Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Иркутский государственный университет»

*Университетский учебник*

**В. С. Захарченко, В. П. Поплевко**

# Линейная алгебра
# Часть 1

Учебное пособие

ИРКУТСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИГУ
2022

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
З-38

*Серия издается с 2005 года*

Печатается по решению ученого совета ИМИТ ИГУ

**Рецензенты:**

*А. В. Аргучинцев,* д-р физ.-мат. наук, проф.
*Е. В. Аксенюшкина,* канд. физ.-мат. наук, доц.

**Захарченко В. С.**

З-38 Линейная алгебра. Часть 1 : учебное пособие / В. С. Захарченко, В. П. Поплевко. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2022. – 121 с. – (Университетский учебник).

**ISBN 978-5-9624-2022-6**

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения по некоторым основным вопросам курса «Линейная алгебра» (векторы, матрицы, определители). Необходимый теоретический материал сопровождается иллюстративными примерами и задачами для самостоятельного решения.

Предназначено для организации и контроля самостоятельной работы студентов математических, экономических и технических направлений и специальностей.

*Библиогр. 9 назв.*

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73

ISBN 978-5-9624-2022-6

# Оглавление

# Предисловие

В данном учебном пособии авторы постарались дать необходимые для практического решения задач теоретические сведения по некоторым вопросам курса «Линейная алгебра» (векторы, матрицы, определители).

Цель пособия – активизировать самостоятельную работу студентов при изучении курса «Линейная алгебра». Весь материал разбит на три главы. В каждой главе теоретические сведения даются в сжатом виде (нет подробных доказательств теорем и формул). Затем разбираются примеры решения задач. Главы содержат задачи и упражнения для самостоятельной работы студентов в качестве самоконтроля и индивидуальные задания для проверки усвоения материала.

Данное пособие является прикладным дополнением к существующим учебникам, поэтому в нем даются только те сведения, которые необходимы непосредственно для решения задач. Список рекомендуемой литературы приведен в конце пособия.

# Глава 1

# Векторное пространство $R^n$

## § 1. Понятие $n$-мерного вектора, пространства $R^n$

**Определение 1.1.** Вектором размерности $n$ (или $n$-мерным вектором) называется любой упорядоченный набор из $n$ чисел. Эти числа называются координатами или компонентами вектора (всюду далее под числами понимаются только действительные числа).

Упорядоченность набора означает, что важен порядок, в котором расположены координаты вектора. Например, $(1; 2)$ и $(2; 1)$ – это два различных вектора размерности 2.

Как правило, векторы обозначаются малыми буквами, а координаты векторов записываются через точку с запятой. Например, $n$-мерные векторы $x, y$ в общем случае записываются следующим образом:

$$x = (x_1; x_2; \ldots; x_n), \quad y = (y_1; y_2; \ldots; y_n).$$

**Определение 1.2.** Пространством $R^n$ называется совокупность всех векторов размерности $n$. Число $n$ – размерность пространства.

Все векторы в пространстве $R^n$ понимаются как радиус-векторы (т. е. берут свое начало в нулевой точке). Поэтому любой $n$-мерный вектор интерпретируется как точка в пространстве $R^n$, которая соответствует концу этого вектора.

**Нулевым вектором** пространства $R^n$ называется вектор, все координаты которого равны нулю (т. е. запись $0 \in R^n$ говорит, что нулевой вектор (точка) принадлежит пространству $R^n$; не путать с числом 0).

**Определение 1.3.** Длиной (или нормой) вектора $x \in R^n$ называется число, обозначаемое $\|x\|$ и определяемое из равенства

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{1}$$

*Примечание.* Норма вида (1) называется **евклидовой нормой**. В пространстве $R^n$ применяют и другие виды норм. В данном пособии будет подразумеваться евклидова норма вида (1).

**Пример 1.1.** Найти длины векторов $x = (-1; 4; 3; -2)$, $y = (3; -2; 5)$, $z = (1/\sqrt{3}; 0; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$.

**Решение**

По формуле (1) имеем
$\|x\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{30}$,
$\|y\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$,
$\|z\| = \sqrt{(1/\sqrt{3})^2 + 0^2 + (1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2} = \sqrt{1} = 1$.

Кстати, вектор $z$ является примером единичного вектора.

**Определение 1.4.** Единичным вектором пространства $R^n$ называется вектор, длина которого равна 1.

## § 2. Линейные операции с векторами

К линейным операциям относятся сложение и произведение на число. Все линейные операции с векторами выполняются покомпонентно и требуют совпадения размерностей (при сложении, вычитании векторов).

Пусть даны два произвольных вектора $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $y = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$.

1. Суммой двух векторов $x$ и $y$ называется вектор

$$x + y = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \ldots; x_n + y_n), \tag{2}$$

который получается суммированием соответствующих координат векторов $x$ и $y$.

**Пример 2.1.** Найти сумму векторов $x = (-2; 1; 3; 0; 4)$ и $y = (0; 4; 5; -3; 7)$.

**Решение**
$x+y = (-2+0; 1+4; 3+5; 0+(-3); 4+7) = (-2; 5; 8; -3; 11)$.

**Пример 2.2.** Найти сумму векторов $x = (-2; 1; 3; 4)$ и
$y = (0; 4; 5)$.

**Решение**

Операция суммы не имеет смысла, так как векторы разной размерности!

2. Произведением вектора $x$ на действительное число $\alpha$ называется вектор, который получается умножением всех координат вектора $x$ на число $\alpha$, а именно:

$$\alpha x = (\alpha x_1; \alpha x_2; \ldots; \alpha x_n). \tag{3}$$

Если $\alpha = -1$, то получим вектор, противоположный вектору $x$; если $0 < \alpha < 1$, то получаем сжатие исходного вектора $x$; если $\alpha > 1$ – растяжение исходного вектора $x$ в $\alpha$ раз.

Пусть даны векторы $x, y, z \in R^n$ и произвольные числа $\alpha, \beta \in R$. Линейные операции обладают следующими свойствами:

1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность сложения);
3) $\alpha(x \pm y) = \alpha x \pm \alpha y$;
4) $\alpha(\beta x) = \beta(\alpha x) = \alpha\beta x$.

## § 3. Скалярное произведение векторов

**Определение 3.1.** Скалярным произведением векторов $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $y = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$ называется число, обозначаемое $\langle x, y\rangle$ и вычисляемое по формуле

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i. \qquad (4)$$

**Пример 3.1.** Найти скалярное произведение векторов $x = (-1; 3; 2; 4)$ и $y = (0; 5; 4; 1)$.

**Решение**

$$\langle x, y\rangle = (-1)\cdot 0 + 3\cdot 5 + 2\cdot 4 + 4\cdot 1 = 27.$$

**Пример 3.2.** Найти скалярное произведение векторов $x = (-1; 3; 2; 7)$ и $y = (0; 2; 3)$.

**Решение**

Скалярное произведение не имеет смысла, так как векторы разной размерности!

Пусть даны векторы $x, y, z \in R^n$ и действительное число $\alpha \in R$. Скалярное произведение обладает следующими свойствами:
1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (симметричность произведения);
2) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ (распределительное свойство);
3) $\langle x, \alpha y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

Заметим, что из свойств 2) и 3) следует свойство линейности скалярного произведения по каждому из сомножителей для $x, y, z \in R^n$ и действительных чисел $\alpha, \beta \in R$

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle.$$

## § 4. Расстояние между точками, угол между векторами

Длину вектора можно вычислить через скалярное произведение. Из формулы (4) имеем

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 = \|x\|^2.$$

Тогда норма (длина) вектора

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{5}$$

Из (5) следует, что $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in R^n$. Аналогичным образом можно вычислить и расстояние между векторами (точками) $x, y \in R^n$, если рассмотреть его как длину вектора $x - y$, т. е.

$$\|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}. \tag{6}$$

**Пример 4.1.** Найти расстояние между векторами $x = (1; -3; 4; 2)$ и $y = (-2; 0; 7; 5)$.

**Решение**

$$\|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2} =$$

$$= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-3 - 0)^2 + (4 - 7)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Здесь можно было сначала найти координаты вектора $x - y$, а затем по формуле (5) вычислить его длину.

**Пример 4.2.** Найти расстояние между вектором $x = (1; -3; 4; 5)$ и началом координат.

**Решение**

Так как все векторы выходят из начала координат, нам нужно найти длину вектора $x$:

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{51}.$$

В пространствах векторов $R^2$ и $R^3$ углом между двумя векторами геометрически понимается угол между направлениями радиус-векторов соответствующих точек. И скалярное произведение двух векторов $x$ и $y$ вводится как скалярная величина, равная произведению модулей (длин) этих векторов, умноженных на косинус угла между ними:

$$\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos\varphi,$$

т. е. скалярное произведение вводится через понятие угла.

В пространстве $R^n$ угол между векторами $x$ и $y$ определяется как число $\varphi$, для которого

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}. \qquad (7)$$

При $n = 2$ и $n = 3$ формула (7) совпадает с формулой угла между векторами, изучаемой в курсе школьной геометрии.

Из формулы (7) следует, что
1) два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0;$$

2) векторы образуют острый угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение больше нуля:

$$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle > 0;$$

3) векторы образуют тупой угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение меньше нуля:

$$\varphi \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle < 0.$$

**Пример 4.3.** Вычислить угол между векторами $x$ и $y$, где $x = (1; 1; 1; 1)$ и $y = (2; 6; 0; -3)$.

**Решение**

Найдем длины векторов:

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2,$$

$$\|y\| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 0^2 + (-3)^2} = 7.$$

Вычислим скалярное произведение векторов:

$$\langle x, y \rangle = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) = 5.$$

Таким образом, по формуле (7) имеем

$$\cos \varphi = \frac{5}{14}, \quad \varphi = \arccos \frac{5}{14}.$$

**Пример 4.4.** Определить, при каком значении $\lambda$ векторы $3a+\lambda b$ и $a-2b$ ортогональны, если даны $\|a\|=3,\quad \|b\|=2$, $\varphi_{\widehat{a,b}}=\frac{\pi}{3}$.

**Решение**

Векторы ортогональны, если скалярное произведение этих векторов равно нулю, т. е.

$$\langle 3a+\lambda b, a-2b\rangle = 0.$$

Используя свойства скалярного произведения, получим

$$\langle 3a+\lambda b, a-2b\rangle = 3\langle a,a\rangle - 6\langle a,b\rangle + \lambda\langle b,a\rangle - 2\lambda\langle b,b\rangle = 0.$$

Теперь вычислим каждое слагаемое:
$3\langle a,a\rangle = 3\cdot\|a\|^2 = 27$,
$6\langle a,b\rangle = 6\cdot\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 18$,
$\lambda\langle b,a\rangle = \lambda\cdot\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 3\lambda$,
$2\lambda\langle b,b\rangle = 2\lambda\cdot\|b\|^2 = 8\lambda$.

Теперь решим уравнение

$$27-18+3\lambda-8\lambda=0,$$

$$9-5\lambda=0,\quad \lambda=\frac{9}{5}=1,8.$$

Зная угол между векторами и длины векторов, можно найти алгебраическую проекцию одного вектора (например, вектора $a$) на направление другого вектора (например, вектора $b$):

$$pr_b a = \|a\|\cos\varphi,$$

здесь $\varphi$ – угол между $a$ и $b$.

Используя (7), можно записать

$$\langle a,b\rangle = \|b\| pr_b a = \|a\| pr_a b.$$

**Пример 4.5.** Вектор $a \in R^3$ имеет длину 12 ед. и образует с осью $OX$ угол $30°$. Найти алгебраическую проекцию вектора $a$ на ось $OX$.

**Решение**

Согласно формуле для вычисления проекции имеем

$$pr_{OX}a = \|a\| \cos\varphi = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

**Пример 4.6.** Найти алгебраическую проекцию вектора $a$ на направление вектора $b$, если $a = (1; 2; 0; 4)$, $b = (5; -1; 3; 2)$.

**Решение**

Перепишем формулу для нахождения проекции:

$$pr_b a = \frac{\langle a, b\rangle}{\|b\|}.$$

Тогда имеем

$$\|b\| = \sqrt{39}, \quad \langle a, b\rangle = 11,$$

$$pr_b a = \frac{11}{\sqrt{39}}.$$

## Задания для самостоятельной работы

1. Даны векторы $x = (1; 1)$, $y = (0; 3)$, $z = (4; 5)$, $u = (1; 3; 0)$, $v = (1; 1; 2)$. Найти те из следующих векторов, которые имеют смысл: а) $x + 3y - z$; б) $x + 3v$; в) $4x - z$; г) $3u + 2v$; д) $2z - 4x + 3v$.

**Ответы:** а) $(-3; 5)$; б) не имеет смысла; в) $(0; -1)$; г) $(5; 11; 4)$; д) не имеет смысла.

2. Для векторов из задания 1 вычислить следующие скалярные произведения:
а) $\langle x, y\rangle$; б) $\langle x, y+2z\rangle$; в) $\langle 4y, z+3u\rangle$; г) $\langle u+2v, y\rangle$; д) $\langle 5u, v\rangle$.

**Ответы:** а) 3; б) 21; в) не имеет смысла; г) не имеет смысла; д) 22.

3. Найти длину следующих векторов:
а) $x = (3; 4)$; б) $y = (1; 1; 1)$; в) $z = (1; 2; 3; 4)$;
г) $u = (1; 6; -2; 4; 5)$.

**Ответы:** а) $\|x\| = 5$; б) $\|y\| = \sqrt{3}$; в) $\|z\| = \sqrt{30}$;
г) $\|u\| = \sqrt{82}$.

4. Найти расстояние между точками $x$ и $y$:
а) $x = (1; -1)$, $y = (7; 7)$;
б) $x = (1; 1; -1)$, $y = (2; -1; 5)$;
в) $x = (1; 2; 3; 4)$, $y = (1; 0; -1; 0)$;
г) $x = (-2; 4; 5; 1; 0)$, $y = (1; 3; -1; 2; 4)$.

**Ответы:** а) $\|x - y\| = 10$; б) $\|x - y\| = \sqrt{41}$; в) $\|x - y\| = 6$;
г) $\|x - y\| = \sqrt{63}$.

5. Для каждой пары векторов определить сначала, является ли угол между ними острым, тупым или прямым, а затем найти этот угол:
а) $x = (4; 1)$, $y = (2; -8)$;
б) $x = (1; 1; 0)$, $y = (1; 2; 1)$;
в) $x = (1; -1; 0; 2)$, $y = (1; 2; 1; 3)$;
г) $x = (1; 0; 0; 0; 0)$, $y = (1; 1; 1; 1; 1)$.

**Ответы:** а) $\varphi = \pi/2$; б) $\varphi = \pi/6$; в) $\varphi = \arccos(5/\sqrt{90})$;
г) $\varphi = \arccos(1/\sqrt{5})$.

# § 5. Линейная независимость/зависимость векторов

Рассмотренные в § 2 линейные операции над векторами позволяют ввести понятие линейной комбинации векторов. Для начала рассмотрим линейную комбинацию двух векторов.

**Определение 5.1.** Линейной комбинацией двух векторов $x, y \in R^n$ называется вектор $z \in R^n$:

$$z = \alpha x + \beta y,$$

где числа $\alpha, \beta$ называются коэффициентами линейной комбинации.

**Пример 5.1.** Даны векторы $x = (1; 3; 5; 2), y = (4; -1; 0; 1)$. Найти линейную комбинацию $z = 2x - 3y$.

**Решение**

$$z = 2x - 3y = 2(1; 3; 5; 2) - 3(4; -1; 0; 1) = (-10; 9; 10; 1).$$

Введем понятие линейной комбинации в общем случае для набора из $k$ векторов пространства $R^n$:

$$x^1, x^2, \dots x^k.$$

**Определение 5.2.** Линейной комбинацией этих векторов называется **вектор** вида

$$p = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots \alpha_k x^k,$$

где числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – коэффициенты линейной комбинации (или «веса» комбинации).

**Определение 5.3.** Линейная комбинация называется **тривиальной**, если все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ равны нулю:

$$p = 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \ldots 0 \cdot x^k.$$

Линейная комбинация называется **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_i$ не равен нулю, т. е. если выполняется следующее неравенство:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 > 0.$$

Всюду далее при выполнении всевозможных алгебраических операций с векторами все векторы $x \in R^n$ будут восприниматься нами как вектор-столбцы (!!!), т. е.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Хотя во многих учебных пособиях (данное пособие не исключение!) для экономии места в теоретических выкладках и в формулировках практических заданий часто вектор-столбцы будут записываться в строчной форме, при этом координаты вектора обязательно отделяются друг от друга точкой с запятой.

Например, вектор-столбец

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в строчной форме имеет вид $x = (1; 2; 3; 4)$.

Набор вектор-столбцов $x^1, x^2, \ldots, x^k \in R^n$ называется системой вектор-столбцов (или просто системой векторов).

**Определение 5.4.** Система из $k$ векторов $x^1, x^2, \ldots, x^k \in R^n$ называется **линейно зависимой**, если найдется нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю, т. е. если

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots \alpha_k x^k = 0 \tag{8}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 > 0.$$

Здесь 0 справа в линейной комбинации (8) – это нулевой вектор пространства $R^n$.

Если же таких коэффициентов линейной комбинации не существует, т. е. равенство (8) возможно только при нулевых коэффициентах, то система векторов $x^1, x^2, \ldots, x^k$ **линейно независимая**.

**Замечания 5.1**

1. Один вектор-столбец $x^1$ также образует систему: при $x^1 = 0$ – линейно зависимую (так как $\alpha_1 x^1 = 0$ может выполняться при $\alpha_1 \neq 0$: ), а при $x^1 \neq 0$ – линейно независимую (так как $\alpha_1 x^1 = 0$ выполняется только при $\alpha_1 = 0$).

2. Любое подмножество системы векторов называется подсистемой.

**Пример 5.2.** Используя определение, установить линейную зависимость или линейную независимость следующих систем вектор-столбцов:

а) $x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$;

б) $x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Решение**

а) векторы $x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ являются линейно зависимыми, так как можно составить нетривиальную линейную комбинацию, например, с коэффициентами $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 1$, которая равна нулевому вектору:

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или $x_2 = -2x_1$;

б) векторы $x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – линейно независимые. Действительно, если

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 = 0,$$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $\alpha_1 \equiv 0, \quad \alpha_2 \equiv 0$. То есть только тривиальная линейная комбинация этих векторов будет равна нулевому вектору. Значит, векторы линейно независимы.

**Пример 5.3.** Образуют ли векторы $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ линейно независимую систему?

**Решение**

Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее к нулю:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем систему:

$$\begin{cases} 2\alpha + 5\beta + 2\gamma = 0, \\ 4\alpha + \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Решим систему: для начала можно исключить $\gamma$, умножив второе уравнение на $(-2)$ и затем сложив с первым уравнением. Получим $\alpha = \frac{\beta}{2}$. Аналогичным образом можно исключить $\alpha$, умножив первое уравнение системы на $(-2)$ и сложив со вторым уравнением. Получим $\gamma = -3\beta$.

Здесь число $\beta$ играет роль параметра. Придавая ему различные значения, мы будем получать различные решения этой системы. Так, при любом $\beta \neq 0$ мы получим $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$, т. е. нетривиальный набор коэффициентов, при которых линейная комбинация заданных векторов обращается в ноль. Значит, исходные векторы (или набор векторов) линейно зависимы.

*Примечание.* В примере 5.3. на самом деле «работает» основная теорема векторных пространств: *любые $k$ векторов пространства $R^n$ при $k > n$ обязательно будут линейно зависимыми.*

То есть если число векторов в наборе больше размерности пространства, то **обязательно** найдется нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю.

**Свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов:**

1. Если в систему векторов входит нулевой вектор, то она линейно зависима.

2. Если в системе векторов имеется два одинаковых вектора, то она линейно зависима.

3. Если в системе векторов имеется два пропорциональных вектора ($x = \alpha y$), то она линейно зависима.

4. Система из $k > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных.

5. Любые векторы, входящие в линейно независимую систему векторов, образуют линейно независимую подсистему.

6. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, является линейно зависимой.

**Пример 5.4.** Рассмотреть всевозможные системы, образованные из векторов

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$x^5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Исследовать каждую систему на линейную зависимость.

**Решение**

Для начала рассмотрим пять систем, содержащих по одному вектору. В соответствии с п. 1 замечаний 5.1 системы $\{x^2\}$; $\{x^3\}$; $\{x^4\}$; $\{x^5\}$ линейно независимы, а система, состоящая из вектора $\{x^1\}$ (нулевого вектора), линейно зависима.

Далее рассмотрим системы, содержащие по два вектора:

- каждая из четырех систем $\{x^1, x^2\}$; $\{x^1, x^3\}$; $\{x^1, x^4\}$; $\{x^1, x^5\}$ линейно зависима, так как содержит нулевой вектор $x^1$ (**свойство 1**);

• система $\{x^2, x^3\}$ линейно зависима, так как векторы пропорциональны: $x^3 = 2x^2$ (**свойство 3**);

• каждая из систем $\{x^2, x^4\}$; $\{x^2, x^5\}$; $\{x^3, x^4\}$; $\{x^3, x^5\}$; $\{x^4, x^5\}$ линейно независима, так как столбцы непропорциональны.

Теперь рассмотрим системы, состоящие из трех векторов:

• каждая из систем $\{x^1, x^2, x^3\}$; $\{x^1, x^2, x^4\}$; $\{x^1, x^2, x^5\}$; $\{x^1, x^3, x^4\}$; $\{x^1, x^3, x^5\}$; $\{x^1, x^4, x^5\}$ линейно зависима, так как содержит нулевой вектор $x^1$ (**свойство 1**);

• системы $\{x^2, x^3, x^4\}$; $\{x^2, x^3, x^5\}$ линейно зависимы, так как содержат линейно зависимую подсистему $\{x^2, x^3\}$ (**свойство 6**);

• системы $\{x^2, x^4, x^5\}$; $\{x^3, x^4, x^5\}$ линейно зависимы, так как вектор $x^5$ линейно выражается через остальные (**свойство 4**): $x^5 = 2x^2 + x^4$, $x^5 = x^3 + x^4$.

Системы из любых четырех векторов или пяти векторов линейно зависимы (**свойство 6**).

### Задания для самостоятельной работы

Исследовать следующие системы векторов на линейную зависимость:

а) $x = (1; -1; 2; 0)$, $y = (1; 5; -2; \sqrt{2})$, $z = (3; -3; 6; 0)$;
б) $x = (1; 2)$, $y = (7; \frac{1}{3})$, $z = (0; e^2)$, $u = (\sqrt{\pi}; 1)$;
в) $x = (1; 1; 1)$, $y = (1; 1; 2)$, $z = (1; 2; 3)$;
г) $x = (1; 2; 3)$, $y = (4; -2; 1)$, $z = (2; 0; 5)$;
д) $x = (1; 3)$, $y = (4; -2)$, $z = (5; 1)$;
е) $x = (2; 7; 5)$, $y = (0; 1; 3)$, $z = (4; 11; 1)$;
ж) $x = (-1; 3; 4)$, $y = (0; 0; 0)$, $z = (1; 7; 9)$;
з) $x = (-4; 2; 7)$, $y = (3; 1; 5)$;
и) $x = (3; 3; 2)$, $y = (2; 4; 3)$, $z = (8; 1; 3)$;
к) $x = (-2; 3; 1)$, $y = (4; -1; 5)$, $z = (1; -2; 3)$;
л) $x = (2; -1; 0)$, $y = (4; 5; -1)$;
м) $x = (1; 1; 1; 1)$, $y = (0; 1; 1; 1)$, $z = (0; 0; 1; 1)$, $u = (0; 0; 0; 1)$.

**Ответы:** а) линейно зависимая; б) линейно зависимая; в) линейно независимая; г) линейно независимая; д) линейно зависимая; е) линейно зависимая; ж) линейно зависимая; з) линейно независимая; и) линейно независимая; к) линейно независимая; л) линейно независимая; м) линейно независимая.

# § 6. Стандартный базис в пространстве $R^n$

Рассмотрим следующий набор векторов:

$$e^1 = (1;0;0\ldots;0),\ \ e^2 = (0;1;0;\ldots;0),\ldots,e^n = (0;0;0;\ldots;1), \tag{9}$$

здесь у вектора $e^i$ $i$-я координата равна 1, а все остальные равны 0. Векторы обладают следующими свойствами:

$$\langle e^i, e^j\rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

т. е. векторы $e^i$ и $e^j$ взаимно ортогональные и являются единичными векторами (длина векторов $\|e^i\| = 1,\ \ i = \overline{1,n}$).

Система векторов (9) называется **стандартным базисом** пространства $R^n$. Отметим также, что набор векторов (9) является линейно независимым (можно легко проверить!) и число векторов в наборе $n$ равно размерности пространства $R^n$.

**Важная роль стандартного базиса**

Любой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ можно разложить по векторам стандартного базиса (или разложить по стандартному базису).

Это значит, что любой вектор можно представить в виде линейной комбинации вектров стандартного базиса, а именно

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Соотношение (10) показывает, что координаты вектора $x$ представляют собой коэффициенты линейной комбинации базисных векторов.

**Пример 6.1.** Записать разложение векторов $x = (-1; 0; 3)$ и $y = (1; 2; 5; -3)$ по стандартному базису соответствующих пространств.

**Решение**

Понятно, что $x \in R^3$, $y \in R^4$, поэтому их разложение по соответствующим базисам имеет вид

$$x = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -e^1 + 3e^3,$$

аналогично вектор

$$y = e^1 + 2e^2 + 5e^3 - 3e^4.$$

**Пример 6.2.** Обратная задача – записать координаты векторов $x, y$, разложение которых в стандартном базисе имеет вид

$$x = e^1 + e^3, \;\; y = 2e^1 + e^2.$$

**Решение**

Здесь многие студенты, вероятно, сделают ошибку, записав следующие координаты: $x = (1; 0; 1)$ и $y = (2; 1)$.

На самом деле задача была некорректно поставлена, так как в задании не было указано, векторами каких пространств являются векторы $x$ и $y$ (**!!!**). Поэтому переформулируем задачу.

**Пример 6.2.1** Записать координаты векторов $x,\ y \in R^4$, разложение которых в стандартном базисе имеет вид

$$x = e^1 + e^3,\ \ y = 2e^1 + e^2.$$

**Решение**

Ответом будет $x = (1; 0; 1; 0)$, $y = (2; 1; 0; 0)$.

# § 7. Параметрические уравнения прямой, луча, отрезка

**Определение 7.1.** Прямой, проходящей через точку $x^0 \in R^n$ с направляющим вектором $h \in R^n$, называется множество точек, координаты которых удовлетворяют векторному уравнению

$$x = x^0 + th,\ \ t \in R. \tag{11}$$

Уравнение (11) называется **параметрическим** уравнением прямой ($t$ – параметр). В координатной форме уравнение (11) имеет вид

$$x_1 = x_1^0 + th_1,\ x_2 = x_2^0 + th_2,\ \ldots, x_n = x_n^0 + th_n,\ \ t \in R.$$

Как известно из аналитической геометрии, каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ с направляющим вектором $h = (h_1, h_2)$, имеет вид

$$\frac{x_1 - x_1^0}{h_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{h_2}.$$

От канонического вида легко перейти к параметрическому, введя параметр $t$:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{h_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{h_2} = t.$$

**Определение 7.2.** Лучом с началом в точке $x^0 \in R^n$ в направлении вектора $h \in R^n$ называется множество точек, координаты которых удовлетворяют параметрическому уравнению

$$x = x^0 + th, \;\; t \geq 0. \tag{12}$$

**Определение 7.3.** Отрезком, соединяющим две точки $x^1, \;\; x^2 \in R^n$, называется множество точек, представимых в виде

$$x = x^1 + t(x^2 - x^1), \;\; t \in [0; 1]. \tag{13}$$

При $t = 0$ получим точку $x^1$ – начало отрезка, при $t = 1$ получим точку $x^2$ – конец отрезка. При $0 < t < 1$ этот параметр делит отрезок $[x^1; x^2]$ на отрезки, соотношение длин которых равно $\frac{t}{1-t}$.
Часто также используют другую форму записи уравнения (13):

$$x = (1 - t)x^1 + tx^2, \;\; t \in [0; 1]. \tag{14}$$

**Пример 7.1.** Проверить, лежат ли точки $a = (19; 13; 15)$, $b = (4; 8; 5)$, $c = (10; 10; 9)$ на одной прямой. Записать параметрическое уравнение этой прямой.

**Решение**

Для начала запишем параметрическое уравнение прямой, проходящей через любые две точки из заданных. Возьмем точки $a$ и $b$, найдем вектор $h = a - b$ (он и будет направляющим вектором прямой):

$$h = a - b = (19; 13; 15) - (4; 8; 5) = (15; 5; 10).$$

Запишем параметрическое уравнение прямой, проходящей (например) через точку $b$ с направляющим вектором $h$:

$$x = (4; 8; 5) + t(15; 5; 10) = (4 + 15t; 8 + 5t; 5 + 10t), \quad t \in R.$$

В координатной записи уравнение имеет вид

$$x_1 = 4 + 15t, \quad x_2 = 8 + 5t, \quad x_3 = 5 + 10t, \quad t \in R.$$

Теперь проверим, принадлежит ли точка $c$ этой прямой. Для этого подставим координаты точки $c$ в соответствующие уравнения, получим

$$10 = 4 + 15t,$$

$$10 = 8 + 5t,$$

$$9 = 5 + 10t.$$

Все три уравнения имеют одно и то же решение $t = \frac{2}{5}$. Значит, точка $c$ также принадлежит данной прямой.

**Пример 7.2.** Найти параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $x^1 = (1; 3)$ и $x^2 = (4; 7)$. Определить координаты середины отрезка $[x^1, x^2]$.

**Решение**

Для параметрического уравнения прямой нужно найти направляющий вектор $h$:

$$h = x^2 - x^1 = (4; 7) - (1; 3) = (3; 4).$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $x^1$ в направлении вектора $h$:

$$x = (1; 3) + t(3; 4) = (1 + 3t; 3 + 4t), \quad t \in R.$$

Параметрическое уравнение отрезка $[x^1, x^2]$:

$$x = (1; 3) + t(3; 4) = (1 + 3t; 3 + 4t), \quad t \in [0; 1].$$

Координаты середины отрезка $[x^1, x^2]$ мы найдем, подставив в уравнение $t = \frac{1}{2}$:

$$\overline{x} = (1 + 3 \cdot \frac{1}{2}; 3 + 4 \cdot \frac{1}{2}) = (\frac{5}{2}; 5).$$

## Задания для самостоятельной работы

1. Для пары точек $x^1 = (1; 3; -2; 0)$ и $x^2 = (-1; 2; 4; 1)$ записать уравнение отрезка $[x^1, x^2]$. Определить координаты середины отрезка (точка $\overline{x}$) и координаты точки $\widetilde{x}$, делящей $[x^1, x^2]$ в отношении $1 : 2$.

**Ответ:** $x = (1-2t; 3-t; -2+6t; t)$, $t \in [0; 1]$, $\overline{x} = (0; 5/2; 1; 1/2)$, $\widetilde{x} = (1/3; 8/3; 0; 1/3)$.

2. Найти координаты концов отрезка $[x^1, x^2]$, который точками $c = (7; 0; 3)$, $d = (-5; 0; 0)$ разделен на три равные части.

**Ответ:** $x^1 = (19; 0; 6)$, $x^2 = (-17; 0; -3)$.

3. Даны две точки $a = (1; 2; 3)$ и $b = (7; 2; 5)$. На прямой $ab$ найти такую точку $d$, чтобы точки $b$ и $d$ были расположены по разные стороны от точки $a$ и отрезок $[a, d]$ был в два раза длиннее отрезка $[a, b]$.

**Ответ:** $d = (-11; 2; -1)$.

4. Даны точки $a = (-5; 1; 6)$ и $b = (1; 4; 3)$. Найти координаты точки $d$, делящей отрезок $[a, b]$ в отношении $1 : 3$.

**Ответ:** $d = (-7/2; 7/4; 21/4)$.

5. Отрезок, образованный точками $a = (-2; 5; 13)$ и $b = (6; 17; -7)$, разделен точками $c$, $d$, $f$ на четыре равные части. Найти координаты точек $c$, $d$ и $f$.

**Ответ:** $c = (0; 8; 8)$, $d = (2; 1; 3)$, $f = (4; 14; -2)$.

6. Отрезок, образованный точками $a = (-1; 8; -3)$ и $b = (9; -7; 2)$, разделен точками $c$, $d$, $f$, $e$ на пять равных частей. Найти координаты точек $c$ и $e$.

**Ответ:** $c = (1; 5; -2)$, $e = (5; -1; 0)$.

7. Найти координаты концов отрезка $[a, b]$, который точками $c = (2; 0; 2)$, $d = (5; -2; 0)$ разделен на три равные части.

**Ответ:** $a = (-1; 2; 4)$, $b = (8; -4; -2)$.

## § 8. Уравнение плоскости (гиперплоскости) в $R^n$

**Определение 8.1.** Плоскостью (гиперплоскостью) в $R^n$ называется множество точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$\langle c, x \rangle = b, \tag{15}$$

где $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – заданный вектор, $b$ – заданное число.

При $n = 2$ уравнение (15) принимает вид

$$c_1x_1 + c_2x_2 = b$$

и описывает уравнение прямой на плоскости $R^2$. А при $n = 3$ уравнение (15) описывает уравнение плоскости в трехмерном пространстве:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = b.$$

Вектор $c$ из уравнения (15) называется нормалью (или нормальным вектором) плоскости. Вектор $c$ ортогонален плоскости (т. е. ортогонален всем векторам, лежащим в данной плоскости). Это утверждение нетрудно доказать. Пусть плоскость $P$ задана уравнением (15). Возьмем любую точку $x^0 \in P$, т. е. выполняется $\langle c, x^0 \rangle = b$. Тогда для любого $x \in P$ имеем

$$\langle c, x \rangle = \langle c, x \rangle + b - \langle c, x^0 \rangle = \langle c, x - x^0 \rangle + b.$$

Получили равенство

$$\langle c, x \rangle = \langle c, x - x^0 \rangle + b, \quad \forall x \in R^n, \quad x^0 \in P.$$

Из последнего равенства следует, что точка $x \in P$ тогда и только тогда, когда $\langle c, x - x^0 \rangle = 0$, где $x^0 \in P$. Это означает, что $c$ ортогонален плоскости $P$ (так как $x \in P$ – произвольная точка, вектор $x - x^0 \in P$).

Уравнение прямой, проходящей через точку $x^0$ с нормальным вектором $c$:

$$\langle c, x - x^0 \rangle = 0. \tag{16}$$

**Пример 8.1.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $x^0 = (1; 2; 1)$ с нормальным вектором $c = (1; 1; 0)$.

**Решение**

Согласно формуле (16) имеем:

$$\langle (1; 2; 1), (x_1 - 1; x_2 - 1; x_3) \rangle = 0.$$

Далее, раскрывая скалярное произведение, получаем

$$(x_1 - 1) + 2(x_2 - 1) + x_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 3 = 0,$$

или

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3.$$

## Индивидуальные задания

**Задание 1.** Даны векторы $a, b, c, u, v$. Найти векторы, которые имеют смысл: а) $a + 2b$, б) $a - c$, в) $u + 2b$,
г) $a - (c + v)$, д) $2(b + u) - a$, е) $3a - 4c$:

**1.1.** $a = (6;\ 0;\ 8)$, $b = (0;\ 1)$, $c = (1;\ 3;\ 2)$, $u = (4;\ 3)$, $v = (-1;\ 3;\ 0)$;

**1.2.** $a = (-3;\ 5;\ 1)$, $b = (2;\ -1;\ 5)$, $c = (6;\ -7;\ 3)$, $u = (-9;\ 2)$, $v = (3;\ 6;\ 0)$;

**1.3.** $a = (1;\ 2;\ 0)$, $b = (1;\ 2)$, $c = (0;\ 1;\ 1)$, $u = (1;\ -3)$, $v = (5;\ 3;\ -7)$;

**1.4.** $a = (3;\ 2)$, $b = (-1;\ -1)$, $c = (-3;\ 0)$, $u = (3;\ 4)$, $v = (-1;\ 1;\ 1)$;

**1.5.** $a = (-2;\ 4;\ -7)$, $b = (1;\ 2)$, $c = (5;\ 3;\ -2)$, $u = (-2;\ 3)$, $v = (4;\ 1;\ 0)$;

**1.6.** $a = (4;\ 2;\ 3)$, $b = (5;\ 7;\ -2)$, $c = (3;\ 6;\ 8)$, $u = (9;\ -4)$, $v = (5;\ -6;\ 9)$;

**1.7.** $a = (5;\ 4;\ 3)$, $b = (7;\ -2)$, $c = (6;\ 2;\ 2)$, $u = (-4;\ -3)$, $v = (1;\ -3;\ 0)$;

**1.8.** $a = (3;\ 5;\ 7)$, $b = (2;\ 4;\ 1)$, $c = (9;\ 3;\ 8)$, $u = (3;\ -2)$, $v = (0;\ 5;\ 1)$;

**1.9.** $a = (1;\ 5;\ 8)$, $b = (2;\ -3)$, $c = (-3;\ 2;\ 1)$, $u = (-5;\ 7)$, $v = (2;\ 4;\ -1)$;

**1.10.** $a = (-8;\ 2;\ 6)$, $b = (7;\ -3)$, $c = (5;\ -1;\ -1)$, $u = (3;\ -3)$, $v = (0;\ 7;\ -3)$;

**1.11.** $a = (2;\ 0;\ 1)$, $b = (3;\ 1)$, $c = (2;\ 6;\ 4)$, $u = (1;\ 1)$, $v = (3;\ -1;\ 1)$;

**1.12.** $a = (-2;\ -5;\ -1)$, $b = (4;\ 1;\ 7)$, $c = (3;\ 7;\ -1)$, $u = (5;\ 2)$, $v = (6;\ 1;\ 2)$;

**1.13.** $a = (3;\ 6;\ 0)$, $b = (2;\ 1)$, $c = (2;\ 0;\ 2)$,
$u = (-1;\ 4)$, $v = (-5;\ 2;\ 4)$;

**1.14.** $a = (5;\ 1)$, $b = (1;\ 4)$, $c = (3;\ 3)$, $u = (2;\ 4)$,
$v = (1;\ -1;\ -1)$;

**1.15.** $a = (3;\ 4;\ 5)$, $b = (1;\ -2)$, $c = (7;\ 3;\ 2)$,
$u = (2;\ 1)$, $v = (-4;\ -1;\ 1)$;

**1.16.** $a = (-4;\ 1;\ -3)$, $b = (2;\ -7;\ 2)$, $c = (4;\ -6;\ 2)$,
$u = (1;\ 6)$, $v = (3;\ -8;\ 9)$;

**1.17.** $a = (0;\ -4;\ 2)$, $b = (8;\ -3)$, $c = (-5;\ 1;\ 2)$,
$u = (4;\ 4)$, $v = (1;\ 3;\ 3)$;

**1.18.** $a = (9;\ 0;\ 8)$, $b = (-2;\ -4;\ -1)$, $c = (3;\ -3;\ 4)$,
$u = (2;\ 1)$, $v = (1;\ 0;\ -2)$;

**1.19.** $a = (-1;\ 7;\ 2)$, $b = (2;\ -9)$, $c = (8;\ 8;\ 8)$,
$u = (-3;\ 1)$, $v = (0;\ 1;\ -1)$;

**1.20.** $a = (5;\ 1;\ 3)$, $b = (-7;\ 3)$, $c = (-1;\ 1;\ 4)$,
$u = (2;\ 3)$, $v = (4;\ 3;\ 1)$;

**1.21.** $a = (1;\ 2;\ -3)$, $b = (4;\ 5$, $c = (3;\ 2;\ 0)$,
$u = (2;\ 2)$, $v = (1;\ 3;\ -3)$;

**1.22.** $a = (-2;\ 1;\ 2)$, $b = (0;\ 1)$, $c = (-3;\ 6;\ 1)$,
$u = (-1;\ -1)$, $v = (2;\ 4;\ 7)$;

**1.23.** $a = (8;\ 5;\ 1)$, $b = (2;\ -1;\ 7)$, $c = (4;\ 5;\ 6)$,
$u = (3;\ 1)$, $v = (-3;\ 0;\ 8)$;

**1.24.** $a = (4;\ 3;\ 2)$, $b = (-3;\ 2)$, $c = (5;\ 2;\ 0)$,
$u = (1;\ 3)$, $v = (3;\ 3;\ 2)$;

**1.25.** $a = (6;\ 7)$, $b = (-1;\ -3)$, $c = (2;\ 9)$, $u = (3;\ 6)$,
$v = (0;\ 1;\ 4)$;

**1.26.** $a = (9;\ 0;\ 3)$, $b = (2;\ 6)$, $c = (8;\ 0;\ 1)$,
$u = (-2;\ 3)$, $v = (4;\ 5;\ 0)$;

**1.27.** $a = (6;\ 1;\ -2)$, $b = (3;\ -7;\ 1)$, $c = (3;\ 6;\ 2)$, $u = (-1;\ 6)$, $v = (-3;\ 8;\ 2)$;

**1.28.** $a = (1;\ 4;\ 0)$, $b = (7;\ 3)$, $c = (-2;\ 1;\ 5)$, $u = (-4;\ 4)$, $v = (1;\ 3;\ 6)$;

**1.29.** $a = (7;\ 0;\ 3)$, $b = (2;\ 4;\ -1)$, $c = (-3;\ 3;\ -2)$, $u = (2;\ 1)$, $v = (1;\ 0;\ -3)$;

**1.30.** $a = (-1;\ 5;\ 5)$, $b = (2;\ 1)$, $c = (3;\ 5;\ 4)$, $u = (-3;\ 1)$, $v = (0;\ 1;\ 1)$.

**Задание 2.** Вычислить длину векторов $a$, $b$, $c$, $u$, $v$ из задания 1 и следующие скалярные произведения:
$\langle a, b\rangle$, $\langle a, c\rangle$, $\langle v, a\rangle$, $\langle a, c + 2v\rangle$, $\langle 4a + 3c, v\rangle$, $\langle a + v, c - 2a\rangle$, $\langle 5a + 2b, 2b - c - 5a\rangle$.

**Задание 3.** Даны координаты вершин треугольника $ABC$. Найти: а) длину стороны $AB$; б) проекцию стороны $AB$ на сторону $BC$; в) внутренний угол при вершине $A$.

**3.1.** $A(4; 6; 3)$, $B(-5; 2; 6)$, $C(4; -4; -3)$;

**3.2.** $A(4; 3; -2)$, $B(-3; -1; 4)$, $C(2; 2; 1)$;

**3.3.** $A(-2; -2; 4)$, $B(1; 3; -2)$, $C(1; 4; 2)$;

**3.4.** $A(2; 4; 3)$, $B(3; 1; -4)$, $C(-1; 2; 2)$;

**3.5.** $A(2; 4; 5)$, $B(1; -2; 3)$, $C(-1; -2; 4)$;

**3.6.** $A(-1; -2; 4)$, $B(-1; 3; 5)$, $C(1; 4; 2)$;

**3.7.** $A(1; 3; 2)$, $B(-2; 4; -1)$, $C(1; 3; -2)$;

**3.8.** $A(2; -4; 3)$, $B(-3; -2; 4)$, $C(0; 0; -2)$;

**3.9.** $A(3; 4; -4)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(2; -3; 1)$;

**3.10.** $A(0; 2; 5)$, $B(2; -3; 4)$, $C(3; 2; -5)$;

**3.11.** $A(-2; -3; -4)$, $B(2; -4; 0)$, $C(1; 4; 5)$;

**3.12.** $A(-2;-3;-2)$, $B(1;4;2)$, $C(1;-3;3)$;

**3.13.** $A(5;6;1)$, $B(-2;4;-1)$, $C(3;-3;3)$;

**3.14.** $A(10;6;3)$, $B(-2;4;5)$, $C(3;-4;-6)$;

**3.15.** $A(3;2;4)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-2;-1)$;

**3.16.** $A(-2;3;-4)$, $B(3;-1;2)$, $C(4;2;4)$;

**3.17.** $A(4;5;3)$, $B(-4;2;3)$, $C(5;-6;-2)$;

**3.18.** $A(2;4;6)$, $B(-3;5;1)$, $C(4;-5;-4)$;

**3.19.** $A(-4;-2;-5)$, $B(3;7;2)$, $C(4;6;-3)$;

**3.20.** $A(5;4;4)$, $B(-5;2;3)$, $C(4;2;-5)$;

**3.21.** $A(3;4;6)$, $B(4;6;4)$, $C(5;-2;-3)$;

**3.22.** $A(-5;-2;-6)$, $B(3;4;5)$, $C(2;-5;4)$;

**3.23.** $A(3;4;1)$, $B(5;-2;6)$, $C(4;2;-7)$;

**3.24.** $A(4;3;2)$, $B(-4;-3;5)$, $C(6;4;-3)$;

**3.25.** $A(-5;4;3)$, $B(4;5;2)$, $C(2;7;-4)$;

**3.26.** $A(6;4;5)$, $B(-7;1;8)$, $C(2;-2;-7)$;

**3.27.** $A(6;5;-4)$, $B(-5;-2;2)$, $C(3;3;2)$;

**3.28.** $A(-3;-5;6)$, $B(3;5;-4)$, $C(2;6;4)$;

**3.29.** $A(3;5;4)$, $B(4;2;-3)$, $C(-2;4;7)$;

**3.30.** $A(4;6;7)$, $B(2;-4;1)$, $C(-3;-4;2)$.

**Задание 4.** Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми:

**4.1.** $x^1 = (-3;\ \ 1;\ \ 5)$,
$x^2 = (6;\ \ -2;\ \ 15)$;

**4.2.** $x^1 = (4;\ \ -12;\ \ 28)$,
$x^2 = (-7;\ \ 21;\ \ -49)$;

**4.3.** $x^1 = (1;\ 2;\ 3;\ 0)$,
$x^2 = (2;\ 4;\ 6;\ 1)$;

**4.4.** $x^1 = (1;\ 0;\ 2;\ 3)$,
$x^2 = (1;\ 1;\ 0;\ 4)$;

**4.5.** $x^1 = (1;\ 2;\ 3)$,
$x^2 = (3;\ 6;\ 7)$;

**4.6.** $x^1 = (4;\ -2;\ 6)$,
$x^2 = (6;\ -3;\ 9)$;

**4.7.** $x^1 = (1;\ 2;\ 3)$,
$x^2 = (2;\ 5;\ 7)$,
$x^3 = (3;\ 7;\ 10)$;

**4.8.** $x^1 = (1;\ 2;\ 3)$,
$x^2 = (2;\ 5;\ 7)$,
$x^3 = (3;\ 7;\ 11)$;

**4.9.** $x^1 = (2;\ -3;\ 1)$,
$x^2 = (3;\ -1;\ 5)$,
$x^3 = (1;\ -4;\ 3)$;

**4.10.** $x^1 = (5;\ 4;\ 3)$,
$x^2 = (3;\ 3;\ 2)$,
$x^3 = (8;\ 1;\ 3)$;

**4.11.** $x^1 = (-2;\ 1;\ 3)$,
$x^2 = (4;\ -2;\ 7)$;

**4.12.** $x^1 = (3;\ 6;\ 11)$,
$x^2 = (1;\ 2;\ 8)$;

**4.13.** $x^1 = (1;\ 3;\ 0;\ 2)$,
$x^2 = (2;\ 6;\ 1;\ 4)$;

**4.14.** $x^1 = (2;\ 0;\ 4;\ 6)$,
$x^2 = (1;\ 1;\ 0;\ 2)$;

**4.15.** $x^1 = (1;\ 2;\ 4)$,
$x^2 = (2;\ 6;\ 8)$;

**4.16.** $x^1 = (-2;\ 8;\ 10)$,
$x^2 = (3;\ -12;\ -15)$;

**4.17.** $x^1 = (-1;\ 4;\ 5)$,
$x^2 = (0;\ 2;\ 7)$,
$x^3 = (-1;\ 6;\ 12)$;

**4.18.** $x^1 = (-1;\ 4;\ 5)$,
$x^2 = (1;\ 1;\ 7)$,
$x^3 = (0;\ 5;\ 11)$;

**4.19.** $x^1 = (-2;\ 4;\ 7)$,
$x^2 = (1;\ 0;\ 3)$;

**4.20.** $x^1 = (5;\ 1;\ 2)$,
$x^2 = (10;\ 2;\ 3)$;

**4.21.** $x^1 = (1;\ -2;\ 5)$,
$x^2 = (2;\ 3;\ 4)$,
$x^3 = (4;\ -1;\ 14)$;

**4.22.** $x^1 = (3;\ 2;\ 5)$,
$x^2 = (1;\ 0;\ 3)$,
$x^3 = (5;\ 2;\ 11)$;

**4.23.** $x^1 = (2;\ 3;\ 0;\ 1)$,
$x^2 = (6;\ 9;\ 1;\ 3)$;

**4.24.** $x^1 = (1;\ 0;\ 2;\ 5)$,
$x^2 = (1;\ 1;\ 0;\ 2)$;

**4.25.** $x^1 = (-3;\ 2;\ 5)$,
$x^2 = (9;\ 1;\ -15)$;

**4.26.** $x^1 = (6;\ 4;\ 2)$,
$x^2 = (9;\ 6;\ 3)$;

**4.27.** $x^1 = (4;\ 1;\ 3)$,
$x^2 = (-2;\ 2;\ 1)$,
$x^3 = (0;\ 5;\ 5)$;

**4.28.** $x^1 = (-1;\ 3;\ 4)$,
$x^2 = (2;\ 2;\ 1)$,
$x^3 = (0;\ 8;\ 9)$;

**4.29.** $x^1 = (3;\ 2;\ 1)$,
$x^2 = (-3;\ -2;\ 1)$,
$x^3 = (12;\ 8;\ -2)$;

**4.30.** $x^1 = (2;\ 3;\ -1)$,
$x^2 = (0;\ 1;\ 4)$,
$x^3 = (2;\ 4;\ 7)$.

**Задание 5.** Записать разложение векторов в стандартных базисах соответствующих пространств:

**5.1.** $x = (2;\ 0;\ 1)$, $y = (3;\ 0;\ 0)$, $z = (2;\ 1)$,
$a = (2;\ 0;\ 0;\ 5)$, $b = (1;\ 3;\ -2;\ -5)$;

**5.2.** $x = (-4;\ 1)$, $y = (6;\ 1;\ -3)$, $z = (4;\ 5;\ 7)$,
$a = (-2;\ 9;\ -1)$, $b = (2;\ 4;\ -6;\ 1)$;

**5.3.** $x = (3;\ -6;\ 0)$, $y = (-4;\ 2;\ 1)$, $z = (5;\ 1)$,
$a = (-8;\ -3;\ 1;\ 4)$, $b = (2;\ 5;\ -7;\ 0)$;

**5.4.** $x = (7;\ 0)$, $y = (1;\ 5;\ -5)$, $z = (8;\ 9;\ -7)$,
$a = (-3;\ 6;\ -10)$, $b = (3;\ 7;\ -8;\ 1)$;

**5.5.** $x = (-3;\ 4;\ 1)$, $y = (8;\ -2;\ -1)$, $z = (6;\ -2)$,
$a = (7;\ -3;\ 2,\ 1)$, $b = (9;\ 10;\ -7;\ 2)$;

**5.6.** $x = (-2;\ 4)$, $y = (-1;\ 3;\ -4)$, $z = (3;\ -2;\ 7)$,
$a = (-6;\ 1;\ 0)$, $b = (2;\ -5;\ 8;\ 3)$;

**5.7.** $x = (5;\ 1;\ 0)$, $y = (-7;\ 3;\ 1)$, $z = (4;\ 3)$,
$a = (3;\ 5;\ -1,\ 2)$, $b = (10;\ 0;\ -5;\ -3)$;

**5.8.** $x = (3;\ 5)$, $y = (1;\ 0;\ 4)$, $z = (-3;\ 2;\ -5)$,
$a = (6;\ -3;\ 1)$, $b = (-2;\ 5;\ -8;\ 0)$;

**5.9.** $x = (-2;\ -3;\ 1)$, $y = (4;\ -5;\ 1)$, $z = (-1;\ 6)$,
$a = (-4;\ 2;\ 0,\ 3)$, $b = (6;\ 3;\ 4;\ 3)$;

**5.10.** $x = (9;\ 8)$, $y = (3;\ 2;\ 1)$, $z = (0;\ 1;\ 8)$,
$a = (9;\ -4;\ 2)$, $b = (0;\ 0;\ 5;\ 0)$;

**5.11.** $x = (-3;\ 1;\ 0)$, $y = (7;\ 0;\ 6)$, $z = (-5;\ 4)$,
$a = (1;\ 0;\ 3;\ 2)$, $b = (8;\ -3;\ 2;\ 5)$;

**5.12.** $x = (14;\ -1)$, $y = (16;\ 11;\ -13)$, $z = (9;\ 5;\ 0)$,
$a = (-21;\ 5;\ -1)$, $b = (0;\ -3;\ 6;\ 0)$;

**5.13.** $x = (3;\ -16;\ 0)$, $y = (-4;\ 12;\ 1)$, $z = (0;\ 1)$,
$a = (18;\ -3;\ 11;\ 4)$, $b = (5;\ 5;\ 0;\ 0)$;

**5.14.** $x = (17;\ 0)$, $y = (1;\ 15;\ -5)$, $z = (4;\ 9;\ -17)$,
$a = (3;\ 6;\ -1)$, $b = (13;\ 7;\ -18;\ 1)$;

**5.15.** $x = (-5;\ 4;\ 11)$, $y = (8;\ -12;\ -1)$, $z = (16;\ -2)$,
$a = (7;\ -3;\ 2,\ 11)$, $b = (19;\ 10;\ -7;\ 0)$;

**5.16.** $x = (-12;\ 4)$, $y = (8;\ 7;\ -4)$, $z = (3;\ -2;\ 7)$,
$a = (-6;\ 1;\ -9)$, $b = (21;\ -5;\ 0;\ 0)$;

**5.17.** $x = (15;\ 1;\ 0)$, $y = (-17;\ 3;\ 1)$, $z = (14;\ 3)$,
$a = (3;\ 5;\ -1,\ 2)$, $b = (-9;\ 0;\ -5;\ -13)$;

**5.18.** $x = (-13;\ 5)$, $y = (1;\ 0;\ 0)$, $z = (3;\ 12;\ 7)$,
$a = (-4;\ -3;\ 1)$, $b = (0;\ 5;\ -8;\ 0)$;

**5.19.** $x = (-12;\ -13;\ 1)$, $y = (-7;\ -5;\ 8)$, $z = (-1;\ 4)$,
$a = (-4;\ 2;\ 0,\ 3)$, $b = (6;\ 3;\ 4;\ 0)$;

**5.20.** $x = (19;\ 8)$, $y = (3;\ 21;\ 1)$, $z = (0;\ 1;\ 18)$,
$a = (9;\ -4;\ 2)$, $b = (0;\ 2;\ 5;\ 0)$;
**5.21.** $x = (-12;\ 0;\ 14)$, $y = (3;\ 3;\ 0)$, $z = (2;\ 1)$,
$a = (-2;\ 0;\ 0;\ 8)$, $b = (-7;\ 3;\ -2;\ -5)$;

**5.22.** $x = (-14;\ 1)$, $y = (6;\ 11;\ 3)$, $z = (4;\ 5;\ 17)$,
$a = (-2;\ 9;\ 0)$, $b = (12;\ 4;\ -16;\ 1)$;

**5.23.** $x = (13;\ \ -6;\ \ 5)$, $y = (-4;\ \ 0;\ \ 0)$, $z = (-8;\ \ 1)$,
$a = (-8;\ \ 3;\ \ 1;\ \ 4)$, $b = (2;\ \ 7;\ \ -7;\ \ 0)$;

**5.24.** $x = (17;\ \ 0)$, $y = (1;\ \ 15;\ \ -5)$, $z = (8;\ \ 19;\ \ -7)$,
$a = (-3;\ \ 6;\ \ -10)$, $b = (13;\ \ 7;\ \ -8;\ \ 11)$;

**5.25.** $x = (19;\ \ 4;\ \ 1)$, $y = (18;\ \ -2;\ \ -1)$, $z = (16;\ \ -2)$,
$a = (7;\ \ -3;\ \ 2,\ \ 11)$, $b = (9;\ \ 10;\ \ -7;\ \ 12)$;

**5.26.** $x = (4;\ \ 4)$, $y = (21;\ \ 3;\ \ -4)$, $z = (0;\ \ -2;\ \ 7)$,
$a = (-16;\ \ 1;\ \ 0)$, $b = (2;\ \ -5;\ \ 8;\ \ 0)$;

**5.27.** $x = (15;\ \ 11;\ \ 0)$, $y = (-17;\ \ 3;\ \ 2)$, $z = (4;\ \ 3)$,
$a = (4;\ \ 5;\ \ -1,\ \ 0)$, $b = (10;\ \ 0;\ \ 0;\ \ -3)$;

**5.28.** $x = (13;\ \ 0)$, $y = (3;\ \ 0;\ \ 4)$, $z = (5;\ \ 2;\ \ -5)$,
$a = (-7;\ \ -3;\ \ 1)$, $b = (-2;\ \ 0;\ \ -8;\ \ 0)$;

**5.29.** $x = (-12;\ \ -13;\ \ 1)$, $y = (4;\ \ 0;\ \ 1)$, $z = (-13;\ \ 6)$,
$a = (-4;\ \ 2;\ \ 0,\ \ 3)$, $b = (16;\ \ 3;\ \ 4;\ \ 0)$;

**5.30.** $x = (19;\ \ 0)$, $y = (-4;\ \ 2;\ \ 1)$, $z = (1;\ \ 1;\ \ 8)$,
$a = (9;\ \ -4;\ \ 2)$, $b = (5;\ \ 0;\ \ 5;\ \ 0)$.

**Задание 6.** Записать координаты векторов $x, y \in R^3$, разложение которых в стандартном базисе имеет вид:

**6.1.** $x = 2e^1 + 3e^2$, $y = 4e^1 + 2e^2 + e^3$;

**6.2.** $x = -3e^1 - e^3$, $y = 2e^1 - 5e^2$;

**6.3.** $x = e^1 + 7e^2$, $y = -7e^1 + 4e^3$;

**6.4.** $x = -3e^2 + e^3$, $y = 3e^1 - 2e^2$;

**6.5.** $x = 8e^1 - 5e^2$, $y = -4e^1 + 7e^2 + 9e^3$;

**6.6.** $x = -2e^1 - e^3$, $y = 4e^1 + 3e^2$;

**6.7.** $x = 3e^2$, $y = 5e^1 - 2e^2 - 7e^3$;

**6.8.** $x = e^1 - 4e^2 + 8e^3$, $y = 2e^1 - 7e^2$;

**6.9.** $x = 3e^1$, $y = 5e^1 - 10e^3$;

**6.10.** $x = 7e^1 + 8e^2 - 2e^3$, $y = -3e^1$;

**6.11.** $x = -5e^1 + 3e^3$, $y = e^1 - 2e^2 + e^3$;

**6.12.** $x = -3e^1 - e^2$, $y = 2e^1$;

**6.13.** $x = 8e^1 - 5e^2$, $y = 7e^1 + 9e^3$;

**6.14.** $x = -13e^2 + e^3$, $y = 3e^1 - 12e^2$;

**6.15.** $x = 18e^1 - 5e^2$, $y = -14e^1 + 5e^2 + e^3$;

**6.16.** $x = -12e^1 + 10e^3$, $y = 4e^1 - 3e^2$;

**6.17.** $x = 13e^2$, $y = 5e^1 + 4e^2 - e^3$;

**6.18.** $x = 10e^1 + 4e^2 - 5e^3$, $y = 12e^1 - 7e^2$;

**6.19.** $x = 13e^1$, $y = 5e^1 - 8e^3$;

**6.20.** $x = 17e^1 + 8e^2 + 8e^3$, $y = -13e^1$;

**6.21.** $x = 21e^1 - 3e^2$, $y = 14e^1 + 2e^2 + 5e^3$;

**6.22.** $x = -13e^1 - e^3$, $y = 2e^1 - 15e^2$;

**6.23.** $x = 11e^1 - 8e^2$, $y = -7e^1 + 14e^3$;

**6.24.** $x = -3e^2 + 12e^3$, $y = 3e^1 + 9e^2$;

**6.25.** $x = 18e^1 + 3e^2$, $y = -14e^1 + 7e^2 - e^3$;

**6.26.** $x = -12e^1 + 7e^3$, $y = 4e^1 + 5e^2$;

**6.27.** $x = 5e^2$, $y = 17e^1 - 2e^2 + 13e^3$;

**6.28.** $x = 4e^1 - e^2 + 8e^3$, $y = 21e^1 - 7e^2$;

**6.29.** $x = 13e^1$, $y = 5e^1 + 10e^3$;

**6.30.** $x = 17e^1 + 8e^2 + 5e^3$, $y = 6e^1$.

**Задание 7.** Записать параметрические уравнения прямых, проходящих через точки $x$ и $y$. Проверить, принадлежит ли точка $\overline{x}$ прямой:

**7.1.** $x = (3;\ -4;\ 2;\ 1)$, $y = (1;\ -2;\ 4;\ 0)$,
$\overline{x} = (-3;\ 2;\ 8;\ 2)$;

**7.2.** $x = (0;\ -4;\ 2;\ 3)$, $y = (-4;\ -7;\ 5;\ 4)$,
$\overline{x} = (8;\ 2;\ -4;\ 1)$;

**7.3.** $x = (-4;\ 0;\ 4;\ 1;\ -1)$, $y = (-3;\ 1;\ 3;\ 0;\ 0)$,
$\overline{x} = (1;\ 5;\ -1;\ -4;\ 4)$;

**7.4.** $x = (2;\ 1;\ -1;\ 0;\ 1)$, $y = (-1;\ 4;\ -3;\ 10;\ 1)$,
$\overline{x} = (-4;\ 7;\ -5;\ 3;\ 1)$;

**7.5.** $x = (-3;\ 10;\ 4;\ 0;\ -8)$, $y = (7;\ 0;\ -6;\ 10;\ 2)$,
$\overline{x} = (5;\ 2;\ -4;\ 8;\ 0)$;

**7.6.** $x = (1;\ 2;\ 3;\ 4)$, $y = (0;\ 5;\ 1;\ 2)$,
$\overline{x} = (1;\ -1;\ 5;\ 6)$;

**7.7.** $x = (2;\ -1;\ 0;\ 3)$, $y = (-3;\ 2;\ 1;\ 5)$,
$\overline{x} = (7;\ -4;\ -1;\ 0)$;

**7.8.** $x = (3;\ -2;\ 4;\ 1)$, $y = (7;\ -2;\ 1;\ 3)$,
$\overline{x} = (-1;\ -2;\ 4;\ -1)$;

**7.9.** $x = (1;\ -4;\ 2;\ 5)$, $y = (0;\ 7;\ 3;\ 1)$,
$\overline{x} = (3;\ -26;\ 0;\ 13)$;

**7.10.** $x = (3;\ 0;\ -4;\ 2)$, $y = (1;\ -4;\ -3;\ -1)$,
$\overline{x} = (5;\ 4;\ -5;\ 5)$;

**7.11.** $x = (9;\ -12;\ 6;\ 3)$, $y = (3;\ -6;\ 12;\ 0)$,
$\overline{x} = (-9;\ 6;\ 24;\ 6)$;

**7.12.** $x = (0;\ -12;\ 6;\ 9)$, $y = (-12;\ -21;\ 15;\ 12)$,
$\overline{x} = (24;\ 6;\ -12;\ 3)$;

**7.13.** $x = (-12;\ 0;\ 12;\ 3;\ -3)$, $y = (-9;\ 3;\ 9;\ 0;\ 0)$,
$\overline{x} = (3;\ 15;\ -3;\ -12;\ 12)$;

**7.14.** $x = (6;\ 3;\ -3;\ 0;\ 3)$, $y = (-3;\ 12;\ -9;\ 30;\ 3)$,
$\overline{x} = (-12;\ 21;\ -15;\ 9;\ 3)$;

**7.15.** $x = (-9;\ 30;\ 12;\ 0;\ -24)$,
$y = (21;\ 0;\ -18;\ 30;\ 6)$, $\overline{x} = (15;\ 6;\ -12;\ 24;\ 0)$;

**7.16.** $x = (3;\ 6;\ 9;\ 12)$, $y = (0;\ 15;\ 3;\ 6)$,
$\overline{x} = (3;\ -3;\ 15;\ 18)$;

**7.17.** $x = (6;\ -3;\ 0;\ 9)$, $y = (-9;\ 6;\ 3;\ 15)$,
$\overline{x} = (21;\ -12;\ -3;\ 0)$;

**7.18.** $x = (9;\ -6;\ 12;\ 3)$, $y = (21;\ -6;\ 3;\ 9)$,
$\overline{x} = (-3;\ -2;\ 12;\ -3)$;

**7.19.** $x = (3;\ -12;\ 6;\ 15)$, $y = (0;\ 21;\ 9;\ 3)$,
$\overline{x} = (9;\ -78;\ 0;\ 39)$;

**7.20.** $x = (9;\ 0;\ -12;\ 6)$, $y = (3;\ -12;\ -9;\ -3)$,
$\overline{x} = (15;\ 12;\ -15;\ 15)$;

**7.21.** $x = (6;\ -8;\ 4;\ 2)$, $y = (2;\ -4;\ 8;\ 0)$,
$\overline{x} = (-6;\ 4;\ 16;\ 4)$;

**7.22.** $x = (0;\ -8;\ 4;\ 6)$, $y = (-8;\ -14;\ 10;\ 8)$,
$\overline{x} = (16;\ 4;\ -8;\ 2)$;

**7.23.** $x = (-8;\ 0;\ 8;\ 2;\ -2)$, $y = (-6;\ 2;\ 6;\ 0;\ 0)$,
$\overline{x} = (2;\ 10;\ -2;\ -8;\ 8)$;

**7.24.** $x = (4;\ 2;\ -2;\ 0;\ 2)$, $y = (-2;\ 8;\ -6;\ 20;\ 2)$,
$\overline{x} = (-8;\ 14;\ -10;\ 6;\ 2)$;

**7.25.** $x = (-6;\ 20;\ 8;\ 0;\ -16)$,
$y = (14;\ 0;\ -12;\ 20;\ 4)$, $\overline{x} = (10;\ 4;\ -8;\ 16;\ 0)$;

**7.26.** $x = (2;\ 4;\ 6;\ 8)$, $y = (0;\ 10;\ 2;\ 4)$,
$\overline{x} = (2;\ -2;\ 10;\ 12)$;

**7.27.** $x = (4;\ -2;\ 0;\ 6)$, $y = (-6;\ 4;\ 2;\ 10)$,
$\overline{x} = (14;\ -8;\ -2;\ 0)$;

**7.28.** $x = (6;\ -4;\ 8;\ 2)$, $y = (14;\ -8;\ 2;\ 6)$,
$\overline{x} = (-2;\ -4;\ 8;\ -2)$;

**7.29.** $x = (2;\ -8;\ 4;\ 10)$, $y = (0;\ 14;\ 6;\ 2)$,
$\overline{x} = (6;\ -52;\ 0;\ 26)$;

**7.30.** $x = (6;\ 0;\ -8;\ 4)$, $y = (2;\ -8;\ -6;\ -2)$,
$\overline{x} = (10;\ 8;\ -10;\ 10)$.

**Задание 8.** Записать параметрические уравнения прямых, проходящих через точку $a$ в направлении вектора $h$:

**8.1.** $a = (2;\ -1)$, $h = (1;\ 3)$;

**8.2.** $a = (-3;\ 0;\ 2)$, $h = (2;\ 2;\ -1)$;

**8.3.** $a = (2;\ -1;\ 4;\ 1)$, $h = (1;\ 2;\ -2;\ 3)$;

**8.4.** $a = (4;\ 2;\ 5)$, $h = (-1;\ 7;\ 2)$;

**8.5.** $a = (-6;\ 3;\ 7)$, $h = (8;\ 4;\ -6)$;

**8.6.** $a = (5;\ -3;\ 2;\ 1)$, $h = (1;\ 0;\ 2;\ -3)$;

**8.7.** $a = (1;\ -2;\ 0;\ 4)$, $h = (3;\ -5;\ 7;\ 1)$;

**8.8.** $a = (2;\ 5;\ 3;\ -1)$, $h = (7;\ -4;\ 3;\ -1)$;

**8.9.** $a = (-3;\ 2;\ 8;\ 2)$, $h = (0;\ -4;\ 3;\ 2)$;

**8.10.** $a = (4;\ 7;\ 5;\ -3)$, $h = (7;\ 0;\ 6;\ 1)$;

**8.11.** $a = (4;\ -2)$, $h = (2;\ 6)$;

**8.12.** $a = (-6;\ 0;\ 4)$, $h = (4;\ 4;\ -2)$;

**8.13.** $a = (4;\ -2;\ 8;\ 2)$, $h = (2;\ 4;\ -4;\ 6)$;

**8.14.** $a = (8;\ 4;\ 10)$, $h = (-2;\ 14;\ 4)$;

**8.15.** $a = (-12;\ 6;\ 14)$, $h = (16;\ 8;\ -12)$;

**8.16.** $a = (10;\ -6;\ 4;\ 2)$, $h = (2;\ 0;\ 4;\ -6)$;

**8.17.** $a = (2;\ -4;\ 0;\ 8)$, $h = (6;\ -10;\ 14;\ 2)$;

**8.18.** $a = (4;\ 10;\ 6;\ -2)$, $h = (14;\ -8;\ 6;\ -2)$;

**8.19.** $a = (-6;\ 4;\ 16;\ 4)$, $h = (0;\ -8;\ 6;\ 4)$;

**8.20.** $a = (8;\ 14;\ 10;\ -6)$, $h = (14;\ 0;\ 12;\ 2)$;

**8.21.** $a = (6;\ -3)$, $h = (3;\ 9)$;

**8.22.** $a = (-9;\ 0;\ 6)$, $h = (3;\ 6;\ -3)$;

**8.23.** $a = (6;\ -3;\ 12;\ 3)$, $h = (3;\ 6;\ -6;\ 9)$;

**8.24.** $a = (12;\ 6;\ 15)$, $h = (-3;\ 21;\ 6)$;

**8.25.** $a = (-18;\ 9;\ 21)$, $h = (24;\ 12;\ -18)$;

**8.26.** $a = (15;\ -9;\ 6;\ 3)$, $h = (3;\ 0;\ 6;\ -9)$;

**8.27.** $a = (3;\ -6;\ 0;\ 12)$, $h = (9;\ -15;\ 21;\ 3)$;

**8.28.** $a = (6;\ 15;\ 9;\ -3)$, $h = (21;\ -12;\ 9;\ -3)$;

**8.29.** $a = (-9;\ 6;\ 24;\ 6)$, $h = (0;\ -12;\ 9;\ 6)$;

**8.30.** $a = (12;\ 21;\ 15;\ -9)$, $h = (21;\ 0;\ 18;\ 3)$.

**Задание 9.** Составить уравнение отрезка $[x^1, x^2]$ . Определить координаты точки $\overline{x}$, делящей данный отрезок в заданном отношении:

**9.1.** $x^1 = (1;\ 0)$, $x^2 = (6;\ 5)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $4 : 1$;

**9.2.** $x^1 = (3;\ 2;\ 1)$, $x^2 = (1;\ 0;\ -1)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1 : 3$;

**9.3.** $x^1 = (4;\ -10;\ 0)$, $x^2 = (-1;\ 0;\ 5)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1 : 4$;

**9.4.** $x^1 = (-2;\ -1)$, $x^2 = (1;\ 2)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1 : 2$;

**9.5.** $x^1 = (2;\ 1;\ -3)$, $x^2 = (1;\ 2;\ 3)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $5 : 1$;

**9.6.** $x^1 = (-1;\ 0)$, $x^2 = (2;\ 3)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $2:1$;

**9.7.** $x^1 = (-1;\ 0)$, $x^2 = (3;\ 4)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:3$;

**9.8.** $x^1 = (1;\ 2;\ 0)$, $x^2 = (3;\ 1;\ -1)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $2:1$;

**9.9.** $x^1 = (2;\ -5)$, $x^2 = (1;\ 4)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $3:1$;

**9.10.** $x^1 = (-1;\ 0;\ 4)$, $x^2 = (4;\ 3;\ -1)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:2$;

**9.11.** $x^1 = (2;\ 0)$, $x^2 = (12;\ 10)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $4:1$;

**9.12.** $x^1 = (6;\ 4;\ 2)$, $x^2 = (2;\ 0;\ -2)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:3$;

**9.13.** $x^1 = (8;\ -20;\ 0)$, $x^2 = (-2;\ 0;\ 10)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:4$;

**9.14.** $x^1 = (-4;\ -2)$, $x^2 = (2;\ 4)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:2$;

**9.15.** $x^1 = (4;\ 2;\ -6)$, $x^2 = (2;\ 4;\ 6)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $5:1$;

**9.16.** $x^1 = (-2;\ 0)$, $x^2 = (4;\ 6)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $2:1$;

**9.17.** $x^1 = (-2;\ 0)$, $x^2 = (6;\ 8)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:3$;

**9.18.** $x^1 = (2;\ 4;\ 0)$, $x^2 = (6;\ 2;\ -2)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $2:1$;

**9.19.** $x^1 = (4;\ -10)$, $x^2 = (2;\ 8)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $3:1$;

**9.20.** $x^1 = (-2;\ 0;\ 8)$, $x^2 = (8;\ 6;\ -2)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:2$;

**9.21.** $x^1 = (3;\ 0)$, $x^2 = (18;\ 15)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $4:1$;

**9.22.** $x^1 = (9;\ 6;\ 3)$, $x^2 = (3;\ 0;\ -3)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:3$;

**9.23.** $x^1 = (12;\ -30;\ 0)$, $x^2 = (-3;\ 0;\ 15)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:4$;

**9.24.** $x^1 = (-6;\ -3)$, $x^2 = (3;\ 6)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:2$;

**9.25.** $x^1 = (6;\ 3;\ -9)$, $x^2 = (3;\ 6;\ 9)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $5:1$;

**9.26.** $x^1 = (-3;\ 0)$, $x^2 = (6;\ 9)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $2:1$;

**9.27.** $x^1 = (-3;\ 0)$, $x^2 = (9;\ 12)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:3$;

**9.28.** $x^1 = (3;\ 6;\ 0)$, $x^2 = (9;\ 3;\ -3)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $2:1$;

**9.29.** $x^1 = (6;\ -15)$, $x^2 = (3;\ 12)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $3:1$;

**9.30.** $x^1 = (-3;\ 0;\ 12)$, $x^2 = (12;\ 9;\ -3)$, точка $\overline{x}$ делит отрезок $[x^1, x^2]$ в отношении $1:2$.

**Задание 10.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $a$ и имеет нормальный вектор $n$:

**10.1.** $a = (2;\ 1;\ -1)$, $n = (1;\ -2;\ 3)$;
**10.2.** $a = (2;\ -5;\ 1)$, $n = (7;\ 4;\ -3)$;
**10.3.** $a = (-3;\ 4;\ 6)$, $n = (1;\ 2;\ 3)$;
**10.4.** $a = (1;\ 2;\ 1)$, $n = (1;\ 1;\ 0)$;
**10.5.** $a = (-1;\ 1;\ 2)$, $n = (1;\ 3;\ -1)$;

**10.6.** $a = (3;\ 2;\ 5)$, $n = (2;\ -2;\ 1)$;
**10.7.** $a = (4;\ 5;\ 3)$, $n = (1;\ 3;\ 2)$;
**10.8.** $a = (6;\ 3;\ 1)$, $n = (4;\ -2;\ -3)$;
**10.9.** $a = (-5;\ 1;\ 0)$, $n = (3;\ 0;\ 1)$;
**10.10.** $a = (2;\ 3;\ -1)$, $n = (-2;\ 4;\ 0)$;
**10.11.** $a = (7;\ 8;\ 3)$, $n = (2;\ 1;\ -3)$;
**10.12.** $a = (-2;\ 6;\ 4)$, $n = (8;\ 1;\ 4)$;
**10.13.** $a = (8;\ -4;\ -6)$, $n = (1;\ -2;\ 5)$;
**10.14.** $a = (1;\ 2;\ 3)$, $n = (-1;\ 5;\ 7)$;
**10.15.** $a = (-4;\ 3;\ 2)$, $n = (6;\ 3;\ 2)$.

Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $n$:

**10.16.** $n = (5;\ 0;\ -3)$;
**10.17.** $n = (-2;\ 3;\ 7)$;
**10.18.** $n = (4;\ -1;\ 0)$;
**10.19.** $n = (1;\ 1;\ -1)$;
**10.20.** $n = (2;\ 8;\ 4)$;
**10.21.** $n = (7;\ 2;\ 3)$;
**10.22.** $n = (-2;\ 4;\ 1)$;
**10.23.** $n = (-4;\ 1;\ 0)$;
**10.24.** $n = (5;\ -1;\ 2)$;
**10.25.** $n = (7;\ 3;\ -4)$;
**10.26.** $n = (-5;\ 4;\ 3)$;
**10.27.** $n = (2;\ -3;\ 7)$;
**10.28.** $n = (4;\ 5;\ 1)$;
**10.29.** $n = (-1;\ 3;\ -1)$;
**10.30.** $n = (-2;\ 5;\ 4)$.

## Задание 11. Упражнения на доказательство

**11.1.** Доказать, что если среди векторов $x, y, \ldots, z$ имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

**11.2.** Доказать, что система векторов, состоящая из одного ненулевого вектора, линейно независима.

**11.3.** Доказать, что векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

**11.4.** Доказать следующие свойства сложения, умножения векторов:

**а)** $(x + y) + z = x + (y + z)$;

**б)** $x - y = x + (-y)$;

**в)** $\alpha(x \pm y) = \alpha x \pm \alpha y$;

**г)** $\alpha(\beta x) = \beta \cdot (\alpha x) = \alpha\beta x$;

**д)** $1 \cdot x = x$;

**е)** $x + (-x) = 0$;

**ж)** $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

**з)** $\langle \alpha x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

**и)** $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;

**к)** $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle$.

**11.5.** Доказать неравенство Коши — Буняковского

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

**11.6.** Доказать неравенство треугольника

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in R^n.$$

**11.7.** Доказать неравенство

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

# Глава 2

# Матрицы и матричные операции

## § 1. Матрицы. Основные понятия

**Определение 1.1.** Матрицей порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из $m$ строк и $n$ столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матриц используются либо буквы латинского алфавита $A$, $B$, $C$, либо символы $\{a_{ij}\}$, $\{b_{ij}\}$, $\{c_{ij}\}$:

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Запись $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ означает, что $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Наряду с круглыми скобками при записи матрицы иногда используют квадратные скобки $[\dots]$.

Числа $a_{ij}$ называются **элементами** матрицы. В записи $a_{ij}$ первый индекс $i$ обозначает номер строки, а второй индекс $j$ – номер столбца, на пересечении которых находится элемент $a_{ij}$.

Произвольная $i$-я строка матрицы $A$ – $(a_{i1}a_{i2}\ldots a_{in})$,

$j$-й столбец матрицы $A$ – $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ имеет порядок $3 \times 2$, элементы $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 2$ и т. д.

Матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ имеет порядок $2 \times 3$.

$D = (3)$ – матрица размерности $1 \times 1$ (матрица, состоящая из одного элемента).

Если число строк равно числу столбцов ($m = n$), матрица называется **квадратной**. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы.

Например, матрица $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 7 \\ 6 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица четвертого порядка с диагональными элементами $a_{11} = 5$, $a_{22} = 3$, $a_{33} = 1$, $a_{44} = 5$.

Матрицей порядка $1 \times n$ является строка $A = (a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n})$, ее называют **вектор-строкой**.

Матрицей порядка $m \times 1$ является столбец $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, иначе ее называют также **вектор-столбцом**.

**Специальные виды матриц**

**Нулевая** — матрица, все элементы которой равны нулю:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нулевой может быть матрица любого порядка.

**Верхняя треугольная** — квадратная матрица, все элементы которой, расположенные под главной диагональю, равны нулю ($a_{ij} = 0$, $i > j$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Например, матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ являются верхними треугольными.

**Нижняя треугольная** – квадратная матрица, все элементы которой, расположенные над главной диагональю, равны нулю ($a_{ij} = 0$, $i < j$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Диагональная** – квадратная матрица, все недиагональные элементы которой равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Единичная** – диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1. Обозначается буквой $E$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

В англоязычной литературе единичная матрица обозначается буквой $I$ (the identity matrix).

Матрицы $A$ и $B$ называются равными, если они имеют одну и ту же размерность (или одинаковый порядок) и их соответствующие элементы (элементы, имеющие одинаковые индексы) совпадают: $a_{ij} = b_{ij}, \;\; i = \overline{1,m}, \;\; j = \overline{1,n}$.

## § 2. Операции над матрицами

**1. Умножение матрицы на число.** Произведением матрицы $A$ на число $\alpha$ называется матрица $B$, элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы $A$ на число $\alpha$:

$$B = \alpha \cdot A = \{b_{ij}\} = \{\alpha \cdot a_{ij}\}, \;\; i = \overline{1,m}, \;\; j = \overline{1,n}, \;\; \alpha \in R.$$

**Пример 2.1.**

$$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$-10A = -10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -20 \\ -30 & -40 \end{pmatrix}.$$

**2. Суммой (разностью)** матриц $A$ и $B$ порядка $m \times n$ является матрица $C$ размерности $m \times n$, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \ (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}).$$

Обозначение: $C = A + B$ $(C = A - B)$. Подчеркнем, что сложение и вычитание вводится только для матриц одинаковой размерности (порядка):

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}.$$

**Пример 2.2.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что на разность $A - B$ можно смотреть как на сумму $A + (-1) \cdot B$.

Введенные действия (умножение матрицы на число, сложение и вычитание матриц) называются **линейными операциями** над матрицами. Для любых матриц $A$, $B$, $C$ размерности $m\times n$ и любых чисел $\alpha$ и $\beta$ справедливы следующие свойства:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность сложения);

2) $A+(B+C) = (A+B)+C$ (ассоциативность сложения);

3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (распределительное свойство относительно числового множителя);

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (распределительное свойство относительно матричного сомножителя);

5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

**3. Умножение матриц.** Произведением матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}$:

$$C_{m\times p} = A_{m\times n}\cdot B_{n\times p},$$

у которой элемент $c_{ij}$, стоящий на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца, равен скалярному произведению $i$-й строки матрицы $A$ на $j$-й столбец матрицы $B$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},\ \ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,p}.$$

Заметим, что произведение $AB$ определено только для таких матриц, у которых количество столбцов первого сомножителя $A$ совпадает с количеством строк матрицы $B$ (второго сомножителя). При этом число строк матрицы $C$ равно числу строк матрицы $A$, а число столбцов матрицы $C$ равно числу столбцов матрицы $B$.

**Пример 2.3.** Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, C$=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти $AB$, $AC$, $AE$.

**Решение**

Найдем размерности матриц произведений:

$$A_{3\times 2}\cdot B_{2\times 3} = D_{3\times 3},\ \ A_{3\times 2}\cdot C_{2\times 1} = K_{3\times 1},\ \ A_{3\times 2}\cdot E_{2\times 2} = M_{3\times 2}.$$

Вычислим элементы матрицы $D$, умножая элементы каждой строки матрицы $A$ на соответствующие элементы столбцов матрицы $B$ и складывая эти произведения. Получим

$$AB = D = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+1\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 1 \\ 2\cdot 1+3\cdot 1 & 2\cdot 0+3\cdot 1 & 2\cdot 1+3\cdot 1 \\ 4\cdot 1+5\cdot 1 & 4\cdot 0+5\cdot 1 & 4\cdot 1+5\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 9 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычислим матрицы $K$ и $M$:

$$AC = K = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$AE = M = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

Очевидно, $AE = EA = A$, т. е. результат умножения матрицы на единичную матрицу $E$ совпадает с исходной. Заметим, что в матричном исчислении единичная матрица играет такую же роль, как и число 1 в элементарной алгебре.

Для любых матриц $A$, $B$, $C$ (предполагается, что матрицы имеют такие размерности, что операции умножения матриц определены) и любого числа $\alpha$ справедливы свойства:

1) $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность по умножению);

2) $A(B + C) = AB + AC$ (распределительное свойство);

3) $(A + B)C = AC + BC$ (распределительное свойство);

4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

В общем случае произведение матриц некоммутативно

$$AB \neq BA,$$

даже если оба произведения имеют смысл.

**4. Возведение в степень** (определено для квадратных матриц и целого положительного $m$). $m$-й степенью $A^m$ матрицы называется умножение квадратной матрицы $A$ саму на себя $m$ раз.

Заметим, что $A^0 = E, \;\; A^1 = A, \;\; A^2 = A \cdot A, \ldots$

**Пример 2.4.** Найти $A^2$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**Решение**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.5.** Вычислить значение многочлена $f(x) = 2x^2 - x + 3$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Решение**

Вместо $x$ подставляем в функцию $f(x)$ матрицу $A$, вместо числа 3 используем матрицу $3E$, где $E$ – единичная матрица того же порядка, что и $A$.

Найдем $2A^2$:

$$2 \cdot A \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь подставим вместо переменной $x$ матрицу $A$ и вычислим $f(A)$:

$$f(A) = 2A^2 - A + 3E =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**5. Транспонирование матрицы** – процесс замены местами строк и столбцов в матрице.

Рассмотрим матрицу $A$ порядка $m \times n$. Расположим ее строки в виде столбцов, не меняя их порядка. Получим матрицу размерности $n \times m$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется транспонированной по отношению к матрице $A$.

*Примечание.* Скалярное произведение векторов $x, y \in R^n$ равно матричному произведению этих векторов, в котором первый из них транспонируется, т. е.

$$\langle x, y \rangle = x^T y = y^T x.$$

**Пример 2.6.** Пусть заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $F^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$K^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Свойства операции транспонирования**

Для любых матриц $A$ и $B$ (считаем, что операции сложения и произведения этих матриц определены) и числа $\alpha$ справедливы равенства:

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

2) $(A^T)^T = A$;

3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Среди квадратных матриц существуют матрицы, обладающие следующими свойствами: если матрица $A$ совпадает с транспонированной $A^T$ (т. е. $A = A^T$), то она называется **симметричной**. Элементы симметричной матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой: $a_{ik} = a_{ki}$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ – симметричная матрица.

Если матрица $A$ противоположна (сумма противоположных матриц равна нулевой матрице) транспонированной (т. е. $A = -A^T$), то она называется антисимметричной (**кососимметричной**). У такой матрицы элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, противоположны: $a_{ik} = -a_{ki}$, а элементы главной диагонали равны нулю: $a_{ii} = 0$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметричная, так как

$$A = -A^T = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**След матрицы** – это сумма ее диагональных элементов. След матрицы $A$ обозначается через $trA$.

Свойства следа матрицы:

1) $trA = trA^T$;

2) $tr(A+B) = trA + trB$;

3) $tr(A \cdot B \cdot C) = tr(B \cdot C \cdot A) = tr(C \cdot A \cdot B)$;

4) $tr(A^T \cdot B) = tr(B^T \cdot A) = tr(A \cdot B^T) = tr(B \cdot A^T)$;

5) $tr(A \cdot x \cdot x^T) = x^T \cdot A \cdot x$;

6) $tr(x \cdot y^T) = x^T \cdot y$;

7) $\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} a_{ij}b_{ij} = tr(A \cdot B^T)$.

**Пример 2.7.** Продемонстрировать справедливость свойств, если
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**Решение**

1) $trA = 2, \;\; trA^T = tr\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$;

2) $trA = 2, \;\; trB = 2, \quad trA + trB = 4$,
$tr(A+B) = tr\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = 4$;

3) $tr(A \cdot B \cdot C) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$$= tr\left(\left(\begin{array}{cc} 17 & 4 \\ 13 & 16 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right)\right) = tr\left(\begin{array}{cc} 55 & 38 \\ 55 & 42 \end{array}\right) = 97,$$

$$tr(B \cdot C \cdot A) = tr\left(\left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{array}\right)\right) =$$

$$= tr\left(\left(\begin{array}{cc} 10 & 8 \\ 15 & 10 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{array}\right)\right) = tr\left(\begin{array}{cc} 42 & 38 \\ 55 & 55 \end{array}\right) = 97,$$

$$tr(C \cdot A \cdot B) = tr\left(\left(\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{array}\right)\right) =$$

$$= tr\left(\left(\begin{array}{cc} 11 & 11 \\ 5 & 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{array}\right)\right) = tr\left(\begin{array}{cc} 77 & 44 \\ 30 & 20 \end{array}\right) = 97;$$

4) $tr(A^T \cdot B) = tr\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{array}\right)\right) =$

$$= tr\left(\begin{array}{cc} 22 & 4 \\ 11 & 12 \end{array}\right) = 34,$$

$$tr(B^T \cdot A) = tr\left(\left(\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{array}\right)\right) =$$

$$= tr\left(\begin{array}{cc} 22 & 11 \\ 4 & 12 \end{array}\right) = 34,$$

$$tr(A \cdot B^T) = tr\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{array}\right)\right) =$$

$$= tr\left(\begin{array}{cc} 14 & 5 \\ 12 & 20 \end{array}\right) = 34,$$

$$tr(B \cdot A^T) = tr\left(\left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{array}\right)\right) =$$

$$= tr\left(\begin{array}{cc} 14 & 12 \\ 5 & 20 \end{array}\right) = 34;$$

5) $tr(A \cdot x \cdot x^T) = tr\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array}\right)\right) =$

$$= tr\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 18 & 9 \end{pmatrix} = 19,$$

$$x^T \cdot A \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 12 + 7 = 19;$$

6) $$tr(x \cdot y^T) = tr\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 5,$$

$$x^T \cdot y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5;$$

7) $$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{ij} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 34 = tr(A \cdot B^T).$$

## Задания для самостоятельной работы

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Найти: а) $A + B$; б) $2B$; в) $B^T$.
**Ответы:** а) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $2B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;
в) $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Найти: а) $A^T$; б) $2A^T + B^T$; в) $3A^T - 2B^T$.

**Ответы:** а) $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $2A^T + B^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $3A^T - 2B^T = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -1 & 11 \\ -14 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
$F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Найти: а) $A - D$; б) $D \cdot C$; в) $A^T \cdot C^T$; г) $A \cdot B$, д) $C \cdot F$.
**Ответы:** а) не имеет смысла; б) $D \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A^T \cdot C^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 10 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; г) не имеет смысла;

д) $C \cdot F = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

# § 3. Элементарные преобразования матриц

При решении многих задач часто используют преобразования матриц, называемые элементарными. К **элементарным преобразованиям** относятся:
– перестановка местами двух параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;
– умножение всех элементов одного ряда на число, отличное от нуля;

– прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на число, отличное от нуля.

**Определение 3.1.** Матрицы $A$ и $B$ называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

эквивалентны, так как матрица $B$ получена из матрицы $A$ с помощью следующего элементарного преобразования: первая строка матрицы $B$ получена из первой строки матрицы $A$ прибавлением к ней второй строки матрицы $A$, умноженной на 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+4\cdot 2 & 2+5\cdot 2 & 3+6\cdot 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = B.$$

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к **ступенчатому виду**:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & b & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

здесь $a, \quad b, \quad c, \quad \dots, d$ – ведущие элементы, неравные нулю, символом $*$ обозначены элементы с произвольными значениями. Заметим, что высота каждой «ступеньки» составляет одну строку.

Продолжая выполнять элементарные преобразования над строками матрицы, можно ее привести к **упрощенному виду**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * & \dots & * & 0 & \dots & * & 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & \dots & * & 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь заметим, что в столбцах, где на месте ведущих элементов стоят единицы, все остальные элементы равны нулю.

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к **простейшему виду**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Левый верхний угол представляет собой единичную матрицу порядка $r$, где $r \le \min\{m, n\}$.

## Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями

Общая идея: элементарными преобразованиями привести матрицу к ступенчатому виду, «зануляя» элементы, стоящие ниже главной диагонали.

**Алгоритм**

1. В первом столбце выбрать элемент, отличный от нуля, ведущий элемент. Лучший вариант — единица. Это можно сделать, переставляя строки, выводя строку с ведущим элементом как первую. Заметим, что получить удобный по величине ведущий элемент можно прибавлением к одной строке

другой, умноженной на ненулевое число (в том числе разностью двух строк).
2. К каждой строке, расположенной ниже ведущей, прибавить ведущую строку, умноженную на такое число, чтобы все элементы ниже ведущего были равны нулю.
3. Исключив из рассмотрения строку и столбец, на пересечении которых стоит ведущий элемент, возвращаемся к шагу 1 и повторяем процедуру на матрице размерности на 1 меньше.
4. Преобразования заканчиваются, когда исключены все столбцы или в оставшейся части матрицы все элементы равны нулю.

Например, приведем матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду.

1. На первом шаге необходимо «занулить» элементы первого столбца, стоящие ниже главной диагонали. Это удобнее сделать, если первая строка будет начинаться с 1. Для этого переставим местами первую и вторую строки:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Элемент $a_{11} = \boxed{1}$, с помощью которого будем «занулять» первый столбец, называется ведущим элементом первого шага.

Первую строку переписываем без изменения. Чтобы на месте элемента $a_{21} = 3$ оказался 0, необходимо к 3 прибавить $(-3)$. Следовательно, необходимо ко второй строке прибавить первую, умноженную на $(-3)$.

Чтобы на месте элемента $a_{31} = 2$ оказался 0, необходимо к нему прибавить $(-2)$. Следовательно, необходимо ко второй строке прибавить первую, умноженную на $(-2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 + 1 \cdot (-3) & 1 + 2 \cdot (-3) & 0 + (-1) \cdot (-3) \\ 2 + 1 \cdot (-2) & 5 + 2 \cdot (-2) & 4 - (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. На втором шаге первая и вторая строки остаются без изменения и «зануляются» элементы второго столбца, стоящие ниже главной диагонали. В этом случае в качестве ведущего элемента будет элемент $a_{22} = -5$. Но удобнее, чтобы ведущий элемент был равен 1. Для этого переставим местами вторую и третью строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оставив без изменения первую и вторую строки, прибавим к третьей строке вторую, умноженную на 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & -5 + 1 \cdot 5 & 3 + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $A$ с помощью элементарных преобразований была приведена к треугольному виду (частный случай ступенчатого вида).

3. Продолжим преобразования и приведем матрицу к простейшему виду. Для этого необходимо «занулить» элементы, стоящие выше главной диагонали. Получим нули в первой строке. Аналогично шагам 1 и 2, проводимым с первой и второй строками, будем работать с первым столбцом. Умножив его на $(-2)$, прибавим его ко второму столбцу. К третьему столбцу прибавим первый столбец:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}.$$

4. Прибавим второй столбец, умноженный на $(-6)$, к третьему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}.$$

Разделив третий столбец на 33, получим простейший вид матрицы

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в рассмотренном примере получить $\boxed{1}$ в качестве ведущего элемента на первом шаге можно было и не перестановкой строк, а, например, поставив вместо первой строки разность первой и третьей, вторую и третью строки оставив без изменения. Иногда вообще не рационально добиваться получения $\boxed{1}$ в качестве ведущего элемента.

## Индивидуальные задания

**Задание 1.** Даны матрицы $A$ и $B$. Найти: а) $A+B$; б) $2A$; в) $A-3B$; г) $A^T$; д) $A\cdot B^T$.

**1.1.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

**1.2.** $A=\begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$;

**1.3.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

**1.4.** $A=\begin{pmatrix} 8 & 7 & -2 \\ 1 & -5 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

**1.5.** $A=\begin{pmatrix} -5 & 6 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$;

**1.6.** $A=\begin{pmatrix} 9 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 9 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

**1.7.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -9 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

**1.8.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 7 & -5 & 9 \\ 2 & 7 & -3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;

**1.9.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

**1.10.** $A=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -9 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

**1.11.** $A=\begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 \\ 4 & -7 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

**1.12.** $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$

**1.13.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix};$

**1.14.** $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix};$

**1.15.** $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

**1.16.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$

**1.17.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};$

**1.18.** $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix};$

**1.19.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

**1.20.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

**1.21.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

**1.22.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix};$

**1.23.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix};$

**1.24.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix};$

**1.25.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -6 & 7 & 2 \end{pmatrix};$

**1.26.** $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix};$

**1.27.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -8 & 5 & -9 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix};$

**1.28.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix};$

**1.29.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 4 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix};$

**1.30.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

**Задание 2.** Найти многочлен $f(A)$, если

**2.1.** $f(x) = x^2 - 5x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 22 & -13 & 2 \\ 31 & 20 & -3 \\ 15 & 17 & -24 \end{pmatrix};$

**2.2.** $f(x) = x^2 + 2x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix};$

**2.3.** $f(x) = 2x^2 - 5x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 13 \\ 4 & 7 & 10 \\ 11 & -4 & 6 \end{pmatrix};$

**2.4.** $f(x) = x^2 + 2x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{pmatrix};$

**2.5.** $f(x) = 3x^2 - 4x, \quad A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & -13 \\ 19 & 0 & 43 \\ -12 & 75 & 14 \end{pmatrix};$

**2.6.** $f(x) = x^2 + 2x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

**2.7.** $f(x) = -x^2 - x + 11, \quad A = \begin{pmatrix} 25 & 23 & -27 \\ 42 & 17 & -3 \\ 67 & 32 & 27 \end{pmatrix};$

**2.8.** $f(x) = x^2 + 4x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 13 & -18 & 17 \\ 20 & 14 & 35 \\ -15 & 7 & 21 \end{pmatrix};$

**2.9.** $f(x) = 2x^2 - 7x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} -12 & 8 & 24 \\ 22 & -15 & 7 \\ 16 & 0 & 10 \end{pmatrix};$

**2.10.** $f(x) = 3x^2 - 2x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix};$

**2.11.** $f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 20 & -11 & 2 \\ 13 & 21 & -3 \\ 12 & 17 & -14 \end{pmatrix};$

**2.12.** $f(x) = x^2 + x + 4, \quad A = \begin{pmatrix} -16 & 18 & -27 \\ 22 & 10 & 21 \\ 12 & 5 & 13 \end{pmatrix};$

**2.13.** $f(x) = 2x^2 - 3x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 15 \\ 4 & 9 & 10 \\ -11 & 4 & 6 \end{pmatrix};$

**2.14.** $f(x) = x^2 - 2x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} -33 & 36 & -54 \\ 40 & 24 & 42 \\ -24 & 16 & 25 \end{pmatrix};$

**2.15.** $f(x) = 3x^2 - 2x, \quad A = \begin{pmatrix} 14 & 12 & -13 \\ 15 & 0 & 43 \\ -12 & 35 & 14 \end{pmatrix};$

**2.16.** $f(x) = x^2 + 4x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 16 \\ 7 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 18 \end{pmatrix};$

**2.17.** $f(x) = -x^2 - x + 10, \quad A = \begin{pmatrix} 15 & 3 & -27 \\ 22 & 17 & -3 \\ 7 & 32 & 27 \end{pmatrix};$

**2.18.** $f(x) = x^2 + 5x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} -13 & 18 & 17 \\ 21 & 14 & -33 \\ -15 & 7 & 21 \end{pmatrix};$

**2.19.** $f(x) = 2x^2 - 2x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 24 \\ -21 & 15 & 7 \\ 12 & 0 & 11 \end{pmatrix};$

**2.20.** $f(x) = 3x^2 - 3x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 3 \\ 2 & -14 & 1 \\ 23 & -5 & 12 \end{pmatrix};$

**2.21.** $f(x) = 3x^2 - 5x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 12 & 23 & 2 \\ -1 & 20 & -3 \\ 15 & 17 & 4 \end{pmatrix};$

**2.22.** $f(x) = 2x^2 + 2x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 16 & -18 & -27 \\ -21 & 15 & 21 \\ 12 & 9 & 10 \end{pmatrix};$

**2.23.** $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 13 \\ 4 & 17 & 10 \\ 11 & 14 & 6 \end{pmatrix};$

**2.24.** $f(x) = x^2 + x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} -33 & -36 & -54 \\ 22 & 19 & 42 \\ 14 & 16 & 15 \end{pmatrix};$

**2.25.** $f(x) = 3x^2 - 5x, \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & -13 \\ 17 & 0 & 43 \\ -12 & -15 & 14 \end{pmatrix};$

**2.26.** $f(x) = x^2 + 4x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ -9 & 5 & 1 \\ 15 & 11 & 13 \end{pmatrix};$

**2.27.** $f(x) = -x^2 - 3x + 10, \quad A = \begin{pmatrix} 15 & 13 & -27 \\ 32 & 17 & -3 \\ 47 & 22 & 17 \end{pmatrix};$

**2.28.** $f(x) = x^2 + 4x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & 17 \\ 30 & 10 & 15 \\ -15 & 7 & 21 \end{pmatrix}$;

**2.29.** $f(x) = 2x^2 - 5x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} -12 & 8 & 24 \\ 12 & -15 & 7 \\ -16 & 0 & 9 \end{pmatrix}$;

**2.30.** $f(x) = 3x^2 - 2x + 4, \quad A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & 3 \\ 21 & -4 & 11 \\ 23 & -5 & 12 \end{pmatrix}$.

**Задание 3.** Найти $A^n$, где

**3.1.** $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

**3.2.** $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 3 \\ -5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$;

**3.3.** $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

**3.4.** $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

**3.5.** $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

**3.6.** $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

**3.7.** $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

**3.8.** $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

**3.9.** $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$;

**3.10.** $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$;

**3.11.** $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$;

**3.12.** $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \\ -5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;

**3.13.** $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

**3.14.** $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

**3.15.** $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} -14 & 1 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$;

**3.16.** $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

**3.17.** $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

**3.18.** $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

**3.19.** $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$;

**3.20.** $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} -17 & 13 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$;

**3.21.** $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$;

**3.22.** $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \\ -5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$;

**3.23.** $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & -8 & 11 \end{pmatrix}$;

**3.24.** $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

**3.25.** $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 \\ 13 & 5 \end{pmatrix}$;

**3.26.** $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -14 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

**3.27.** $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

**3.28.** $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$;

**3.29.** $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$;

**3.30.** $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

**Задание 4.** С помощью элементарных преобразований строк привести матрицу к ступенчатому виду:

**4.1.** $\begin{pmatrix} 37 & 259 & 481 & 407 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \end{pmatrix}$;

**4.2.** $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix};$$

**4.3.** $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix};$$

**4.4.** $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix};$$

**4.5.** $$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15 \end{pmatrix};$$

**4.6.** $$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

**4.7.** $$\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

**4.8.** $$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix};$$

**4.9.** $$\begin{pmatrix} 9 & -12 & 3 & -4 & 12 & -16 \\ -15 & 21 & -5 & 7 & -20 & 28 \\ 18 & -24 & 6 & -8 & 16 & -20 \\ -30 & 42 & -10 & 14 & -25 & 35 \end{pmatrix};$$

**4.10.** $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$;

**4.11.** $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$;

**4.12.** $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$;

**4.13.** $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$;

**4.14.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$;

**4.15.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

**4.16.** $\begin{pmatrix} 36 & 252 & 468 & 396 \\ 18 & 126 & 234 & 198 \\ 24 & 168 & 312 & 264 \end{pmatrix}$;

**4.17.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & -4 & 8 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

**4.18.** $\begin{pmatrix} 4 & 10 & -2 & 8 & 6 \\ 8 & 2 & 12 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$;

**4.19.** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & -6 & 8 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

**4.20.** $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15 \end{pmatrix}$;

**4.21.** $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 6 & 4 & 10 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

**4.22.** $\begin{pmatrix} -10 & 6 & -8 & 0 & 6 & -8 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

**4.23.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$;

**4.24.** $\begin{pmatrix} 27 & -36 & 9 & -12 & 36 & -48 \\ -15 & 21 & -5 & 7 & -20 & 28 \\ 18 & -24 & 6 & -8 & 16 & -20 \\ -30 & 42 & -10 & 14 & -25 & 35 \end{pmatrix}$;

**4.25.** $\begin{pmatrix} 50 & 62 & 34 & 86 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$;

**4.26.** $\begin{pmatrix} 48 & 38 & 72 & 144 & -76 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$;

**4.27.** $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 52 & 196 & 46 & -588 & 172 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$;

**4.28.** $\begin{pmatrix} 34 & -56 & 90 & 22 & 78 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$;

**4.29.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$;

**4.30.** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

## Задание 5. Упражнения на доказательство

**5.1.** Доказать, что

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & n \text{ — четное,} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, & n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

**5.2.** Найти все матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, квадрат которых равен нулевой матрице.

**5.3.** Найти $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, используя метод индукции.

**5.4.** Найти все матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, квадрат которых равен единичной матрице.

**5.5.** Доказать, что если для матриц $A$ и $B$ оба произведения $AB$ и $BA$ существуют, причем $AB = BA$, то матрицы $A$ и $B$ – квадратные и имеют одинаковый порядок.

**5.6.** Следом квадратной матрицы называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали. Доказать, что след матрицы $AB$ равен следу $BA$.

**5.7.** Как изменится произведение $AB$ матриц $A$ и $B$, если

**а)** переставить $i$-ю и $j$-ю строки матрицы $A$;

**б)** к $i$-й строке матрицы $A$ прибавить $j$-ю строку, умноженную на число $c$;

**в)** переставить $i$-й и $j$-й столбцы матрицы $B$;

**г)** к $i$-му столбцу матрицы $B$ прибавить $j$-й столбец, умноженный на число $c$?

**5.8.** Матрицы $A$ и $B$ называются перестановочными, если $AB = BA$. Квадратная матрица $A$ называется скалярной, если все ее элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, а элементы главной диагонали равны между собой, т. е. если $A = cE$, где $c$ – число, а $E$ – единичная матрица. Доказать утверждение: для того чтобы квадратная матрица $A$ была перестановочной со всеми квадратными матрицами того же порядка, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A$ была скалярной.

**5.9.** Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю. Доказать утверждение: для того чтобы квадратная матрица $A$ была перестановочной со всеми диагональными матрицами, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A$ сама была диагональна.

**5.10.** Доказать, что если $A$ – диагональная матрица и все элементы ее главной диагонали различны между собой, то любая матрица, перестановочная с $A$, также диагональна.

**5.11.** Доказать, что умножение матрицы $A$ слева на диагональную матрицу $B = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ вызывает умножение строк $A$ соответственно на $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, умножение же $A$ на $B$ справа вызывает аналогичное изменение столбцов.

**5.12.** Показать, что операция транспонирования матрицы обладает следующими свойствами:

**а)** $(A + B)^T = A^T + B^T$;

**б)** $(AB)^T = B^T A^T$;

**в)** $(cA)^T = cA^T$, где $c$ – действительное число.

**5.13.** Пусть $A$ – матрица размерности $m \times n$, элементы которой являются комплексными числами $a_{ij} = \alpha_{ij} + i\beta_{ij}$ (комплексная матрица). Сопряженной матрицей $A^*$ называется матрица размерности $n \times m$, получаемая из матрицы $A$ в результате транспонирования и замены каждого элемента транспонированной матрицы $A^T$ комплексным сопряженным. Доказать следующие свойства операции сопряжения матриц:

**а)** $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;

**б)** $(A + B)^* = A^* + B^*$;

**в)** $(AB)^* = B^* \cdot A^*$;

**г)** $(A^*)^* = A$,

где $A, B$ – произвольные матрицы, для которых определены соответствующие операции, $\lambda = \alpha + i\beta$ – любое комплексное число, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ – сопряженное к $\lambda$ число.

# Глава 3

# Определители

## § 1. Понятие и нахождение определителя

Любой квадратной матрице $A$ можно поставить в соответствие число, называемое **определителем** матрицы. Определитель матрицы $A$ обозначается $\det A$, $|A|$.

Определителем квадратной матрицы $A$ порядка $n$ (или определителем порядка $n$) называется алгебраическая сумма всевозможных произведений (полное число таких произведений равно $n!$) элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца и снабженных знаками «плюс» и «минус» по некоторому определенному правилу.

**Частные случаи нахождения определителя**

1. Определителем матрицы $A = (a_{ij})$ порядка $n = 1$ называется единственный элемент этой матрицы: $\det(a_{11}) = a_{11}$.

Например, $A = (1)$, $\det A = 1$.

2. Определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ порядка $n = 2$ называется разность произведения элементов главной и побочной диагоналей матрицы:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

**Пример 1.1.** $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1.$

3. Определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ порядка $n = 3$ называется выражение вида

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Данный определитель можно легко посчитать, пользуясь схемой, которая называется **правилом треугольников или правилом Саррюса**:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}.$$

При порядке матрицы $n \geq 3$ используют разложение по строке или столбцу матрицы.

**Минором** $M_{ij}$ элемента $a_{ij}$ называется определитель, который получается из основного определителя вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца.

**Алгебраическим дополнением** $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$ называется число, вычисляемое по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Сумма алгебраических дополнений одной строки или одного столбца, соответственно умноженных на коэффициенты этой строки или столбца, равна определителю матрицы:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}.$$

Данный способ вычисления определителя называется разложением по $i$-й строке.

Аналогично можно вычислить определитель, разложив по $j$-му столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot M_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}.$$

Так как можно использовать любые строку или столбец при разложении, лучше всего раскладывать по строке или столбцу, где меньше всего ненулевых элементов, тем самым упростив себе задачу.

**Пример 1.2.** Вычислить определитель разложением по второй строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -54 + 2 \cdot (-1) \cdot 6 = -66.$$

Теперь вычислим этот же определитель, но разложением по второму столбцу:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-14) - 1 \cdot (-6) + 4 \cdot (-25) = 28 + 6 - 100 = -66.$$

## Задания для самостоятельной работы

1. Для данного определителя найти миноры и алгебраические дополнения элементов $a_{i3}$ и $a_{2j}$. Вычислить определитель разложением по $i$-й строке, по $j$-му столбцу:

а) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \quad i = 1, \quad j = 3;$

б) $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}, \quad i = 4, \quad j = 3;$

в) $\det C = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}, \quad i = 2 \quad j = 1.$

**Ответы:**
а) $M_{13} = 72$, $A_{13} = 72$, $M_{23} = -12$, $A_{23} = 12$, $\det A = -216$;
б) $M_{43} = -9$, $A_{43} = 9$, $M_{23} = 34$, $A_{23} = -34$, $\det B = -1$;
в) $M_{23} = -22$, $A_{23} = 22$, $M_{21} = -8$, $A_{21} = 8$, $\det C = -24$.

2. С помощью правила треугольников (правила Саррюса) вычислить определители:

а) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix};$ б) $\det B = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix};$

в) $\det C = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$

**Ответы:** а) $\det A = 87$; б) $\det B = -36$; в) $\det C = 0$.

## § 2. Свойства определителей

1. Определитель при транспонировании матрицы не изменяется:

$$\det A = \det A^T.$$

**Пример 2.1.** Найти определитель матрицы $A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 1 \cdot (-6) + 2 \cdot (-4) = 6.$$

Найдем определитель уже транспонированной матрицы

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-1) = 6.$$

**Важно!** Следующие свойства распространяются как на строки, так и на столбцы матрицы в силу **свойства 1**.

2. Если какая-либо строка или столбец матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю:

$$\det(\ldots 0 \ldots) = 0.$$

**Пример 2.2.** $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 0 \cdot 5 = 0.$

3. Если матрица содержит две одинаковые строки или два одинаковых столбца, а также если элементы двух строк или столбцов пропорциональны, то ее определитель равен нулю:

$$\det(\ldots a_j \ldots a_k \ldots) = 0 \text{ при } a_j = a_k \text{ или } a_j = \lambda a_k.$$

**Пример 2.3.** Найти определитель матрицы $A$, у которой две одинаковые строки:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 5 = 0.$$

Найти определитель матрицы $B$, где две строки – пропорциональные:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 6 - 4 \cdot 3) - 1 \cdot (1 \cdot 6 - 2 \cdot 3) = 0.$$

4. При перестановке двух строк или столбцов матрицы ее определитель меняет знак на противоположный:

$$\det(\ldots a_j \ldots a_k \ldots) = -\det(\ldots a_k \ldots a_j \ldots).$$

**Пример 2.4.** Найти определитель матрицы 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1.$$

Найти определитель этой же матрицы, поменяв в ней строки местами:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

5. Если все элементы какой-либо строки или столбца матрицы умножить на число $\lambda$, то её определитель умножится на это число $\lambda$:

$$\det(\ldots \lambda a_j \ldots a_k \ldots) = \lambda \cdot \det(\ldots a_j \ldots a_k \ldots).$$

**Пример 2.5.** Найти определитель матрицы $A$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1.$$

Умножим первую строку на 2, снова найдем определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

6. Если $j$-й столбец матрицы представляется в виде суммы двух столбцов $a^j + b^j$, то определитель равен сумме двух

определителей, у которых $j$-ми столбцами являются $a^j$ и $b^j$ соответственно, а остальные столбцы одинаковы:

$$\det(\ldots a^j + b^j \ldots) = \det(\ldots a^j \ldots) + \det(\ldots b^j \ldots).$$

**Пример 2.6.** Найти определитель матрицы $A$, у которой второй столбец является суммой двух других:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 6 = 24.$$

Найдем определители матриц $B$ и $C$, у которых все столбцы, за исключением второго, одинаковы, а сумма вторых столбцов матриц $B$ и $C$ дает второй столбец матрицы $A$:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 + 3 = 6.$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 15 + 3 = 18.$$

$$\det A = \det B + \det C.$$

7. Определитель линеен по любой строке или столбцу:

$$\det(\ldots \alpha \cdot a^j + \beta \cdot b^j \ldots) = \alpha \det(\ldots a^j \ldots) + \beta \cdot \det(\ldots b^j \ldots).$$

**Пример 2.7.** Обратимся **к примеру 2.6**, умножим в матрице $A$ второй столбец на 6, тогда

$$\det \widetilde{A} = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & 30 & 3 \\ 1 & 24 & 6 \end{vmatrix} = 24 \cdot 6 = 144.$$

Заметим, что второй столбец матрицы $\widetilde{A}$ можно представить как 6 столбцов матрицы $B$ и 6 столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 30 \\ 24 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Тогда определитель матрицы $\widetilde{A}$ можно представить как

$$\det \widetilde{A} = \det B + 6 \cdot \det C = 6 \cdot 6 + 6 \cdot 18 = 144.$$

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки или столбца матрицы прибавить элементы другой строки или столбца, предварительно умноженные на одно и то же число:

$$\det(\ldots a^j + \lambda \cdot a^k \ldots a^k \ldots) = \det(\ldots a^j \ldots a^k \ldots).$$

**Пример 2.8.** Найти определитель матрицы $A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 6 = 24.$$

Прибавим к третьей строке матрицы первую, умножив ее на $(-1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1-1 & 4-2 & 6-0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем определитель получившейся матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 6 = 24.$$

9. Пусть $A$ и $B$ – квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B,$$

т. е. определитель произведения матриц равен произведению их определителей.

**Пример 2.9.** Найти определитель произведения матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2,$$
$$\det B = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 7 = -2,$$
$$\det A \cdot \det B = 4.$$

Теперь проверим:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$
$$\det(AB) = 19 \cdot 50 - 22 \cdot 43 = 4.$$

**Задания для самостоятельной работы**

Не раскрывая определителей, доказать справедливость тождеств:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix};$

2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix};$

3. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$

## § 3. Методы вычисления определителей

При вычислении определителей более высокого порядка (например, $n \geq 4$) формулами разложения по строке/столбцу в общем случае не пользуются, так как это приводит к громоздким вычислениям.

Сократить вычисления при подсчете определителя можно, применяя элементарные преобразования над строками/столбцами матрицы.

Рассмотрим определители некоторых матриц.

**Определитель треугольной матрицы**

Определителем верхней (нижней) треугольной матрицы является произведение элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 0 + 0 = 6.$$

Согласно **свойству 8** (см. свойства определителей) любую квадратную матрицу можно привести к треугольному виду (метод Гаусса), чтобы упростить подсчет ее определителя.

**Определитель диагональной матрицы**

Определителем диагональной матрицы является произведение элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

**Элементарными преобразованиями** над строками/столбцами матриц называются следующие преобразования:

1. Умножение строки/столбца на ненулевое число — определитель умножается на это же число согласно **свойству 5**.
2. Перестановка двух строк/столбцов — определитель меняет знак на противоположный согласно **свойству 4**.
3. Прибавление к одной строке/столбцу матрицы другой ее строки/столбца, умноженной/умноженного на некоторое ненулевое число, определитель не изменяется.

В **главе 2** мы рассматривали *алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями (метод Гаусса).*

**Пример 3.1.** Вычислить определитель при помощи элементарных преобразований и свойства треугольной матрицы. Для этого найдем в первом столбце ведущий элемент. Так как единица не нашлась, поменяем местами первую и третью строки, **не забывая про смену знака определителя**, и отнимем от первой строки вторую:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Переходим ко второму шагу: умножаем первую строку на некоторое число и прибавляем ее к нижестоящим строкам так, чтобы в первом столбце все элементы ниже ведущего были равны нулю, для этого умножаем первую строку на $(-2)$ и прибавляем ко второй, а затем умножаем первую строку на $(-4)$ и прибавляем к третьей:

$$(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Переходим к третьему шагу: исключаем из рассмотрения первую строку и первый столбец, ищем ведущий элемент для второго столбца. Повторяем процедуру для второго столбца, теперь умножаем вторую строку на 2 и прибавляем к третьей строке:

$$(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}.$$

Матрица приведена к треугольному виду при помощи элементарных преобразований. Теперь посчитаем определитель:

$$(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 = 9.$$

Проверим, посчитав определитель другим способом:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 6 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 9.$$

Метод нахождения определителя элементарными преобразованиями удобно использовать на матрицах размерности $n \geq 4$.

Теперь приведем формулу, обобщающую разложение определителя по какой-либо строке/столбцу, **формулу Лапласа**.

Пусть дана квадратная матрица $A$ порядка $n$. Выберем в матрице $k$ строк ($k < n$) с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$, такими, что $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, и $k$ столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, такими, что $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$.

**Минором первого типа** $M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ называется определитель матрицы $k$-го порядка, образованной элементами, стоящими на пересечении выбранных $k$ строк и $k$ столбцов.

**Минором второго типа** $\overline{M}_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$, или дополнительным минором, называется определитель матрицы порядка $n-k$, получающейся вычеркиванием из матрицы $k$ строк с номерами $i_1, i_2, \ldots i_k$ и $k$ столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots j_k$.

**Теорема Лапласа.** При любом номере $k < n$ и при любых фиксированных номерах строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$, таких, что $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, для определителя порядка $n$ справедлива формула

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \ldots j_k} (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k} \cdot M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot \overline{M}_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

называемая разложением определителя по $i_1, i_2, \dots i_k$ строкам. Суммирование в этой формуле идет по всем возможным значениям индексов $j_1, j_2, \dots, j_k$, таких, что $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$.

**Пример 3.2.** Вычислить определитель по формуле Лапласа:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Формула Лапласа позволяет разложить определитель сразу по двум и более строкам/столбцам. Выберем третью и четвертую строки. Согласно формуле, имеем

$$|A| = (-1)^{3+4+1+2} \cdot M_{12}^{34} \cdot \overline{M}_{12}^{34} + (-1)^{3+4+1+3} \cdot M_{13}^{34} \cdot \overline{M}_{13}^{34} +$$

$$+(-1)^{3+4+1+4} \cdot M_{14}^{34} \cdot \overline{M}_{14}^{34} + (-1)^{3+4+2+3} \cdot M_{23}^{34} \cdot \overline{M}_{23}^{34} +$$

$$+(-1)^{3+4+2+4} \cdot M_{24}^{34} \cdot \overline{M}_{24}^{34} + (-1)^{3+4+3+4} \cdot M_{34}^{34} \cdot \overline{M}_{34}^{34}.$$

Так как

$$M_{12}^{34} = 0, \;\; M_{13}^{34} = 0, \;\; M_{14}^{34} = 0, \;\; \overline{M}_{23}^{34} = 0,$$

нам остается вычислить

$$M_{24}^{34} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \;\; \overline{M}_{24}^{34} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$M_{34}^{34} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \;\; \overline{M}_{34}^{34} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

В итоге получаем

$$|A| = (-1) \cdot (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \cdot 3 = -4 + 9 = 5.$$

**Пример 3.3.** Вычислить определитель по формуле Лапласа:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Если посмотреть на определитель, то можно увидеть, что с наименьшими вычислительными затратами будет разложение по второй и четвертой строкам (удачно расположены нули). При таком выборе строк нам необходимо посчитать всего два минора – $M_{23}^{24}$ и дополнительный $\overline{M}_{23}^{24}$ (остальные слагаемые в формуле Лапласа будут нулевыми, так как миноры будут содержать нулевой столбец):

$$M_{23}^{24} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad \overline{M}_{23}^{24} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Тогда

$$|A| = (-1)^{2+4+2+3} \cdot M_{23}^{24} \cdot \overline{M}_{23}^{24} = (-1) \cdot (-7) \cdot (-2) = -14.$$

Таким образом, можем выделить основные **методы вычисления определителей**:

1. Метод приведения к треугольному виду (с помощью элементарных преобразований).

2. Метод понижения порядка. С помощью элементарных преобразований со строками/столбцами можно упростить матрицу, сделав равными нулю практически все элементы в какой-либо строке/столбце. И далее разложить определитель по этой строке/столбцу с наименьшими вычислениями.

3. Формула Лапласа (разложение определителя по $k < n$ строкам/столбцам).

## Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить определители методом понижения порядка:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \text{ б)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -7 & 5 \\ -1 & 6 & -3 & 2 \\ 4 & 8 & -6 & 1 \end{vmatrix}; \text{ в)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

**Ответы:** а) 5; б) $-1046$; в) 60; г) 56.

2. Вычислить определители приведением к треугольному виду:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{vmatrix}; \text{ б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Ответы:** а) $-1$; б) $-8$.

3. Вычислить определители по формуле Лапласа:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \text{ б)} \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

**Ответы:** а) 640; б) 56.

## § 4. Роль определителя при нахождении обратной матрицы

Матрица $A^{-1}$ называется обратной по отношению к квадратной матрице $A$, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Условие существования обратной матрицы – определитель матрицы $A$ не равен нулю:

$$|A| \neq 0.$$

Если определитель матрицы отличен от нуля, то такая квадратная матрица называется невырожденной; в противном случае — вырожденной.

**Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы).** Обратная матрица существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная ($|A| \neq 0$).

Рассмотрим вспомогательную матрицу $C$, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы $A$:

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Алгоритм вычисления обратной матрицы**

1. Находим определитель исходной матрицы $|A|$. Если $|A| = 0$, то $A^{-1}$ не существует.

2. Если $|A| \neq 0$, находим алгебраические дополнения $A_{ij}$ элементов матрицы $A$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$) и составляем из них матрицу $C = (A_{ij})$, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.

3. Матрица $A^+ = C^T$ называется присоединенной матрицей – это транспонированная матрица к матрице, составленной из **алгебраических дополнений** элементов $a_{ij}$ матрицы $A$.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^+ = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T.$$

Свойства:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

4) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$;

5) $E^{-1} = E$.

**Нахождение обратной матрицы при помощи элементарных преобразований**

Элементарные преобразования допускают:

– перестановку местами двух строк матрицы;

– умножение всех элементов одной строки на число, отличное от нуля;

– прибавление ко всем элементам строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на число, отличное от нуля.

Каждую матрицу можно привести к единичному виду методом Гаусса.

Для того чтобы найти обратную матрицу, возьмем две матрицы – саму $A$ и единичную $E$, т. е. составим расширенную матрицу вида $(A|E)$. После этого с помощью элементарных преобразований, выполняемых **со строками** расширенной матрицы, добьемся того, чтобы матрица слева от черты стала единичной, причем расширенная матрица примет вид $(E|A^{-1})$.

**Пример 4.1.** Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти обратную к ней.

Составим расширенную матрицу:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 7 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Поменяем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

С помощью первой строки «зануляем» элементы первого столбца, расположенные под первой строкой: от элементов второй строки вычтем соответствующие элементы первой строки, предварительно умноженные на 2; от элементов третьей строки вычтем соответствующие элементы первой строки, предварительно умноженные на 7:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & -15 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

С помощью второй строки «зануляем» элемент второго столбца, расположенный под второй строкой: третью строку умножаем на 7 и вычетаем из нее вторую строку, умноженную на 11:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & -15 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -11 & -27 \end{array}\right).$$

Разделим третью строку на 5:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -11 & -27 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{27}{5} \end{array}\right).$$

Прямой ход окончен. Все элементы, расположенные под главной диагональю матрицы до черты, «занулились». Начнем обратный ход. С помощью третьей строки «зануляем» элементы третьего столбца, расположенные над третьей строкой: из первой строки вычтем третью строку, умноженную на 3, ко второй строке прибавим третью, умноженную на 10:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{27}{5} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -\frac{21}{5} & \frac{33}{5} & \frac{86}{5} \\ 0 & 7 & 0 & 14 & -21 & -56 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{27}{5} \end{array}\right).$$

Перед переходом к следующему шагу разделим вторую строку на 7:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -\frac{21}{5} & \frac{33}{5} & \frac{86}{5} \\ 0 & 7 & 0 & 14 & -21 & -56 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{27}{5} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -\frac{21}{5} & \frac{33}{5} & \frac{86}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{27}{5} \end{array}\right).$$

С помощью второй строки «зануляем» элементы второго столбца, расположенные над второй строкой: к первой строке прибавляем вторую строку:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -\frac{21}{5} & \frac{33}{5} & \frac{86}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{27}{5} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{5} & \frac{18}{5} & \frac{46}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{27}{5} \end{array}\right).$$

Преобразования закончены, обратная матрица методом Гаусса найдена:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & \frac{18}{5} & \frac{46}{5} \\ 2 & -3 & -8 \\ \frac{7}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{27}{5} \end{pmatrix}.$$

**Пример 4.2.** Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$|A| \neq 0$. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы $A$ и составляем из них матрицу $C$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее составляем присоединенную матрицу $A^+ = C^T$ и вычисляем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^+ = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

**Замечания.** 1. Если дана невырожденная диагональная матрица, то обратная к ней матрица также будет диагональной, причем

$$(diag\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\})^{-1} = diag\{\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}\}.$$

2. Матрица, обратная к невырожденной нижней (верхней) треугольной матрице, также будет нижней (верхней) треугольной.

3. Для невырожденных матриц 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ существует простое правило нахождения обратной матрицы:
а) необходимо поменять местами элементы, стоящие на главной диагонали, $a$ и $d$;
б) сменить знаки у элементов, стоящих на побочной диагонали, $b$ и $c$;
в) умножить полученную матрицу на $\frac{1}{|A|} = \frac{1}{ad-bc}$.

Таким образом, получим

$$A^{-1} = \frac{1}{|ad - bc|} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Пример 4.3.** Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

Прежде проверим, невырожденная ли исходная матрица. $|A| = -2 \neq 0$, значит, существует единственная обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Можно проверить через матрицу алгебраических дополнений:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{+} = C^{T} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{+} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

## Задания для самостоятельной работы

Для приведенных ниже матриц найти обратные матрицы:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; 2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$; 3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5. $F = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$;

6. $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 7. $H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

8. $K = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

**Ответы:** 1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}$;

3. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4. $D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

5. $F^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix}$; 6. $G^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

7. $H^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; 8. $A^{-1}$ не существует.

## § 5. Матричные уравнения

Дано матричное уравнение

$$A \cdot X = B,$$

где у матриц $A$ и $B$ одинаковое число строк, причем $A$ – квадратная. Требуется найти матрицу $X$.

Если $|A| \neq 0$ (т. е. матрица невырожденная), тогда матричное уравнение имеет единственное решение

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Действительно, так как матрица $A^{-1}$ существует, то по определению $A^{-1} \cdot A = E$, значит, $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ или $X = A^{-1} \cdot B$.

Теперь рассмотрим уравнение вида

$$Y \cdot A = B,$$

где у матриц $A$ и $B$ одинаковое число столбцов, причем $A$ – квадратная. Требуется найти матрицу $Y$.

Если $|A| \neq 0$ (т. е. матрица невырожденная), тогда матричное уравнение имеет единственное решение

$$Y = B \cdot A^{-1}.$$

**Пример 5.1.** Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ мы уже находили выше (см. пример 4.3). Теперь осталось найти произведение $X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.2.** Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем $A^{-1}$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

## Задания для самостоятельной работы

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решить следующие матричные уравнения:
а)$A \cdot X = B$; б) $Y \cdot A = C$.

**Ответы:** а) $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; б) $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Решить уравнение $B \cdot X + 2 \cdot X = E$, где $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**Ответ:** $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. Решить уравнение $A \cdot X \cdot B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:** $X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

# Индивидуальные задания

**Задание 1.** Вычислить определители 2-го порядка:

**1.1.** $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; **1.2.** $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$;

**1.3.** $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; **1.4.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$;

**1.5.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; **1.6.** $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$;

**1.7.** $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; **1.8.** $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$;

**1.9.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}$; **1.10.** $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & -4 \end{vmatrix}$;

**1.11.** $\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$; **1.12.** $\begin{vmatrix} 23 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$;

**1.13.** $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$; **1.14.** $\begin{vmatrix} 21 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$;

**1.15.** $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$; **1.16.** $\begin{vmatrix} 14 & 13 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$;

**1.17.** $\begin{vmatrix} 15 & -7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$; **1.18.** $\begin{vmatrix} -13 & 11 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}$;

**1.19.** $\begin{vmatrix} 24 & 3 \\ 14 & -1 \end{vmatrix}$; **1.20.** $\begin{vmatrix} -25 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$;

**1.21.** $\begin{vmatrix} 11 & -12 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$; **1.22.** $\begin{vmatrix} 25 & -3 \\ 14 & 3 \end{vmatrix}$;

**1.23.** $\begin{vmatrix} -2 & 15 \\ 2 & 23 \end{vmatrix}$; **1.24.** $\begin{vmatrix} 12 & 14 \\ 12 & -3 \end{vmatrix}$;

**1.25.** $\begin{vmatrix} 26 & -4 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}$; **1.26.** $\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 9 & -10 \end{vmatrix}$;

**1.27.** $\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}$; **1.28.** $\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ -11 & -3 \end{vmatrix}$;

**1.29.** $\begin{vmatrix} 10 & 13 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$; **1.30.** $\begin{vmatrix} 17 & 6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$.

**Задание 2.** Вычислить определители 3-го порядка:

**2.1.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; **2.2.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

**2.3.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; **2.4.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$;

**2.5.** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$; **2.6.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$;

**2.7.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; **2.8.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$;

**2.9.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; **2.10.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix}$;

**2.11.** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; **2.12.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$;

**2.13.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; **2.14.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$;

**2.15.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; **2.16.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

**2.17.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; **2.18.** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$;

**2.19.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$; **2.20.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

**2.21.** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$; **2.22.** $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$;

**2.23.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix}$; **2.24.** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix}$;

**2.25.** $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; **2.26.** $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

**2.27.** $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$; **2.28.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$;

**2.29.** $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; **2.30.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

**Задание 3.** Вычислить определители 4-го, 5-го порядка:

**3.1.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{vmatrix}$; **3.2.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

**3.3.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; **3.4.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

**3.5.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$; **3.6.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

**3.7.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$; **3.8.** $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$;

**3.9.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; **3.10.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$;

**3.11.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; **3.12.** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

**3.13.** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; **3.14.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$;

**3.15.** $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; **3.16.** $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$;

**3.17.** $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; **3.18.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$;

**3.19.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; **3.20.** $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$;

**3.21.** $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$; **3.22.** $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$;

**3.23.** $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; **3.24.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;

**3.25.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; **3.26.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$;

**3.27.** $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; **3.28.** $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

**3.29.** $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$; **3.30.** $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$.

**Задание 4.** Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

**4.1.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; **4.2.** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

**4.3.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; **4.4.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$;

**4.5.** $\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; **4.6.** $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

**4.7.** $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$; **4.8.** $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

**4.9.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; **4.10.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$;

**4.11.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; **4.12.** $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

**4.13.** $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 9 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{vmatrix}$; **4.14.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

**4.15.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; **4.16.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$;

**4.17.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

**4.18.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; **4.19.** $\begin{vmatrix} 1 & 30 & 94 & 46 & 14 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 47 & 23 & 15 & 1 \end{vmatrix}$;

**4.20.** $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; **4.21.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

**4.22.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

**4.23.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}$; **4.24.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$;

**4.25.** $\begin{vmatrix} 0 & 10 & 4 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; **4.26.** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$;

**4.27.** $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$; **4.28.** $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

**4.29.** $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 9 & 5 & -4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{vmatrix}$; **4.30.** $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & 14 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

**Задание 5.** Найти обратную матрицу для следующей матрицы:

**5.1.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; **5.2.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

**5.3.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **5.4.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$;

**5.5.** $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; **5.6.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

**5.7.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; **5.8.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

**5.9.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; **5.10.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

**5.11.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **5.12.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

**5.13.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **5.14.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

**5.15.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **5.16.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

**5.17.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **5.18** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

**5.19.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **5.20.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

**5.21.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **5.22.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

**5.23.** $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; **5.24.** $\begin{pmatrix} 4 & 10 & 14 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

**5.25.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; **5.26.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$;

**5.27.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; **5.28.** $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

**5.29.** $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; **5.30.** $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Задание 6.** Решить матричное уравнение:

**6.1.** $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;

**6.2.** $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$;

**6.3.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 15 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

**6.4.** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

**6.5.** $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

**6.6.** $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

**6.7.** $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

**6.8.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

**6.9.** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};$

**6.10.** $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

**6.11.** $X \cdot \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix};$

**6.12.** $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

**6.13.** $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

**6.14.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

**6.15.** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

**6.16.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$

**6.17.** $X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$

**6.18.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix};$

**6.19.** $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix};$

**6.20.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

**6.21.** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

**6.22.** $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

**6.23.** $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

**6.24.** $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

**6.25.** $X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

**6.26.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

**6.27.** $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

**6.28.** $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

**6.29.** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$;

**6.30.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

### Задание 7. Упражнения на доказательство

**7.1.** Доказать, что определитель единичной матрицы любого порядка равен 1.

**7.2.** Доказать, что определитель любой треугольной матрицы (верхней треугольной, нижней треугольной) равен произведению элементов, стоящих вдоль главной диагонали.

**7.3.** Доказать, что определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной, т. е. $\det A^T = \det A$.

**7.4.** Доказать, что определитель матрицы равен нулю, если матрица имеет две одинаковые строки (или два одинаковых столбца).

**7.5.** Доказать, что перестановка двух столбцов (или двух строк) определителя равносильна его умножению на $(-1)$.

**7.6.** Доказать, что умножение всех элементов одного столбца (или одной строки) определителя на любое число $k$ равносильно умножению определителя на это число $k$.

**7.7.** Доказать, что если все элементы некоторого столбца (строки) равны нулю, то сам определитель равен нулю.

**7.8.** Доказать, что элементарное преобразование строк (столбцов) матрицы, состоящее в добавлении к любой ее строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на произвольное число, не изменяет значения определителя.

**7.9.** Если каждый элемент некоторой строки определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме данной, прежние, а в данной строке в первом определителе стоят первые, а во втором – вторые слагаемые (то же верно и для столбцов). Например,

$$B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c & d \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' + a'' & b' + b'' \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Тогда $|A| = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ c & d \end{vmatrix}$.

**7.10.** Доказать, что если строки (столбцы) матрицы линейно зависимы, то определитель равен нулю.

**7.11.** Доказать, что для любых двух матриц $A$ и $B$ порядка $n \times n$ определитель их произведения равен произведению определителей ($\det AB = \det A \cdot \det B$).

**7.12.** Доказать, что $\det \lambda A = \lambda^n \det A$.

**7.13.** Доказать, что $\det(-A) = (-1)^n \det A$.

**7.14.** Доказать, что

$$\det(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \dots \cdot \det A_k.$$

**7.15.** Доказать, что $\det A^k = (\det A)^k$ для $k \in N$.

**7.16.** Как изменится определитель порядка $n$, если первый столбец переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение?

**7.17.** Как изменится определитель порядка $n$, если его строки написать в обратном порядке?

**7.18.** Как изменится определитель, если каждый его элемент заменить элементом, симметричным к данному относительно «центра» определителя?

**7.19.** Как изменится матрица $A^{-1}$, если в $A$:

**а)** переставить $i$-ю и $j$-ю строки;

**б)** к $i$-й строке прибавить $j$-ю, умноженную на $c$;

**в)** умножить $i$-ю строку на число $c \neq 0$;

**г)** преобразования а – в совершить со столбцами.

**7.20.** Доказать, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

# Заключение

Учебное пособие «Линейная алгебра. Часть 1» разработано в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта по курсам «Алгебра», «Линейная алгебра» для студентов бакалавриата физико-математических, технических и информационных специальностей и охватывает следующие темы: векторно-матричные операции, определители, обратная матрица, ранг матрицы.

Освоение указанных тем поможет студентам подготовиться к изучению одного из основных разделов линейной алгебры — теории и методов решения систем линейных уравнений, которому будет посвящена следующая часть пособия.

Пособие может быть использовано как при проведении практических занятий, так и для организации самостоятельной работы студентов. Материал изложен и построен таким образом, чтобы студент мог самостоятельно разобраться в терминологии, постановках и способах решения рассматриваемых задач. Составлены варианты типовых задач, приводится много разобранных примеров.

Авторы считают, что выбранный формат изложения материала позволит организовать эффективный учебный процесс.

# Рекомендуемая литература

1. *Кремер Н. Ш.* Линейная алгебра : учеб. и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, И. М. Тришин ; под редакцией Н.Ш.Кремера. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2021. – 422 с. – (Высшее образование) // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru /bcode/468737. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).

2. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры : учеб. для вузов / А. Г. Курош. – 22-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 432 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/152647. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).

3. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие для вузов / И. В. Проскуряков. – 15-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 476 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook. com/book/152434. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).

4. *Татарников О. В.* Линейная алгебра : учеб. и практикум для прикладного бакалавриата / О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев ; под общей редакцией О. В. Татарникова. – Москва : Юрайт, 2021. – 334 с. – (Бакалавр. Прикладной курс) // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/482664. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).

5. *Фаддеев Д. К.* Задачи по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 288 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL:

https://e.lanbook.com/book/167703. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).

## Дополнительная литература

6. *Бутузов В. Ф.* Линейная алгебра в вопросах и задачах / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, А. А. Шишкин. – Москва : Физматлит, 2002. – 248 с.

7. *Дыхта В. А.* Основы математики для экономистов : линейная алгебра и экономические модели / В. А. Дыхта. – Ирутск : Изд-во БГУЭиП, 2003. – 232 с.

8. *Ильин В. А.* Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Москва : Физматлит, 2005. – 280 с.

9. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее приложения / Г. Стренг. – Москва : Мир, 1980. – 459 с.

*Учебное издание*

**Захарченко** Варвара Сергеевна
**Поплевко** Василиса Павловна

# Линейная алгебра
# Часть 1

ISBN 978-5-9624-2022-6

Редактор *В. В. Попова*
Дизайн обложки: *П. О. Ершов*

---

Темплан 2022. Поз. 13
Подписано в печать 22.03.2021. Формат 60×90 1/16
Усл. печ. л. 8,1. Тираж 100 экз. Заказ 20

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124
тел.: +7(3952) 53-18-53
e-mail: izdat@lawinstitut.ru