамического программирования, достаточно широки. Основные типы задач:

- поиск оптимальных маршрутов;
- задачи оптимального инвестирования;
- задачи замены оборудования;
- задачи составления расписаний;
- оптимизация на сетях и графах;
- игровые задачи;
- задачи математической теории оптимального управления;

- решение дифференциальных уравнений с частными производными и т. д.

Задачи первого и второго типов наиболее ярко и просто иллюстрируют суть общего подхода Р. Беллмана в применении к задачам управления проектами.

I. Задача о поиске оптимального маршрута (задача о кратчайшем пути)

На рис. 2.2 приведена схема дорог, по которым можно добраться через промежуточные пункты из пункта 1 в пункт 7. Сами пункты обозначены окружностями. Рядом с каждым маршрутом указана его протяженность в километрах. Нужно найти кратчайший путь. Иногда в подобных задачах вместо расстояния указывается время или расход топлива. Казалось бы, приведенную ниже задачу легко решить методом простого перебора. Это действительно так, но сейчас нашей целью является не решение конкретной задачи, а изучение подхода. Поэтому и выбран простейший пример.

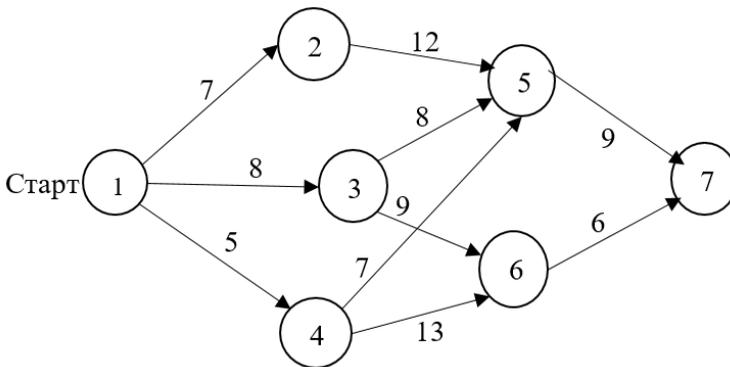


Рис. 2.2. Простейший сетевой график

Итак, что является этапами, шагами, состоянием и управлением?

Можно выделить 4 этапа. Множество состояний на начальном (нулевом) этапе содержит пункт 1. Обозначим множество следующим образом: $X_0 = \{1\}$. Из начального состояния можно перейти за один шаг только в пункты 2, 3 или 4. Это и будут варианты состояний для этапа № 1: $X_1 = \{2, 3, 4\}$. Из всех вариантов состояний этапа № 1 можно перейти только в пункты 5 и 6, т. е. $X_2 = \{5, 6\}$. Наконец,

$X_3 = \{7\}$. Управлением является выбор конкретного пути перехода из состояния X_{i-1} в состояние X_i .

Важным является выполнение обоих предположений, при которых применим метод динамического программирования. Действительно, итоговое пройденное расстояние есть сумма расстояний, пройденных на каждом из этапов (*предположение 1*). Если мы пришли в какой-то конкретный пункт, то выбор дальнейшего пути не зависит от предыстории, т. е. того, как мы попали в этот пункт (*предположение 2*). Начинаем с конца. Планируем последний шаг – переход от состояния X_2 к состоянию X_3 .

Этап 2 → Этап 3

Путь	Расстояние, пройденное на этапе	Суммарное расстояние
5 → 7	9	9
6 → 7	6	6

Здесь пока никакого выбора нет. Суммарное расстояние совпадает с расстоянием, пройденным на этапе, так как мы проанализировали всего лишь один шаг.

Ключевым в данной задаче является переход от состояния X_1 к состоянию X_2 . В пункт 5 можно попасть из предыдущего состояния тремя разными способами, а в пункт 6 – двумя. Проанализируем все пять вариантов.

Этап 1 → Этап 2

Путь	Расстояние, пройденное на этапе	Суммарное расстояние
2 → 5 → 7	12	21
3 → 5 → 7	8	17
4 → 5 → 7	7	16
3 → 6 → 7	9	15
4 → 6 → 7	13	19

Просьба обратить внимание на *существенный* момент. Мы не знаем еще общего оптимального пути. Но уже сейчас можем сказать следующее:

1) если бы оптимальный путь привел нас в пункт 2, то дальше выбирать не из чего (одна дорога);

2) если бы оптимальный путь привел нас в пункт 3, то далее возможны два варианта (дороги): $3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ и $3 \rightarrow 6 \rightarrow 7$. Путь $3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ никак не может быть частью оптимального пути (17 км). Действительно, если мы попали в пункт 3, то надо дальше идти по пути $3 \rightarrow 6 \rightarrow 7$. Суммарное расстояние составит 15 км. Поэтому из дальнейшего рассмотрения путь $3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ исключаем;

3) если бы оптимальный путь привел нас в пункт 4, то дальше нужно идти по маршруту $4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ (16 км). Маршрут $4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ заведомо не может быть частью оптимального пути, так как его длина равна 19 км.

Выделенные черной заливкой маршруты исключаем из дальнейшего рассмотрения. Именно здесь *важно выполнение предположения 2*. Если мы попали в какой-то пункт, то предыстория нас не интересует: оптимальной должна быть оставшаяся часть маршрута.

Остается этап перехода от состояния X_0 к состоянию X_1 . Проанализируем варианты с учетом того, что на предыдущем этапе два варианта мы вычеркнули.

Этап 0 → Этап 1

Путь	Расстояние, пройденное на этапе	Суммарное расстояние
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7$	7	28
$1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$	5	21
$1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	8	23

Таким образом, оптимальным является маршрут $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$. Его протяженность 21 км.

II. Задача о черепашке

Черепашке нужно попасть из пункта А в пункт В, где ее ждет вкусное яблоко (рис. 2.3). На каждом углу она может поворачивать только на север или восток (либо вверх, либо вправо). Время движения по каждой улице указано на рисунке. Требуется найти путь, суммарное время движения по которому минимально.

Рассмотрим квадрат $n \times n$, где n – число участков (улиц) на стороне квадрата. При $n = 3$ задача легко решается вручную. Для нахождения ответа потребуется 100 операций сложения и 19 операций сравнения. Для $n = 8$ метод полного перебора потребует 193 050 операций сложения и 12 869 операций сравнения. Компьютер с быстродействием 1 млн операций в секунду справится с задачей за

0,2 секунды. Однако уже при $n = 30$ количество операций для реализации метода полного перебора равно астрономическому числу $6 \cdot 10^{18}$. Компьютер с тем же быстродействием придется поставить вычислять на 200 000 лет.

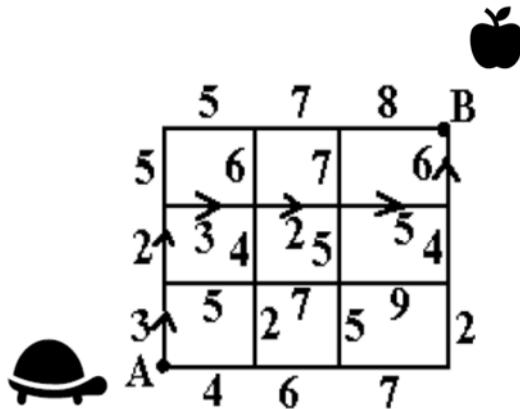


Рис. 2.3. Иллюстрация к задаче о черепашке

Этот эффект иногда называют *проклятием размерности*. В то же время метод динамического программирования позволяет быстро найти решение для задач гораздо большей размерности. Эффект достигается за счет удаления заведомо неоптимальных путей (нет необходимости анализа ненужных ветвей). В этом и есть преимущество подхода перед методом полного перебора.

III. Задача оптимального инвестирования

Предположим, что рассматривается вопрос об инвестициях в 3 различные фирмы средств суммарным объемом 50 млн руб. При этом в каждую фирму могут быть инвестированы средства, кратные 10 млн руб. В приведенной ниже таблице указаны данные по ожидаемому росту доходов в зависимости от объемов инвестиций (в абсолютных величинах). Здесь, конечно, существенна нелинейная зависимость прироста дохода от величины вкладываемых средств. Требуется найти оптимальное распределение инвестиций между фирмами, при котором суммарный прирост дохода будет наибольшим.

Объем инвестиций (млн руб.)	Прирост дохода		
	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0
10	3	6	4
20	5	8	5
30	9	9	11
40	11	15	12
50	17	19	18

Решение в этом учебном примере также можно получить простым перебором. Но уже очевидно, что если инвестиции будут кратны, скажем, не 10 млн руб., а 1 млн руб., то размер таблицы вырастет в 10 раз, и катастрофически возрастет число операций. Также понятно, что ответ типа «вложить все 50 млн руб. во вторую фирму, так как при этом вложении мы получим максимальный прирост дохода 19» может не оказаться верным. Например, тот же результат дает вложение 30 млн руб. в третью фирму и 20 млн руб. во вторую ($11 + 8 = 19$).

Попытаемся применить метод динамического программирования. С формальной точки зрения, в рассматриваемой задаче нет динамики. Деньги вкладываются одновременно, т. е. процесс не развивается во времени. Этот пример иллюстрирует другой возможный способ выделения этапов. Предполагается, что мы сначала инвестируем в первую фирму, затем в первую и вторую вместе, а потом во все три фирмы.

Итак, при инвестировании в первую фирму (**шаг 1**) все понятно:

X	0	10	20	30	40	50
F_1	0	3	5	9	11	17

Первая строка таблицы – объемы инвестиций. Вторая – соответствующий прирост дохода. Фактически, мы просто переписали в виде строк первые два столбца исходной таблицы.

На шаге 2 мы будем предполагать, что деньги вкладываются в первую и вторую фирмы. Через f_i будем обозначать доходность на соответствующем этапе, а F_i – суммарную доходность на предыдущих этапах. Очевидно, что для первого этапа $f_1 = F_1$. Проанализируем шаг 2 подробнее.

1. При нулевых суммарных инвестициях $F_2(0) = 0$.

2. Суммарные инвестиции 10 между двумя фирмами можно распределить следующими способами: 10 отдать первой фирме и ничего второй или 0 первой и 10 второй:

$$F_2(10) = \max\{f_2(0) + F_1(10); f_2(10) + F_1(0)\} = \\ = \max\{3; 6\} = 6.$$

Запомним, что максимальное значение 6 достигается в варианте (0; 10).

3. Суммарные инвестиции 20 могут быть распределены уже тремя разными способами: (20; 0), (10; 10) или (0; 20).

$$F_2(20) = \max\{f_2(0) + F_1(20); f_2(10) + F_1(10); \\ f_2(20) + F_1(0)\} = \max\{5; 9; 8\} = 9.$$

4. Для распределения суммарных инвестиций в размере 30 млн руб. есть уже четыре способа: (30; 0), (20; 10), (10; 20) или (0; 30).

$$F_2(30) = F_2(30) = \max\{f_2(0) + F_1(30); f_2(10) + F_1(20); \\ f_2(20) + F_1(10); f_2(30) + F_1(0)\} = \max\{9; 11; 11; 9\} = 11.$$

5. 40 млн руб. можно распределить пятью различными способами: (40; 0), (30; 10), (20; 20), (10; 30) или (0; 40).

$$F_2(40) = \max\{f_2(0) + F_1(40); f_2(10) + F_1(30); \\ f_2(20) + F_1(20); f_2(30) + F_1(10); f_2(40) + F_1(0)\} = \\ = \max\{11; 15; 13; 12; 15\} = 15.$$

6. Наконец, все 50 млн руб. между двумя фирмами можно распределить шестью способами: (50; 0), (40; 10), (30; 20), (20; 30), (10; 40) или (0; 50).

$$F_2(50) = F_2(50) = \max\{f_2(0) + F_1(50); f_2(10) + F_1(40); \\ f_2(20) + F_1(30); f_2(30) + F_1(20); \\ f_2(40) + F_1(10); f_2(50) + F_1(0)\} = \\ = \max\{17; 17; 17; 14; 18; 19\} = 19.$$

В результате имеем таблицу:

x	0	10	20	30	40	50
F_2	0	6	9	11	15	19

На этом шаге мы, фактически, осуществили полный перебор. Эффект от применения метода динамического программирования проявится лишь на следующем, последнем шаге.

Кстати, если фирм было бы всего две, то задача решена: максимальный рост дохода равен 19, и он достигается в варианте (0; 50), т. е. при вложении всех денег во вторую фирму.

Шаг 3. Распределяем инвестиции между тремя фирмами. Здесь уже не нужны никакие промежуточные варианты. Нам нужно сразу подсчитать $F_3(50)$.

На предыдущем шаге мы определили оптимальное распределение инвестиций при условии, что деньги вкладываются только в две первые. Поэтому объем вычислений равен объему вычислений в пункте 6 предыдущего шага. Варианты вложений остаются теми же: (50; 0), (40; 10), (30; 20), (20; 30), (10; 40) или (0; 50). Но первое число в каждой скобке – это *суммарные* вложения уже в первые две фирмы вместе, а второе число – инвестиции в третью фирму. Таким образом, с увеличением количества фирм объем вычислений растет лишь *линейно*, что в задачах большой размерности имеет громадный эффект по сравнению с методом перебора. Итак,

$$\begin{aligned} F_3(50) &= \max\{f_3(0) + F_2(50); f_3(10) + F_2(40); \\ &f_3(20) + F_2(30); f_3(30) + F_2(20); \\ &f_3(40) + F_2(10); f_3(50) + F_2(0)\} = \\ &= \max\{19; 19; 16; 20; 18; 18\} = 20. \end{aligned}$$

Следовательно, максимальный рост дохода равен 20. Оптимальное распределение инвестиций между фирмами определяем «обратным ходом». Максимум на третьем шаге достигается при вложении 30 млн руб. в третью фирму и оптимальном значении $F_2(20)$ предыдущего шага. Возвращаясь к пункту 3 предыдущего шага, видим, что это оптимальное значение достигается при вложениях 10 млн руб. в первую фирму и 10 млн руб. во вторую.

Ответ. Максимальный рост дохода в размере 20 млн руб. будет получен при следующем плане инвестиций: 10 млн руб. в первую фирму, 10 млн руб. во вторую и 30 млн руб. в третью.

Попробуйте самостоятельно составить рекуррентную формулу для данной задачи.

Отметим важный момент. При добавлении еще одной или нескольких фирм не нужно снова решать задачу «с нуля». Можно использовать уже найденное решение. Мы это видели, когда определили оптимальный вариант инвестиций сначала для первых двух фирм.

Решение. Введем переменные x_{ij} – время, в течение которого станок M_i будет занят изготовлением продукции $П_j$ ($i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$). Математическая модель состоит из целевой функции

$$f = 0,24x_{11} + 0,26x_{12} + 0,4x_{13} + 0,28x_{21} + 0,49x_{22} + 0,15x_{23} + 0,31x_{31} + 0,27x_{32} + 0,38x_{33} \rightarrow \min,$$

ограничений по номенклатуре продукции

$$0,78x_{11} + 0,42x_{21} + 0,25x_{31} \geq 500,$$

$$0,44x_{12} + 0,48x_{22} + 0,42x_{32} \geq 250,$$

$$0,12x_{13} + 0,36x_{23} + 0,29x_{33} \geq 260,$$

ограничений на время работы станков

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1300,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1300,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1300,$$

условий неотрицательности на переменные

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}.$$

На рис. 2.4 представлены данные перед запуском «Поиск решения» MS Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Производительность					
2		Виды продукции:					
3	Станки	$П_1$	$П_2$	$П_3$			
4	M_1	0,78	0,44	0,12			
5	M_2	0,42	0,48	0,36			
6	M_3	0,25	0,42	0,29			
7	правая часть ограничений	500	250	260			
8	знак	\geq	\geq	\geq			
9	левая часть ограничений	=СУММПРОИЗВ(B4:B6;B19:B21)	=СУММПРОИЗВ(C4:C6;C19:C21)	=СУММПРОИЗВ(D4:D6;D19:D21)			
10							
11		Стоимость					
12		Виды продукции:					
13	Станки	$П_1$	$П_2$	$П_3$			
14	M_1	0,24	0,26	0,4			
15	M_2	0,28	0,49	0,15			
16	M_3	0,31	0,27	0,38			
17							
18					Ограничения		
19					левая часть	знак	правая часть
20	x_{ij}	0	0	0	=СУММ(B19:D19)	\leq	1300
21		0	0	0	=СУММ(E20:D20)	\leq	1300
22		0	0	0	=СУММ(E21:D21)	\leq	1300
23				$f(x) =$	=СУММПРОИЗВ(B14:D16;B19:D21)		

Рис. 2.4. Исходные данные в формате MS Excel

Для поиска решения воспользуемся симплекс-методом, окно с параметрами поиска представлено на рис. 2.5.

Параметры поиска решения ×

Оптимизировать целевую функцию:

До: Максимум Минимум Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

\$B\$9:\$D\$9 >= \$B\$7:\$D\$7
\$E\$19:\$E\$21 <= \$G\$19:\$G\$21

Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Рис. 2.5. Окно параметров поиска решения в MS Excel

На рис. 2.6 показано итоговое решение.

Ответ. Для продукции Π_1 , Π_2 на станке M_1 потребуется 641,03 и 568,18 единиц времени соответственно, для продукции Π_3 на станке M_2 – 722,22 единиц времени. Станок M_3 не будет задействован в производстве продукции.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Производительность					
2		Виды продукции:					
3	Станки	Π_1	Π_2	Π_3			
4	M_1	0,78	0,44	0,12			
5	M_2	0,42	0,48	0,36			
6	M_3	0,25	0,42	0,29			
7	правая часть ограничений	500	250	260			
8	знак	\geq	\geq	\geq			
9	левая часть ограничений	500	250	260			
10							
11		Стоимость					
12		Виды продукции:					
13	Станки	Π_1	Π_2	Π_3			
14	M_1	0,24	0,26	0,4			
15	M_2	0,28	0,49	0,15			
16	M_3	0,31	0,27	0,38			
17					Ограничения		
18					левая часть	знак	правая часть
19	x_{ij}	641,03	568,18	0,00	1209,21	\leq	1300
20		0,00	0,00	722,22	722,22	\leq	1300
21		0,00	0,00	0,00	0,00	\leq	1300
22							
23				$f(x)=$	409,91		

Рис. 2.6. Итоговое решение для примера 1

2. Задача о назначениях

Пример 2. Пять человек M_1, M_2, \dots, M_5 способны выполнить пять заданий T_1, T_2, \dots, T_5 . В силу разной квалификации на выполнение требуется различное время (приведено в табл., в часах). Как следует распределить людей по заданиям, чтобы минимизировать время выполнения?

Сотрудники	Задания				
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
M_1	10	5	9	18	11
M_2	13	19	6	12	14
M_3	3	2	4	4	5
M_4	18	9	12	17	15
M_5	11	6	14	19	10

Решение. Введем переменные x_{ij} – назначение i -го сотрудника на j -ю работу, т. е.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{назначили } i \text{ сотрудника на } j \text{ задание,} \\ 0, & \text{не назначили } i \text{ сотрудника на } j \text{ задание.} \end{cases}$$

Целевая функция имеет следующий вид:

$$f(x) = 10x_{11} + 5x_{12} + 9x_{13} + 8x_{14} + 11x_{15} + 13x_{21} + 19x_{22} + 6x_{23} + 12x_{24} + 14x_{25} + 3x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 4x_{34} + 5x_{35} + 18x_{41} + 9x_{42} + 12x_{43} + 17x_{44} + 15x_{45} + 11x_{51} + 6x_{52} + 14x_{53} + 19x_{54} + 10x_{55} \rightarrow \min.$$

Ограничения:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 1, \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 1, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 1, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1. \end{aligned}$$

Воспользуемся программной надстройкой «Поиск решения» MS Excel, данные приведены на рис. 2.7.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1		Время выполнения								
2		Задания								
3	Сотрудники	T1	T2	T3	T4	T5				
4	M1	10	5	9	18	11				
5	M2	13	19	6	12	14				
6	M3	3	2	4	4	5				
7	M4	18	9	12	17	15				
8	M5	11	6	14	19	10				
9		Распределение сотрудников по заданиям								
10		Задания					Ограничения			
11	Сотрудники	T1	T2	T3	T4	T5	лев. часть	знак	прав. часть	
12	M1						=СУММ(B12:F12)	=	1	
13	M2						=СУММ(B13:F13)	=	1	
14	M3						=СУММ(B14:F14)	=	1	
15	M4						=СУММ(B15:F15)	=	1	
16	M5						=СУММ(B16:F16)	=	1	
17	лев. часть	=СУММ(B17:B16)	=СУММ(C17:C16)	=СУММ(D17:D16)	=СУММ(E17:E16)	=СУММ(F17:F16)				
18	знак	=	=	=	=	=				
19	прав. часть	1	1	1	1	1				
20										
21						min f(x)	=СУММПРОИЗВ(B4:F6;B12:F16)			

Рис. 2.7. Исходные данные в MS Excel для примера 2

Найденное решение представлено на рис. 2.8.

Ответ. Сотрудников следует распределить по заданиям следующим образом: $x_{11} = x_{23} = x_{34} = x_{42} = x_{55} = 1$, при таком распределении будет затрачено 39 часов.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Время выполнения								
2	Задания								
3	Сотрудники	T1	T2	T3	T4	T5			
4	M1	10	5	9	18	11			
5	M2	13	19	6	12	14			
6	M3	3	2	4	4	5			
7	M4	18	9	12	17	15			
8	M5	11	6	14	19	10			
9	Распределение сотрудников								
10	Задания					Ограничения			
11	Сотрудники	T1	T2	T3	T4	T5	лев.часть	знак	прав.часть
12	M1	1	0	0	0	0	1	=	1
13	M2	0	0	1	0	0	1	=	1
14	M3	0	0	0	1	0	1	=	1
15	M4	0	1	0	0	0	1	=	1
16	M5	0	0	0	0	1	1	=	1
17	лев.часть	1	1	1	1	1			
18	знак	=	=	=	=	=			
19	прав.часть	1	1	1	1	1			
20									
21						min f(x)=	39		

Рис. 2.8. Решение примера 2

3. Задача управления запасами

Основные задачи, решаемые при управлении запасами, – что, когда и в каких количествах заказывать, чтобы поддерживать оптимальный уровень запасов. Для этого нужно минимизировать следующую функцию затрат.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Суммарные} \\ \text{затраты системы} \\ \text{управления} \\ \text{запасами} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Затраты на} \\ \text{приобретение} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Затраты на} \\ \text{оформление} \\ \text{заказа} \end{array} \right) + \\ + \left(\begin{array}{c} \text{Затраты на} \\ \text{хранение} \\ \text{заказа} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Потери от} \\ \text{дефицита} \\ \text{запаса} \end{array} \right)$$

Все стоимости должны быть выражены как функции искомого объема заказа и интервала времени между заказами.

Пример 3. Фирме по строительству судов требуется 30 000 заклепок в год, расходуемых с постоянной интенсивностью. Организационные издержки составляют 0,75 тыс. руб. за партию, цена одной заклепки – 15 руб. Издержки на хранение одной заклепки оценены в 12,5 % ее стоимости. Найти оптимальный размер партии поставки, оптимальную продолжительность цикла и оптимальное число поставок за год.

Решение.

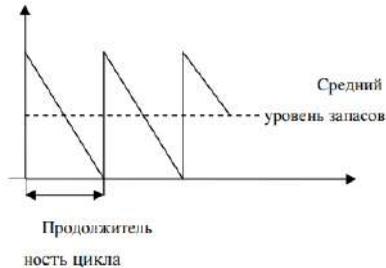
Обозначим: g – годовой спрос; $g = 30\,000$.

b – организационные издержки; $b = 0,75$ тыс. руб.

s – цена товара; $s = 0,015$ тыс. руб.

h – издержки содержания запасов; $h = 0,015 \cdot 0,125 = 0,001875$ тыс. руб.

q – размер партии поставки.



Общие издержки в течение года: $C = C_1 + C_2 + C_3$, где C_1 – общие организационные издержки; C_2 – стоимость товаров; C_3 – общие издержки содержания запасов.

$$C_1 = \frac{g}{q} \cdot b, \text{ где } \frac{g}{q} \text{ – количество партий; } C_1 = \frac{30000}{q} \cdot 0,75 = \frac{22500}{q};$$

$$C_2 = s \cdot g; C_2 = 0,015 \cdot 30\,000 = 450;$$

$$C_3 = h \cdot \frac{q}{2}, \text{ где } \frac{q}{2} \text{ – среднее количество запасов на складе;}$$

$$C_3 = 0,00125 \cdot \frac{q}{2}.$$

$$\text{Имеем } C = \frac{22500}{q} + 450 + 0,00125 \cdot \frac{q}{2}.$$

Продифференцируем функцию издержек C , чтобы найти q , при котором C принимает минимальное значение

$$C' = -\frac{22500}{q^2} + 0,000625,$$

$$-\frac{22500}{q^2} + 0,000625 = 0, \quad q^2 = 36\,000\,000, \quad q = 6000.$$

$C''(6000) > 0$, следовательно, при $q_{\text{опт}} = 6000$ издержки минимальны.

n – число поставок, $n_{\text{опт}} = \frac{g}{q_{\text{опт}}} = \frac{30000}{6000} = 5$; $t_{\text{опт}} = \frac{365}{n_{\text{опт}}} = \frac{365}{5} = 73$ дня.

Ответ. Оптимальный размер партии составляет 6000 заклепок; число поставок – 5; продолжительность цикла – 73 дня.

Пример 4. Определить оптимальное количество вагонов n в поезде, везущем топливо на ТЭЦ, если дефицит топлива недопустим, ежедневный расход топлива составляет 36 вагонов, стоимость доставки не зависит от числа вагонов и составляет 2400 денежных единиц, а стоимость простоя поезда – 24 денежных единицы за вагон в сутки. Кроме того, определить, как часто должен приходить поезд. В решении привести рассуждения, обосновывающие используемые формулы. В ответе привести полученные значения оптимального количества вагонов n в поезде, а также оптимальное число дней T перерыва между поездами.

Решение. Для этой задачи используем модель Уилсона управления запасами, для которой выполняются требования:

– интенсивность потребления является априорно известной и постоянной величиной;

– заказ доставляется со склада, на котором хранится ранее произведенный товар;

– время поставки заказа является известной и постоянной величиной;

– каждый заказ поставляется в виде одной партии;

– затраты на осуществление заказа не зависят от размера заказа;

– затраты на хранение запаса пропорциональны его размеру;

– отсутствие запаса (дефицит) является недопустимым.

Начальные данные модели:

$v = 36$ (вагонов) – скорость расходования запасов;

$s = 24$ (за вагон в сутки) – стоимость простоя, затраты на хранение запаса;

$K = 2400$ – затраты на осуществление заказа, включающие оформление и доставку заказа.

Оптимальный размер заказа определяется по формуле

$$n = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2400 \cdot 36}{24}} = 60\sqrt{2} \approx 85 \text{ вагонов.}$$

Оптимальное число дней между поставками:

$$T = \frac{n}{v} = \frac{60\sqrt{2}}{36} \approx 2.$$

Ответ. $n = 85$ вагонов, $T = 2$ дня.

Пример 5. Годовой спрос на баночную тушенку, которой торгуют на оптовом рынке, оценивается в 60 000 банок. Стоимость подачи заказа составляет 600 руб. за заказ, стоимость банки равна 240 руб., а годовая стоимость ее хранения составляет 20 % ее стоимости. Ввиду высокого качества товара продавец допускает дефицит. Годовые издержки из-за нехватки товара оцениваются в 1500 руб./ед. год. Определить: а) каков оптимальный объем партии заказа; б) каков максимальный дефицит; в) каков максимальный уровень запасов на складе; г) каковы минимальные годовые издержки запаса.

Решение. Исходные данные:

$$D = 60\,000 \text{ шт.};$$

$$H = 0,2 \cdot 240 = 48 \text{ руб.};$$

$$K = 600 \text{ руб.};$$

$$B = 1500 \text{ руб./ед. год.}$$

Оптимальный размер заказа в модели с дефицитом определяется по формуле

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{H} \frac{(B+H)}{B}},$$
$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 60000 \cdot 600}{48} \frac{(1500 + 48)}{1500}} \approx 1244 \text{ шт.}$$

Максимальный уровень запасов на складе

$$S^* = \sqrt{\frac{2DK}{H} \frac{B}{(B+H)}},$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 60000 \cdot 600}{48} \frac{1500}{(1500 + 48)}} \approx 1206 \text{ шт.}$$

Максимальный дефицит равен $Q^* - S^* = 1244 - 1206 = 38$ шт., минимальные годовые издержки запаса

$$C = \frac{S^2}{2QH'}$$

$$C = \frac{1206^2}{2 \cdot 1244 \cdot 48} = 12,18 \text{ руб.}$$

Ответ. Оптимальный объем партии заказа – 1244 шт., максимальный дефицит – 38 шт., максимальный уровень запасов на складе – 1206 шт., минимальные годовые издержки запаса – 12,18 руб.

Пример 6. Проиллюстрируем применение классического метода решения задач нелинейного программирования. Инвестор собирается вложить в три проекта 29 млрд руб. Ожидаемый доход составляет $0,2\sqrt{x_1}$ – от инвестиций в первый проект, $0,3\sqrt{x_2}$ – от инвестиций во второй проект и $0,4\sqrt{x_3}$ – от инвестиций в третий проект. Как распределить средства между проектами, чтобы ожидаемый суммарный доход был максимальным?

Решение. Из условия задачи переменные x_j – количество денежных средств, которые собирается вложить в j проект инвестор, $j = \overline{1,3}$. В нашем случае – 29 млрд руб. Будем считать, что именно столько и будет инвестировано (не больше и не меньше), поэтому ограничение будет следующим:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 29.$$

Ожидаемый суммарный доход выразим через целевую функцию

$$f(x) = 0,2\sqrt{x_1} + 0,3\sqrt{x_2} + 0,4\sqrt{x_3} \rightarrow \max.$$

Полученная нелинейная задача является классической задачей оптимизации, которую можно решить методом множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = 0,2\sqrt{x_1} + 0,3\sqrt{x_2} + 0,4\sqrt{x_3} - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 29).$$

Находим стационарные точки функции Лагранжа из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{0,2}{2\sqrt{x_1}} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{0,3}{2\sqrt{x_2}} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = \frac{0,4}{2\sqrt{x_3}} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x_1 + x_2 + x_3 - 29) = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $x_1 = 4$, $x_2 = 9$, $x_3 = 16$ при $\lambda = 0,05$. Проверим, будет ли в найденной точке экстремум, для этого найдем частные производные второго порядка только по переменным $x_j, j = \overline{1,3}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} &= -\frac{0,05}{\sqrt{x_1^3}}, & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} &= -\frac{0,3}{4\sqrt{x_2^3}}, & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} &= -\frac{0,1}{\sqrt{x_3^3}}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} &= 0, \text{ для } i \neq j, & i &= \overline{1,3}, & j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

Составим матрицу Гессе

$$\begin{pmatrix} 0,05 & 0 & 0 \\ -\frac{0,05}{\sqrt{x_1^3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{0,3}{4\sqrt{x_2^3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{0,1}{\sqrt{x_3^3}} \end{pmatrix}.$$

В точке с координатами $x_1 = 4$, $x_2 = 9$, $x_3 = 16$ определим знаки главных угловых миноров матрицы Гессе

$$M_1 < 0; \quad M_2 > 0; \quad M_3 < 0.$$

Матрица Гессе является отрицательно определенной, поэтому найденная точка будет точкой условного максимума. Значение целевой функции в точке условного экстремума $f(4, 9, 16) = 2,9$.

Легко проверяется, что целевая функция $f(x)$ рассматриваемой задачи является вогнутой (достаточно вычислить матрицу вторых производных этой функции и убедиться в ее неположительной определенности). Множество ограничений задачи определяется одним линейным ограничением типа равенства (плоскость), т. е. является выпуклым. Любая точка максимума вогнутой функции на выпуклом множестве является точкой глобального максимума, что и требуется по условиям задачи. Отметим также, что задачу можно решить и без применения правила множителей Лагранжа. Для этого нужно исключить одну из переменных, воспользовавшись линейным ограничением-равенством.

Ответ. Инвестор при вложении 4 млрд руб. в первый проект, 9 млрд руб. во второй проект и 16 млрд руб. в третий проект получает максимальный доход 2,9 млрд руб.

Пример 7. На комплексную целевую программу регионального развития, включающую в себя 6 подпрограмм (условные наименования «альфа», «сигма», «гамма», «дельта», «омега», «каппа»), выделено 150 млн у. е. Уровень финансирования s_i , необходимый для выполнения каждой подпрограммы в полном объеме, а также их минимально допустимые уровни финансирования приведены в таблице.

	Альфа	Сигма	Гамма	Дельта	Омега	Каппа
Необходимое финансирование, млн у. е	20	30	10	40	50	30
Минимально допустимый уровень финансирования, %	20	30	20	25	25	30
Минимально допустимый уровень финансирования, млн у. е	4	9	2	10	12,5	9

Заметим, если сложить необходимое финансирование по всем программам (оно составит 180 млн у. е.), то получим недофинансирование в объеме 30 млн у. е.

Принято допущение, что степень выполнения подпрограммы при выделении на нее суммы в размере x_i составит $q_i = \frac{x_i}{s_i}$,

$0 \leq x_i \leq s_i$. Для оценки важности подпрограммы сформирована группа из трех экспертов. Необходимо найти такое распределение

общей суммы финансирования по подпрограммам, чтобы степень выполнения всей программы была максимальной.

Результаты оценки важности подпрограммы каждым из экспертов представлены в приведенных ниже таблицах. 0 – i -я подпрограмма менее важна, чем j -я подпрограмма; 1 – важности i -й и j -й подпрограмм совпадают; 2 – i -я подпрограмма более важна, чем j -я подпрограмма.

Подпрограммы	Альфа	Сигма	Гамма	Дельта	Омега	Каппа	Сумма баллов
Альфа		0	1	0	0	0	1
Сигма	2		0	0	2	1	5
Гамма	1	2		0	2	1	6
Дельта	2	2	2		2	2	10
Омега	2	0	0	0		2	4
Каппа	2	1	1	0	0		4
Общая сумма баллов							30

Подпрограммы	Альфа	Сигма	Гамма	Дельта	Омега	Каппа	Сумма баллов
Альфа		0	1	0	0	0	1
Сигма	2		2	0	0	1	5
Гамма	1	0		0	2	0	3
Дельта	2	2	2		2	2	10
Омега	2	2	0	0		1	5
Каппа	2	1	2	0	1		6
Общая сумма баллов							30

Подпрограммы	Альфа	Сигма	Гамма	Дельта	Омега	Каппа	Сумма баллов
Альфа		0	0	0	1	0	1
Сигма	2		2	0	1	1	6
Гамма	2	0		0	2	1	6
Дельта	2	2	2		2	2	10
Омега	1	1	0	0		0	2
Каппа	2	1	0	0	2		5
Общая сумма баллов							30

На основе экспертных оценок рассчитываем важности подпрограмм w_i :

$$w_i = \frac{\text{Сумма баллов } i\text{-й подпрограммы}}{\text{Общая сумма баллов}}$$

Результаты обработки экспертных оценок представлены в приведенной ниже таблице.

Эксперты	Подпрограммы						Сумма
	Альфа	Сигма	Гамма	Дельта	Омега	Каппа	
Эксперт 1	0,03	0,17	0,20	0,33	0,13	0,13	1,00
Эксперт 2	0,03	0,17	0,10	0,33	0,17	0,20	1,00
Эксперт 3	0,03	0,20	0,20	0,33	0,07	0,17	1,00
Итоговые важности подпро- грамм	0,03	0,18	0,17	0,33	0,12	0,17	1,00

В этой таблице итоговые важности подпрограмм являются средними арифметическими важностей, рассчитанных по экспертным оценкам. Для нахождения коэффициентов важности w_i был использован упрощенный метод парных сравнений со шкалой отношений из трех градаций.

В качестве критерия выполнения всей программы возьмем функцию:

$$Q = \sum_{i=1}^6 w_i q^{1/p},$$

где p – коэффициент принимает значения 0,3; 1; 3. Заметим, что при $p = 1$ функция будет линейной.

Выпишем задачу, которую необходимо решить. Целевая функция

$$Q = 0,03 \left(\frac{x_1}{20}\right)^{1/p} + 0,18 \left(\frac{x_2}{30}\right)^{1/p} + 0,17 \left(\frac{x_3}{10}\right)^{1/p} + \\ + 0,33 \left(\frac{x_4}{40}\right)^{1/p} + 0,12 \left(\frac{x_5}{50}\right)^{1/p} + 0,17 \left(\frac{x_6}{30}\right)^{1/p} \rightarrow \max,$$

ограничения на объем финансирования

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 150, \\ 4 \leq x_1 \leq 20, \quad 9 \leq x_2 \leq 30, \quad 2 \leq x_3 \leq 10, \\ 10 \leq x_4 \leq 40, \quad 12,5 \leq x_5 \leq 50, \quad 9 \leq x_6 \leq 30.$$

Воспользуемся программной надстройкой «Поиск решения» MS Excel, в которой реализован метод обобщенного приведенного градиента. Результаты расчетов представлены в табл. 2.1–2.3.

Таблица 2.1

Оптимальное распределение финансовых средств при $p = 0,3$

Эксперты	Подпрограммы					
	Альфа	Сигма	Гамма	Дельта	Омега	Каппа
Объем выделенных финансовых средств	20	30	10	40	20	30
Степень выполнения подпрограммы	1	1	1	1	0,4	1
Степень выполнения всей программы	0,89					

Таблица 2.2

Оптимальное распределение финансовых средств при $p = 1$

Эксперты	Подпрограммы					
	Альфа	Сигма	Гамма	Дельта	Омега	Каппа
Объем выделенных финансовых средств	4	30	10	40	36	30
Степень выполнения подпрограммы	0,2	1	1	1	0,72	1
Степень выполнения всей программы	0,94					

Таблица 2.3

Оптимальное распределение финансовых средств при $p = 3$

Эксперты	Подпрограммы					
	Альфа	Сигма	Гамма	Дельта	Омега	Каппа
Объем выделенных финансовых средств	6,6	30	10	40	33,4	30
Степень выполнения подпрограммы	0,33	1	1	1	0,67	1
Степень выполнения всей программы	0,98					

Пример 8. Проиллюстрируем применение метода динамического программирования. Решить задачу об оптимальном распределении 5 станков между тремя производственными участками, эффективность их использования задана в таблице.

Количество станков	Эффективность использования станков		
	участок 1	участок 2	участок 3
0	0	0	0
1	4	2	2
2	4	4	3
3	5	6	5
4	5	6	6
5	6	7	7

Решение. Обозначим u_i – количество станков, выделяемых i -му участку, $i = \overline{1,3}$. Тогда эффективность i -го участка будет равна $F_i(u_i)$, а суммарная эффективность на всех участках составит

$$F(u_1, u_2, u_3) = \sum_{n=1}^3 F_i(u_i).$$

Задача состоит в максимизации функции $F(u_1, u_2, u_3)$ при ограничениях

$$u_1 + u_2 + u_3 = 5, \quad u_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Это задача математического программирования. Если переменные u_i изменяются непрерывно, а функции $F_i(u_i)$ – гладкие, то она может быть решена классическими методами, с использованием правила множителей Лагранжа. В задаче распределяются станки, они не делимы (станок – единое целое), поэтому переменные u_i изменяются дискретно. Функции $F_i(u_i)$ заданы таблично. В этих случаях классические методы не применимы.

Считаем, что распределение станков по участкам производится поэтапно: на первом шаге выделяются станки 1-му участку, на втором шаге – 2-му, на третьем – 3-му. Этапы распределения занумеруем числами $k = \overline{1,3}$. Так как участков три, то $n = 3$.

Определим переменные состояния и управления процессом распределения на k -м шаге. Пусть часть станков распределена между участками номер $1, 2, \dots, k - 1$. Тогда состоянием x_k процесса на k -м шаге будем считать остаток станков из общего объема

равного 5, который можно распределить в оставшиеся участки с номерами $k, k + 1, \dots, n$. Управлением u_k процессом распределения на шаге k будет служить количество станков в k -й участок. На следующем $k + 1$ шаге объем нераспределенных средств будет равен

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - u_k, & k = \overline{1, 3} \\ x_1 &= 5, \end{aligned} \quad (2.3)$$

так как на первом шаге доступно к распределению все количество станков.

Управляющая переменная u_k удовлетворяет ограничению

$$0 \leq u_k \leq x_k,$$

так как количество станков, распределенных в k -й участок, не может превосходить остаток свободных станков на k -м шаге.

Критерий качества управления выражает суммарную эффективность на всех участках и будет равен

$$J(u) = \sum_{k=1}^3 F_k(u_k) \rightarrow \max.$$

Требуется найти числа u_1^*, u_2^*, u_3^* – оптимальное количество станков на участках, чтобы максимизировать критерий $J(u)$.

Введем последовательность функций

$$W_k(x) = \max[F_k(u_k) + F_{k+1}(u_{k+1}) + \dots + F_n(u_n)], \quad k = \overline{1, n}$$

при условии $u_1 + u_2 + u_3 = x$.

Эти функции выражают максимальную эффективность, которая может быть получена на предприятиях $k, k + 1, \dots, n$ от распределения станков в количестве x . При $k = 1$ и $x = 5$ получается функция $W_1(5) = \max J(u)$. Сразу найти значение $W_1(5)$ при таких значениях k и x невозможно, но можно определить $W_3(x)$ – максимальную эффективность на последнем 3-ем участке от распределения x единиц станков. При $k = n$

$$W_n(x) = \max F_n(u_n), \quad u_n = x,$$

следовательно $W_n(x) = F_n(x)$. Весь оставшийся ресурс вкладывается в n -й участок. Рекуррентные соотношения обратной прогонки будут такими:

$$W_k(x) = \max_{0 \leq u_k \leq x} [F_k(u_k) + W_{k+1}(x - u_k)], \quad k = n - 1, n - 2, 1. \quad (2.4)$$

Вычисления при $k = 3$ запишем в табл. 2.4

Таблица 2.4

Метод динамического программирования при $k = 3$

x	$W_3(x)$	$u_3^*(x)$
0	0	0
1	2	1
2	3	2
3	5	3
4	6	4
5	7	5

Найдем теперь $W_2(x)$ – максимальную эффективность от распределения оставшихся станков x между вторым и третьим участками.

Для нахождения $W_2(x)$ воспользуемся формулой (2.4) при $k = 2$:

$$W_2(x) = \max_{0 \leq u_2 \leq x} [W_3(2)]. \quad (2.5)$$

Так как u_2 принимает только целые значения, то для вычисления максимума в (2.5) достаточно подсчитать выражение $F_2(u_2) + W_3(x - u_2)$ при значениях $u_2 = 0, 1, 2, \dots, x$ и выбрать наибольшее из полученных чисел. Одновременно определяется и элемент $u_2^*(x)$, на котором этот максимум достигается. Эту операцию надо проделать для всех $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. При этом числа $W_3(x)$ берутся из приведенной выше таблицы. Таким образом, последовательно найдем

при $x = 0$:

$$u_2 = 0; W_2(0) = F_2(0) + W_3(0) = 0; u_2^*(0) = 0;$$

при $x = 1$:

$$u_2 = 0, 1; W_2(1) = \max\{F_2(0) + W_3(1), F_2(1) + W_3(0)\} = \max\{2, 2\} = 2; u_2^*(1) = \{0, 1\};$$

при $x = 2$:

$$u_2 = 0, 1, 2; W_2(2) = \max\{F_2(0) + W_3(2), F_2(1) + W_3(1), F_2(2) + W_3(0)\} = \max\{3, 4, 4\} = 4; u_2^*(2) = \{1, 2\};$$

при $x = 3$:

$$u_2 = 0, 1, 2, 3; W_2(3) = \max\{F_2(0) + W_3(3), F_2(1) + W_3(2), F_2(2) + W_3(1), F_2(3) + W_3(0)\} = \max\{5, 5, 6, 6\} = 6; u_2^*(3) = \{2, 3\};$$

при $x = 4$:

$$u_2 = 0, 1, 2, 3, 4; ; W_2(4) = \max\{F_2(0) + W_3(4), F_2(1) + W_3(3), F_2(2) + W_3(2), F_2(3) + W_3(1), F_2(4) + W_3(0)\} = \\ = \max\{6, 7, 7, 8, 6\} = 8; \quad u_2^*(4) = 3;$$

при $x = 5$:

$$u_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5; ; W_2(5) = \max\{F_2(0) + W_3(5), F_2(1) + W_3(4), F_2(2) + W_3(3), F_2(3) + W_3(2), F_2(4) + W_3(1), F_2(5) + W_3(0)\} = \max\{7, 8, 9, 9, 7, 7\} = 9; \quad u_2^*(5) = \{2, 3\}.$$

Полученные данные занесем в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Метод динамического программирования при $k = 2$

x	$W_2(x)$	$u_2^*(x)$
0	0	0
1	2	{0, 1}
2	4	{1, 2}
3	6	{2, 3}
4	8	3
5	9	{2, 3}

Переходим к вычислению искомой величины $W_1(5) = J(u^*)$ – максимальной эффективности распределения 5 станков на первый, второй и третий участки. При $k = 1$, $x = 5$

$$W_1(5) = \max[F_1(u_1) + W_3(5 - u_1)] \text{ при } 0 \leq u_1 \leq 5.$$

Чтобы найти максимум, достаточно подсчитать $F_1(u_1) + W_3(5 - u_1)$ при $u_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и выбрать наибольшее число.

$$W_1(5) = \max\{F_1(0) + W_2(5); F_1(1) + W_2(4); F_1(2) + W_2(3); F_1(3) + W_2(2); F_1(4) + W_2(1); F_1(5) + W_2(0)\} = \\ = \max\{9, 12, 8, 7, 6\} = 12; \quad u_1^*(5) = 1.$$

Максимальная суммарная эффективность, равная 12 единицам, достигается при $u_1 = 1$, следовательно оптимальное количество станков, выделяемых первому проекту, $u_1^* = 1$.

Для определения оптимального количества станков на второй и третий участки надо воспользоваться уравнением (2.3) и табл. 2.4, 2.5. Согласно (2.3), остаток станков для второго и третьего участков, после выделения первому участку 1 станок будет равен $x_2 = x_1 - u_1^* = 5 - 1 = 4$. В табл. 2.5 выделим строку, соответствующую $x = 4$ и на пересечении этой строки и столбца, содержащего u_2^* , найдем $u_2^* = u_2^*(4) = 3$. Из (2.3) далее определим остаток

средств для третьего проекта $x_3 = x_2 - u_2^* = 4 - 3 = 1$. Из табл. 2.4 на пересечении строки $x = 1$ и столбца $u_3^*(x)$ найдем $u_3^* = 1$.

Таким образом нашли оптимальное распределение станков между тремя участками $u^* = \{1, 3, 1\}$, обеспечивающее максимальную суммарную эффективность $J(u^*) = 12$.

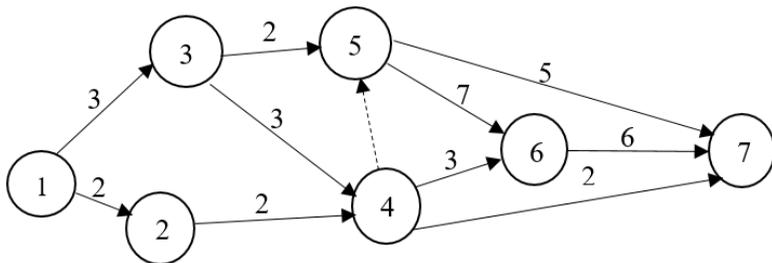
2.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Издатель имеет контракт с автором на издание его книги. Ниже представлена последовательность (упрощенная) процессов, приводящая к реализации проекта издания книги. Необходимо разработать сеть для этого проекта.

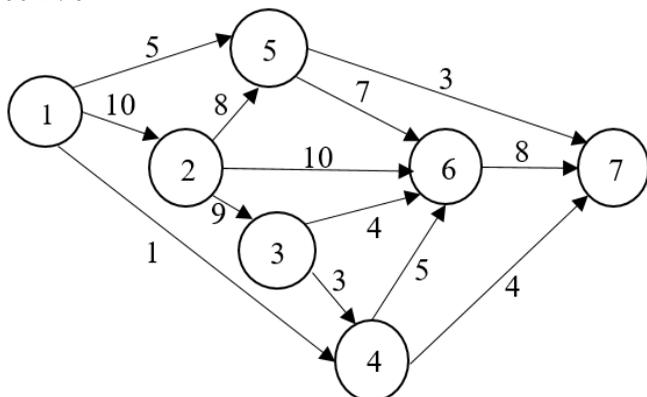
Процесс	Предшествующий процесс	Длительность (недели)
A: Прочтение рукописи редактором	–	3
B: Пробная верстка отдельных страниц книги	–	2
C: Разработка обложки книги	–	4
D: Подготовка иллюстраций	–	3
E: Просмотр автором редакторских правок и сверстанных страниц	A, B	2
F: Верстка книги (создание макета книги)	E	4
G: Проверка автором макета книги	F	2
H: Проверка автором иллюстраций	D	1
I: Подготовка печатных форм	G, H	2
J: Печать и брошюровка книги	C, I	4

2. Найдите критический путь для сети проекта.

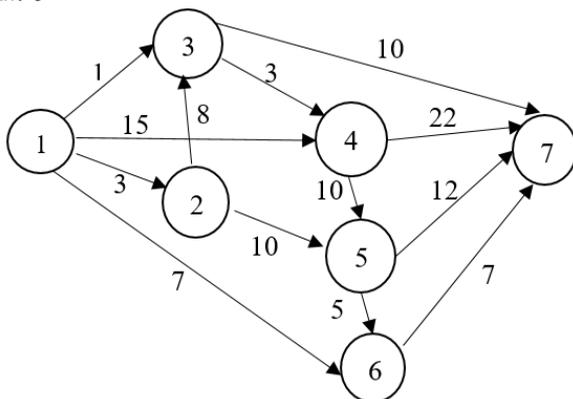
Проект а



Проект b



Проект c



3. В таблице приведены работы, выполняемые при строительстве нового каркасного дома. Разработайте сеть этих работ и найдите критический путь.

Процесс	Предшествующий процесс	Длительность (дни)
A: Очистка строительного участка	–	1
B: Завоз оборудования	–	2
C: Земляные работы	A	1
D: Заливка фундамента	C	2
E: Наружные водопроводно-канализационные работы	D, C	6
F: Возведение каркаса дома	D	10
G: Прокладка электропроводки	F	3

Процесс	Предшествующий процесс	Длительность (дни)
H: Создание перекрытий	G	1
I: Создание каркаса крыши	F	1
J: Внутренние водопроводно-канализационные работы	E, H	5
K: Покрытие крыши	I	2
L: Наружные изоляционные работы	F, J	1
M: Вставка окон и наружных дверей	F	2
N: Обкладка дома кирпичом	L, M	4
O: Штукатурка стен и потолков	G, J	2
P: Облицовка стен и потолков	O	2
Q: Изоляция крыши	I, P	1
R: Окончание внутренних отделочных работ	P	7
S: Окончание наружных отделочных работ	I, N	7
T: Ландшафтные работы	S	3

4. Расширение участка дороги требует переноса воздушной электростанции (длиной 1700 футов). В следующей таблице приведены этапы выполнения работ по замене электролинии. Постройте соответствующую сеть и найдите критический путь.

Процесс	Предшествующий процесс	Длительность (дни)
A: Определение объема работ	–	1
B: Извещение пользователей о временном отключении электросети	A	0,5
C: Подвоз материалов и оборудования	A	1
D: Предварительные работы	A	1
E: Заготовка опор и материалов	C, D	3
F: Доставка опор	E	3,5
G: Определение нового местоположения опор	D	0,5
H: Разметка местоположения опор	G	0,5
I: Земельные работы для установки новых опор	H	3
J: Установка новых опор	F, I	4
K: Ограждение старой линии	F, I	1
L: Прокладка новых проводов	J, K	2
M: Обустройство новой линии	L	2
N: Натяжка проводов	L	2
O: Подрезка деревьев	D	2
P: Отключение старой электролинии	B, M, N, O	0,2

Процесс	Предшествующий процесс	Длительность (дни)
Q: Подключение новой электролинии	P	0,5
R: Уборка территории	Q	1
S: Возврат материалов и оборудования	I	2
T: Завершение проекта	R, S	–

5. Ресторан заказывает мясной фарш в начале каждой недели для удовлетворения недельного спроса в 300 фунтов. Фиксированная стоимость размещения заказа равна 20 д. е. Стоимость замораживания и хранения одного фунта фарша обходиться ресторану примерно в 0,03 д. е. в день.

а) Определите недельные затраты ресторана, связанные с существующей стратегией создания запаса.

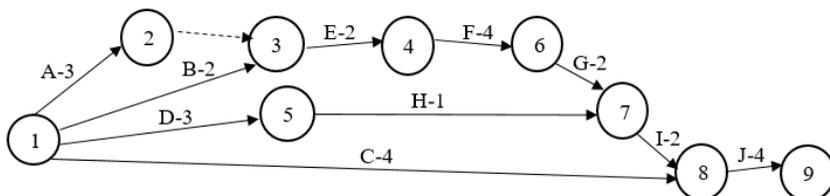
б) Определите оптимальную стратегию управления запасами, предполагая, что время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равна нулю.

6. Комплектующие продаются по 25 д. е. за единицу, но предполагается 10 % скидка при покупке партии от 150 единиц и выше. Компания в день использует 20 единиц комплектующих. Стоимость размещения заказа равна 50 д. е., стоимость хранения единицы товара составляет 0,3 д. е. в день. Следует ли компании воспользоваться скидкой?

7. Спрос на удилица достигает своего минимума в декабре, а максимума – в апреле. Изготавливающая их компания оценивает декабрьский спрос в 50 единиц. Затем спрос увеличивается на 10 удилиц в месяц, достигая максимального значения 90 единиц в апреле. После этого объем спроса уменьшается на 5 удилиц в месяц. Стоимость размещения заказа на изготовление партии равна 250 д. е. на протяжении всех месяцев, за исключением февраля, марта и апреля, когда она составляет 300 д. е. Стоимость производства одного удилица является примерно постоянной на протяжении всего года и составляет 15 д. е., а стоимость хранения равна 1 д. е. в месяц. Требуется составить план производства удилиц.

2.5. Ответы к задачам

1. Введен фиктивный процесс (2, 3) для того, чтобы «развести» конкурирующие процессы А и В. Номера узлов сети возрастают в направлении выполнения проектов.



2. а) 1-3-4-5-6-7, длительность проекта 19 дней;
б) 1-2-3-4-6-7, длительность проекта 35 дней;
в) Существует три критических пути: 1-4-7, 1-4-5-7, 1-4-5-6-7; длительность проекта 37 дней.
3. А-С-D-F-G-H-J-L-N-S-T, длительность проекта 38 дней.
4. Существует два критических пути: А-С-E-F-J-L-M (или N)-P-Q-R-S, длительность проекта 20,2 дней.
5. а) Суммарные затраты в неделю составляют 51,5 д. е
б) Оптимальная стратегия: заказывать 239,05 фунтов фарша, как только его запас опустится до нулевого уровня.
6. Да, для заказа партии в 150 единиц при нулевом уровне запаса. Затраты в день составят 479,17 д. е.
7. В январе необходимо произвести 210 единиц изделий, 255 – в апреле, 210 – в июле и 165 – в октябре. Общая стоимость – 1930 д. е.

Вопросы и задания к главе 2

1. Перечислите и охарактеризуйте неконтролируемые факторы оперирующей стороны.
2. Чем наилучший гарантированный результат отличается от оптимальной гарантирующей стратегии?
3. В чем заключается подход Р. Э. Беллмана? Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана.
4. Как решаются задачи нахождение кратчайшего пути?

5. Запишите математическую модель использования мощностей оборудования предприятия.

6. Какие затраты включают в суммарные затраты системы управления запасами?

7. Любому студенту приходится писать рефераты, курсовые и выпускные квалификационные работы. Каждая из таких работ является проектом. Почему? Представьте вашу курсовую работу как проект. Какими специфическими чертами она обладает?

8. Вам поручили подготовить встречу студентов университета с выпускниками прошлых лет. Составьте план ключевых событий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что даже простые примеры задач и методы их решения, приведенные в пособии, иллюстрируют широту спектра математических проблем, возникающих в проектной деятельности.

Авторы не ставили своей целью рассмотреть все классы задач математической теории управления проектами. Для дальнейшего изучения математической теории и соответствующих методов можно рекомендовать книги [1; 4; 5; 8; 13; 18]. Монография [12] – своего рода энциклопедия инструментов для управления проектами, изложение весьма детализировано по каждому из этапов проектной деятельности: инициация проекта, планирование проекта, выполнение проекта, отчетность. Издания [10; 14] сосредоточены на специфике проектной деятельности в экологии и природопользовании, а [13] – на информационных системах управления портфелями и программами проектов.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Акопов А. С. Имитационное моделирование : учебник и практикум для вузов / А. С. Акопов. – Москва : Юрайт, 2023. – 389 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://www.urait.ru/bcode/511425> (дата обращения: 25.02.2024).

2. Зуб А. Т. Управление проектами : учебник и практикум для вузов / А. Т. Зуб. – Москва : Юрайт, 2024. – 397 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://www.urait.ru/bcode/536083> (дата обращения: 25.02.2024).

3. Зубкова Т. М. Технология разработки программного обеспечения : учеб. пособие / Т. М. Зубкова. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 324 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/206882> (дата обращения: 28.02.2024).

4. Исследование операций в экономике : учебник для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2024. – 414 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://www.urait.ru/bcode/535489> (дата обращения: 25.02.2024).

5. Королев А. В. Экономико-математические методы и моделирование : учебник и практикум для вузов / А. В. Королев. – Москва : Юрайт, 2024. – 280 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://www.urait.ru/bcode/537208> (дата обращения: 25.02.2024).

6. Математические методы и модели управления проектами : учеб. пособие / И. В. Буркова, Я. Д. Гельруд, О. В. Логиновский, А. Л. Шестаков. – Челябинск : Издат. центр ЮурГУ, 2018. – 193 с. – URL: https://lib.susu.ru/ftd?base=SUSU_METHOD&key=000558683&dtype=F&etype=pdf (дата обращения: 28.02.2024).

7. Управление проектами : учебник и практикум для вузов / А. И. Балашов, Е. М. Рогова, М. В. Тихонова, Е. А. Ткаченко ; под общ. ред. Е. М. Роговой. – Москва : Юрайт, 2024. – 383 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/535573> (дата обращения: 25.02.2024).

8. Фомин Г. П. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности / Г. П. Фомин. – Москва : Юрайт, 2021. – 462 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://www.urait.ru/bcode/487904> (дата обращения: 25.02.2024).

Дополнительная

9. Васильев О. В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях / О. В. Васильев, А. В. Аргучинцев. – Москва : Физматлит, 1999. – 208 с.
10. Дончева А. В. Экологическое проектирование и экспертиза: Практика : учеб. пособие / А. В. Дончева. – Москва : Аспект Пресс, 2002. – 286 с.
11. Куликов Ю. Г. Экономико-математические методы и модели (раздел «Линейное программирование») : учеб. пособие для практических занятий / Ю. Г. Куликов, Н. Ф. Шеховцова, Л. П. Зикеева. – Москва : Московский психолого-социальный институт ; Воронеж : МОДЭК, 2000. – 96 с. – (Б-ка экономиста).
12. Милошевич Д. Набор инструментов для управления проектами / Д. Милошевич. – Москва : ДМК Пресс, 2008. – 729 с.
13. Морозова О. А. Информационные системы управления портфелями и программами проектов / О. А. Морозова. – Москва : КНОРУС, 2019. – 268 с.
14. Новоселов А. Л. Модели и методы принятия решений в природопользовании / А. Л. Новоселов, И. Ю. Новоселова. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 383 с.
15. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование : учеб. пособие / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод [и др.] ; под. общ. ред. А. В. Кузнецова, Р. А. Рутковского. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Выш. шк., 2002. – 447 с.
16. Тарасенко Н. В. Оптимальное управление дискретными экономическими системами : метод. указания / Н. В. Тарасенко. – Иркутск : ИГЭА, 1998. – 13 с.
17. Трофимец В. Я. Компьютерное моделирование экономических систем и процессов. Ч. 1. Оптимизационные и статистические модели : учеб. пособие / В. Я. Трофимец, Л. А. Маматова. – Ярославль : Изд-во ЯрГУ, 2007. – 122 с.
18. Царьков И. Н. Математические модели управления проектами / И. Н. Царьков. – Москва : Инфра-М. – 2020. – 514 с.
19. Экономико-математические методы и модели. Задачник : учеб.-практ. пособие / под ред. С. И. Макарова, С. А. Севастьяновой. – 2-е изд., перераб. – Москва : КНОРУС, 2009. – 208 с.

Учебное издание

Аргучинцев Александр Валерьевич
Шеломенцева Наталья Николаевна

**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
И КОМПЬЮТЕРНЫЕ
МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ**

ISBN 978-5-9624-2265-7

Редактор *М. А. Власова*
Дизайн обложки: *П. О. Ершов*

Темплан 2024. Поз. 23
Подписано в печать 15.04.2024. Формат 60×90 1/16
Уч.-изд. л. 4,0. Усл. печ. л. 5,8. Тираж 100 экз. Заказ 48

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124