Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Иркутский государственный университет»

Университетский учебник

В. П. Поплевко, В. С. Захарченко

Линейная алгебра
Часть 2

Учебное пособие

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
З-38

Серия издается с 2005 г.

Печатается по решению ученого совета ИМИТ ИГУ

Рецензенты:

А. В. Аргучинцев, д-р физ.-мат. наук, проф.
Е. В. Аксенюшкина, канд. физ.-мат. наук, доц.

Захарченко В. С.

З-38 Линейная алгебра. Часть 2 : учебное пособие / В. П. Поплевко, В. С. Захарченко. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2024. – 117 с. – (Университетский учебник).
ISBN 978-5-9624-2022-6

Приведены краткие теоретические сведения по некоторым основным вопросам курса «Линейная алгебра» (ранг системы векторов, ранг матрицы, базис пространства, системы линейных алгебраических уравнений). Необходимый теоретический материал сопровождается иллюстративными примерами и задачами для самостоятельного решения.

Предназначено для организации и контроля самостоятельной работы студентов математических, экономических и технических направлений и специальностей.

Библиогр. 9 назв.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73

ISBN 978-5-9624-2250-3

Оглавление

Предисловие

Предлагаемые материалы являются продолжением пособия «Линейная алгебра. Часть 1». В этой части приводятся основные сведения по следующим темам курса «Линейная алгебра»: линейная независимость/зависимость векторов, векторная структура матрицы, ранг, базис пространства, системы линейных уравнений.

Цель пособия – активизировать самостоятельную работу студентов при изучении курса «Линейная алгебра». Весь материал разбит на три главы. В каждой главе теоретические сведения даются в сжатом виде (нет подробных доказательств теорем и формул). Затем разбираются примеры решения задач. Главы содержат задачи и упражнения для самостоятельной работы студентов в качестве самоконтроля и индивидуальные задания для проверки усвоения материала. В каждой главе определения, теоремы, примеры и т. д. имеют двойную нумерацию: первое число – номер параграфа, второе – порядковый номер определения, теоремы, примера и т. д. в этом параграфе. Нумерация формул в каждой главе одинарная и сквозная внутри главы.

Данное пособие является прикладным дополнением к существующим учебникам, поэтому в нем даются только те сведения, которые необходимы непосредственно для решения задач. Список рекомендуемой литературы приведен в конце пособия.

Глава 1

Системы линейных уравнений. Введение

В данной главе мы начнем знакомство с основной модельной задачей линейной алгебры – задачей решения систем линейных уравнений. Материал носит вспомогательный характер: в нем перечислены основные формулировки и понятия; рассмотрены практические задачи, приводящие к системам линейных уравнений; показаны основные этапы их решения. Более полная теория рассматриваемой задачи будет изложена в последующих главах.

Теория линейных уравнений является исторически первым разделом линейной алгебры. Проблемы, соответствующие современным задачам на составление и решение систем уравнений с несколькими неизвестными, встречаются еще в вавилонских и египетских рукописях II в. до н. э., а также в трудах древнегреческих, индийских и китайских мудрецов. В китайском трактате «Математика в девяти книгах» словесно изложены правила решения систем уравнений, отмечены некоторые закономерности при решении.

Идею общего метода решения систем линейных уравнений высказал Г. В. Лейбниц в 1693 г. Она была реализована швейцарским математиком Г. Крамером в 1752 г. Он сформулировал и обосновал правило, которое позволяет решать системы линейных уравнений, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля.

В 1849 г. для решения систем линейных уравнений произвольной размерности был предложен метод Гаусса. В связи с изучением систем линейных уравнений и их определителей появилось понятие матрицы. Теория матриц была разработана в трудах А. Кэли (1850-е гг.). Понятие ранга матрицы, предложенное Г. Фробениусом в 1877 г., позволило получить условия совместности и определенности (существования и единственности решения) систем линейных уравнений. Тем самым в конце XIX в. было завершено построение общей теории систем линейных уравнений.

§ 1. Основные понятия

Приведем некоторые понятия, которыми будем оперировать в дальнейшем.

Линейным уравнением от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

где $a_i, i = \overline{1, n}$ и b – некоторые заданные числа.

Система линейных уравнений – это набор линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных.

Целью решения системы линейных уравнений является нахождение значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих всем уравнениям в системе.

Решить систему – значит найти множество всех ее решений.

Система линейных уравнений может не иметь решения. Тогда система называется **несовместной**. В противном случае система **совместна**.

Две системы линейных уравнений называются **эквивалентными**, если их множества решений совпадают, т. е. каждое решение одной системы является решением другой системы, и наоборот. В частности, если две системы эквивалентны, то у них одинаковое число неизвестных, при этом количество уравнений в системах может отличаться.

§ 2. Геометрическая интерпретация

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = b_1, \\ a_3x_1 + a_4x_2 = b_2. \end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы задает прямую на плоскости R^2. С геометрической точки зрения решить эту систему – означает найти точку, которая принадлежит одновременно двум прямым.

Возможны следующие варианты: а) прямые пересекаются – система имеет единственное решение; б) прямые параллельны – система несовместна (т. е. не имеет ни одного решения); в) прямые совпадают – система имеет бесконечное множество решений.

Пример 2.1. Решить графически следующие системы:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1, \\ 12x_1 + 4x_2 = -12; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 6; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 + 4x_2 = 4. \end{cases}$$

Решение

а) Выразим x_2 через x_1 и построим прямые:

$$\begin{cases} x_2 = -3x_1 + 1, & (\mathbf{A}) \\ x_2 = -3x_1 - 3. & (\mathbf{B}) \end{cases}$$

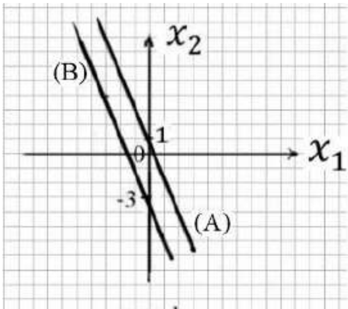


рис.1

На рис. 1 видно, что прямые параллельны, общих точек нет, следовательно, система не имеет решения (несовместна).

б) Построим прямые: $\begin{cases} x_2 = -3x_1 + 1, & (\mathbf{A}) \\ x_2 = x_1 - 3. & (\mathbf{B}) \end{cases}$

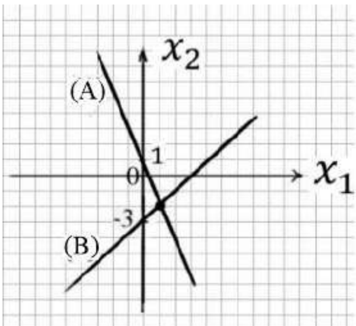


рис. 2

На рис. 2 видно, что прямые пересекаются, точка пересечения прямых $x = (1; -2)$ – единственное решение системы.

в) Построим прямые: $\begin{cases} x_2 = -x_1 + 1, & (\mathbf{A}) \\ x_2 = -x_1 + 1. & (\mathbf{B}) \end{cases}$

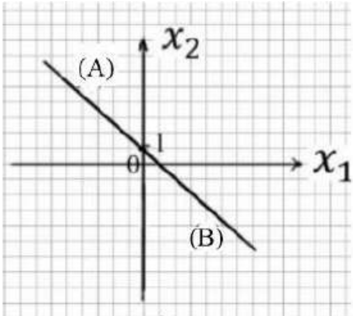


рис. 3

На рис. 3 видно, что прямые совпадают. Это означает – все точки на прямой являются решениями системы (система имеет бесконечное множество решений).

На примере рассмотренной системы из двух уравнений с двумя неизвестными можно сделать вывод, который будет справедлив (в этом мы убедимся в следующих главах) и для произвольных систем с m уравнениями и n неизвестными:

1) система уравнений может иметь единственное решение (в двумерном случае – прямые пересекаются в единственной точке);

2) система может не иметь решения (в двумерном случае – прямые параллельны);

3) система может иметь бесконечное множество решений (в двумерном случае – прямые совпадают).

Задания для самостоятельной работы

1. Решить графически систему уравнений и указать вид системы (совместная, несовместная):

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 + x_2 = -18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 10, \\ 4x_1 - x_2 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3, \\ 5x_1 - 3x_2 = 6. \end{cases}$

2. При каких значениях a система уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 4, \\ 4x_1 + 20x_2 = a \end{cases}$ имеет бесконечно много решений;

б) $\begin{cases} 7x_1 - 12x_2 = 14, \\ -12x_1 + 7x_2 = a \end{cases}$ не имеет решений;

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

§ 3. Системы линейных уравнений как модели реальных процессов

Системы линейных уравнений являются одним из инструментов моделирования разнообразных процессов. Математическая модель – это совокупность уравнений (например, линейных, дифференциальных и т. д.) или других математических соотношений, отражающих основные свойства изучаемого процесса (явления). Математическая модель процесса (явления) может содержать выражение (либо запись по действиям) и уравнение (либо систему уравнений).

При решении практической задачи можно выделить три этапа математического моделирования:

1) перевод условий изучаемого процесса (явления) на математический язык; при этом выделяются необходимые для решения данные и искомые, математическими способами описываются связи между ними;

2) внутримодельное решение, т. е. нахождение значения выражения, выполнение действий, решение уравнения;

3) интерпретация, т. е. перевод полученного решения на тот язык, на котором была сформулирована задача.

Отметим, что вопросы, рассмотренные в данной главе, относятся к 1-му этапу решения систем. Изложение основ теории систем линейных уравнений начнем со следующей задачи.

Предприятие выпускает четыре вида продукции из трех типов сырья. Удельные расходы сырья на производство следующие:

1) для производства единицы 1-го вида продукции требуется 4 условные единицы (у. е.) 1-го сырья, 1 у. е. 2-го сырья и 3 у. е. 3-го сырья;

2) для производства единицы 2-го вида продукции требуется 2 у. е. 1-го сырья, 1 у. е. 2-го сырья и 1 у. е. 3-го сырья;

3) для производства единицы 3-го вида продукции требуется 2 у. е. 1-го сырья, 2 у. е. 2-го сырья и 2 у. е. 3-го сырья;

4) для производства единицы 4-го вида продукции требуется 3 у. е. 1-го сырья, 3 у. е. 2-го сырья и 1 у. е. 3-го сырья.

Сколько единиц продукции каждого вида выпускает предприятие, если имеющийся запас сырья, соответственно 35, 30 и 30 кг, используется полностью?

Решение

Определим искомые переменные. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – количество продукции каждого вида. Расход каждого типа сырья на единицу продукции (у. е.) оформим в виде таблицы:

	Продукция 1	Продукция 2	Продукция 3	Продукция 4	Запас сырья
Сырье 1	4	2	2	3	35
Сырье 2	1	1	2	3	30
Сырье 3	3	1	2	1	30

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 35, \\ \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 30, \\ \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 30. \end{cases}$$

Коэффициенты системы образуют матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

коэффициенты правой части системы – вектор $b = \begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$,

вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных.

Что собой представляет объект Ax?

С одной стороны, Ax – это вектор суммарных расходов по каждому типу сырья для производства продукции в объемах x_1, x_2, x_3, x_4.

Здесь решить систему – найти такой план производства продукции, чтобы вектор $Ax = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$ был равен $\begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Теперь рассмотрим векторы расхода каждого типа сырья на производство 1 ед. продукции вида 1, 2, 3, 4 соответственно:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Ax = x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

То есть Ax – это линейная комбинация столбцов матрицы A с коэффициентами x_1, x_2, x_3, x_4.

С этой точки зрения решить задачу – найти такие коэффициенты x_1, x_2, x_3, x_4, чтобы вектор b являлся линейной комбинацией столбцов матрицы A.

Относительно системы уравнений нас интересуют ответы на следующие вопросы.

Из скольки уравнений может состоять система?

Из m уравнений.

Как записать систему в развернутом виде?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Числа m и n зависят друг от друга?

Нет. Возможные случаи: $m < n$, $m = n$, $m > n$.

Что известно?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Что неизвестно?

Вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Матричная форма записи системы: $Ax = b$.

А вот ответы на такие вопросы, как «Всегда ли система имеет решение?», «Если у системы есть решения, то сколько их?», «Если решений несколько, как описать множество решений?», мы получим из глав 2 и 3 данного учебного пособия, изучив понятие ранга системы, условия совместности систем.

Задания для самостоятельной работы

Построить математическую модель задачи (не решая) со следующим условием:

1. Предприниматель изготавливает три вида продукции A, B, C. Для их производства он арендует два металлообрабатывающих станка X и Y. Выпуск продукции требует следующих затрат машинного времени (последовательность обработки не имеет значения):

1) для выпуска 1 ед. продукции A требуется 2 часа обработки на машине X и 2 часа на машине Y;

2) для выпуска 1 ед. продукции B требуется 3 часа обработки на машине X и 2 часа на машине Y;

3) для выпуска 1 ед. продукции C требуется 4 часа обработки на машине X и 3 часа на машине Y.

Машина X доступна 80 часов в неделю, машина Y – 60 часов в неделю. Требуется определить, при каком выпуске продукции машины не простаивают.

2. Обувная фабрика выпускает четыре вида продукции: мужскую, женскую, детскую обувь и изделия по уходу за обувью. В таблице приведены данные расхода сырья (в у. е.) на производство одного изделия:

Вид сырья	Мужская обувь	Женская обувь	Детская обувь	Изделия по уходу	Запас сырья
1	20	10	10	0	5 000
2	30	40	20	1	12 000
3	20	60	10	1	11 000
4	10	50	5	0	7 000

Определите объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

3. Швейная фабрика в течение трех дней производила костюмы, плащи и куртки. Известны объемы выпуска продукции за три дня и денежные затраты на производство за эти дни:

День	Костюмы (ед.)	Плащи (ед.)	Куртки (ед.)	Затраты (тыс. у. е.)
Первый	50	10	30	176
Второй	35	25	20	168
Третий	40	20	30	184

Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

4. Предприятие использует три вида сырья, выпуская два вида продукции. В таблице приведены данные расхода сырья (в у. е.) на производство одного изделия:

Вид сырья	Продукция 1	Продукция 2	Запас сырья
1	2	3	1 200
2	1	4	2 400
3	5	1	1 000

Определите объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Глава 2

Ранг системы векторов. Ранг матрицы

§ 1. Линейная независимость/зависимость векторов

Понятия и свойства линейно независимых/зависимых систем векторов мы подробно рассматривали в пособии «Линейная алгебра. Часть 1». Напомним некоторые определения.

Определение 1.1. Вектор a называется линейной комбинацией векторов $a^1, a^2, \ldots, a^k$ одинаковой размерности, если

$$a = \alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \ldots \alpha_k a^k, \tag{1}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые числа. Равенство (1) называют разложением вектора a по векторам $a^1, a^2, \ldots, a^k$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – коэффициентами разложения.

В равенстве (1) верхний индекс вектора – это номер вектора в наборе (системе) векторов, т. е.

$$a^i = ({a_1}^i, {a_2}^i, \ldots, {a_n}^i).$$

Определение 1.2. Линейная комбинация (1) называется **тривиальной**, если все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ равны нулю:

$$a = 0 \cdot a^1 + 0 \cdot a^2 + \ldots 0 \cdot a^k.$$

Линейная комбинация (1) называется **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов α_i не равен нулю, т. е. если выполняется следующее неравенство:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0. \tag{2}$$

Например, рассмотрим систему векторов $a^1 = (1; 0; 0)$, $a^2 = (0; 1; 0)$, $a^3 = (3; 4; 0)$. Нетрудно увидеть, что вектор a^3 является линейной комбинацией векторов a^1 и a^2 с коэффициентами $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$ соответственно:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.3. Набор векторов $a^1, a^2, \ldots, a^k$ одинаковой размерности называется системой векторов.

Определение 1.4. Система из k векторов $a^1, a^2, \ldots, a^k$ называется **линейно зависимой**, если найдется нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т. е. если выполняется равенство

$$\alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \ldots \alpha_k a^k = 0 \tag{3}$$

при условии (2) на коэффициенты линейной комбинации.

Если же равенство (3) возможно только при нулевых коэффициентах, то система векторов $a^1, a^2, \ldots, a^k$ **линейно независимая**.

Очевидно, что рассмотренная выше система векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ является линейно зависимой, так как существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1.1. Один вектор a^1 также образует систему: при $a^1 = 0$ – линейно зависимую (так как $\alpha_1 a^1 = 0$ может выполняться при $\alpha_1 \neq 0$), а при $a^1 \neq 0$ – линейно независимую (так как $\alpha_1 a^1 = 0$ выполняется только при $\alpha_1 = 0$).

Замечание 1.2. Любое подмножество системы векторов называется подсистемой.

Пример 1.1. Используя определение, установить линейную зависимость или линейную независимость следующих систем векторов:

а) $a^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$;

б) $a^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение

а) Векторы $a^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ являются линейно зависимыми, так как можно составить нетривиальную линейную комбинацию, например, с коэффициентами $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 1$, которая равна нулевому вектору:

$$\alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или $a^2 = -2a^1$.

б) Векторы $a^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ являются линейно независимыми. Действительно, если

$$\alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 = 0,$$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $\alpha_1 \equiv 0, \quad \alpha_2 \equiv 0$. То есть только тривиальная линейная комбинация этих векторов будет равна нулевому вектору. Из чего следует, что система векторов линейно независима.

Пример 1.2. Образуют ли векторы
$a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ линейно независимую систему?

Решение

Здесь нужно напомнить **основную теорему векторных пространств**: любые k векторов пространства R^n при $k > n$ обязательно будут линейно зависимыми.

То есть если число векторов в системе больше их размерности (количества координат), то **обязательно** найдется нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю. Следовательно, в данном примере система векторов является линейно зависимой.

Вспомним основные **свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов:**

1. Если в систему векторов входит нулевой вектор, то она линейно зависима.

2. Если в системе векторов имеется два одинаковых вектора, то она линейно зависима.

3. Если в системе векторов имеется два пропорциональных вектора ($a^1 = \alpha a^2$), то она линейно зависима.

4. Система из $k > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных.

5. Любые векторы, входящие в линейно независимую систему векторов, образуют линейно независимую подсистему.

6. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, является линейно зависимой.

Пример 1.3. Рассмотреть всевозможные системы, образованные из векторов:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a^5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Исследовать каждую систему на линейную зависимость.

Решение

Для начала рассмотрим подсистемы, содержащие по одному вектору. В соответствии с замечанием 1.1 § 1 данной главы – системы $\{a^2\}$; $\{a^3\}$; $\{a^4\}$; $\{a^5\}$ линейно независимы, а система $\{a^1\}$, состоящая из нулевого вектора, линейно зависима.

Далее рассмотрим системы, содержащие по два вектора:

• каждая из четырех систем $\{a^1, a^2\}$; $\{a^1, a^3\}$; $\{a^1, a^4\}$; $\{a^1, a^5\}$ линейно зависима, так как содержит нулевой вектор a^1 (**по свойству 1**);

• система $\{a^2, a^3\}$ линейно зависима, так как векторы пропорциональны: $a^3 = 2a^2$ (**по свойству 3**);

• каждая из систем $\{a^2, a^4\}$; $\{a^2, a^5\}$; $\{a^3, a^4\}$; $\{a^3, a^5\}$; $\{a^4, a^5\}$ линейно независима, так как векторы непропорциональны.

Теперь рассмотрим системы, состоящие из трех векторов:

• каждая из систем $\{a^1, a^2, a^3\}$; $\{a^1, a^2, a^4\}$; $\{a^1, a^2, a^5\}$; $\{a^1, a^3, a^4\}$; $\{a^1, a^3, a^5\}$; $\{a^1, a^4, a^5\}$ линейно зависима, так как содержит нулевой вектор a^1 (**по свойству 1**);

• системы $\{a^2, a^3, a^4\}$; $\{a^2, a^3, a^5\}$ линейно зависимы, так как содержат линейно зависимую подсистему $\{a^2, a^3\}$ (**по свойству 6**);

• системы $\{a^2, a^4, a^5\}$; $\{a^3, a^4, a^5\}$ линейно зависимы, так как вектор a^5 линейно выражается через остальные (**по свойству 4**): $a^5 = 2a^2 + a^4$, $a^5 = a^3 + a^4$.

Системы из любых четырех или пяти векторов линейно зависимы (**по свойству 6**).

§ 2. Ранг и база системы векторов

Определение 2.1. Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов в заданной системе.

Рассмотрим для примера следующие системы:

а) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ранг системы $= 1$, так как ненулевые векторы этой системы коллинеарны. Значит, любой ненулевой вектор составляет максимальную линейно независимую систему;

б) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ранг системы $= 2$, так как эти векторы неколлинеарны (линейно независимые);

в) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ранг системы $= 3$, так как первые три вектора образуют стандартный базис пространства R^3, а четвертый вектор является их линейной комбинацией;

г) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ранг системы $= 2$, так как векторы неколлинеарны.

Определение 2.2. Максимальной линейно независимой подсистемой векторов называется линейно независимая подсистема, состоящая из максимально возможного числа векторов рассматриваемой системы. Максимальную линейно независимую подсистему векторов называют **базой системы векторов**.

Замечание 2.1. Система векторов может иметь несколько различных баз.

Замечание 2.2. У каждой системы все базы содержат одинаковое число векторов.

Пример 2.1. В рассмотренных выше четырех системах векторов выбрать всевозможные линейно независимые подсистемы. Найти все базы систем векторов.

Решение

1. Можно выбрать три линейно независимые подсистемы $\{\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\}$, причем каждая из них является базой исходной системы.

2. Три линейно независимые подсистемы: $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, последняя (система из двух векторов) является базой системы.

3. Пусть $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Из них можно образовать 13 линейно независимых подсистем: $\{a^1, a^2\}$, $\{a^1, a^3\}$, $\{a^1, a^4\}$, $\{a^2, a^4\}$, $\{a^3, a^4\}$, $\{a^1\}$, $\{a^2\}$, $\{a^3\}$, $\{a^4\}$, $\{a^1, a^2, a^3\}$, $\{a^1, a^2, a^4\}$, $\{a^1, a^3, a^4\}$, $\{a^2, a^3, a^4\}$. Причем последние четыре из них являются базами системы.

4. Три линейно независимые подсистемы: $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, причем последняя система – база.

Алгоритм исследования системы векторов на линейную зависимость/независимость:

1. Сначала следует убедиться, что число векторов k исследуемой системы не превосходит числа координат векторов n. Если же $k > n$, то система линейно зависима.

2. Проверить, не содержит ли система нулевой вектор, равные векторы, пропорциональные векторы. Если такие имеются, то также делается вывод о линейной зависимости системы.

3. Исследовать систему на линейную независимость (например, с помощью определителя).

4. Ранг системы векторов равен максимальному числу линейно независимых векторов $a^1, a^2, \ldots, a^k$.

Пример 2.2. Определить, является ли система векторов $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ линейно зависимой?

Решение

Так как матрица, составленная из данных векторов, имеет порядок 4×3, то найти ее определитель невозможно.

Рассмотрим ее подматрицы. Если найдется такая подматрица порядка 3×3, определитель которой будет отличным от нуля, тогда три строки и три столбца этой подматрицы (а следовательно, все три вектора исходной системы) будут линейно независимыми.

Рассмотрим, например, подматрицу, составленную из последних трех строк исходной матрицы. Получим следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

По свойству определителя (все столбцы и строки определителя, отличного от нуля, линейно независимые) – система данных векторов линейно независимая и ранг системы $= 3$.

Пример 2.3. В заданной системе векторов найти все базы системы:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Легко увидеть, что векторы a^3 и a^4 можно выразить через другие: $a^3 = 2a^1$, $a^4 = 2a^2$. Следовательно, их можно вычеркнуть. Осталось проверить на линейную зависимость a^1 и a^2.

Эти векторы неколлинеарны, значит, линейно независимые и ранг системы $= 2$. Базы системы: $\{a^1, a^2\}$, $\{a^1, a^4\}$, $\{a^2, a^3\}$, $\{a^3, a^4\}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти все базы системы векторов:

а) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

б) $a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

в) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ответы:

а) $\{a^1, a^2\}$, $\{a^2, a^3\}$; б) $\{a^1, a^2, a^4\}$, $\{a^1, a^3, a^4\}$, $\{a^2, a^3, a^4\}$;
в) $\{a^1, a^2\}$, $\{a^1, a^3\}$, $\{a^2, a^3\}$.

2. Найти ранг и базу набора векторов:

а) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) $a^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ответы:

а) ранг системы $= 3$; база, например, $\{a^1, a^2, a^3\}$;
б) ранг системы $= 2$; база, например, $\{a^1, a^2\}$.

§ 3. Векторная структура матрицы

Рассмотрим матрицу A порядка $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через a_i i-ю строку матрицы A:

$$a_i = (a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}), \quad i = 1, 2, \dots m.$$

Тогда матрицу A можно записать через систему строк:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Теперь обозначим через a^j j-й столбец матрицы A:

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots n.$$

Матрицу A запишем как набор столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & \dots & a^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицу можно воспринимать как некоторую систему векторов, записанных определенным образом в прямоугольную таблицу в виде ее строк или столбцов. Далее эти системы строк/столбцов матрицы мы будем исследовать на линейную зависимость/независимость.

§ 4. Ранг матрицы

Понятие определителя является важнейшей характеристикой квадратной матрицы. Если $\det A = 0$, тогда в матрице строки/столбцы линейно зависимые. Для прямоугольной матрицы A порядка $m \times n$ важной характеристикой является понятие ранга.

Определение 4.1. Рангом системы строк (столбцов) матрицы A называется наибольшее число линейно независимых строк (столбцов) соответственно.

Ранг системы строк матрицы равен рангу системы ее столбцов. Это число называется **рангом матрицы по строкам (столбцам)**.

Ранг матрицы A обозначается как rgA, $r(A)$, $rangA$, $rankA$.

Пример 4.1. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

Ранг матрицы A не может быть больше 4, так как A размерности 4×4. То есть $rangA \leq 4$. Рассмотрим столбцы матрицы. Нулевые столбцы можно вычеркнуть, при этом ранг не изменится. Таким образом, $rangA \leq 2$. Оставшиеся два столбца линейно зависимые (коллинеарные), поэтому один из них также можно вычеркнуть из матрицы. Остается один линейно независимый столбец, следовательно, $rangA = 1$. То же верно и относительно строк матрицы: вторая строка повторяет четвертую, а первая и третья строки получены из второй строки путем умножения на 2 и 3 соответственно. То есть матрица содержит только одну линейно независимую строку, и $rangA = 1$.

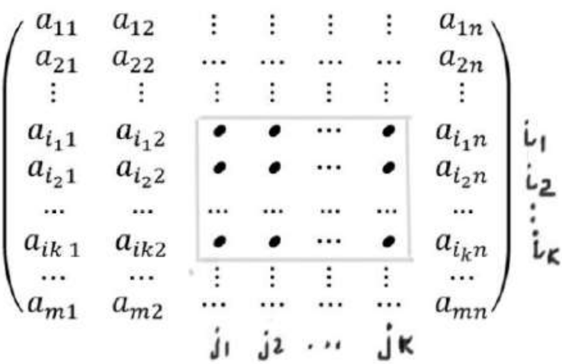
Пример 4.2. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Заметим, что третья строка матрицы является линейной комбинацией первых двух строк, а именно $a_3 = a_2 - a_1$. Оставшиеся две строки a_1 и a_2 неколлинеарны, следовательно, линейно независимые. Получили $rangA = 2$.

Введем определение ранга матрицы, используя миноры матрицы. Для этого выделим в матрице A произвольным образом k строк и k столбцов, где $k \le \min\{m, n\}$:



Определение 4.2. Определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов, называется **минором** или **определителем k-го порядка**.

Обозначая миноры, номера выбранных строк будем указывать верхними индексами, а выбранных столбцов – нижними, располагая их по возрастанию.

Рассмотрим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

У матрицы имеется 12 миноров 1-го порядка, например минор $M_4^2 = |a_{24}| = 3$; 18 миноров 2-го порядка, например $M_{24}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$; 4 минора 3-го порядка, например

$$M_{124}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Определение 4.3. В матрице A порядка $m \times n$ минор k-го порядка называется **базисным**, если он отличен от нуля, а все миноры $k+1$-го порядка равны нулю, или их вообще не существует. Строки и столбцы матрицы A, на пересечении которых расположен базисный минор, будем называть **базисными строками и столбцами**. Эти строки (столбцы) являются линейно независимыми (минор или определитель не равен нулю, если все его строки и столбцы линейно независимые).

Определение 4.4. Рангом матрицы называется максимальный порядок отличного от нуля минора матрицы (порядок базисного минора).

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, рассмотренной выше, базисным минором может быть минор 2-го порядка M_{24}^{12}, так как все миноры 3-го порядка равны нулю (третья строка является линейной комбинацией первой и второй строк). Отсюда $rangA = 2$.

Базисных миноров может быть несколько, к примеру, для рассмотренной матрицы базисными минорами являются все миноры 2-го порядка, так как ни один из них не равен нулю.

Пример 4.3. Найти все базисные миноры и ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Матрица A размерности 2×4, поэтому

$$rangA \leq \min\{2, 4\} = 2.$$

Матрица имеет базисный минор 2-го порядка (например, $M_{12}^{12} \neq 0$), следовательно, $rangA = 2$. Базисными минорами также являются:

$$M_{13}^{12}, M_{14}^{12}, M_{23}^{12}, M_{24}^{12}, M_{34}^{12}.$$

Теорема 4.1 (о базисном миноре). В произвольной матрице A каждый столбец (строка), не входящий(ая) в базисный минор, является линейной комбинацией базисных столбцов (строк).

Замечание 4.1. Если все миноры k-го порядка равны нулю, то равны нулю и все миноры более высого порядка.

Замечание 4.2. $rangA = 0$ только у нулевой матрицы, так как у нулевой матрицы нет базисного минора (нет линейно независимых строк/столбцов).

Замечание 4.3. Если матрица порядка n невырожденная ($\det A \neq 0$), то ее ранг равен n (т. е. у этой матрицы базисный минор порядка n). Если матрица вырожденная, то ее ранг меньше ее порядка.

Теорема 4.2. Ранг матрицы равен порядку базисного минора и, следовательно, максимальному числу линейно независимых строк или столбцов матрицы.

Пример 4.4. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Так как матрица A размерности 3×5, тогда $rangA \leq 3$. Видно, что третья строка является суммой первой и второй строк, т. е. $a_3 = a_1 + a_2$. Следовательно, третью строку вычеркиваем и получаем эквивалентную матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

и $rangA = rang\widetilde{A} \leq 2$. У матрицы базисными минорами являются:

$$M_{12}^{12}, M_{13}^{12}, M_{14}^{12}, M_{23}^{12}, M_{24}^{12}, M_{25}^{12}, M_{34}^{12}, M_{35}^{12}, M_{45}^{12},$$

так как все они не равны нулю. Только минор $M_{15}^{12} = 0$ не является базисным. Значит, $rangA = rang\widetilde{A} = 2$.

Пример 4.5. Выяснить, при каком значении α ранг матрицы A является наименьшим среди рангов приведенных матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Так как у матрицы C минор M_{123}^{123} 3-го порядка не равен нулю, то $rang C = 3$. В матрице B нулевую строку можно вычеркнуть, а оставшиеся две строки неколлинеарны. Отсюда $rang B = 2$.

Таким образом, значение α должно быть таким, чтобы $rang A = 1$ (потому что только у нулевой матрицы ранг равен нулю). Первая a_1 и третья a_3 строки матрицы A линейно зависимые ($a_1 = -a_3$), следовательно, одну из них вычеркиваем, например a_3. Вторая строка будет линейно зависимой с первой строкой a_1 при $\alpha = 6$ (а именно $a_1 = 2a_2$). Поэтому $rang A = 1$ при $\alpha = 6$.

§ 5. Вычисление ранга матрицы

Для вычисления ранга матрицы необходимо найти базисный минор или максимальное число линейно независимых строк/столбцов. Поиск базисного минора у матриц большой размерности простым перебором миноров всех порядков является весьма трудоемкой задачей. Следующий метод позволяет уменьшить число рассматриваемых миноров.

1. Метод окаймляющих миноров

Рассмотрим матрицу A размерности $m \times n$. Пусть нашли минор k-го порядка $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} \neq 0$. Следовательно, $rang A \geq k$.

Если $k < \min\{m, n\}$, значит, можем построить минор $k+1$-го порядка $M_{j_1 j_2 \dots j_k j_{k+1}}^{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}$, который **окаймляет** (или содержит в себе) исходный минор $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$.

Если $M_{j_1 j_2 \dots j_k j_{k+1}}^{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}} \neq 0$, следовательно, $rangA \geq k+1$. Теперь, если окажется, что все миноры $k+2$-го порядка, окаймляющие его, равны нулю или не существуют, то $rangA = k+1$.

Таким образом, при вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам высших порядков. Если уже найден минор порядка k, отличный от нуля, то вычисляются не все миноры $k+1$-го порядка, а лишь окаймляющие его миноры: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Рассмотрим применение метода на следующем примере.

Пример 5.1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение

Выбираем произвольным образом минор 1-го порядка, не равный нулю, например $M_1^1 = 1$. Имеем $rangA \geq 1$. Так как матрица порядка 3×4, можем расмотреть миноры большего порядка. Окаймляем минор M_1^1 минором 2-го порядка, например $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$. Выбор оказался неудачным, так как получили минор, равный нулю. Рассмотрим минор 2-го порядка, также окаймляющий M_1^1: $M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$. Следовательно, $rangA \geq 2$. Теперь рассмотрим все миноры 3-го порядка:

$$M_{134}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{132}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 0,$$

так как третья строка равна сумме первых двух строк. Поэтому $rangA = 2$.

2. Метод Гаусса

Метод основан на применении таких **элементарных преобразований**, как:

а) вычеркивание нулевой строки (столбца);

б) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю;

в) перестановка строк (столбцов) матрицы;

г) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;

д) транспонирование матрицы.

Замечание 5.1. Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга. (Напомним, что две матрицы называются эквивалентными, если одна матрица получается из другой с помощью элементарных преобразований.)

Замечание 5.2. Если одна строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то ее (его) можно вычеркнуть из матрицы, не изменив при этом ранга.

Алгоритм метода Гаусса

Рассмотрим матрицу A размерности $m \times n$. Для нахождения ее ранга методом Гаусса необходимо:

1. Привести матрицу A к ступенчатому виду (см. уч. пособие «Линейная алгебра. Часть 1», § 3 «Элементарные преобразования матриц»).

2. В полученной матрице посчитать количество ненулевых строк. Это число и будет равно рангу матрицы A.

Напомним, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к **ступенчатому виду**:

$$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{a_{11}} & * & * & \ldots & * & * & \ldots & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \widetilde{a_{22}} & * & \ldots & * & * & \ldots & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \widetilde{a_{33}} & \ldots & * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \widetilde{a_{kk}} & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

здесь $\widetilde{a_{11}}, \widetilde{a_{22}}, \ldots, \widetilde{a_{kk}}$ – ведущие элементы, неравные нулю, символом $*$ обозначены элементы с произвольными значениями, $k \leq \min\{m, n\}$. Заметим, что высота каждой «ступеньки» составляет одну строку. Таким образом, ранг ступенчатой матрицы равен k.

Пример 5.2. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Из второй строки вычтем первую строку; из третьей строки вычтем первую строку, умноженную на 2; из четвертой строки вычтем первую строку, умноженную на 4. Получим эквивалентную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее к третьей строке прибавим вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В последней матрице третья и четвертая строки одинаковые, поэтому одну из них можно вычеркнуть. Получаем $rangA = 3$.

Пример 5.3. Найти ранг матрицы при различных значениях α:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Решение

Найдем ранг матрицы методом Гаусса. Сначала поменяем первую и четвертую строки местами:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее вычтем из второй и третьей строк первую, из четвертой строки вычтем первую строку, умноженную на α:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & (\alpha-1) & 0 & (1-\alpha) \\ 0 & 0 & (\alpha-1) & (1-\alpha) \\ 0 & (1-\alpha) & (1-\alpha) & (1-\alpha^2) \end{pmatrix}.$$

Прибавим к четвертой строке вторую строку, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & (\alpha-1) & 0 & (1-\alpha) \\ 0 & 0 & (\alpha-1) & (1-\alpha) \\ 0 & 0 & (1-\alpha) & (2-\alpha-\alpha^2) \end{pmatrix}.$$

Прибавим к четвертой строке третью строку:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & (\alpha-1) & 0 & (1-\alpha) \\ 0 & 0 & (\alpha-1) & (1-\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & (3-2\alpha-\alpha^2) \end{array}\right).$$

Заметим, что $(3-2\alpha-\alpha^2) = -(\alpha-1)(\alpha+3)$. Следовательно:

1) если $\alpha - 1 = 0$, тогда останется одна ненулевая строка. То есть при $\alpha = 1 \quad rangA = 1$;

2) если $\alpha - 1 \neq 0$, $\alpha + 3 \neq 0$, тогда в матрице будет четыре ненулевые строки. Таким образом, при $\alpha \neq 1$ и $\alpha \neq -3$ $rangA = 4$;

3) если $\alpha + 3 = 0$, тогда в матрице будет три ненулевые строки. Имеем при $\alpha = -3 \quad rangA = 3$.

Свойства:

1. Ранг суммы матриц не превышает суммы рангов слагаемых:

$$rang(A+B) \leq rangA + rangB.$$

2. Ранг произведения матриц не превышает ранга множителей:

$$rang(A \cdot B) \leq \min\{rangA, rangB\}.$$

Пример 5.4. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти ранги матриц: $A+B$, $A+C$, $A \cdot B$, $A \cdot C$.

Решение

Нетрудно видеть, что $rangA = 1$, $rangB = 1$, $rangC = 2$. Найдем ранги суммы и произведений данных матриц:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$rang(A+B)=2$, т. е. $rang(A+B)=rangA+rangB$;

$$A+C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$rang(A+C)=1$, т. е. $rang(A+C)<rangA+rangC$;

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$rang(A\cdot B)=0$, т. е. $rang(A\cdot B)<\min\{rangA, rangB\}$;

$$A\cdot C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$rang(A\cdot C)=1$, т. е. $rang(A\cdot C)=\min\{rangA, rangC\}$.

Аналогично свойству произведения матриц ($A\cdot B\neq B\cdot A$), в общем случае, $rang(A\cdot B)\neq rang(B\cdot A)$.

Пример 5.5. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найти: $rang(A\cdot B)$, $rang(B\cdot A)$.

Решение

$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=0,\ \ rang(A\cdot B)=0.$

$B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$

$rang(B\cdot A)=1.$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $B = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$;

г) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $F = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

е) $G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

ж) $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$.

Ответы:

а) $rangA = 3$; б) $rangB = 2$; в) $rangC = 3$; г) $rangD = 2$; д) $rangF = 3$; е) $rangG = 4$; ж) $rangH = 3$.

2. Найти максимальное число линейно независимых строк матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы:

а) 2; б) 3; в) 2.

3. Найти ранг при всех значениях параметра λ:

а) $A = \begin{pmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3-\lambda) \end{pmatrix}$;

б) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & -1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Ответы:

а) при $\lambda = 1 \quad rangA = 2$; при $\lambda = 2 \quad rangA = 3$; при $\lambda = 3 \quad rangA = 3$; во всех остальных случаях $rangA = 4$;

б) при $\lambda = 0 \quad rangB = 2$; при $\lambda \neq 0 \quad rangB = 3$;

в) при $\lambda = -1 \quad rangC = 1$; при $\lambda \neq -1 \quad rangC = 2$.

4. Вычислить ранги матриц, приводя их к ступенчатому виду:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 13 & 16 \end{pmatrix}$;

б) $B = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

Ответы:

а) $rangA = 2$; б) $rangB = 3$.

5. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$. Выяснить, при каком значении параметра α ранг матрицы равен:
а) 3; б) 2; в) 1.

§ 6. Понятие базиса пространства R^n

В данном параграфе мы только рассмотрим понятие произвольного базиса пространства R^n. А далее, при изучении систем линейных уравнений, исследуем свойства произвольного базиса.

Мы уже упоминали в § 1 данной главы основную теорему векторных пространств, которая утверждает, что в n-мерном пространстве любой набор из k векторов при $k > n$ будет обязательно линейно зависимым (т. е. если число векторов в наборе больше размерности пространства). Таким образом, **в пространстве R^n максимальное число линейно независимых векторов равно** n.

Один линейно независимый набор из n векторов в пространстве R^n мы знаем (мы его рассматривали в пособии «Линейная алгебра. Часть 1»). Это стандартный базис:

$$e^1 = (1, 0, \ldots, 0), e^2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e^n = (0, 0, \ldots, 1).$$

На самом деле существует бесконечное множество линейно независимых наборов из n векторов.

Определение 6.1. Любой упорядоченный набор из n линейно независимых векторов пространства R^n называется базисом.

В данном определении мы полагаем, что векторы расположены в наборе в определенном порядке. Поэтому один и тот же линейно независимый набор из n векторов позволяет ввести несколько базисов.

Можно дать и другое определение базиса пространства R^n – как максимальной линейно независимой системы векторов пространства.

Утверждение 6.1. Набор из n векторов $x^1, x^2, \ldots, x^n$ пространства R^n образует базис тогда и только тогда, когда

$$\det(x^1 x^2 \ldots x^n) \neq 0.$$

Пример 6.1. Образует ли система векторов $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ базис соответствующего пространства?

Решение

Векторы принадлежат пространству R^2. В этом пространстве максимальное число линейно независимых векторов – два. Если заданные векторы окажутся линейно независимыми, то они будут составлять базис пространства R^2. Для проверки вычислим определитель матрицы, построенной на этих векторах:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

следовательно, система векторов $\{a^1, a^2\}$ линейно независимая, и эти векторы являются базисом пространства R^2.

Утверждение 6.2. Любую линейно независимую систему, не содержащую максимальное число линейно независимых векторов в заданном пространстве, можно дополнить до максимально линейно независимой системы векторов в этом пространстве (т. е. до базиса пространства).

Пример 6.2. Дана система векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Дополнить до максимально возможной линейно независимой системы (**базиса**) заданного пространства.

Решение

Заданные векторы размерности 4×1, поэтому принадлежат пространству R^4. Максимальное число линейно независимых векторов (векторов в базисе R^4) – четыре. Данные векторы неколлинеарны, следовательно, линейно независимые. Значит, необходимо добавить два линейно независимых вектора. Можно добавлять к заданным векторам любой вектор по одному (например, удобно брать векторы стандартного базиса заданного пространства) и проверять набор на линейную независимость. Таким образом, сначала получить систему из трех, затем четырех линейно независимых векторов. Можно сразу добавить все векторы стандартного базиса и получить систему векторов с максимальным рангом, равным четырем, которой соответствует матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

После того как привели матрицу к ступенчатому виду, необходимо выбрать базисный минор, обязательно содержащий столбцы, соответствующие исходно заданным векторам. Номера оставшихся стобцов базисного минора указывают на векторы стандартного базиса, которые необходимо добавить в систему.

В нашем примере базисный минор M_{1234}^{1234}, следовательно, искомая максимально линейно независимая система в R^4, или **базис**,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что ответ неоднозначный. Например, можно дополнить исходную систему векторов и двумя другими векторами стандартного базиса: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Это легко увидеть, если привести систему из заданных двух векторов к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг системы равен 2. Если справа дописать два вектора e^3, e^4 стандартного базиса R^4, то таким образом мы дополним систему до базиса пространства.

Задания для самостоятельной работы

1. Является ли заданная система векторов базисом соответствующего пространства?

а) $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

б) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$

в) $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Ответы:

а) является базисом в R^3; б) является базисом в R^4;
в) не является базисом в R^3.

2. Дополнить систему векторов до базиса заданного пространства:

а) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

б) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$; г) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Ответы:

а) ранг системы равен 3, дополнить одним вектором;
б) ранг системы равен 2, дополнить двумя векторами;
в) ранг системы равен 1, дополнить двумя векторами;
г) ранг системы равен 2, дополнить двумя векторами.

3. Выяснить, можно ли дополнить до базиса пространства наборы векторов:

а) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$;

б) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Индивидуальные задания

Задание 1. Вычислить ранг матрицы:

1.1. $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$

1.2. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 6 & 4 & 10 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

1.3. $\begin{pmatrix} -10 & 6 & -8 & 0 & 6 & -8 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

1.4. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$

1.5. $\begin{pmatrix} 27 & -36 & 9 & -12 & 36 & -48 \\ -15 & 21 & -5 & 7 & -20 & 28 \\ 18 & -24 & 6 & -8 & 16 & -20 \\ -30 & 42 & -10 & 14 & -25 & 35 \end{pmatrix}.$

1.6. $\begin{pmatrix} 50 & 62 & 34 & 86 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$

1.7. $\begin{pmatrix} 48 & 38 & 72 & 144 & -76 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$

1.8. $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 52 & 196 & 46 & -588 & 172 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}.$

1.9. $\begin{pmatrix} 34 & -56 & 90 & 22 & 78 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}.$

1.10. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$

1.11. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

1.12. $\begin{pmatrix} 37 & 259 & 481 & 407 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \end{pmatrix}.$

1.13. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$

1.14. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}.$

1.15. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

1.16. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15 \end{pmatrix}$.

1.17. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.18. $\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.19. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

1.20. $\begin{pmatrix} 9 & -12 & 3 & -4 & 12 & -16 \\ -15 & 21 & -5 & 7 & -20 & 28 \\ 18 & -24 & 6 & -8 & 16 & -20 \\ -30 & 42 & -10 & 14 & -25 & 35 \end{pmatrix}$.

1.21. $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$.

1.22. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1.23. $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

1.24. $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

1.25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

1.26. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.27. $\begin{pmatrix} 36 & 252 & 468 & 396 \\ 18 & 126 & 234 & 198 \\ 24 & 168 & 312 & 264 \end{pmatrix}$.

1.28. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & -4 & 8 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

1.29. $\begin{pmatrix} 4 & 10 & -2 & 8 & 6 \\ 8 & 2 & 12 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

1.30. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & -6 & 8 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Найти ранг матрицы при всех значениях параметра λ:

2.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **2.2.** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.4.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2.5. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$. **2.6.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & \lambda \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.7. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & \lambda & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **2.8.** $\begin{pmatrix} -1+\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -1+\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.9. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & (1+\lambda) \\ 1 & -2 & \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **2.10.** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 4 \end{pmatrix}$.

2.11. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & \lambda & -9 & 8 \\ 5 & 18 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. **2.12.** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

2.13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & -6 \end{pmatrix}$. **2.14.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

2.15. $\begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **2.16.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$.

2.17. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 4\lambda & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. **2.18.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & \lambda & (\lambda+6) & -1 \end{pmatrix}$.

2.19. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **2.20.** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 3 & 30 & -18 & 3 \end{pmatrix}$.

2.21. $\begin{pmatrix} 3 & -9 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 10 & 12 & -8 & -2 \\ 3 & 5 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$. **2.22.** $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & \lambda \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.23. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & (1+\lambda) \\ 1 & -2 & \lambda & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. **2.24.** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & \lambda & 4 \end{pmatrix}$.

2.25. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 6 & -3 & 3 \\ 1 & \lambda & -6 \end{pmatrix}$. **2.26.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

2.27. $\begin{pmatrix} -3 & 9 & 9 \\ 4\lambda & -7 & -2 \\ -6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$. **2.28.** $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & \lambda & (\lambda+6) & -1 \end{pmatrix}$.

2.29. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & \lambda & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **2.30.** $\begin{pmatrix} -1+\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -1+\lambda & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 3. Найти ранг и базу набора векторов:

3.1. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3.2. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3.3. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$

3.4. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

3.5. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$

3.6. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$

3.7. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$

3.8. $a^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

3.9. $a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

3.10. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$.

3.11. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.12. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3.13. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix}$.

3.14. $a^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.15. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3.16. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.17. $a^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3.18. $a^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.19. $a^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.20. $a^1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3.21. $a^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \\ 12 \\ 22 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3.22. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3.23. $a^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.24. $a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

3.25. $a^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$.

3.26. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.27. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$.

3.28. $a^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

3.29. $a^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

3.30. $a^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Задание 4. Дополнить каким-либо образом набор векторов до базиса соответствующего пространства:

4.1. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4.2. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.3. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

4.4. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4.5. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4.6. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4.7. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. **4.8.** $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

4.9. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4.10. $a^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$. **4.11.** $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

4.12. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

4.13. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4.14. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4.15. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4.16. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4.17. $a^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.18. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

4.19. $a^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4.20. $a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4.21. $a^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4.22. $a^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$.

4.23. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

4.24. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4.25. $a^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$. **4.26.** $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.27. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

4.28. $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4.29. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4.30. $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

5. Задания на доказательство

5.1. Доказать, что, если матрица содержит m строк и имеет ранг r, то любые ее s строк образуют матрицу, ранг которой не меньше $r + s - m$.

5.2. Доказать, что вычеркивание одной строки (столбца) матрицы тогда и только тогда не изменяет ранга, когда вычеркнутая строка (столбец) линейно выражается через остальные строки (столбцы).

5.3. Доказать, что приписывание к матрице одной строки (столбца) либо не изменяет ее ранга, либо увеличивает его на единицу.

5.4. Доказать, что ранг суммы двух матриц не больше суммы их рангов.

5.5. Доказать, что если ранг матрицы A не изменяется от приписки к ней каждого столбца матрицы B с тем же числом строк, то он не меняется от приписки к матрице A всех столбцов матрицы B.

5.6. Доказать, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга $= 1$, но нельзя представить в виде суммы менее чем r таких матриц.

5.7. Доказать, что если ранг матрицы A равен r, то минор d, стоящий на пересечении любых r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов этой матрицы, отличен от нуля.

5.8. Пусть A – квадратная матрица порядка $n > 1$ и $\widehat{A}$ – присоединенная матрица. Выяснить, как изменится ранг $\widehat{r}$ матрицы $\widehat{A}$ с изменением ранга r матрицы A.

5.9. Доказать, что ранг симметричной матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров этой матрицы.

5.10. Как может измениться ранг матрицы, если:

а) поменять местами две строки;

б) добавить к одной из строк линейную комбинацию остальных строк;

в) транспонировать матрицу;

г) выполнить одну из операций а) – в) над столбцами.

5.11. Доказать, что ранг произведения матриц не превосходит ранга каждой матрицы сомножителя.

Глава 3

Системы линейных алгебраических уравнений

§ 1. Общие понятия

Общая система линейных алгебраических уравнений (сокращенно СЛАУ) состоит из m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где m и n – любые натуральные числа. В развернутой форме СЛАУ имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right. \tag{1}$$

Коэффициенты системы a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ и свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_m$ считаются заданными.

СЛАУ можно записать в матричном виде:

$$Ax = b, \tag{2}$$

где A – матрица коэффициентов, x – вектор-столбец неизвестных, b – вектор-столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Определение 1.1. Решением системы (1), (2) называется любой набор чисел $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n$, при подстановке которого в СЛАУ все уравнения обращаются в тождество.

Определение 1.2. Если в системе все свободные члены равны нулю, т. е. вектор $b = 0$, то система называется **однородной**. Если найдется хотя бы один $b_i \neq 0, i = \{1, \dots, m\}$, то система **неоднородная**.

Определение 1.3. СЛАУ называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если не имеет ни одного решения. Совместная система может иметь одно или бесконечное множество решений.

Рассмотрим СЛАУ, состоящую из одного уравнения:

$$x_1 + 2x_2 = 4.$$

Эта система неоднородная (свободный член не равен нулю). Выразим одну переменную через другую:

$$x_1 = 4 - 2x_2.$$

Придавая различные значения переменной x_2, мы будем получать множество значений x_1. Значит, система имеет бесконечное множество решений, т. е. совместна.

Теперь рассмотрим следующую СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

Данная система несовместна, так как $4 \neq 5$.

Рассмотрим однородную СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как она имеет по крайней мере нулевое решение ($x = 0$). Однородная система может иметь и бесконечное множество решений, например

$$x_1 + 2x_2 = 0,$$

откуда $x_1 = -2x_2$.

Система, у которой число уравнений равно числу неизвестных, называется квадратной.

§ 2. Системы уравнений с квадратной матрицей коэффициентов

Пусть дана квадратная система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{3}$$

где матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы обозначим

$$\triangle = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим три метода решения систем с квадратной матрицей коэффициентов:

1) правило Крамера;
2) матричный метод;
3) метод Гаусса.

Правило Крамера

Теорема 2.1. Система уравнений с невырожденной матрицей коэффициентов (т. е. $\triangle \neq 0$) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам:

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle}, \quad x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle}, \quad \dots, x_n = \frac{\triangle_n}{\triangle},$$

где $\triangle_i$ – определитель, в котором i-й столбец матрицы системы заменяется столбцом свободных членов, т. е.:

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Замечание 2.1. Если $\triangle = 0$ и хотя бы один определитель $\triangle_i \neq 0$, то система несовместна.

Замечание 2.2. Если $\triangle = \triangle_1 = \triangle_2 = \dots \triangle_n = 0$, то возможны два случая: либо система несовместна, либо имеет бесконечное множество решений.

Замечание 2.3. Правило Крамера применяется, когда порядок матрицы n небольшой (приходится вычислять $n + 1$

определителей порядка n). Также удобно применять правило Крамера, если требуется найти только несколько неизвестных (например, одну) среди многих.

Пример 2.1. Решить систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{array}\right.$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \triangle_1 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 3 \\ 11 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 3 \\ 1 & 11 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -24, \quad \triangle_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 11 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -12.$$

Так как $\triangle = -6 \neq 0$, то существует единственное решение системы:

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{-6}{-6} = 1, \quad x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{-24}{-6} = 4,$$

$$x_3 = \frac{\triangle_3}{\triangle} = \frac{-12}{-6} = 2.$$

Таким образом, $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 2$.

Матричный метод

Запишем систему (3) в матричном виде:

$$A \cdot x = b.$$

Пусть матрица A невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$. Тогда система имеет единственное решение, которое можно найти по формуле

$$x = A^{-1} \cdot b, \tag{4}$$

где A^{-1} – обратная матрица.

Определение 2.1. Матрица, обозначаемая A^{-1}, для которой выполняются равенства $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица, называется обратной к матрице A.

Таким образом, если обратная матрица существует, то

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = E \cdot x = x = A^{-1} \cdot b.$$

Свойства и способы нахождения обратной матрицы мы рассмотрели в пособии «Линейная алгебра. Часть 1».

Матричный метод может быть применен, если матрица A коэффициентов системы невырожденная, в противном случае матрица A^{-1} не существует.

Пример 2.2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение

Эту систему (см. пример 2.1) мы уже решили по правилу Крамера. Теперь найдем решение матричным методом.

Матрица системы невырожденная, так как $\det A = -6 \neq 0$, значит, обратная матрица существует. Найдем ее по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{+},$$

где A^+ – присоединенная матрица (транспонированная матрица из алгебраических дополнений). Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = 1, \quad A_{13} = -3, \quad A_{21} = 2, \quad A_{22} = -4,$$

$$A_{23} = 0, \quad A_{31} = -5, \quad A_{32} = 1, \quad A_{33} = 3.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

По формуле имеем

$$x = A^{-1} \cdot b = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, получили $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 2$, что совпадает с ответом примера 2.1.

Метод Гаусса

Метод исключения неизвестных (или метод Гаусса) состоит в том, что исходная система преобразуется в эквивалентную систему специального вида, которая легко исследуется и решается. Напомним, что две системы называются эквивалентными, если у них одно и то же множество решений (возможно и пустое множество, в случае несовместности систем).

Рассмотрим применение метода Гаусса на примере.

Пример 2.3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение

Как заметил читатель, эту систему мы решали выше двумя методами (по правилу Крамера, матричным методом). Теперь решим систему методом Гаусса и сверим полученные ответы.

Составим расширенную матрицу:

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Расширенная матрица $\overline{A} = (A|b)$ включает в себя элементы матрицы коэффициентов, записанные слева от вертикальной черты, и столбец свободных членов, записанный справа от черты. Эта матрица является сокращенной записью системы уравнений. Используя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы (по сути, над уравнениями системы), приведем ее к треугольному виду. Поменяем первую и вторую строки расширенной матрицы местами:

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Далее вычтем из второй и третьей строк первую строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & -14 \end{array}\right).$$

Вычтем из третьей строки вторую строку:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right).$$

Получили матрицу треугольного вида. Теперь по ней можно выписать систему, которая является упрощенной по сравнению с исходной и имеет такое же множество решений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 11, \\ \quad -3x_2 + x_3 = -10, \\ \qquad\qquad -2x_3 = -4. \end{cases}$$

Последовательно найдем неизвестные, двигаясь снизу вверх. Из третьего уравнения найдем $x_3 = 2$, подставим найденное решение во второе уравнение и вычислим $x_2 = 4$. Далее найденные решения подставляем в первое уравнение и находим $x_1 = 1$. Это решение совпадает с решениями системы, найденными правилом Крамера и матричным методом.

Через системы линейных уравнений можно решать и матричные уравнения.

Пример 2.4. Решить матричное уравнение $A \cdot X + X \cdot B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Отметим, что в левой части матричного уравнения матрицу X вынести за скобки нельзя, так как она в первом слагаемом умножается справа на матрицу A, во втором – слева на матрицу B, а умножение матриц некоммутативно.

Так как матрицы A, B и C – матрицы порядка 2×2, матрица X имеет тот же порядок. Запишем матрицу X следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное уравнение примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим произведение матриц в левой части уравнения и сложим эти произведения, придем к уравнению:

$$\begin{pmatrix} -2x_1 - x_2 + 2x_3 & -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 & 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Записывая матричное уравнение покомпонентно, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -5, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

К первой строке прибавим третью строку:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Далее ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на 2; из третьей строки вычтем первую строку, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -8 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке третью строку:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -8 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -8 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Вторую строку разделим на (-2); из четвертой строки вычтем третью строку; из третьей строки вычтем полученную вторую строку, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -8 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 10 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавим четвертую строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 10 \end{array}\right).$$

Из четвертой строки вычтем третью строку, умноженную на 6:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -16 \end{array}\right).$$

По полученной упрощенной расширенной матрице выпишем систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ \qquad\qquad\quad x_3 + x_4 = 7, \\ \qquad\qquad\quad -4x_4 = -16. \end{cases}$$

Теперь последовательно снизу вверх находим $x_4 = 4$, $x_3 = 3$, $x_2 = 3$, $x_1 = 2$. Таким образом, искомая матрица X имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти значение параметра α, при котором систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ \alpha x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

нельзя решить по правилу Крамера.
Ответ: $\alpha = 1$.

2. Найти значение параметра α, при котором при решении системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_3 = 1 + \alpha, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

по формулам Крамера выполняется равенство $\triangle = \triangle_2$.
Ответ: $\alpha = -1$.

3. Решить систему линейных уравнений:
1) по правилу Крамера;
2) матричным методом;
3) методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 5x_1 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 = -2, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -16, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -13, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 15, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 7. \end{cases}$

Ответы:

а) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$; б) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$;
в) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$; г) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$;
д) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$; е) $x_1 = -6$, $x_2 = -8$, $x_3 = 5$;
ж) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

§ 3. Условие совместности системы

Напомним, что система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Понятие совместности рассмотрим для систем, состоящих из m уравнений с n неизвестными (с прямоугольными при $m \neq n$ или квадратными при $m = n$ матрицами). Рассмотрим пример.

Пример 3.1. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Теперь выпишем упрощенную систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ -7x_2 + 3x_3 = -11, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1. \end{cases}$$

Последнее уравнение противоречиво, так как получается неверное равенство $0 = -1$. Следовательно, данная система несовместна.

Теорема 3.1 (теорема Кронекера – Капелли). Система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, т. е.

$$rangA = rang\overline{A}.$$

Вернемся к примеру 3.1: $rangA = 2$, а $rang\overline{A} = 3$, т. е. условие теоремы Кронекера – Капелли не выполняется, система несовместна, решений нет.

Пример 3.2. Исследовать на совместность следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду. Вычтем из второй строки первую строку; вычтем из третьей строки первую строку, умноженную на 3:

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Вторая и третья строки расширенной матрицы коллинеарны, поэтому одну из них можно вычеркнуть, не изменив ранга.

По расширенной матрице видно, что $rangA = rang\overline{A} = 2$, значит, система совместна.

Пример 3.3. При каких значениях параметра α система

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \alpha \cdot x_4 = 2 \end{cases}$$

будет совместной?

Решение

Выпишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду. Вычтем из первой строки вторую строку:

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & \alpha & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & \alpha & 2 \end{array}\right).$$

Далее последовательно вычтем из оставшихся трех строк первую строку, умноженную на 2, 1 и 4 соответственно:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & \alpha & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & -5 & -8 & -16 & -9 \\ 0 & 5 & 8 & \alpha+16 & 10 \end{array}\right).$$

По расширенной матрице видно, что вторая и третья строки коллинеарны, следовательно, одну из них можно вычеркнуть из матрицы, не изменив ранга.

Также ясно, что при $\alpha = 0$, $rangA = 2$, $rang\overline{A} = 3$, т. е. система несовместна. Для любого $\alpha \neq 0$ система будет совместной, так как $rangA = rang\overline{A} = 3$.

Пример 3.4. Найти все значения параметра m, при которых вектор $b = (1; m; 3)$ линейно выражается через векторы $a^1 = (2; 3; 7)$, $a^2 = (3; -2; 4)$, $a^3 = (-1; 1; -1)$.

Решение

Если вектор b линейно выражается через векторы a^1, a^2 и a^3, тогда вектор b является линейной комбинацией этих векторов:

$$b = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – некоторые числа. Решим соответствующую систему относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 1, \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = m, \\ 7\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса. Из третьей строки вычтем первую строку, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & m \\ 7 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & m \\ 1 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Далее поменяем третью и первую строки местами:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & m \\ 1 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & m \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь из второй и третьей строк вычтем первую строку, умноженную на 3 и 2 соответственно:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & m \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 13 & -5 & m \\ 0 & 13 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

По упрощенной расширенной матрице видно, что при $m = 1$ система будет совместной, так как $rangA = rang\overline{A} = 2$. Значит, при $m = 1$ вектор b будет линейно выражаться через векторы a^1, a^2 и a^3.

Задания для самостоятельной работы

1. При каких значениях параметра β система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = \beta \end{cases}$$

совместна?

Ответ: при $\beta = 2$.

2. При каких значениях параметров a и b система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 8x_2 + x_3 - 3x_4 = a - 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = b - 1 \end{cases}$$

будет совместной?

Ответ: при $a = 1$ и $b = 4$.

3. Исследовать на совместность:

а) $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$;

б) $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right)$;

в) $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right)$;

г) $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$.

Ответы:

а) система несовместна; б) система совместна;
в) система несовместна; г) система несовместна.

§ 4. Решение совместных систем

Рассмотрим систему $Ax = b$, $x \in R^n$, $b \in R^m$, т. е. матрица A порядка $m \times n$. Предположим, что система совместна, т. е. выполняется $rangA = rang\overline{A} = r$. Если $r = n$ (ранг равен числу неизвестных), тогда система имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера, матричным методом, методом Гаусса. Эти методы рассмотрены выше.

Допустим, что $r < n$. Здесь применяют метод Гаусса по следующей схеме:

1. Так как ранг системы равен r, выбирается базисный минор порядка $r \times r$.

2. Все неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ делятся на **базисные** переменные и **свободные**. Неизвестные, которым соответствуют столбцы, входящие в базисный минор, называются базисными; остальные неизвестные – свободные переменные. Число базисных переменных равно r, число свободных переменных равно $n - r$.

3. Базисные переменные выражаются через свободные (поэтому базисные переменные называют зависимыми, а свободные переменные – независимыми).

Равенства, выражающие базисные переменные через свободные, называются **общим решением системы**.

4. Решение, получающееся при задании конкретных значений свободных переменных, называется **частным решением** системы.

Таким образом, решить систему – записать общее решение; в случае единственного решения – указать это решение.

Замечание 4.1. Если $rangA = rang\overline{A} = n$, где n – число неизвестных, тогда система имеет единственное решение.

Замечание 4.2. Если $rangA = rang\overline{A} < n$, тогда система имеет бесконечное множество решений.

Замечание 4.3. С помощью элементарных преобразований над строками матрицы можно привести базисный минор к единичной матрице. Тогда будет проще выразить базисные переменные через свободные.

Замечание 4.4. Базисных миноров может быть несколько, значит, и вариантов деления переменных на базисные и свободные также несколько. При поиске общего решения можно выбирать любой из возможных вариантов.

Рассмотрим этот алгоритм на примере.

Пример 4.1. Решить систему линейных уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5, \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 &= 13. \end{aligned}\right.$$

Решение

Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Получили, что $rangA = rang\overline{A} = 2$, т. е. система совместна, причем $rang < n$, значит, система имеет бесконечное множество решений. Найдем это множество.

Выберем в качестве базисного минор, который образован первыми двумя строками и столбцами, т. е. M_{12}^{12}. Таким образом, базисными переменными будут x_1 и x_2, свободной – x_3. Выразим базисные переменные через свободную, для этого с помощью элементарных преобразований над строками матрицы приведем базисный минор к единичной матрице. Вычтем из первой строки вторую строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Получили общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3, \\ x_2 = 1 - x_3, \\ x_3 \in R^1. \end{cases}$$

Система имеет бесконечное множество решений. Найдем частное решение, например, для $x_3 = 0$ получаем $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Имеем вектор $x = (2; 1; 0)$ – частное решение системы.

Примечание: если все свободные переменные равны нулю, тогда частное решение будет называться **базисным**.

В примере 4.1 стоит обратить внимание на то, что матрица исходной системы оказалась вырожденной, но система совместная, так как ранг расширенной матрицы и ранг исходной матрицы равны. Как результат – на выходе имеем бесконечное множество решений. В § 3 данной главы мы также рассматривали систему с квадратной вырожденной матрицей (пример 3.1), но та система оказалась несовместной (т. е. пустое множество решений).

Пример 4.2. Решить систему линейных уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1. \end{aligned}\right.$$

Решение

Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Получили, что $rangA = rang\overline{A} = 2$. Отсюда следует, что система совместна. Выбираем в качестве базисного минора M_{12}^{12}. Далее упростим базисный минор: из первой строки вычтем вторую строку:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Теперь выразим базисные переменные x_1, x_2 через свободные переменные x_3, x_4 и получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 6x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -2 + 4x_3 + x_4, \\ x_3, x_4 \in R^1. \end{cases}$$

Система имеет бесконечное множество решений. Найдем частное решение. Например, для $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ получаем $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Следовательно, вектор $x = (1; -1; 0; 1)$ – частное решение системы.

Задания для самостоятельной работы

Найти общее решение и одно частное решение системы:

1) $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$;

2) $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$;

3) $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$;

4) $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & -1 \end{array}\right)$;

5) $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right)$;

6) $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$.

Ответы:

1) бесконечное множество решений. Формулы общего решения определяются неоднозначно. Например, общее решение: $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - x_4$; x_3, $x_4 \in R^1$; частное решение: $x = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0)$;

2) единственное решение: $x = (-1; 2; 1)$;

3) бесконечное множество решений. Формулы общего решения определяются неоднозначно. Например, общее решение: $x_2 = -2x_1 + \frac{3}{2}x_3$, $x_4 = -1 - \frac{7}{2}x_3$, $x_5 = 2 + x_3$; x_1, $x_3 \in R^1$; частное решение: $x = (0; 0; 0; -1; 2)$;

4) бесконечное множество решений. Формулы общего решения определяются неоднозначно. Например, общее решение: $x_2 = 2+2x_1+13x_4+x_5$, $x_3 = 1+5x_4-x_5$; x_1, x_4, $x_5 \in R^1$; частное решение: $x = (0; 2; 1; 0; 0)$;

5) бесконечное множество решений: $x_1 = 1+x_2$, $x_3 = \frac{1}{4}-x_2$; $x_2 \in R^1$; частное решение: $x = (1; 0; \frac{1}{4})$;

6) бесконечное множество решений. Формулы общего решения определяются неоднозначно. Например, общее решение: $x_1 = 1 + x_3 - x_4$, $x_2 = 1$; x_3, $x_4 \in R^1$; частное решение: $x = (1; 1; 0; 0)$.

§ 5. Общее решение однородной системы

Рассмотрим однородную систему $Ax = 0$, где A – $m \times n$, $x \in R^n$. Эта система всегда совместна, так как имеет по крайней мере нулевое (или тривиальное) решение.

Замечание 5.1. Однородная система при $m = n$ имеет единственное решение $x = 0$, если матрица системы невырожденная.

Замечание 5.2. Однородная система при $m = n$ имеет бесконечное множество решений (имеет нетривиальные решения), если матрица системы вырожденная.

Замечание 5.3. Однородная система при $m < n$ имеет бесконечное множество решений (имеет нетривиальные решения).

Пример 5.1. Решить следующую систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду. Поменяем местами первую и третью строки:

$$\overline{A} = (A|0) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Далее из второй строки вычтем первую строку, умноженную на 4; из третьей строки вычтем первую строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Теперь вычтем из второй строки третью строку, умноженную на 9:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Ясно, что матрица коэффициентов системы невырожденная, поэтому однородная система имеет единственное решение: $x = (0; 0; 0)$.

Пример 5.2. Найти значение параметра α, при котором система уравнений имеет нетривиальные решения. Решить систему уравнений при найденном параметре α:

$$\begin{cases} 3x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 11x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение

Матрица системы квадратная. Если она будет вырожденной (т. е. $|A| = 0$), тогда однородная система будет иметь нетривиальные решения. Найдем параметр α из уравнения:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Получим $\alpha = -2$. При данном параметре система имеет бесконечное множество решений (нетривиальные решения). Подставим найденный параметр в систему и решим ее методом Гаусса. Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду. Поменяем местами первую и вторую строки:

$$\overline{A} = (A|0) = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 0 \end{array}\right).$$

Далее из второй строки вычтем первую строку, умноженную на 3; из третьей строки вычтем первую строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -15 & 0 \end{array}\right).$$

Вторая и третья строки коллинеарны, поэтому одну из них вычеркнем. $rangA = 2$, выберем в качестве базисного минора M_{12}^{12} (значит, базисными переменными будут x_1 и x_2, свободная переменная x_3). Далее упростим базисный минор. К первой строке прибавим вторую строку:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Теперь выразим базисные переменные через свободную и получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3, \\ x_2 = 5x_3, \\ x_3 \in R^1. \end{cases}$$

Пример 5.3. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение

Система имеет бесконечное множество решений, так как число уравнений меньше числа неизвестных. Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду. Из второй и третьей строк вычтем первую строку, умноженную на 2:

$$\overline{A} = (A|0) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Вторая и третья строки коллинеарны, поэтому одну из них вычеркнем, например третью строку. $rang A = 2$, выберем в качестве базисного минора M_{14}^{12} (значит, базисными переменными будут x_1 и x_4, свободными переменными x_2, x_3). Далее упростим базисный минор. Из первой строки вычтем вторую строку:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Выразим базисные переменные через свободные и получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = -5x_3, \\ x_4 = 3x_3 - x_2, \\ x_2, x_3 \in R^1. \end{cases} \qquad (5)$$

Заметим, что общее решение – это множество всех решений, которые удовлетворяют исходной системе, т. е. это совокупность всех ее частных решений. Рассматриваемая система имеет бесконечное множество частных решений.

Запись общего решения в виде (5) не позволяет структурировать полученную совокупность решений. Ниже будет приведена другая форма записи общего решения однородной системы, но, чтобы понять ее, выясним свойства частных решений системы.

Вернемся к примеру 5.3. Придавая свободным переменным x_2 и x_3 произвольные значения, получим несколько частных решений. Например:

1) при $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ получим решение $x^1 = (-10; 1; 2; 5)$;

2) при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ получим $x^2 = (0; 0; 0; 0)$;

3) при $x_2 = -2$, $x_3 = 0$ получим $x^3 = (0; -2; 0; 2)$;

4) при $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ получим $x^4 = (-5; 0; 1; 3)$.

Любая линейная комбинация векторов – это вектор. Составим из полученных решений x^1, x^2, x^3, x^4 различные линейные комбинации. Например:

$y^1 = x^1 + x^2 = (-10; 1; 2; 5) + (0; 0; 0; 0) = (-10; 1; 2; 5)$;

$y^2 = x^1 - 2x^2 + 4x^3 = (-10; -7; 2; 13)$;

$y^3 = 2x^1 - 3x^3 = (-10; 8; 4; 4)$;

$y^4 = x^1 + 2x^2 - x^3 - 4x^4 = (10; 3; -2; -9)$.

Подставив полученные y^1, y^2, y^3, y^4 в исходную систему уравнений, имеем:

$$Ay^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Ay^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Ay^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Ay^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что y^1, y^2, y^3, y^4 также являются решениями исходной системы уравнений.

Далее сформулируем и докажем в общем виде свойства решений однородной системы.

Замечание 5.4. Любая линейная комбинация решений однородной системы также является решением.

Это легко показать. Пусть x^1 и x^2 – решения одной и той же однородной системы, тогда:

$$Ax^1 = 0, \quad Ax^2 = 0.$$

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию этих решений:

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2, \ \ \lambda_1, \lambda_2 \in R^1.$$

Теперь проверим:

$$A(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) = A\lambda_1 x^1 + A\lambda_2 x^2 = \lambda_1 A x^1 + \lambda_2 A x^2 =$$

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_1 \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, линейная комбинация решений также является решением этой же однородной системы.

Замечание 5.5. Если $rangA = r < n$, то однородная система имеет $n-r$ линейно независимых решений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$.

Действительно, однородная система имеет $n - r$ свободных переменных. Для определенности пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – базисные переменные, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – свободные переменные. Выразим базисные переменные через свободные. Тогда общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -\widetilde{a}_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - \widetilde{a}_{1n}x_n, \\ \ldots \\ x_r = -\widetilde{a}_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - \widetilde{a}_{rn}x_n. \end{cases}$$

Придадим свободным переменным **стандартный набор значений** (одна из свободных переменных равна единице, а остальные равны нулю):

1) $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \ldots x_n = 0$;
частное решение:

$$\varphi_1 = (-\widetilde{a}_{1r+1}; \ldots; -\widetilde{a}_{rr+1}; 1; 0; \ldots; 0);$$

2) $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, \ldots x_n = 0$;
частное решение:

$$\varphi_2 = (-\widetilde{a}_{1r+2}; \ldots; -\widetilde{a}_{rr+2}; 0; 1; \ldots; 0);$$

$\ldots$

$n-r$) $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \ldots x_n = 1$;
частное решение:

$$\varphi_{n-r} = (-\widetilde{a}_{1n}; \ldots; -\widetilde{a}_{rn}; 0; 0; \ldots; 1).$$

Получили $n - r$ линейно независимых решений (частных решений) однородной системы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$, так как ранг матрицы, составленной из этих векторов, равен $n - r$ (существует единичная подматрица порядка $n - r$).

Определение 5.1. Любой набор из $n-r$ линейно независимых решений однородной системы называется **фундаментальной системой решений** или **фундаментальной совокупностью решений** (сокращенно ФСР).

Замечание 5.6. Матрица $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r})$, столбцы которой образуют ФСР, называется **фундаментальной**.

Замечание 5.7. Стандартный набор значений для свободных переменных гарантирует линейную независимость всех $n-r$ решений в ФСР. Вместо стандартного набора можно использовать и другие наборы для свободных переменных, в этом случае необходимо проверять решения ФСР на линейную независимость.

Теорема 5.1. Общее решение однородной системы описывается формулой

$$x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_{n-r}\varphi_{n-r}, \tag{6}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ – произвольные числа, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ – ФСР однородной системы.

Другими словами, при любых значениях $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ (в том числе и нулевых) формула (6) дает решение однородной системы, и обратно, для любого решения однородной системы x существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ такие, что решение x представимо в виде (6).

Алгоритм построения ФСР и общего решения однородной системы:

1. С помощью элементарных преобразований над строками привести матрицу к ступенчатому виду. Найти ранг матрицы $rangA = r$.

2. Исследовать систему на количество решений. Если $rangA = r = n$, тогда система имеет единственное решение $x = 0$ и ФСР не существует. Если $rangA = r < n$, тогда

система имеет бесконечное множество решений и поэтому ФСР существует. Число решений в ФСР равно $n-r$.

3. Разделить все переменные на базисные (их будет r) и свободные переменные (их будет $n-r$).

4. Придать свободным переменным стандартный набор значений.

5. Записать общее решение как линейную комбинацию решений из ФСР.

Таким образом, решить однородную систему – записать общее решение как линейную комбинацию ФСР. В случае единственного решения – выписать нулевое решение.

Пример 5.4. Найти ФСР и общее решение системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение

Система имеет бесконечное множество решений, так как число уравнений меньше числа неизвестных. Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду. Из второй строки вычтем первую строку, умноженную на 2; из третьей строки вычтем первую строку:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Вторая и третья строки коллинеарны, поэтому одну из них вычеркнем, например третью строку. $rangA = 2$, выберем в качестве базисного минора M_{23}^{12} (таким образом, базисными переменными будут x_2 и x_3, свободными переменными x_1, x_4, x_5). Далее упростим базисный минор: к первой строке прибавим вторую строку, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Теперь выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 + 13x_4 + x_5, \\ x_3 = 5x_4 - x_5. \end{cases}$$

Так как свободных переменных три, значит, ФСР будет состоять из трех линейно независимых решений. Составим ФСР, придав свободным переменным стандартный набор:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	2	0	0	0	φ_1
0	13	5	1	0	φ_2
0	1	–1	0	1	φ_3

Общее решение однородной системы:

$$x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные числа из R^1.

Пример 5.5. Найти ФСР и общее решение системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду. Поменяем первую и вторую строки расширенной матрицы местами:

$$\overline{A} = (A|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Далее вычтем из второй и третьей строк первую строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Вычтем из третьей строки вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг системы равен трем, значит, все три переменные будут базисными, свободных переменных нет, и ФСР не существует. Система имеет единственное решение $x = (0; 0; 0)$.

Пример 5.6. Найти ФСР и общее решение системы:

$$\left\{ x_1 + 0 \cdot x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0. \right.$$

Решение

Система состоит из одного уравнения, ранг системы равен 1 (базисный минор – любой минор первого порядка, не равный нулю). Следовательно, всего одна базисная переменная. Здесь базисной переменной может быть любая из x_1, x_3, x_4, кроме переменной x_2 (так как при x_2 минор первого порядка равен нулю). Пусть базисной переменной будет x_1, тогда

$$x_1 = 3x_3 - 5x_4.$$

Придадим свободным переменным x_2, x_3, x_4 стандартный набор значений и выпишем ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	1	0	0	φ_1
3	0	1	0	φ_2
–5	0	0	1	φ_3

Общее решение однородной системы:

$$x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные числа из R^1.

Пример 5.7. Найти фундаментальную матрицу системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 24x_2 - 7x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду. Вторую строку умножим на (-1) и поменяем местами с первой строкой:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 5 & 24 & -7 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 7 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -7 & -3 & 0 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Далее вычтем из второй строки первую строку, умноженную на 5:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -7 & -3 & 0 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 14 & 28 & 14 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг системы равен двум. Выберем в качестве базисных переменных x_1, x_2. Упростим базисный минор M_{12}^{12}, разделив вторую строку на 14:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 14 & 28 & 14 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Из первой строки вычтем вторую строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -11 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 11x_3 + 5x_4, \\ x_2 = -2x_3 - x_4. \end{cases}$$

Придадим свободным переменным стандартный набор значений и выпишем ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4	
11	–2	1	0	φ_1
5	–1	0	1	φ_2

Фундаментальная матрица:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти фундаментальную матрицу системы:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 0. \end{cases}$

Ответы:

а) фундаментальной матрицы не существует;

б) фундаментальная матрица определяется неоднозначно, например, $\Phi = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -22 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.

2. Найти ФСР и общее решение системы:

а) $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0$;

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 - 18x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 9x_4 - 27x_5 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 16x_4 - 48x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

Ответы:

а) ФСР определяется неоднозначно. Например: $\varphi_1 = (-1; 1; 0; 0; 0)$, $\varphi_2 = (-2; 0; 1; 0; 0)$, $\varphi_3 = (0; 0; 0; 1; 0)$, $\varphi_4 = (-3; 0; 0; 0; 1)$;

б) ФСР определяется неоднозначно. Например: $\varphi_1 = (-1; 1; -1; 1; 0)$, $\varphi_2 = (3; -3; 3; 0; 1)$;

в) ФСР определяется неоднозначно. Например: $\varphi_1 = (1; -2; 1)$;

г) ФСР определяется неоднозначно. Например: $\varphi_1 = (-5; 3; 1; 0)$, $\varphi_2 = (0; -1; 0; 1)$.

3. При каких значениях параметра α система имеет нетривиальные решения:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0. \end{cases}$

Ответы:

а) $\alpha = \frac{16}{3}$; б) $\alpha = 2$.

4. Найти значения параметров a и b, при которых однородная система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_4 = 0, \\ (3-a)x_3 = 0, \\ (b-2)x_4 = 0 \end{cases}$$

а) имеет два линейно независимых решения;
б) имеет единственное решение;
в) имеет единственную свободную переменную.

§ 6. Общее решение неоднородной системы

Рассмотрим неоднородную систему

$$Ax = b$$

и соответствующую ей однородную систему

$$Ax = 0.$$

Замечание 6.1. Разность двух решений x^1 и x^2 неоднородной системы является решением соответствующей однородной системы.

Это легко показать. Пусть x^1 и x^2 – частные решения неоднородной системы, значит, $Ax^1 = b$ и $Ax^2 = b$. Рассмотрим $(x^1 - x^2)$:

$$A(x^1 - x^2) = Ax^1 - Ax^2 = b - b = 0.$$

Замечание 6.2. Пусть x^H – решение неоднородной системы. Тогда любое решение x неоднородной системы можно представить в виде:

$$x = x^H + x^O,$$

где x^O – решение однородной системы. Это следует из предыдущего замечания: разность $(x - x^H)$ является решением однородной системы.

Теорема 6.1. Пусть x^H – решение неоднородной системы, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-r}$ – ФСР соответствующей однородной системы. Тогда вектор x:

$$x = x^H + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_{n-r}\varphi_{n-r}$$

при любых значениях $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ является решением неоднородной системы.

Таким образом, общее решение неоднородной системы – это сумма частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы.

Алгоритм решения неоднородной системы:

1. По методу Гаусса найти ранги расширенной и исходной матрицы системы. Если система совместна, т. е. выполняется условие теоремы Кронекера – Капелли $rang\overline{A} = rangA = r$, определить базисный минор, выразить базисные переменные через свободные.

2. Найти частное решение x^H неоднородной системы.

3. Для соответствующей однородной системы найти ФСР и общее решение $x^O = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_{n-r}\varphi_{n-r}$.

4. Записать общее решение неоднородной системы как сумму частного решения x^H и общего решения однородной системы x^O.

Пример 6.1. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду. Из второй строки вычтем первую строку; из третьей строки вычтем первую строку, умноженную на 3:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Вторая и третья строки расширенной матрицы коллинеарны, поэтому одну из них вычеркнем, например третью строку. Система совместна, так как $rang A = rang\overline{A} = 2$. Выберем в качестве базисного минора M_{12}^{12} (отсюда базисными переменными будут x_1 и x_2, свободными переменными x_3, x_4). Упростим базисный минор: вторую строку разделим на 2:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right).$$

К первой строке прибавим вторую строку:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right).$$

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 + 1/2x_3, \\ x_2 = 1/2 + 3/2x_3 - x_4, \end{cases}$$

и найдем частное решение. Например, положим $x_3 = x_4 = 0$. Тогда $x^H = (1/2; 1/2; 0; 0)$. Теперь рассмотрим соответствующую однородную систему. Возьмем упрощенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 1/2x_3, \\ x_2 = 3/2x_3 - x_4. \end{cases}$$

Найдем ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4	
1/2	3/2	1	0	φ_1
0	−1	0	1	φ_2

Общее решение:

$$x^O = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные. Теперь запишем общее решение неоднородной системы:

$$x = x^H + x^O = (1/2; 1/2; 0; 0) + c_1(1/2; 3/2; 1; 0) + c_2(0; -1; 0; 1).$$

Пример 6.2. При каких значениях параметра α система

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 5 & 7 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 6 & 8 & 10 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 8 & 10 & 3 \\ 2 & 8 & 6 & 9 & 12 & \alpha \end{array}\right)$$

совместна? В случае совместности найти общее решение.

Решение

Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду. Вычтем из второй строки первую строку, умноженную на 3; вычтем из третьей, четвертой и пятой строк первую строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 5 & 7 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 6 & 8 & 10 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 8 & 10 & 3 \\ 2 & 8 & 6 & 9 & 12 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 10 & \alpha-4 \end{array}\right).$$

Вычтем из третьей и пятой строк вторую строку, умноженную на 2; вычтем из четвертой строки вторую строку, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 10 & \alpha-4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & \alpha-4 \end{array}\right).$$

Третья и четвертая строки расширенной матрицы коллинеарны, вычеркнем третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & \alpha-4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & \alpha-4 \end{array}\right).$$

Из четвертой строки вычтем третью строку, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & \alpha-4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{array}\right).$$

Система будет совместной при $\alpha = 1$ ($rang A = rang \overline{A} = 3$). Найдем общее решение как сумму частного решения и общего решения однородной системы.

Пусть x_1, x_2, x_4 – базисные переменные, а x_3, x_5 – свободные. Упростим базисный минор M_{124}^{123}. Вычтем из первой строки вторую строку, умноженную на 3; вычтем из второй строки третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Теперь к первой строке прибавим третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 + 3x_5, \\ x_2 = 1 - 2x_3, \\ x_4 = -1 - 2x_5. \end{cases}$$

Частное решение: $x^H = (1; 1; 0; -1; 0)$. Найдем ФСР для соответствующей однородной системы. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 + 3x_5, \\ x_2 = -2x_3, \\ x_4 = -2x_5. \end{cases}$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
5	–2	1	0	0	φ_1
3	0	0	–2	1	φ_2

Общее решение:

$$x^O = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные. Теперь запишем общее решение неоднородной системы:

$$x = x^H + x^O = (1;1;0;-1;0) + c_1(5;-2;1;0;0) + c_2(3;0;0;-2;1).$$

Задания для самостоятельной работы

Найти общее решение системы:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 6, \\ 7x_1 + 7x_2 + 9x_3 + x_4 = 14. \end{cases}$

Ответы:

1. Общее решение определяется неоднозначно. Например, $x = (1;1;0;0) + c_1(1;0;1;0) + c_2(-1;0;0;1)$, где c_1, $c_2 \in R^1$.

2. Система несовместна.

3. Общее решение определяется неоднозначно. Например, $x = (0; 2; 1; 0; 0) + c_1(1; 2; 0; 0; 0) + c_2(0; 13; 5; 1; 0) + c_3(0; 1; -1; 0; 1)$, где c_1, c_2, $c_3 \in R^1$.

4. Общее решение определяется неоднозначно. Например, $x = (1; 1; 0; 0) + c_1(4; -13; 7; 0)$, где $c_1 \in R^1$.

Индивидуальные задания

Задание 1. Решить систему линейных уравнений:
а) по правилу Крамера;
б) матричным методом;
в) по методу Гаусса:

1.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$ **1.2.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$ **1.4.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_2 + 3x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$ **1.6.** $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$ **1.8.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$ **1.10.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_3 = 12, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ -x_1 + x_2 = -4. \end{cases}$ **1.12.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$ **1.14.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$ **1.16.** $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = -5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 7, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 15. \end{cases}$ **1.18.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 14, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 14, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -6. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 16, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = -11. \end{cases}$ **1.20.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$ **1.22.** $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 16, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ **1.24.** $\begin{cases} 6x_2 + 5x_3 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$ **1.26.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$ **1.28.** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 16, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 13, \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -13. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

Задание 2 (решение системы с вырожденной матрицей). Найти общее решение системы или доказать, что она несовместна:

2.1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = -7. \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 22. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$ **2.4.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$ **2.6.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$ **2.8.** $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -3. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$ **2.10.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -18. \end{cases}$ **2.12.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = 1. \end{cases}$ **2.14.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$ **2.16.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 12, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 3. \end{cases}$ **2.18.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$ **2.20.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$ **2.22.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -9, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -16, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -7. \end{cases}$ **2.24.** $\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 11. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$ **2.26.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 5. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$ **2.28.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 7. \end{cases}$ **2.30.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

Задание 3. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений:

3.1. $\begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0, \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = 0, \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0, \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + \qquad 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 0, \\ 8x_1 - 9x_2 + 13x_3 + 15x_4 + 2x_5 = 0, \\ 10x_1 - 12x_2 + 17x_3 + 12x_4 - 11x_5 = 0, \\ -6x_1 + 7x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 3x_5 = 0, \\ -14x_1 + 17x_2 - 24x_3 - 15x_4 + 19x_5 = 0. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ 6x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 0, \\ 9x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 - 18x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 9x_4 - 27x_5 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 16x_4 - 48x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 22x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 \quad - 8x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 12x_4 - 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 7x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 27x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} 6x_1 \quad + 4x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 \quad - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \quad = 0. \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 + 9x_2 + x_3 + 14x_4 - 3x_5 - x_6 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 - 2x_6 = 0. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ 8x_1 - 12x_2 + 28x_3 - 4x_4 - 16x_5 = 0. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = 0, \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 + 9x_4 = 0, \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0. \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

Задание 4. Найти значение параметра α, при котором система уравнений имеет нетривиальные решения. Решить систему уравнений при найденном значении α:

4.1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + \alpha x_3 = 0. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + \alpha x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \alpha x_2 - 9x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 -_3 = 0. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ \alpha x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ \alpha x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 = 0, \\ \alpha x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + \alpha x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + \alpha x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 - 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + \alpha x_3 = 0. \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ **4.24.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 0, \\ \alpha x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ **4.26.** $\begin{cases} 3x_1 + \alpha x_2 - 3x_3 = 0, \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ **4.28.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ \alpha x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0, \\ \alpha x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ **4.30.** $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

Заключение

Настоящее учебное пособие написано на основе опыта чтения лекций и ведения практических занятий по курсам «Линейная алгебра», «Алгебра» в Институте математики и информационных технологий ИГУ для студентов физико-математических, технических и информационных специальностей.

Пособие не является сборником задач или учебником по указанным курсам в обычном понимании. Оно преследует цель помочь активному усвоению студентами изучаемой дисциплины как в рамках дополнительного учебного ресурса к аудиторным занятиям, так и для самостоятельного изучения основных понятий и методов алгебры. Подробно с доказательствами изложенных в пособии утверждений можно ознакомиться в [1; 2; 4; 7–9].

При подборе упражнений были использованы как задачи, появившиеся в процессе работы авторов при разработке указанных курсов, так и различные источники, в том числе широко известные задачники [3; 5; 6].

Авторы надеются, что пособие будет полезно и студентам других специальностей, учебная программа которых предполагает изучение элементов линейной алгебры, а также преподавателям в работе со студентами, изучающими данный материал.

Комментарии будут восприняты с благодарностью, и, если таковые будут, просьба отправлять их по электронной почте: vasilisa@math.isu.ru; varvaraz@bk.ru.

Рекомендуемая литература

1. *Кремер Н. Ш.* Линейная алгебра : учеб. и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, И. М. Тришин ; под ред. Н.Ш.Кремера. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2021. – 422 с. – (Высшее образование) // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru /bcode/468737. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).

2. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры : учеб. для вузов / А. Г. Курош. – 22-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 432 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/152647. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).

3. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие для вузов / И. В. Проскуряков. – 15-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 476 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook. com/book/152434. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).

4. *Татарников О. В.* Линейная алгебра : учеб. и практикум для прикладного бакалавриата / О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев ; под общ. ред. О. В. Татарникова. – Москва : Юрайт, 2021. – 334 с. – (Бакалавр. Прикладной курс) // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/482664. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).

5. *Фаддеев Д. К.* Задачи по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 288 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL:

https://e.lanbook.com/book/167703. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).

Дополнительная литература

6. *Бутузов В. Ф.* Линейная алгебра в вопросах и задачах / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, А. А. Шишкин. – Москва : Физматлит, 2002. – 248 с.

7. *Дыхта В. А.* Основы математики для экономистов : линейная алгебра и экономические модели / В. А. Дыхта. – Иркутск : Изд-во БГУЭиП, 2003. – 232 с.

8. *Ильин В. А.* Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Москва : Физматлит, 2005. – 280 с.

9. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее приложения / Г. Стренг. – Москва : Мир, 1980. – 459 с.

Учебное издание

Поплевко Василиса Павловна
Захарченко Варвара Сергеевна

Линейная алгебра
Часть 2

ISBN 978-5-9624-2250-3

Редактор *А. Н. Шестакова*
Дизайн обложки: *П. О. Ершов*

Темплан 2024. Поз. 9
Подписано в печать 14.02.2024. Формат 60×90 1/16
Усл. печ. л. 7,4. Тираж 100 экз. Заказ 15

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124
тел.: +7(3952) 53-18-53
e-mail: izdat@lawinstitut.ru