

ФЕДЕРАЛЬНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ПРОГРАММА
«ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОДДЕРЖКА ИНТЕГРАЦИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ НА 1997-2000 ГОДЫ»

В.А. Срочко

ИТЕРАЦИОННЫЕ
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2000

УДК 517.97
ББК 22.193
С75

*Издание осуществлено при финансовой поддержке
Федеральной целевой программы «Государственная интеграция
высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 годы»*

Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 160 с.
С75 ISBN 5–92210086–6

С позиций численного решения рассматриваются задачи оптимального программного управления в обыкновенных динамических системах. Итерационный анализ задач проводится на основе нестандартных аппроксимаций целевого функционала с использованием конструктивных процедур варьирования управлений. Построены и обоснованы экономичные процедуры и методы нелокального улучшения (без параметрического поиска), специализированные для линейных и квадратичных задач оптимального управления. В общих нелинейных задачах разработана серия методов игольчатого и слабого варьирования управлений с улучшенными характеристиками эффективности в сравнении со стандартными итерационными процессами принципа максимума и его следствий.

Ориентирована на дальнейшее развитие теории вычислительных методов оптимального управления с целью создания нового поколения итерационных процедур с высокими показателями качества.

Адресуется научным сотрудникам и преподавателям вузов, которые в своей научно-педагогической работе имеют дело с методами решения задач оптимального управления. Может быть использована как учебное пособие для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Библ. — 51 назв.

ISBN 5–92210086–6

© Интеграция, 2000

Научная монография

СРОЧКО Владимир Андреевич

**ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Редактор А.Ф. Курбатов

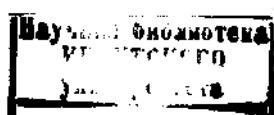
Компьютерная верстка О.А. Пелипенко

ЛР № 071930 от 06.07.99.

Подписано в печать 26.10.2000. Формат 60х90/16. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,0. Уч.-изд. л. 13,0. Тираж 1000 экз. Заказ № 544.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов в Московской типографии № 6 Министерства РФ
по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
109088 Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24



А 567948

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Линейная и квадратичная задачи оптимального управления	10
1.1. Линейная задача оптимального управления	10
1.1.1. Формулы приращения функционала	11
1.1.2. Процедуры улучшения	14
1.1.3. Билинейная задача	15
1.1.4. Примеры	19
1.1.5. Метод приращений	22
1.2. Квадратичная задача оптимального управления	23
1.2.1. Формулы приращения функционала	25
1.2.2. Процедуры улучшения	28
1.2.3. Примеры	31
1.2.4. Метод приращений	34
1.3. Квадратичная задача. Фазовая регуляризация	36
1.3.1. Первая процедура улучшения и условия оптимальности	37
1.3.2. Связь с условием оптимальности особых управлений	44
1.3.3. Вторая процедура улучшения и условия оптимальности	46
1.3.4. Первый метод последовательных приближений	48
1.3.5. Второй метод последовательных приближений	53
1.4. Линейно-квадратичная задача. Слабая регуляризация	55
1.4.1. Необходимые конструкции	56
1.4.2. Процедуры улучшения	57
1.4.3. Метод проекций	61
Глава 2. Основная задача оптимального управления	66
2.1. Метод игольчатой линеаризации	68
2.1.1. Процедура игольчатого варьирования	69
2.1.2. Метод улучшения	72
2.1.3. Обоснование метода	74
2.1.4. Вопросы реализации метода	77
2.2. Методы фазовой линеаризации	78
2.2.1. Фазовые вариации функционала	79
2.2.2. Процедуры улучшения	82
2.2.3. Методы улучшения	87
2.3. Метод квадратично-фазовой аппроксимации	89
2.3.1. Квадратичная фазовая аппроксимация функционала	90
2.3.2. Метод улучшения	92
2.4. Методы слабого варьирования	95
2.4.1. Процедура слабого варьирования	96
2.4.2. Стандартный метод слабого варьирования	98
2.4.3. Модификации метода	99
2.4.4. Методы проектирования	103

Глава 3. Основная задача с функциональными ограничениями	105
3.1. Задача с ограничениями типа неравенства	106
3.1.1. Постановка задачи. Условия оптимальности	106
3.1.2. Процедуры улучшения допустимых управлений	109
3.1.3. Методы линеаризации в классе допустимых управлений	116
3.2. Задача с ограничениями типа равенства	121
3.2.1. Постановка задачи. Условия оптимальности	121
3.2.2. Процедура игольчатого улучшения доступных управлений	123
3.2.3. Процедура слабого улучшения доступных управлений	129
3.2.4. Линейная система. Процедура игольчатого улучшения	132
3.3. Решение вспомогательных задач	138
3.3.1. Минимаксная задача	138
3.3.2. Интегральная задача	142
3.3.3. Линейная задача быстрогодействия	151
3.4. Минимаксная задача чебышевского типа	154
 Литература	 159

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблемы управления и оптимизации являются естественными и необходимыми элементами исследований во многих отраслях науки, техники и экономики. В настоящее время теория оптимального управления может служить хорошим примером гармоничного сочетания фундаментальных математических разработок с актуальными прикладными проблемами. Потребности теории и приложений стимулируют развитие этой научной дисциплины по многим направлениям.

Необходимые условия оптимальности традиционно составляют приоритетное направление исследований в теории управления. По-прежнему, ведущим результатом в этой области является принцип максимума Л.С. Понтрягина [34], который на протяжении многих лет служит активным стимулом для исследований по оптимальному управлению. Теория принципа максимума для неклассических (нерегулярных, вырожденных) задач оптимального управления оформилась как самостоятельное научное направление с широким спектром фундаментальных результатов [4, 5, 22, 23, 32]. Альтернативно примыкающее направление исследований связано с достаточными условиями оптимальности, которые интерпретируются в рамках принципа расширения [21, 29, 49].

Проблема вычислительных (итерационных) методов оптимального управления исторически тесно связана с условиями оптимальности и традиционно использует типовые конструкции и аппроксимации, полученные в рамках качественной теории. В этой области естественным образом выделяются основные направления разработок:

- 1) *итерационные методы принципа максимума* (формулыращения функционала, вспомогательная задача на максимум функции Понтрягина, разнообразные процедуры игольчатого варьирования управлений) [3, 9–13, 16, 27, 28, 31, 32, 35, 47, 48];
- 2) *градиентные методы оптимального управления* (классические вариации функционала, вспомогательные задачи на

минимум вариаций, слабое варьирование управлений) [8, 12, 14, 33, 45, 48];

- 3) *методы улучшения на основе принципа расширения* (линейно-квадратичная аппроксимация разрешающей функции, работа с гладкой функцией Гамильтона и максимизирующими управлениями в форме обратной связи, регуляризация целевого функционала как способ варьирования управлений) [7, 21, 29, 30, 49].

Отметим альтернативные подходы к разработке вычислительных методов оптимального управления

- *специализированные методы решения линейных, квадратичных и квазилинейных задач* (опорное управление, опорный принцип максимума, процедуры замены управления и опоры) [18–20];
- *методы глобальной оптимизации в задачах на максимум выпуклого функционала* (необходимые и достаточные условия оптимальности, разрешающие наборы, улучшение стационарных управлений) [50, 51];
- *дискретизация задач оптимального управления с последующим применением методов математического программирования* [24, 25, 33].

Вопросы алгоритмической и программной реализации методов оптимального управления вместе с численным решением конкретных задач прикладного содержания обстоятельно рассмотрены в [44, 45].

В данной монографии с позиций итерационного решения выделяются и изучаются следующие классы задач оптимального управления

- линейные и квадратичные по фазовым переменным задачи (глава 1),
- нелинейные задачи без ограничений на фазовые переменные (глава 2),
- нелинейные задачи с функциональными ограничениями (глава 3).

Общие характеристики развиваемого подхода состоят в следующем

- используются нестандартные аппроксимации целевого функционала (формулы приращения), которые определены на смешанной (для разных управлений) совокупности

- фазовой и сопряженной траекторий и в информационном плане являются более емкими конструкциями, чем типовые для качественной теории вариации функционала;
- возможность работы с новыми аппроксимациями обеспечивается конструктивной формализацией процедуры игольчатого варьирования, существенным элементом которой является специальная функция характеристического типа, выделяющая участки варьирования;
 - вспомогательные конструкции методов (максимизирующее управление, функция варьирования) получают в позиционной форме как функции фазовых или сопряженных переменных с последующей подстановкой в соответствующие системы;
 - реализация процедур и методов улучшения связана с интегрированием разрывных по фазовым или сопряженным переменным систем, что расширяет потенциал улучшения за пределы принципа максимума вследствие возможности неединственного решения.

Следует подчеркнуть, что разрывные системы уже давно являются стандартным объектом в процессе аналитического решения задач оптимального управления с помощью принципа максимума. В монографии такие системы впервые используются при построении вычислительных методов как необходимый элемент процедур улучшения.

В *первой главе* проводится конструктивный анализ линейных и квадратичных задач оптимального управления на основе нелокальных (без остаточных членов) представлений для приращения функционала. В результате построены двойственные пары процедур улучшения и соответствующие итерационные методы, которые работают в классе максимизирующих управлений и обладают свойством нелокального улучшения без варьирования. Это значит, что реализация методов не требует параметрического поиска на каждой итерации, что является существенным фактором в плане вычислительных затрат.

Для повышения качества методов улучшения применяется итеративная регуляризация целевого функционала. В результате фазовой регуляризации получается двойственная пара нелокальных условий оптимальности, которые дополняют и усиливают принцип максимума в рассматриваемом классе задач. Это значит, что соответствующие методы приобретают незаурядную возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу

максимума (в частности, особых управлений). Слабая регуляризация функционала позволяет построить итерационный процесс в классе проекционных (непрерывных) управлений, что освобождает методы от разрывных систем (уменьшается потенциал улучшения), но придает процедуре в целом более устойчивый и регулярный характер с расширением класса рассматриваемых задач (снимается условие ограниченности множества допустимых управлений).

Немаловажным следствием регуляризации является свойство сходимости соответствующих методов по невязке оптимальности (минимизирующие последовательности) в выпуклых задачах.

В целом, представленные методы, специализированные для линейных и квадратичных задач, по экономичности, простоте реализации и потенциалу улучшения не имеют аналогий.

Во *второй главе* проводится итерационный анализ основной задачи оптимального управления (нелинейный функционал, нелинейная система, понтрягинские ограничения на управление). Для построения методов здесь используется целый ряд локальных (с остаточными членами) аппроксимаций (вариаций) целевого функционала. Процедуры игольчатого и слабого варьирования определяются в конструктивной форме (вспомогательное управление, функция варьирования), что позволяет строить методы по единой схеме (принцип наискорейшего спуска) через решение вспомогательных задач на минимум линейных и квадратичных аппроксимаций функционала относительно элементов варьирования.

Полученные методы первого и второго порядка аппроксимации носят локальный характер — улучшение гарантируется для достаточно малых значений параметра варьирования. В отличие от традиционных схем улучшения, представленные методы удовлетворяют условию эффективности: в линейных или квадратичных задачах (в зависимости от порядка метода) улучшение достигается для любого допустимого значения параметра варьирования.

В *третьей главе* изучается основная задача при наличии дополнительных ограничений терминального типа, которые описываются с помощью стандартных функционалов. В этом случае конструктивный анализ задачи существенно усложняется, поскольку требуется обеспечить необходимое варьирование конечного числа функционалов, определяющих задачу. Методы конструируются на основе принципа максимума с учетом специфики ограничений. Для ограничений типа неравенства методы игольчатого

и слабого варьирования работают в классе допустимых управлений, выдерживающих все ограничения задачи. Для ограничений типа равенства методы линеаризации разработаны на множестве доступных управлений, когда функциональные ограничения задачи не выполнены. В этом случае цель итерации состоит в одновременном уменьшении функционала Лагранжа и невязки (типа максимума) по ограничениям. Каждый метод характеризуется двумя вспомогательными вариационными задачами поиска управления и функции варьирования. Обе задачи определяются интегральными функционалами и требуют численного решения с помощью специальных итерационных методов.

В целом, монография ориентирована на дальнейшее развитие теории вычислительных методов оптимального управления и определяет, на наш взгляд, перспективное направление исследований на пути создания нового поколения методов с высокими показателями эффективности.

Монография подготовлена на основе публикаций [35–43]. Автор отмечает, что отдельные результаты получены в совместной работе с его сотрудниками и аспирантами, что отражено в соответствующих научных статьях, приведенных в списке литературы.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность коллегам по кафедрам вычислительной математики и методов оптимизации Института математики и экономики ИГУ за полезные дискуссии и конструктивное обсуждение рассматриваемых в монографии вопросов.

Глава 1

ЛИНЕЙНАЯ И КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В данной главе с единой позиции изучаются линейные и квадратичные по фазовому состоянию задачи оптимального управления. Основой для разработки итерационных методов последовательного улучшения и соответствующих условий оптимальности служат нелокальные (без остаточных членов) формулы приращения функционалов. В результате построенные процедуры улучшения имеют нелокальный характер, т.е. не требуют параметрического поиска (варьирования управлений) на каждой итерации. Рассматриваемые методы работают в классе экстремальных управлений, удовлетворяющих условию максимума функции Понтрягина для нестандартной совокупности траекторий.

Для повышения качества методов проводится регуляризация целевого функционала. В результате получаются условия оптимальности, усиливающие принцип максимума в рассматриваемом классе задач. При этом методы приобретают свойство улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума. Для выпуклых задач итерационная последовательность управлений является минимизирующей.

1.1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть $t \in T = [t_0, t_1]$ — независимая переменная (время), $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — вектор-функция фазовых переменных (состояние), $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ — вектор-функция управляющих воздействий (управление).

Рассмотрим задачу оптимизации линейной по состоянию динамической системы

$$\dot{x} = A(u, t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (1.1)$$

на множестве допустимых управлений

$$V = \{u \in PC(T) : u(t) \in U, t \in T = [t_0, t_1]\} \quad (1.2)$$

по линейному критерию качества терминального типа

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1) \rangle \rightarrow \min. \quad (1.3)$$

Отметим необходимые предположения. Пусть матричная функция $A(u, t)$ и вектор-функция $b(u, t)$ в системе (1.1) непрерывны по своим аргументам на прямом произведении $U \times T$. Класс допустимых управлений (1.2) образуют кусочно-непрерывные вектор-функции $u(t)$, $t \in T$ с ограничением $u(t) \in U$, где $U \subset R^r$ — компактное множество. Начальное состояние x^0 и промежутки управления T заданы.

В теоретическом плане задача (1.1)–(1.3) не слишком элементарна — во всяком случае принцип максимума здесь не является достаточным условием оптимальности (множество достижимости управляемой системы (1.1) невыпукло). Тем не менее, частный вариант задачи, когда матричная функция $A(u, t)$ не зависит от управления ($A(u, t) \equiv A(t)$) решается с помощью принципа максимума элементарно ценой одного интегрирования сопряженной системы вместе с реализацией условия максимума гамильтониана. Хотелось бы с аналогичными затратами обеспечить по крайней мере улучшение допустимого управления в задаче (1.1)–(1.3). Оказывается это возможно.

Основу соответствующих процедур улучшения составляют два специальных представления для приращения функционала (1.3).

1.1.1. Формулы приращения функционала

Введем в рассмотрение сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -A(u, t)^T \psi, \quad \psi(t_1) = -c \quad (1.4)$$

и функцию Понтрягина (гамильтониан)

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle,$$

где вектор-функция f обозначает правую часть системы (1.1).

Пусть $u, v \in V$ — пара управлений с соответствующими фазовыми траекториям $x(t, u)$, $x(t, v)$ и решениями $\psi(t, u)$, $\psi(t, v)$ сопряженной системы. Фазовое приращение $\Delta x(t) = x(t, v) - x(t, u)$ описывается уравнением

$$\Delta \dot{x} = A(u(t), t) \Delta x + \Delta_{v(t)} f(x(t, v), u(t), t), \quad \Delta x(t_0) = 0,$$

где $\Delta_v f(x, u, t) = f(x, v, t) - f(x, u, t)$.

Непосредственным дифференцированием в силу соответствующих систем получаем

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t, u), \Delta x(t) \rangle = \Delta_{v(t)} H(\psi(t, u), x(t, v), u(t), t).$$

После интегрирования по $t \in T$ приходим к первой формуле приращения функционала на паре u, v

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T \Delta_{v(t)} H(\psi(t, u), x(t, v), u(t), t) dt. \quad (1.5)$$

Вторая формула является симметричной и получается из первой в результате элементарной замены $u \rightarrow v, v \rightarrow u$

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T \Delta_{v(t)} H(\psi(t, v), x(t, u), u(t), t) dt. \quad (1.6)$$

Отметим характерную особенность полученных представлений — под знаком интеграла стоит частное приращение по управлению функции Понтрягина для определенной совокупности аргументов. Такие формулы открывают возможность непосредственного решения задачи об улучшении управления $u(t)$ через операцию на максимум гамильтониана.

В этой связи введем отображение $u^*(\psi, x, t)$ с помощью экстремального соотношения

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{u \in U} H(\psi, x, u, t), \quad (1.7)$$

где $\psi \in R^n, x \in R^n, t \in T$.

Предположим, что формула (1.7) определяет вектор-функцию $u^*(\psi, x, t)$, которая является кусочно-непрерывной по совокупности своих аргументов на $R^n \times R^n \times T$, т.е. имеет конечное число поверхностей разрыва. Каждая поверхность разрыва задается уравнением вида $g(\psi, x, t) = 0$, где функция g дифференцируема по совокупности $(\psi, x) \in R^n \times R^n$ и непрерывна по $t \in T$. На поверхностях разрыва (и только на них) вектор-функция $u^*(\psi, x, t)$ определяется соотношением (1.7) неоднозначно.

Понятно, что вектор-функция $u^*(\psi, x, t)$ отражает структуру оптимального управления в задаче (1.1)–(1.3). При этом принцип максимума для управления $u(t)$ представляется в виде

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T.$$

Примем общее предположение относительно реализации соотношения (1.7): структура задачи такова, что операция на максимум гамильтониана

$$H(\psi, x, u, t) \rightarrow \max, u \in U$$

допускает аналитическое решение. Это значит, что экстремальное управление $u^*(\psi, x, t)$ представляется в явном виде по соответствующей формуле.

Отметим, что формулы (1.5), (1.6) имеют нелокальный характер, т.е. не содержат остаточных членов тех или иных разложений. Вот почему на их основе нетрудно сформулировать достаточные условия оптимальности управления $u(t)$, $t \in T$ в задаче (1.1)–(1.3).

Пусть $D_x(t)$ — множество достижимости фазовой системы (1.2) в момент $t \in T$:

$$D_x(t) = \{x(t, u), u \in V\}.$$

Аналогично, $D_\psi(t)$ — множество достижимости сопряженной системы (1.4) в момент $t \in T$:

$$D_\psi(t) = \{\psi(t, u), u \in V\}.$$

Тогда для оптимальности управления $u(t)$ в задаче (1.1)–(1.3) достаточно выполнение хотя бы одного из симметричной пары условий

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x, t), \quad x \in D_x(t), \quad t \in T; \quad (1.8)$$

$$u(t) = u^*(\psi, x(t, u), t), \quad x \in D_\psi(t), \quad t \in T. \quad (1.9)$$

Действительно, рассмотрим, например, условие (1.8). Оно означает, что

$$\Delta_v H(\psi(t, u), x, u(t), t) \leq 0, \quad v \in U, \quad x \in D_x(t), \quad t \in T.$$

Следовательно, для любой допустимой пары $(v(t), x(t, v))$ имеет место неравенство

$$\Delta_{v(t)} H(\psi(t, u), x(t, v), u(t), t) \leq 0, \quad t \in T,$$

которое в силу формулы (1.5) гарантирует оптимальность управления $u(t)$.

Понятно, что в соотношениях (1.8)–(1.9) могут фигурировать любые оценки сверху по включению для множеств $D_x(t)$, $D_\psi(t)$ соответственно. Принцип максимума получается из (1.8)–(1.9) при $x = x(t, u)$, $\psi = \psi(t, u)$. Для простейшей задачи оптимального управления ($A(u, t) \equiv A(t)$) условия (1.8)–(1.9) эквивалентны принципу максимума. В рамках общей линейной задачи (1.1)–(1.3) соотношения (1.8)–(1.9) могут служить основой для построения процедур улучшения управления $u(t)$.

1.1.2. Процедуры улучшения

Поставим задачу об улучшении управления $u \in V$: найти управление $v \in V$ с условием $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$. Опишем механизм улучшения на основе формулы приращения (1.5) (условия (1.8)).

Первая процедура улучшения:

1) по данному $u \in V$ найдем сопряженную вектор-функцию $\psi(t, u)$, $t \in T$;

2) сформируем экстремальное управление

$$v^*(x, t) = u^*(\psi(t, u), x, t), \quad x \in R^n, \quad t \in T;$$

3) найдем решение $x(t)$, $t \in T$ фазовой системы

$$\dot{x} = A(v^*(x, t), t)x + b(v^*(x, t), t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (1.10)$$

вместе с управлением

$$v(t) = v^*(x(t), t), \quad t \in T.$$

Проведем обсуждение процедуры. В силу общего предположения из п.1.1.1 вектор-функция $v^*(x, t)$ кусочно-непрерывна на $R^n \times T$, поэтому правая часть системы (1.10) является разрывной по совокупности (x, t) , что делает ситуацию с решением нестандартной. Предположим, что решение $x(t) = x(t, v)$ задачи Коши (1.10) (возможно, не единственное) существует на T , причем соответствующее управление $v(t)$, $t \in T$ является кусочно-непрерывной вектор-функцией. Тогда $v \in V$ и переход $u \rightarrow v$ в рамках описанной процедуры является корректным.

Свойство улучшения вполне очевидно.

Поскольку $v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, v), t)$, то в силу определения отображения u^* получаем

$$\Delta_{v(t)} H(\psi(t, u), x(t, v), u(t), t) \geq 0, \quad t \in T.$$

Отсюда, на основании формулы приращения (1.5) заключаем, что $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$.

Таким образом, для любого управления $u \in V$ первая процедура улучшения вырабатывает управление $v \in V$ со свойством $\Phi(v) \leq \Phi(u)$. Равенство $v(t) = u(t)$, $t \in T$ означает, что исходное управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума. Отметим трудоемкость реализации первой процедуры (цена улучшения) — две задачи Коши (для сопряженной и фазовой систем).

Опишем симметричную схему улучшения на основе формулы приращения (1.6) (условия (1.9)).

Вторая процедура улучшения:

- 1) по данному $u \in V$ найдем фазовую траекторию $x(t, u)$, $t \in T$;
- 2) сформируем экстремальное управление

$$v^*(\psi, t) = u^*(\psi, x(t, u), t);$$

- 3) найдем решение $\psi(t)$, $t \in T$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A(v^*(\psi, t), t)^T \psi, \quad \psi(t_1) = -c \quad (1.11)$$

вместе с управлением

$$v(t) = v^*(\psi(t), t), \quad t \in T.$$

В рамках этой процедуры предположим, что разрывная задача Коши (1.11) имеет решение $\psi(t) = \psi(t, v)$, и соответствующая вектор-функция $v(t)$ кусочно-непрерывна на T . Тогда на выходе процедуры получаем допустимое управление $v(t)$ со свойством улучшения $\Phi(v) \leq \Phi(u)$. Совпадение $v = u$ означает принцип максимума для управления $u(t)$.

По трудоемкости реализации вторая процедура аналогична первой.

1.1.3. Билинейная задача

Проведем более подробный анализ описанных процедур с целью конкретизации возможностей улучшения.

Предположим, что система (1.1) линейна по управлению. Для упрощения изложения рассмотрим случай скалярного управления ($r=1$) с областью значений $U = [u^-, u^+]$ (двусторонние ограничения). Соответствующую задачу (1.1)–(1.3) назовем билинейной (линейной по x и по u). Тогда функция Понтрягина имеет следующую структуру

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + H_u(\psi, x, t)u. \quad (1.12)$$

Возьмем за основу первую процедуру улучшения. Введем в рассмотрение функцию переключения $g(x, t) = H_u(\psi(t, u), x, t)$. Тогда экстремальное управление первой процедуры определяется по формуле

$$v^*(x, t) = \begin{cases} u^-, & g(x, t) < 0 \\ u^+, & g(x, t) > 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

На поверхности разрыва $g(x, t) = 0$ управление $v^*(x, t)$ принимает любое допустимое значение: $v^*(x, t) \in [u^-, u^+]$.

Выделим особые участки фазовой траектории $x(t, v)$, $t \in T$ относительно функции переключения $g(x, t)$.

Определение 1.1. *Решение $x(t, v)$ системы (1.10) назовем особым на множестве $T_0 \subset T$, $\text{mes } T_0 > 0$, если $g(x(t, v), t) = 0$, $t \in T_0$.*

Управление $v(t) = v^*(x(t, v), t)$ на множестве T_0 определяется из условия $g(x(t, v), t) = 0$ с учетом ограничения $v(t) \in U$.

На особых участках решение разрывной системы (1.10) может быть неединственным, что приводит к множеству управлений на выходе процедуры улучшения

$$V_1(u) = \{v \in V : v(t) = v^*(x(t, v), t), t \in T\}.$$

Приведем ряд утверждений, характеризующих первую процедуру улучшения в билинейной задаче.

Лемма 1.1. *Управление $u \in V$ удовлетворяет принципу максимума тогда и только тогда, когда $u \in V_1(u)$.*

Действительно, принцип максимума для управления $u \in V$ в наших обозначениях имеет вид: $u(t) = v^*(x(t, u), t)$, что равносильно включению $u \in V_1(u)$.

Следствие 1.1. *Для оптимальности управления $u \in V$ необходимо, чтобы $u \in V_1(u)$.*

Рассмотрим вопрос об улучшении управлений, не удовлетворяющих принципу максимума ($u \notin V_1(u)$). Как следует из общей формулы (1.5) приращение функционала Φ на паре управлений $u \in V$, $v \in V_1(u)$ в билинейной задаче имеет вид

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T g(x(t, v), t)(v(t) - u(t)) dt, \quad (1.14)$$

причем подынтегральная функция неотрицательна на T . Определим множество

$$T_{u,v} = \{t \in T : g(x(t, v), t)(v(t) - u(t)) > 0\}.$$

Отметим, что $T_{u,v} = T_1 \cap T_2$, где

$$T_1 = \{t \in T : g(x(t, v), t) \neq 0\}, \quad T_2 = \{t \in T : v(t) \neq u(t)\}.$$

Лемма 1.2. *Пусть $u \notin V_1(u)$. Тогда управление $v \in V_1(u)$ лучше управления $u \in V$ ($\Phi(v) < \Phi(u)$), если $\text{mes } T_{u,v} > 0$.*

Утверждение непосредственно следует из формулы (1.14).

Следствие 1.2. *Если решение $x(t, v)$ является особым на T ($\text{mes } T_1 = 0$), то улучшение отсутствует: $\Delta_v \Phi(u) = 0$. Если решение $x(t, v)$ не является особым в пределах T ($\text{mes } T_1 = \text{mes } T$), то улучшение гарантируется: $\Delta_v \Phi(u) < 0$.*

В общем случае улучшение происходит, если решение $x(t, v)$ имеет неособый участок, на котором управления u, v не совпадают.

Введем понятие регулярности для отображения $u \rightarrow V_1(u)$.

Определение 1.2. Будем говорить, что пара управлений $u \in V, v \in V_1(u)$ удовлетворяет условию регулярности (является регулярной), если на любом особом участке траектории $x(t, v)$ управления $u(t), v(t)$ совпадают.

В частности, если $g(x(t, v), t) \neq 0$ почти всюду на T (особый участок отсутствует), то пара (u, v) является регулярной.

Смысл условия регулярности раскрывается следующим утверждением.

Лемма 1.3. Пусть (u, v) — регулярная пара первой процедуры улучшения. Если $\Delta_v \Phi(u) = 0$, то $v = u$.

Доказательство непосредственно следует из формулы приращения (1.14).

Для регулярной пары (u, v) введем величину $\delta(u) = \Phi(u) - \Phi(v)$. Тогда $\delta(u) \geq 0$, причем равенство $\delta(u) = 0$ означает выполнение принципа максимума для управления $u(t)$. Поэтому величина $\delta(u)$ при условии регулярности может служить невязкой (мерой нарушения) принципа максимума на управлении $u(t)$.

Рассмотрим, далее, управления, удовлетворяющие принципу максимума с вырождением. Как известно, управление $u \in V_1(u)$ называется особым на множестве $T_0 \subset T$, $\text{mes } T_0 > 0$, если $H_u(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0, t \in T_0$. Используя функцию переключения, представим это условие в виде $g(x(t, u), t) = 0, t \in T_0$. Последнее означает, что решение $x(t, u)$ системы (1.10) является особым на T_0 .

Таким образом, особый участок управления $u \in V_1(u)$ является таковым для соответствующей фазовой траектории $x(t, u)$. Справедливо, очевидно, и обратное утверждение.

Определение 1.3. Будем говорить, что особое решение $x(t, u), t \in T_0$, порождаемое управлением $u \in V_1(u)$, является устойчивым, если для любого управления $v \in V_1(u), v(t) \neq u(t), t \in T_0$ решение $x(t, v)$ является особым на T_0 .

Иными словами, устойчивость особого решения $x(t, u)$ означает, что система (1.10) не имеет неособых решений на T_0 .

Значение свойства устойчивости определяется следующим утверждением.

Лемма 1.4. Пусть $u \in V_1(u)$ — оптимальное управление, особое на множестве T_0 . Тогда особое решение $x(t, u), t \in T_0$ является устойчивым.



А567948

Доказательство проведем от противного. Предположим, что $x(t, u)$, $t \in T_0$ — не устойчивое особое решение. Это означает, что имеется управление $v \in V_1(u)$, $v(t) \neq u(t)$, $t \in T_0$, для которого решение $x(t, v)$ системы (1.10) не является особым на T_0 . Отсюда следует, что найдется промежуток $T_v \subset T_0$, на котором $g(x(t, v), t) \neq 0$. Используя общую формулу (1.14), оценим приращение функционала Φ на управлениях u, v

$$\Delta_v \Phi(u) \leq - \int_T g(x(t, v), t)(v(t) - u(t)) dt.$$

Поскольку подынтегральная функция на T_v положительна, то $\Delta_v \Phi(u) < 0$, что противоречит оптимальности управления $u(t)$. Лемма доказана.

Следствие 1.3. Пусть управление $u(t)$, $t \in T$ удовлетворяет принципу максимума с особым участком T_0 , которому соответствует не устойчивое особое решение $x(t, u)$. Тогда на выходе первой процедуры найдется управление $v \in V_1(u)$ со свойством улучшения: $\Phi(v) < \Phi(u)$.

Сделаем ряд замечаний по части компьютерной реализации особых режимов. При численном интегрировании системы (1.10) устойчивое особое решение реализуется с помощью пошаговых переключений управления между крайними значениями u^- и u^+ . Для отыскания «нормального» управления, порождающего особый режим, (если оно существует), необходимо действовать по определению, т.е. продифференцировать тождество $g(x(t), t) = 0$ по времени (возможно не один раз) и решить полученное уравнение относительно управления с последующей проверкой на выполнение ограничений.

Что касается не устойчивого особого режима, то его численная реализация приводит, вообще говоря, к неособому решению. Это является благоприятным фактором, так как обеспечивает улучшение соответствующего управления.

Аналогичным образом проводится анализ возможностей второй процедуры улучшения. В этом случае функция переключения образуется в виде $g(\psi, t) = H_u(\psi, x(t, u), t)$ и определяет экстремальное управление

$$v^*(\psi, t) = \begin{cases} u^-, & g(\psi, t) < 0 \\ u^+, & g(\psi, t) > 0. \end{cases}$$

Тогда особый режим связан с решением $\psi(t, v)$ сопряженной системы и определяется тождеством $g(\psi(t, v), t) = 0$. Все последующие результаты сохраняются с естественной корректировкой в обозначениях.

1.1.4. Примеры

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих работу процедур улучшения. Предварительно отметим, что в линейной задаче с функционалом общего вида

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1) \rangle + \int_T (b_0(u, t) + \langle a(u, t), x(t) \rangle) dt$$

все результаты справедливы относительно функции

$$H = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - b_0(u, t) - \langle a(u, t), x \rangle$$

с сопряженной системой

$$\dot{\psi} = -H_x, \quad \psi(t_1) = -c.$$

Здесь действует стандартный прием введения дополнительной фазовой переменной.

Пример 1.1 (улучшение управления, строго удовлетворяющего принципу максимума).

$$\Phi(u) = -x(2) + 2 \int_0^2 x(t)(2 - 3u(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = 2(u - 1)t, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [0, 1], \quad t \in T.$$

В данном случае $H = 2\psi(u - 1)t - 2x(2 - 3u)$, сопряженное уравнение — $\dot{\psi} = 2(2 - 3u)$, $\psi(2) = 1$, максимизирующее управление —

$$u^*(\psi, x, t) = \begin{cases} 0, & H_u(\psi, x, t) < 0 \\ 1, & H_u(\psi, x, t) > 0, \end{cases}$$

причем $H_u = 2\psi t + 6x$.

Рассмотрим управление

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Ему соответствуют траектории

$$x(t, u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - t^2, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad \psi(t, u) = \begin{cases} -2t - 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 4t - 7, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что данное управление строго удовлетворяет принципу максимума с особой точкой $t = 1$ (точка переключения).

Применим первую процедуру улучшения. В данном случае

$$g(x, t) = \begin{cases} -4t^2 - 2t + 6x, & 0 \leq t \leq 1, \\ 8t^2 - 14t + 6x, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Решим уравнение

$$\dot{x} = 2(v^* - 1)t, \quad x(0) = 1, \quad v^* = u^*(\psi(t, u), x, t).$$

Для $t \in [0, 1]$ решение единственно и совпадает с $x(t, u)$: $x(t) = 1$, $v(t) = 1$. При $t = 1$ траектория $x(t)$ попадает на линию разрыва управления v^* , ($g(x(1), 1) = 0$) и появляется возможность неединственного решения. Рассмотрим три возможных случая для $t > 1$:

$$1) \ g(x(t), t) < 0, \quad 2) \ g(x(t), t) > 0, \quad 3) \ g(x(t), t) = 0.$$

В первом случае реализуется исходное управление $u(t) = 0$, $t \in (1, 2]$, что означает выполнение принципа максимума: $u \in V_1(u)$.

Во втором случае на выходе получаем альтернативное управление $v(t) = 1$ с траекторией $x(t) = 1$, $t \in [1, 2]$. В целом, управление $v(t) = 1$, $t \in [0, 2]$ является улучшающим: $\Phi(v) < \Phi(u)$.

Наконец, третий случай приводит к особому решению

$$x(t) = \frac{7}{3}t - \frac{4}{3}t^2 \quad \text{с порождающим управлением} \quad v(t) = \frac{7-2t}{6t},$$

$t \in (1, 2]$, которое удовлетворяет ограничению: $v(t) \in (0, 1)$, т.е. является допустимым. При этом улучшения не происходит: $\Phi(v) = \Phi(u)$.

Пример 1.2 (улучшение особого управления).

$$\Phi(u) = x_3(1) \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_3 = -ux_2, \quad x_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

Функция Понтрягина: $H = \psi_1 u + \psi_2(x_1 + x_2) + ux_2$.

Сопряженная система: $\dot{\psi}_1 = -\psi_2$, $\dot{\psi}_2 = -\psi_2 - u$, $\psi_1(1) = 0$, $\psi_2(1) = 0$.

Максимизирующее управление: $u^* = \text{sign}(\psi_1 + x_2)$.

Рассмотрим управление $u(t) = 0$ с траекториями

$$x_i(t, u) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \psi_1(t, u) = 0, \quad \psi_2(t, u) = 0.$$

Это особое управление, ибо $H_u(\psi(t, u), x(t, u)) = 0$.

Реализуем первую процедуру улучшения. В данном случае $g(x, t) = x_2$, $v^*(x, t) = \text{sign } x_2$, и фазовая система принимает вид

$$\dot{x}_1 = \text{sign } x_2, \quad x_1(0) = 0,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2, \quad x_2(0) = 0.$$

Понятно, что имеется особое решение $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$, которому соответствует исходное управление $u(t) = 0$, $t \in [0, 1]$.

Кроме того, система имеет неособые решения

$$1) \quad x_1(t) = t, \quad x_2(t) = e^t - t - 1, \quad 2) \quad x_1(t) = -t, \quad x_2(t) = -e^t + t + 1$$

с порождающими управлениями $v_1(t) = 1$, $v_2(t) = -1$, $t \in [0, 1]$, которые обеспечивают свойство улучшения (особое решение не устойчиво).

Итак, первая процедура решает задачу об улучшении особого управления.

Пример 1.3 (отсутствие улучшения).

$$\Phi(u) = \int_0^1 x(t)(u(t) - 1) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

В данной задаче

$$H = \psi u - x(u - 1), \quad \dot{\psi} = u - 1, \quad \psi(1) = 0, \quad u^* = \text{sign}(\psi - x).$$

Рассмотрим управление $u(t) = -1$ с траекториями $x(t, u) = 1 - t$, $\psi(t, u) = 2(1 - t)$. Оно не удовлетворяет принципу максимума.

Применим вторую процедуру улучшения. Тогда

$$g(\psi, t) = \psi - 1 + t, \quad v^*(\psi, t) = \text{sign } g(\psi, t).$$

Решим сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = v^*(\psi, t) - 1, \quad \psi(1) = 0.$$

Единственным решением является особый режим $\psi(t) = 1 - t$ с порождающим управлением $v(t) = 0$, $t \in [0, 1]$. При этом, однако, отсутствует улучшение: $\Phi(v) = \Phi(u)$.

Отметим, что первая процедура улучшает исходное управление:

$$u(t) = -1, \quad v(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ -1, & \frac{1}{3} < t \leq 1, \end{cases} \quad \Phi(v) < \Phi(u).$$

Обратная ситуация имеет место, если в качестве стартового управления взять $u(t) = 0, t \in [0, 1]$. В этом случае первая процедура порождает особый режим без улучшения:

$$u(t) = 0, \quad v(t) = -1, \quad \Phi(v) = \Phi(u).$$

Вторая процедура обеспечивает свойство улучшения:

$$u(t) = 0, \quad v(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases} \quad \Phi(v) < \Phi(u).$$

1.1.5. Метод приращений

Рассмотрим линейную задачу в общей постановке (1.1)–(1.3). В п. 1.1.2 были построены две независимые процедуры улучшения допустимых управлений в этой задаче, равносильные по трудоемкости реализации (цена одного улучшения — две задачи Коши). Оказывается, что обе процедуры можно естественным образом состыковать и получить комбинированный метод, который в пределах той же трудоемкости обеспечивает двойное улучшение по функционалу (цена каждого улучшения — одна задача Коши). Проведем описание метода в итерационной форме. Пару $(u(t), x(t)), t \in T$ (управление, состояние) назовем допустимой, если $u \in V, x(t) = x(t, u)$.

Пусть на k -ой итерации имеется допустимая пара $(u^k(t), x^k(t))$ вместе со значением функционала $\Phi(u^k), k = 0, 1, \dots$. Найдем решение $\psi^k(t)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A(u^*(\psi, x^k(t), t), t)^T \psi, \quad \psi(t_1) = -c$$

в совокупности с управлением

$$v^k(t) = u^*(\psi^k(t), x^k(t), t), \quad t \in T.$$

Найдем решение $x^{k+1}(t), t \in T$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u^*(\psi^k(t), x, t), t), \quad x(t_0) = x^0$$

в совокупности с управлением

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi^k(t), x^{k+1}(t), t), \quad t \in T.$$

В итоге получаем допустимую пару $(u^{k+1}(t), x^{k+1}(t)), t \in T$. Подсчитаем значение функционала $\Phi(u^{k+1}) = \langle c, x^{k+1}(t_1) \rangle$. Итерация закончена.

Прокомментируем метод. Промежуточное управление v^k получено на основе u^k как результат второй процедуры улучшения. Следовательно, $\Phi(v^k) \leq \Phi(u^k)$, причем $\psi^k(t) = \psi(t, v^k)$. Аналогично, переход $v^k \rightarrow u^{k+1}$ есть реализация первой процедуры улучшения, поэтому $\Phi(u^{k+1}) \leq \Phi(v^k)$.

Итак, в процессе итерации метода происходит двойное улучшение по функционалу $\Phi(u^{k+1}) \leq \Phi(v^k) \leq \Phi(u^k)$, причем каждое улучшение дается ценой решения одной задачи Коши. Исключение составляет только первая итерация ($k=0$), когда переход $u^0 \Rightarrow v^0$ требует решения двух задач Коши.

Обсудим вопрос о сходимости метода применительно к билинейной задаче, рассмотренной в п. 1.1.3. Предположим, что на каждой итерации метода пара управлений (u^k, v^k) является регулярной. Тогда величина $\delta(u^k) = \Phi(u^k) - \Phi(v^k)$ есть невязка принципа максимума для управления u^k . Согласно свойству улучшения имеет место оценка сверху

$$\delta(u^k) \leq \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1}),$$

в которой значения $\Phi(u^k)$, $\Phi(u^{k+1})$ известны. Сходимость метода описывается следующим утверждением: для билинейной задачи при условии регулярности каждой пары (u^k, v^k) метод приращений обладает свойством сходимости по невязке принципа максимума: $\delta(u^k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Действительно, целевой функционал $\Phi(u)$ ограничен на множестве допустимых управлений V . Последовательность $\Phi(u^k)$, $k=0, 1, \dots$ является невозрастающей и ограниченной, поэтому $\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1}) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

В заключение отметим простоту реализации метода приращений, что связано в первую очередь с отсутствием параметрического поиска на каждой итерации.

1.2. КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу на минимум квадратичного функционала

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \langle c, x(t_1) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t_1), Dx(t_1) \rangle + \\ & + \int_T \left(b_0(u, t) + \langle a(u, t), x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t), Q(u, t)x(t) \rangle \right) dt, \end{aligned} \quad (1.15)$$

связанного с линейной по состоянию динамической системой

$$\dot{x} = A(u, t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (1.16)$$

при ограничениях на управление в каждый момент времени

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \quad (1.17)$$

Класс допустимых управлений V определим как множество кусочно-непрерывных вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих условию (1.17). Относительно соотношений (1.16), (1.17) сохраним предположения из раздела 1.1. Для функционала (1.15) естественно считаем, что матрицы D , $Q(u, t)$ являются симметричными, причем функции $b_0(u, t)$, $a(u, t)$, $Q(u, t)$ непрерывны по своим аргументам на $U \times T$.

Выделим из (1.15)–(1.17) частные классы задач, имеющих самостоятельное значение.

Если подынтегральная функция в (1.15) и правая часть системы (1.16) линейны по управлению u , то получаем линейно-квадратичную задачу (линейность по u , квадратичность по x).

Выпуклая задача характеризуется условиями

$$a(u, t) \equiv a(t), \quad Q(u, t) \equiv Q(t), \quad A(u, t) \equiv A(t), \quad (1.18)$$

$$D \geq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad t \in T$$

(переменные x , u разделены, матрицы квадратичных форм неотрицательно определены).

Прокомментируем задачу (1.15)–(1.17) с позиций возможных приложений. С помощью функционалов вида (1.15) формализуется ряд практически важных требований к функционированию управляемых объектов (квадратичные отклонения от требуемых режимов и терминальных состояний). Динамические системы (1.16), линейные по состоянию, возникают при математическом моделировании и оптимизации многих физико-технических процессов.

В целом, квадратичные задачи типа (1.15)–(1.17) играют существенную роль в проблемах синтеза оптимального управления на уровне малых отклонений от программных характеристик. Следует отметить также значение квадратичных аппроксимаций как вспомогательных процедур в процессе решения общих нелинейных задач оптимального управления на основе методов второго порядка.

Проведем конструктивный анализ поставленной задачи по схеме, реализованной в разделе 1.1.

1.2.1. Формулы приращения функционала

Введем обозначения

$$\varphi(x) = \langle c, x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, Dx \rangle, \quad f(x, u, t) = A(u, t)x + b(u, t),$$

$$f_0(x, u, t) = b_0(u, t) + \langle a(u, t), x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, Q(u, t)x \rangle$$

и образуем функцию Понтрягина в задаче (1.15)–(1.17)

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - f_0(x, u, t).$$

Пусть $u(t), v(t), t \in T$ — допустимые управления, $x(t, u), x(t, v)$ — соответствующие фазовые траектории.

Определим вектор-функцию $\psi(t, u), t \in T$ как решение первой сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -A(u, t)^T \psi + a(u, t) + Q(u, t)x(t, u), \quad \psi(t_1) = \\ &= -(c + Dx(t_1, u)). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Введем $(n \times n)$ симметричную матричную функцию $\Psi(t, u), t \in T$ с помощью уравнения (вторая сопряженная система)

$$\dot{\Psi} = -A(u, t)^T \Psi - \Psi A(u, t) + Q(u, t), \quad \Psi(t_1) = -D. \quad (1.20)$$

Образуем вспомогательную вектор-функцию

$$p(t, u, x(t, v)) = \psi(t, u) + \Psi(t, u)(x(t, v) - x(t, u)). \quad (1.21)$$

Фазовое приращение $\Delta x(t) = x(t, v) - x(t, u)$ представим уравнением

$$\dot{\Delta x} = A(u(t), t)\Delta x + \Delta_{v(t)} f(x(t, v), u(t), t), \quad \Delta x(t_0) = 0. \quad (1.22)$$

Приращение функционала Φ на управлениях u, v имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_v \Phi(u) &= \varphi(x(t_1, v)) - \varphi(x(t_1, u)) + \\ &+ \int_T (f_0(x(t, v), v(t), t) - f_0(x(t, u), u(t), t)) dt. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Приращение квадратичной функции φ выражается следующим образом

$$\Delta \varphi = \langle c + Dx(t_1, u), \Delta x(t_1) \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta x(t_1), D\Delta x(t_1) \rangle.$$

Выражение под знаком интеграла с учетом квадратичности функции f_0 по x можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta f_0 &= \Delta_{v(t)} f_0(x(t, v), u(t), t) + f_0(x(t, v), u(t), t) - \\ &- f_0(x(t, u), u(t), t) = \Delta_{v(t)} f_0(x(t, v), u(t), t) + \\ &+ \langle a(u(t), t) + Q(u(t), t)x(t, u), \Delta x(t) \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle \Delta x(t), Q(u(t), t)\Delta x(t) \rangle \end{aligned}$$

Терминальное приращение с учетом условий для $\psi(t_1, u)$, $\Psi(t_1, u)$ запишем в интегральной форме

$$\Delta \Phi = - \int_T \frac{d}{dt} \left(\langle \psi(t, u), \Delta x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta x(t), \Psi(t, u) \Delta x(t) \rangle \right) dt.$$

Проведем дифференцирование под знаком интеграла в силу уравнений (1.19), (1.20), (1.22)

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi &= \int_T \left(\langle p(t, u, x(t, v)), \Delta_{v(t)} f(x(t, v), u(t), t) \rangle + \right. \\ &+ \langle a(u(t), t) + Q(u(t), t)x(t, u), \Delta x(t) \rangle + \\ &\left. + \frac{1}{2} \langle \Delta x(t), Q(u(t), t)\Delta x(t) \rangle \right) dt. \end{aligned}$$

Подставляя полученные представления в формулу (1.23), приходим к выражению

$$\begin{aligned} \Delta_v \Phi(u) &= - \int_T \left(\langle p(t, u, x(t, v)), \Delta_{v(t)} f(x(t, v), u(t), t) \rangle - \right. \\ &\left. - \Delta_{v(t)} f_0(x(t, v), u(t), t) \right) dt. \end{aligned}$$

Используя функцию Понтрягина, получаем итоговую формулу приращения функционала

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T \Delta_{v(t)} H(p(t, u, x(t, v)), x(t, v), u(t), t) dt. \quad (1.24)$$

Здесь $p(t, u, x(t, v))$ — комбинированная сопряженная вектор-функция, которая определяется выражением (1.21).

Альтернативный вариант формулы (1.24) получается с помощью замены $u \leftrightarrow v$

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T \Delta_{v(t)} H(p(t, v, x(t, u)), x(t, u), u(t), t) dt. \quad (1.25)$$

Здесь вектор-функция p определяется выражением

$$p(t, v, x(t, u)) = \psi(t, v) + \Psi(t, v)(x(t, u) - x(t, v)). \quad (1.26)$$

В дальнейшем используется дифференциальное уравнение для вектор-функции $p(t, v, x(t, u))$, которое получается непосредственным дифференцированием соотношения (1.26) в силу сопряженных систем (1.19), (1.20) при $u = v$. Это уравнение в конечном итоге имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -A(v, t)^T p + a(v, t) + Q(v, t)x(t, u) - \\ &\quad - \Psi(t, v) \Delta_{v(t)} f(x(t, u), u(t), t), \quad (1.27) \\ p(t_1) &= -(c + Dx(t_1, u)). \end{aligned}$$

Отметим, что данное уравнение, в отличие от представления (1.26) не зависит от траектории $x(t, v)$, что открывает возможность конструктивного использования формулы (1.25) в процедуре улучшения.

Приведем одно соотношение, которое окажется полезным при построении итерационного метода, использующего обе формулы (1.24), (1.25). Оно сразу получается на основе равенства (1.26) и имеет вид

$$\begin{aligned} p(t, v, x(t, u)) + \Psi(t, v)(x - x(t, u)) &= \\ &= \psi(t, v) + \Psi(t, v)(x - x(t, v)), \quad (1.28) \end{aligned}$$

где $x \in R^n$.

Подведем итог. Формулы (1.24), (1.25) составляют основу для улучшения допустимых управлений в квадратичной задаче (1.15)–(1.17). По структуре они аналогичны соответствующим формулам для линейной задачи, являются точными (без остаточных членов) и открывают возможность нелокального (без варьирования) улучшения для управления $u(t)$ с помощью операции на максимум функции Понтрягина.

Отличительной особенностью формул (1.24), (1.25) является присутствие матричной функции $\Psi(t)$, которая традиционно

используется при исследовании особых управлений, как необходимый элемент соответствующих условий оптимальности. Для линейной задачи $\Psi(t) \equiv 0$, и формулы (1.24), (1.25) принимают известный вид (1.5), (1.6).

Как и в линейном случае на основе формул (1.24), (1.25) нетрудно получить достаточные условия оптимальности для управления $u(t)$ в квадратичной задаче.

Рассмотрим первую формулу. Определим вектор-функцию

$$p(t, u, x) = \psi(t, u) + \Psi(t, u)(x - x(t, u)),$$

и пусть $D_x(t)$ — множество достижимости фазовой системы (1.16) в момент времени t . Будем использовать максимизирующее управление $u^*(\psi, x, t)$, которое определено соотношением (1.7).

Утверждение 1. Для оптимальности управления $u(t)$ в квадратичной задаче достаточно, чтобы

$$u(t) = u^*(p(t, u, x), x, t), \quad x \in D_x(t), \quad t \in T. \quad (1.29)$$

Условие (1.29) гарантирует неположительность подинтегральной функции в формуле (1.24) для любого $v \in V$.

Аналогично, в формуле (1.25) вектор-функция $p(t, v, x(t, u))$ является решением комбинированной сопряженной системы (1.27). образуем множество достижимости системы (1.27) в момент t :

$$D_p(t, u) = \{p(t, v, x(t, u)), v \in V\}.$$

Утверждение 2. Для оптимальности управления $u(t)$ в квадратичной задаче достаточно, чтобы

$$u(t) = u^*(p, x(t, u), t), \quad p \in D_p(t, u), \quad t \in T. \quad (1.30)$$

Условие (1.30) обеспечивает неотрицательность правой части формулы (1.25) для всех $v \in V$.

Из условий (1.29), (1.30) при $x = x(t, u)$, $p = p(t, u, x(t, u))$ получаем принцип максимума для управления $u(t)$. Правые части соотношений (1.29), (1.30) будем использовать для построения процедур улучшения управления $u(t)$ в квадратичной задаче.

1.2.2. Процедуры улучшения

Возьмем за основу формулу приращения (1.24) (условие (1.29)) и опишем *первую процедуру улучшения*:

1) по допустимой паре $(u(t), x(t, u))$, $t \in T$ найдем решение $\psi(t, u)$, $\Psi(t, u)$ сопряженных систем (1.19), (1.20);

2) образуем вектор-функцию

$$p(t, u, x) = \psi(t, u) + \Psi(t, u)(x - x(t, u))$$

и сформируем экстремальное управление

$$v^*(x, t) = u^*(p(t, u, x), x, t), \quad x \in R^n, \quad t \in T;$$

3) найдем решение $x(t)$, $t \in T$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, v^*(x, t), t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (1.31)$$

вместе с управлением $v(t) = v^*(x(t), t)$, $t \in T$.

Поскольку $x(t) = x(t, v)$, то на выходе получаем пару $(v(t), x(t, v))$, $t \in T$.

В целях корректности п.3) естественно предположить, что решение $x(t)$ задачи Коши (1.31) существует на T , причем соответствующее управление $v(t)$, $t \in T$ является кусочно-непрерывной функцией.

Обоснуем свойство улучшения. Заметим, что

$$v(t) = u^*(p(t, u, x(t, v)), x(t, v), t).$$

Тогда в силу определения отображения u^* получаем

$$\Delta_{v(t)} H(p(t, u, x(t, v)), x(t, v), u(t), t) \geq 0, \quad t \in T.$$

Отсюда на основании формулы приращения (1.24) заключаем, что $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$.

Равенство $v(t) = u(t)$, $t \in T$ означает, что исходное управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума. Действительно, в этом случае

$$p(t, u, x(t, u)) = \psi(t, u), \quad u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T.$$

Отметим трудоемкость реализации процедуры — две векторные задачи Коши $(\psi(t, u), x(t, v))$ и одна матричная задача Коши $(\Psi(t, u))$.

Опишем «двойственную» схему улучшения с помощью второй формулы приращения (1.25) (условия (1.30)).

Вторая процедура улучшения:

1) по управлению $u \in V$ найдем решение $x(t, u)$ фазовой системы;

2) сформируем экстремальное управление

$$v^*(p, t) = u^*(p, x(t, u), t), \quad p \in R^n, \quad t \in T;$$

3) найдем решение $p(t)$, $\Psi(t)$ комбинированной сопряженной системы для $v^* = v^*(p, t)$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -A(v^*, t)^T p + a(v^*, t) + Q(v^*, t)x(t, u) - \\ &\quad - \Psi \Delta_{v^*} f(x(t, u), u(t), t), \\ \dot{\Psi} &= -A(v^*, t)^T \Psi - \Psi A(v^*, t) + Q(v^*, t), \\ p(t_1) &= -(c + Dx(t_1, u)), \quad \Psi(t_1) = -D \end{aligned} \quad (1.32)$$

и вычислим управление

$$v(t) = v^*(p(t), t), \quad t \in T.$$

В рамках этой процедуры предположим, что разрывная задача Коши (1.32) имеет решение $p(t)$, $\Psi(t)$, $t \in T$, и соответствующая вектор-функция $v(t)$ является кусочно-непрерывной на T .

Свойство улучшения проверяется вполне элементарно. Поскольку

$$\Psi(t) = \Psi(t, v), \quad p(t) = p(t, v, x(t, u)),$$

$$v(t) = u^*(p(t, v, x(t, u)), x(t, u), t),$$

то, согласно определению u^* получаем

$$\Delta_{v(t)} H(p(t, v, x(t, u)), x(t, u), u(t), t) \geq 0, \quad t \in T.$$

На основании формулы приращения (1.25) имеем $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$. Если $v(t) = u(t)$, $t \in T$, то управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума.

Остается отметить, что по трудоемкости реализации вторая процедура улучшения эквивалентна первой — две векторные задачи Коши ($x(t, u)$, $p(t, v, x(t, u))$) и одна матричная задача Коши ($\Psi(t, v)$).

Для конкретизации процедур улучшения можно рассмотреть линейно-квадратичную задачу со скалярным управлением $u(t) \in [u^-, u^+]$, $t \in T$. В этом случае функция Понтрягина представима в форме (1.12), причем экстремальное управление первой процедуры улучшения определяется формулой (1.13), в которой

$$g(x, t) = H_u(p(t, u, x), x, t).$$

Дальнейший анализ возможностей улучшения полностью аналогичен случаю билинейной задачи (п. 1.1.3).

1.2.3. Примеры

Проиллюстрируем реализацию процедур улучшения в квадратичных задачах. Предварительно отметим, что сопряженные системы (1.19), (1.27) целесообразно представить с помощью функции Понтрягина в следующем виде

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -H_x(\psi, x(t, u), u, t), \quad \psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1, u)), \\ \dot{p} &= -H_x(p, x(t, u), v, t) - \Psi(t, v)\Delta_v f(x(t, u), u, t), \\ p(t_1) &= \psi(t_1).\end{aligned}$$

Пример 1.4 (улучшение управления, строго удовлетворяющего принципу максимума).

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2(t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= u, \quad x(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T.\end{aligned}$$

В данном случае

$$H = \psi u + \frac{1}{2} x^2, \quad u^* = \text{sign } \psi;$$

первое сопряженное уравнение: $\dot{\psi} = -x$, $\psi(1) = 0$,
второе сопряженное уравнение: $\dot{\Psi} = -1$, $\Psi(1) = 0$.

Итак, $\Psi(t) = 1 - t$.

Рассмотрим управление

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ -1, & \frac{1}{3} < t \leq 1 \end{cases}$$

с соответствующими траекториями

$$x(t, u) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{2}{3} - t, & \frac{1}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad \psi(t, u) = \begin{cases} \frac{1-9t^2}{18}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{3t^2-4t+1}{6}, & \frac{1}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Отметим, что данное управление удовлетворяет принципу максимума:

$$u(t) = \text{sign } \psi(t, u), \quad t \in [0, 1].$$

Применим вторую процедуру улучшения. Комбинированное сопряженное уравнение имеет вид

$$\dot{p} = -x(t, u) - (1-t)(\text{sign } p - u(t)), \quad p(1) = 0.$$

Найдем его решение $p(t)$ вместе с управлением $v(t) = \text{sign } p(t)$, $t \in T$.

Для $t \in (\frac{1}{3}, 1]$ получаем

$$\dot{p} = t - \frac{2}{3} - (1-t)(\text{sign } p + 1), \quad p(1) = 0.$$

Решением является сопряженная траектория: $p(t) = \psi(t, u)$, поэтому выходное управление совпадает с исходным: $v(t) = u(t)$,

$t \in (\frac{1}{3}, 1]$.

Для $t \in [0, \frac{1}{3})$ имеем

$$\dot{p} = -t - (1-t)(\text{sign } p - 1), \quad p(\frac{1}{3}) = 0.$$

Здесь, по-прежнему, решением является $p(t) = \psi(t, u)$ с управлением $v(t) = u(t)$ (это значит, что управление $u(t)$, $t \in [0, 1]$ удовлетворяет принципу максимума).

Кроме того, уравнение имеет отрицательное решение $p(t) < 0$, $t \in [0, \frac{1}{3})$ с порождающим управлением $v(t) = -1$.

В итоге заключаем, что на выходе второй процедуры, наряду с $u(t)$, имеется управление $v(t) = -1$, $t \in [0, 1]$ со свойством улучшения: $\Phi(v) < \Phi(u)$. По задаче понятно, что $v(t)$ — оптимальное управление.

Отметим, что первая процедура приводит к управлению $v(t) = 1$, $t \in [0, 1]$, которое также является оптимальным.

Пример 1.5 (улучшение особого управления).

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u(t)x^2(t)dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 1]$$

Определим основные конструкции

$$H = \psi u - \frac{1}{2} x^2 u, \quad u^* = \text{sign} \left(\psi - \frac{1}{2} x^2 \right),$$

$$\dot{\psi} = x u, \quad \psi(1) = 0, \quad \dot{\Psi} = u, \quad \Psi(1) = 0.$$

Рассмотрим управление $u(t) = 0$ с траекториями

$$x(t, u) = 0, \quad \psi(t, u) = 0, \quad \Psi(t, u) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

Оно является особым на $[0, 1]$, поскольку $H_u(\psi(t, u), x(t, u)) = 0$.

Применим первую процедуру улучшения. Вспомогательная вектор-функция $p(t, u, x) \equiv 0$. Решим фазовое уравнение

$$\dot{x} = \text{sign} \left(-\frac{1}{2} x^2 \right), \quad x(0) = 0.$$

Оно имеет особое решение $x(t) = 0$ с порождающим управлением $u(t) = 0$.

Кроме того, уравнение имеет неособое решение $x(t) = -t$, соответствующее улучшающему управлению $u(t) = -1$. Более того, это оптимальное управление.

Пример 1.6 (отсутствие улучшения).

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2(t) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 2].$$

В данном случае

$$H = \psi u - \frac{1}{2} x^2, \quad u^* = \text{sign } \psi,$$

$$\dot{\psi} = x, \quad \psi(2) = 0, \quad \dot{\Psi} = 1, \quad \Psi(2) = 0.$$

Рассмотрим управление $u(t) = -1$, $t \in [0, 2]$. Соответствующие траектории

$$x(t, u) = 1 - t, \quad \psi(t, u) = t - \frac{t^2}{2}, \quad \Psi(t, u) = t - 2.$$

Данное управление не удовлетворяет принципу максимума.

Для его улучшения применим первую процедуру. Вспомогательная вектор-функция имеет вид

$$p(t, u, x) = (t-2)x + \frac{t^2}{2} - 2t + 2.$$

Тогда $v^*(x, t) = \text{sign } p(t, u, x)$ и необходимо решить уравнение

$$\dot{x} = v^*(x, t), \quad x(0) = 1.$$

Его единственное решение $x(t) = 1 - \frac{t}{2}$ является особым режимом на $T(p(t, u, x(t)) \equiv 0)$. Управление на выходе — $v(t) = -\frac{1}{2}$. При этом улучшение отсутствует: $\Phi(v) = \Phi(u)$.

Данная ситуация вовсе не означает исчерпывания процесса улучшения. Если к полученному управлению $v(t) = -\frac{1}{2}$ применить ту же первую процедуру, то улучшение произойдет.

1.2.4. Метод приращений

Рассмотрим общую квадратичную задачу (1.15)–(1.17). Объединим описанные в п.1.2.2 процедуры улучшения в метод приращений, который при тех же вычислительных затратах, что и каждая процедура в отдельности, обеспечивает двойное улучшение по функционалу.

Пусть $(u(t), x(t, u))$ $t \in T$ — допустимая пара в задаче (1.15)–(1.17). Используя вторую процедуру улучшения, получим управление $v(t)$, вектор-функцию $p(t, v, x(t, u))$ и матричную функцию $\Psi(t, v)$. При этом $\Phi(v) \leq \Phi(u)$.

Далее, применим первую процедуру улучшения к управлению v . Для этого необходимо оперировать с вектор-функцией

$$p(t, v, x) = \psi(t, v) + \Psi(t, v)(x - x(t, v)),$$

в выражении которой траектории $x(t, v)$, $\psi(t, v)$ неизвестны. Чтобы избежать дополнительного интегрирования фазовой и сопряженной систем для управления v , будем использовать полученное в п. 1.2.1 соотношение (1.28). Из него следует, что вектор-функция $p(t, v, x)$ определяется альтернативной формулой

$$p(t, v, x) = p(t, v, x(t, u)) + \Psi(t, v)(x - x(t, u)),$$

в которой правая часть для любого $x \in R^n$ в рамках имеющейся информации известна.

Остается завершить первую процедуру для управления v интегрированием фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u^*(p(t, v, x), x, t), t), x(t_0) = x^0.$$

В результате получим управление $w(t) = u^*(p(t, v, x(t)), x(t), t)$, $t \in T$ вместе с фазовой траекторией $x(t) = x(t, w)$. При этом имеет место второе улучшение: $\Phi(w) \leq \Phi(v)$. Общие вычислительные затраты — две векторные задачи Коши $(p(t, v, x(t, u)), x(t, w))$ и одна матричная задача Коши $(\Psi(t, v))$. Отметим, что для промежуточного управления $v(t)$ фазовая траектория и значение функционала не подсчитываются.

Проведем полное описание метода в итерационной форме. Пусть на k -том шаге имеется допустимая пара $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$ и вычислено значение функционала $\Phi(u^k)$. Найдем решение $p^k(t)$, $\Psi^k(t)$ векторно-матричной задачи Коши при $u^* = u^*(p, x^k(t), t)$

$$\dot{p} = -A(u^*, t)^T p + a(u^*, t) + Q(u^*, t)x^k(t) - \Psi \Delta_{u^*} f(x^k(t), u^k(t), t),$$

$$\dot{\Psi} = -A(u^*, t)^T \Psi - \Psi A(u^*, t) + Q(u^*, t),$$

$$p(t_1) = -(c + Dx^k(t_1)), \Psi(t_1) = -D$$

и обозначим управление $v^k(t) = u^*(p^k(t), x^k(t), t)$, $t \in T$.

Образует вектор-функцию

$$p^k(x, t) = p^k(t) + \Psi^k(t)(x - x^k(t)),$$

найдем решение $x^{k+1}(t)$, $t \in T$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u^*(p^k(x, t), x, t), t), x(t_0) = x^0$$

и сформируем управление $u^{k+1}(t) = u^*(p^k(x, t), x, t)$ при $x = x^{k+1}(t)$.

В итоге получаем допустимую пару $(u^{k+1}(t), x^{k+1}(t))$. Подсчитаем значение функционала $\Phi(u^{k+1})$. Итерация закончена.

Отметим, что в ходе итерации метода происходит двойное улучшение по функционалу: $\Phi(u^{k+1}) \leq \Phi(v^k) \leq \Phi(u^k)$. Трудоемкость итерации — две векторные и одна матричная задачи Коши.

Выделим характерные частные случаи задачи (1.15)–(1.17). Пусть задача является линейной, т.е. $D = 0$, $Q = 0$. Тогда матричная функция Ψ исчезает ($\Psi = 0$), и описанная процедура превращается в метод приращений для линейной задачи (п.1.1.5).

Пусть в задаче (1.15)–(1.17) матричные функции $A(u, t)$, $Q(u, t)$ в системе и функционале не зависят от управления: $A(u, t) \equiv A(t)$,

$Q(u, t) \equiv Q(t)$, (стандартная квадратичная задача). Тогда матричная функция $\Psi(t, u)$ также теряет эту зависимость: $\Psi(t, u) \equiv \Psi(t)$. Это значит, что в методе приращений матричная задача Коши решается только один раз (до итерационной процедуры), что существенно экономит вычислительные затраты на каждой итерации. Отметим, что такая ситуация имеет место для выпуклой задачи (1.15)–(1.17), (1.18).

Вопрос о сходимости метода приращений применительно к линейно-квадратичной задаче решается в полной аналогии с линейным вариантом (п.1.1.5).

1.3. КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА. ФАЗОВАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Продолжим нелокальный анализ квадратичной задачи оптимального управления

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \langle c, x(t_1) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t_1), Dx(t_1) \rangle + \\ & + \int_T \left(b_0(u, t) + \langle a(u, t), x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t), Q(u, t)x(t) \rangle \right) dt, \quad (1.33) \\ \dot{x} = & A(u, t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T. \end{aligned}$$

Слабым местом построенных выше процедур улучшения является возможность стабилизации (отсутствие улучшения) на управлениях, не удовлетворяющих принципу максимума. Такую ситуацию порождают особые решения фазовой либо сопряженной систем. Как следствие, трудно сформулировать в общем случае регулярные условия улучшения или условия оптимальности, связанные с данными процедурами. Более того, по существу, открытым остается вопрос о сходимости соответствующих методов даже на уровне выпуклых квадратичных задач.

Для преодоления этих недостатков в данном разделе проводится фазовая регуляризация целевого функционала в задаче (1.33) с последующим применением стандартной схемы исследования. В результате появляется оценка уменьшения функционала, что позволяет получить нелокальные условия оптимальности (условия неулучшения), дополняющие и усиливающие принцип максимума в рассматриваемом классе задач. При этом улучшается любое управление, не удовлетворяющее принципу максимума. Кроме того, обеспечивается сходимость соответствующих итерационных методов в общих и выпуклых задачах вида (1.33).

1.3.1. Первая процедура улучшения и условия оптимальности

Пусть $u^0(t), x(t, u^0), t \in T$ — допустимая пара в задаче (1.33). Введем вспомогательный функционал

$$\Phi_\alpha(u, u^0) = \Phi(u) + \alpha J(u, u^0), \quad \alpha \geq 0, \quad (1.34)$$

где $J(u, u^0)$ — среднеквадратичное фазовое отклонение

$$J(u, u^0) = \frac{1}{2} \left(\|x(t_1, u) - x(t_1, u^0)\|^2 + \int_T \|x(t, u) - x(t, u^0)\|^2 dt \right)$$

Функционал Φ_α определяет обычную процедуру регуляризации в экстремальных задачах [14]. В данном случае она связана с базовым управлением u^0 и использует только фазовое приращение $\Delta x(t, u^0)$. Другой вариант регуляризации (по приращению $\Delta u^0(t)$) рассматривается в разделе 1.4. Для задач оптимального управления подобная структура регуляризации использовалась, например, в [7] как средство обеспечения локальности варьирования. С другой стороны процедуру (1.34) можно рассматривать как способ варьирования задачи (1.33) вдоль допустимого процесса $(u^0(t), x(t, u^0))$.

Поставим задачу улучшения управления u^0 по функционалу Φ_α : найти управление $v^\alpha \in V$ с условием $\Phi_\alpha(v^\alpha, u^0) \leq \Phi_\alpha(u^0, u^0)$. При этом управление v^α обеспечивает уменьшение функционала Φ с оценкой

$$\Phi(v^\alpha) - \Phi(u^0) \leq -\alpha J(v^\alpha, u^0). \quad (1.35)$$

Отметим, что функционал Φ_α сохраняет свойство квадратичности исходного функционала, поэтому для построения процедур улучшения можно использовать предыдущие результаты (раздел 1.2). Кроме того, фазовая регуляризация не изменяет структуру задачи относительно управления.

Определим необходимые в данном случае конструкции применительно к α -функционалу:

функция Понтрягина

$$H_\alpha(\psi, x, u, t) = H(\psi, x, u, t) - \frac{1}{2} \alpha \|x - x(t, u^0)\|^2,$$

векторная сопряженная система $(\psi^\alpha(t, u))$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = & -A(u, t)^T \psi + a(u, t) + Q(u, t)x(t, u) + \\ & + \alpha(x(t, u) - x(t, u^0)), \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\psi(t_1) = -(c + Dx(t_1, u)) - \alpha(x(t_1, u) - x(t_1, u^0)),$$

матричная сопряженная система $(\Psi_\alpha(t, u))$

$$\dot{\Psi} = -A(u, t)^T \Psi - \Psi A(u, t) + Q(u, t) + \alpha E, \quad (1.37)$$

$$\Psi(t_1) = -D - \alpha E.$$

Отметим, что при $u = u^0$ решение системы (1.36) не зависит от α и совпадает с сопряженной траекторией $\psi(t, u^0)$, соответствующей управлению u^0 в исходной задаче (1.33): $\psi^\alpha(t, u^0) = \psi(t, u^0)$. Далее, обозначая через $\Psi_\alpha(t, u)$ решение симметричной матричной системы (1.37), введем вспомогательную вектор-функцию

$$p^\alpha(t, u^0, x) = \psi(t, u^0) + \Psi_\alpha(t, u^0)(x - x(t, u^0)).$$

Первая формула приращения функционала Φ_α на управлениях u, u^0 имеет вид

$$\Delta\Phi_\alpha(u, u^0) = - \int_T \Delta_{u(t)} H(p^\alpha(t, u^0, x(t, u)), x(t, u), u^0(t), t) dt. \quad (1.38)$$

Данное представление является конструктивным и служит основой для построения α -параметрической процедуры улучшения управления u^0 в классе максимизирующих управлений

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{u \in U} H(\psi, x, u, t), \quad \psi, x \in R^n; t \in T.$$

Первая процедура улучшения:

1) найдем решения $\psi(t, u^0), \Psi_\alpha(t, u^0)$ сопряженных систем (1.36), (1.37) при $u = u^0$, образуем вектор-функцию $p^\alpha(t, u^0, x)$ и управление

$$v^*(x, t, \alpha) = u^*(p^\alpha(t, u^0, x), x, t);$$

2) найдем решение $x^\alpha(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, v^*(x, t, \alpha), t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (1.39)$$

вместе с управлением $v^\alpha(t) = v^*(x^\alpha(t), t, \alpha)$.

Понятно, что $x^\alpha(t) = x(t, v^\alpha)$, $t \in T$, причем управление v^α определяется экстремальным соотношением

$$v^\alpha(t) = \arg \max_{u \in U} H(p^\alpha(t, u^0, x^\alpha(t)), x^\alpha(t), u, t). \quad (1.40)$$

Следовательно, на основании формулы (1.38) при $u = v^\alpha$ имеет место улучшение $\Delta\Phi_\alpha(v^\alpha, u^0) \leq 0$, т.е. управление v^α для любого $\alpha \geq 0$ обеспечивает не возрастание функционала $\Phi(u)$ с оценкой (1.35).

Специфика процедуры 1), 2) состоит в том, что фазовая система (1.39) за счет управления v^* является, вообще говоря, разрывной по состоянию x . Поэтому задача Коши (1.39) может иметь неединственное решение $x^\alpha(t)$, что приводит к множеству управлений $v^\alpha(t)$ на выходе процедуры. Этот факт имеет существенное значение в плане возможностей улучшения.

Обсудим качественные характеристики процедуры 1), 2). Введем в рассмотрение множество $V_\alpha^1(u^0)$ управлений $v^\alpha(t)$ на выходе первой процедуры улучшения. Каждое управление этого множества определяется условием максимума (1.40).

Сформулируем **принцип максимума** для управления u^0 в данной терминологии: для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче (1.33) необходимо, чтобы $u^0 \in V_\alpha^1(u^0)$ хотя бы для одного $\alpha \geq 0$.

Действительно, если для некоторого $\alpha \geq 0$ $v^\alpha(t) = u^0(t)$, $t \in T$, то $x^\alpha(t) = x(t, u^0)$. Поскольку $p^\alpha(t, u^0, x(t, u^0)) = \psi(t, u^0)$, то из условия (1.40) получаем принцип максимума

$$u^0(t) = \arg \max_{u \in U} H(\psi(t, u^0), x(t, u^0), u, t), \quad t \in T. \quad (1.41)$$

Обратно, если выполнен принцип максимума (1.41), то условие (1.40) справедливо для любого $\alpha \geq 0$ при $v^\alpha(t) = u^0$, $x^\alpha(t) = x(t, u^0)$. Это значит, что $u^0 \in V_\alpha^1(u^0)$.

Сформулируем теперь условие оптимальности (условие неулучшения), лежащее в основе процедуры 1), 2). Предварительно внесем следующее предположение регулярности: если $v^\alpha \neq u^0$, $\alpha > 0$, то $J(v^\alpha, u^0) \neq 0$ (если управления $v^\alpha(t)$, $u^0(t)$, $t \in T$ не совпадают, то соответствующие фазовые траектории $x(t, v^\alpha)$, $x(t, u^0)$ также не совпадают).

Условие A_1 . Для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче (1.33) необходимо, чтобы оно было единственным управлением на выходе процедуры 1), 2) для всех $\alpha > 0$: $V_\alpha^1(u^0) = \{u^0\}$, $\alpha > 0$.

Справедливость утверждения вполне очевидна. Если для некоторого $\alpha > 0$ на выходе процедуры имеется управление $v^\alpha \neq u^0$, то с учетом условия регулярности на основании оценки (1.35) имеет место строгое улучшение $\Phi(v^\alpha) < \Phi(u^0)$.

Приведем альтернативные формулировки условий оптимальности в терминах фазовой траектории $x(t, u^0)$.

Принцип максимума. Для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче (1.33) необходимо, чтобы траектория $x(t, u^0)$ была решением задачи Коши (1.39) хотя бы для одного $\alpha \geq 0$.

Условие A_1 . Для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче (1.33) необходимо, чтобы траектория $x(t, u^0)$ была единственным решением задачи Коши (1.39) для всех $\alpha > 0$.

Отметим, что данная интерпретация принципа максимума и условие A_1 носят вполне конструктивный характер. Их невыполнение непосредственно связано с нелокальным улучшением управления u^0 : управление $v^\alpha \neq u^0$ является улучшающим с оценкой (1.35).

Понятно, что принцип максимума является следствием условия A_1 . Это значит, что процедура 1), 2) может улучшать управления, удовлетворяющие принципу максимума (это произойдет в случае, когда принцип максимума выполнен, а условие A_1 нет). Такое свойство реализуется через возможную неединственность решения системы (1.39), которая в свою очередь связана с попаданием фазовой траектории на многообразие разрыва правой части (поверхность переключения управления). При этом отметим, что решение системы (1.39), проходящее по поверхности разрыва (особое решение, скользящий режим), определяется естественным образом через дифференцирование по времени функции переключения.

Отметим возможную патологию: система (1.39) не имеет решения на T . Это означает, что управление $u^0(t)$ не удовлетворяет принципу максимума. В этом особом случае процедура 1), 2) не действует и нужно перейти на стандартные способы локального улучшения.

Приведем иллюстрирующие примеры.

Пример 1.7 (улучшение управления, удовлетворяющего принципу максимума).

$$\Phi(u) = -x(2) + 2 \int_0^2 x(t)(2 - 3u(t))dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = 2(u - 1)t, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [0, 1], \quad t \in T.$$

В данном случае функция $H = 2\psi(u - 1)t - 2x(2 - 3u)$, сопряженные уравнения: $\dot{\psi} = 2(2 - 3u)$, $\psi(2) = 1$, $\dot{\Psi} = \alpha$, $\Psi(2) = -\alpha$, $\alpha \geq 0$. Следовательно, $\Psi_\alpha(t) = \alpha(t - 3)$. Максимизирующее управление

$$u^*(\psi, x, t) = \begin{cases} 0, & H_u(\psi, x, t) < 0, \\ 1, & H_u(\psi, x, t) > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим управление

$$u^0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Ему соответствуют траектории

$$x(t, u^0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - t^2, & 1 < t \leq 2; \end{cases}$$

$$\psi(t, u^0) = \begin{cases} -2t - 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 4t - 7, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что управление $u^0(t)$ строго удовлетворяет принципу максимума ($u^0(t) = u^*(\psi(t, u^0), x(t, u^0), t)$, $t \in T$) с особой точкой $t = 1$ (точка переключения).

Проверим условие A_1 . В данном случае

$$p^\alpha(t, u^0, x) = \begin{cases} -1 - 2t + \alpha(t - 3)(x - 1), & 0 \leq t \leq 1, \\ 4t - 7 + \alpha(t - 3)(x - 2 + t^2), & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Функция переключения управления $v^*(x, t, \alpha)$ имеет вид

$$g_\alpha(x, t) = \begin{cases} -4t^2 - 2t + 2t\alpha(t - 3)(x - 1) + 6x, & 0 \leq t \leq 1, \\ 8t^2 - 14t + 2t\alpha(t - 3)(x + t^2 - 2) + 6x, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

($g_\alpha(x, t) = H_u(p^\alpha(t, u^0, x), x, t)$). Решим уравнение

$$\dot{x} = 2(v^* - 1)t, \quad x(0) = 1. \quad (1.42)$$

Для $t \in [0, 1]$ решение единственно и совпадает с $x(t, u^0)$. При $t = 1$ траектория попадает на линию разрыва управления $v^*(g_\alpha(x(1, u^0), 1) = 0)$ и появляется возможность неединственности решения. Функция $x(t, u^0)$ является решением уравнения (1.42), ибо $g_\alpha(x(t, u^0), t) < 0$, $t \in (1, 2]$, независимо от α . Исследуем альтернативную возможность $g_\alpha(x^\alpha(t), t) > 0$, $t \in (1, 2]$. Это значит, что $v^* = 1$, т.е. $x^\alpha(t) = 1$. Тогда $g_\alpha(x^\alpha(t), t) = 8t^2 - 14t + 2t\alpha(t - 3)(t^2 - 1)$. Нетрудно проверить, что при $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{12}$ функция переключения положительна: $g_\alpha(x^\alpha(t), t) > 0$, $t \in (1, 2]$.

Таким образом, фазовое уравнение (1.42) для указанных значений α имеет решение $x^\alpha(t) = 1$ ($v^\alpha(t) = 1$), отличное от $x(t, u^0)$. Это значит, что условие A_1 не выполнено (управление u^0 не оптимально), причем управление $v^\alpha(t) = 1$ является улучшающим.

Отметим, что уравнение (1.42) имеет также особое решение ($g_\alpha(x^\alpha(t), t) = 0$, $t \in [1, 2]$), которое обеспечивает улучшение для $\alpha > 0$.

Пример 1.8 (улучшение особого управления).

$$\Phi(u) = - \int_T x(t)u(t)dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

В данном случае $H = \psi u + ux$, $\dot{\psi} = -u$, $\psi(1) = 0$. Максимизирующее управление $u^*(\psi, x) = \text{sign}(\psi + x)$. Рассмотрим управление $u^0 = 0$. Ему соответствуют траектории $x(t, u^0) = 0$, $\psi(t, u^0) = 0$. Данное управление является особым: $H_u(\psi(t, u^0), x(t, u^0), t) = 0$, т.е. удовлетворяет принципу максимума с вырождением.

Проверим условие A_1 . Вторая сопряженная функция имеет вид $\Psi_\alpha(t, u^0) = \alpha(t-2)$, $\alpha \geq 0$. При этом $p^\alpha(t, u^0, x) = \alpha(t-2)x$, $v^*(x, t, \alpha) = \text{sign}(\alpha(t-2) + 1)x$. Рассмотрим уравнение $\dot{x} = v^*$, $x(0) = 0$. Оно имеет особое решение $x^0(t) = 0$ при любом $\alpha \geq 0$. Соответствующее управление $u^0 = 0$. Кроме того, для $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ (когда $\alpha(t-2) + 1 > 0$, $t \in (0, 1]$) уравнение имеет еще два решения $x^\alpha(t) = \pm t$ с порождающими управлениями $v^\alpha(t) = \pm 1$.

Следовательно, условие A_1 не выполнено, и управление u^0 улучшается управлениями $v^\alpha(t) = \pm 1$, $t \in [0, 1]$ при $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$.

Пример 1.9 (уравнение (1.39) не имеет решения).

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2(t) - u^2(t))dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

В данном случае $H = \psi u - \frac{1}{2}(x^2 - u^2)$, $\dot{\psi} = x$, $\psi(1) = 0$. Максимизирующее управление

$$u^*(\psi) = \begin{cases} \text{sign } \psi, & \psi \neq 0, \\ \pm 1, & \psi = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим управление $u^0 = 0$ с траекториями $x(t, u^0) = 0$, $\psi(t, u^0) = 0$.

Реализуем условие A_1 . Вторая сопряженная функция определяется уравнением $\dot{\Psi} = 1 + \alpha$, $\Psi(1) = -\alpha$, т.е. $\Psi_\alpha(t, u^0) = (1 + \alpha)t - 1 - 2\alpha$. Тогда $p^\alpha(t, u^0, x) = \Psi_\alpha(t, u^0)x$, $v^*(x, t, \alpha) = u^*(p^\alpha(t, u^0, x))$. Отметим, что $\Psi_\alpha(t, u^0) < 0$ для $\alpha \geq 0$, $t \in [0, 1]$. Нетрудно видеть,

что уравнение $\dot{x} = v^*$, $x(0) = 0$ не имеет решений на $[0, 1]$. Это значит, что управление u^0 не удовлетворяет принципу максимума (тем более условию A_1). При этом вопрос об улучшающем управлении остается открытым.

По сути ситуации отметим, что отсутствие решения связано с невыпуклостью правой части уравнения $\dot{x} = v^*$ при $x = 0$: $v^* = \pm 1$. Это нарушает основное условие теоремы существования решения разрывных систем [6, 46]. Дополнительная патология состоит в том, что задача оптимального управления в данном примере также не имеет решения. В этой связи интересно отметить, что численное интегрирование уравнения $\dot{x} = v^*$, $x(0) = 0$, например, методом Эйлера приводит к минимизирующей последовательности управлений в данной задаче (пошаговое переключение ± 1), если шаг интегрирования последовательно уменьшать.

Пример 1.10 (эффект регуляризации).

$$\Phi(u) = \int_0^1 x(t)(u(t)-1)dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

Здесь

$$H = \psi u - x(u - 1), \quad \dot{\psi} = u - 1, \quad \psi(1) = 0, \quad u^*(\psi, x) = \text{sign}(\psi - x).$$

Рассмотрим управление $u^0 = 0$ с траекториями $x(t, u^0) = 1$, $\psi(t, u^0) = 1 - t$. В данном случае

$$p^\alpha(t, u^0, x) = 1 - t + \alpha(t - 2)(x - 1), \quad v^*(x, t, \alpha) = \text{sign } g_\alpha(x, t),$$

$$g_\alpha(x, t) = p^\alpha(t, u^0, x) - x.$$

Найдем решение уравнения $\dot{x} = v^*$, $x(0) = 1$. Начальная точка лежит на линии переключения: $g_\alpha(x(0), 0) = 0$. Нетрудно проверить, что уравнение не имеет неособых решений с условием $g_\alpha(x(t), t) \neq 0$, $t \in (0, 1]$. Единственное решение является особым и определяется условием $g_\alpha(x(t), t) = 0$, $t \in (0, 1]$. Отсюда

$$x^\alpha(t) = 1 - \frac{t}{1 - \alpha(t - 2)}.$$

Соответствующее управление

$$v^\alpha(t) = \frac{-1 - 2\alpha}{(1 + 2\alpha - \alpha t)^2}$$

является допустимым для всех $\alpha \geq 0$, $t \in [0, 1]$. Поскольку $v^\alpha \neq u^0$, $\alpha \geq 0$, то управление u^0 не удовлетворяет принципу максимума. Однако при $\alpha = 0$ (когда регуляризация отсутствует) улучшения не происходит: $\Phi(v^0) = \Phi(u^0)$. Если $\alpha > 0$, то в силу оценки (1.35) имеет место строгое улучшение: $\Phi(v^\alpha) < \Phi(u^0)$.

В этом состоит один из эффектов регуляризации: при $\alpha = 0$ особое решение системы (1.39), отличное от $x(t, u^0)$, не дает улучшения по функционалу. При $\alpha > 0$ строгое улучшение гарантируется оценкой (1.35) (вот почему условие A_1 сформулировано для $\alpha > 0$).

1.3.2. Связь с условием оптимальности особых управлений

Продолжим работу с условием A_1 . Установим его связь с известным условием Габасова оптимальности особых управлений [17]. Для упрощения выкладок предположим, что задача (1.33) является линейной по управлению с модульным ограничением: $|u(t)| \leq 1$, $t \in T$ (линейно-квадратичная задача). В этой ситуации максимизирующее управление имеет вид

$$v^*(x, t, \alpha) = \text{sign } g_\alpha(x, t), \quad g_\alpha(x, t) = H_u(p^\alpha(t, u^0, x), x, t),$$

$$p^\alpha(t, u^0, x) = \psi(t, u^0) + \Psi_\alpha(t, u^0)(x - x(t, u^0)).$$

Предположим, что управление $u^0(t)$ является особым на промежутке $T_0 = (\tau_0, \tau_1) \subset T$, т.е. по определению $H_u(\psi(t, u^0), x(t, u^0), t) = 0$, $t \in T_0$. Поскольку $p^\alpha(t, u^0, x(t, u^0)) = \psi(t, u^0)$, то $g_\alpha(x(t, u^0), t) = 0$, $t \in T_0$. Это значит, что траектория $x(t, u^0)$ является особым решением фазовой системы (1.39) на T_0 .

Допустим, что на управлении u^0 условие A_1 выполнено, т.е. для любого $\alpha > 0$ траектория $x(t, u^0)$ является единственным решением фазовой системы (1.39). Выделим точку $\tau \in T_0$, в которой управление $u^0(t)$ непрерывно справа, и предположим, что $u^0(\tau) \neq 1$. Рассмотрим фазовую систему $\dot{x} = f(x, v^*, t)$ с начальным условием $x(\tau) = x(\tau, u^0)$ в правой окрестности точки τ : $t \in [\tau, \tau + \epsilon)$, $\epsilon > 0$. Поскольку $x(t, u^0)$ — единственное решение этой системы на $[\tau, \tau + \epsilon)$, то выбор управления $v(t) = 1$, $t \in [\tau, \tau + \epsilon)$, приводит к неравенству $g_\alpha(x(t, v), t) \leq 0$, $t \in [\tau, \tau + \epsilon)$, $\alpha > 0$ (в случае $g_\alpha(x(t, v), t) > 0$ вектор-функция $x(t, v)$ является решением фазовой системы на $[\tau, \tau + \epsilon)$, что невозможно в силу условия A_1). Таким образом, имеет место неравенство

$$\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} g_{\alpha}(x(t, v), t) dt \leq 0, \quad v(t) = 1, \quad \tau \leq t < \tau + \varepsilon.$$

Заметим, что если $u^0(\tau) = 1$, то следует выбрать $v(t) = -1$, $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$. При этом должно быть $g_{\alpha}(x(t, v), t) \geq 0$. Дальнейший ход рассуждений сохраняется.

Представим интегральное неравенство в исходных обозначениях

$$\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} H_u(\psi(t, u^0) + \Psi_{\alpha}(t, u^0)(x(t, v) - x(t, u^0)), x(t, v), t) dt \leq 0. \quad (1.43)$$

Остается выделить главный член по ε в левой части. Фазовое приращение $\Delta x(t) = x(t, v) - x(t, u^0)$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \Delta x(\tau) + \dot{\Delta x}(\tau)(t - \tau) + o(t - \tau) = \\ &= f_u(x(\tau, u^0), \tau)(v(\tau) - u^0(\tau))(t - \tau) + o(t - \tau). \end{aligned}$$

Для функции под знаком интеграла в (1.43) используем разложение

$$\begin{aligned} g_{\alpha}(x(t, v), t) &= H_u(\psi(t, u^0), x(t, u^0), t) + \\ &+ \langle f_u(x(t, u^0), t), \Psi_{\alpha}(t, u^0) \Delta x(t) \rangle + \\ &+ \langle H_{ux}(\psi(t, u^0), x(t, u^0), t), \Delta x(t) \rangle + o(\|\Delta x(t)\|). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $H_u(\psi(t, u^0), x(t, u^0), t) = 0$, получаем выражение для главного члена левой части в (1.43)

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 B_{\alpha}(\tau, u^0)(v(\tau) - u^0(\tau)),$$

$$B_{\alpha}(\tau, u^0) = \langle f_u[\tau, u^0], \Psi_{\alpha}(\tau, u^0) f_u[\tau, u^0] \rangle + \langle H_{ux}[\tau, u^0], f_u[\tau, u^0] \rangle.$$

Здесь

$$f_u[\tau, u^0] = f_u(x(\tau, u^0), \tau), \quad H_{ux}[\tau, u^0] = H_{ux}(\psi(\tau, u^0), x(\tau, u^0), \tau).$$

Поскольку $v(\tau) - u^0(\tau) = 1 - u^0(\tau) > 0$, то неравенство $B_{\alpha}(\tau, u^0) \leq 0$, $\tau \in T_0$, $\alpha > 0$, является следствием (1.43) (условия A_1). Далее заметим, что $\Psi_{\alpha}(t, u^0) = \Psi_0(t, u^0) + \alpha \Psi(t, u^0)$, где матричные функции $\Psi_0(t, u^0)$, $\Psi(t, u^0)$ определяются уравнениями

$$\dot{\Psi}_0 = -A(u^0, t)^T \Psi_0 - \Psi_0 A(u^0, t) + Q(u^0, t), \quad \Psi_0(t_1) = -D,$$

$$\dot{\Psi} = -A(u^0, t)^T \Psi - \Psi A(u^0, t) + E, \quad \Psi(t_1) = -E.$$

Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу $F(t, u^0)$ с помощью уравнения

$$\dot{F} = A(u^0, t)F, \quad F(t_1) = E.$$

Тогда матричная функция $\Psi(t, u^0)$ представляется по формуле Коши

$$\Psi(t, u^0) = -F^{-1}(t, u^0)^T \left(E + \int_t^{t_1} F(\tau, u^0)^T F(\tau, u^0) d\tau \right) F^{-1}(t, u^0).$$

Отсюда следует, что $\Psi(t, u^0)$, $t \in T$ — отрицательно определенная матрица, т.е.

$$\langle y, \Psi_\alpha(t, u^0)y \rangle \leq \langle y, \Psi_0(t, u^0)y \rangle, \quad \alpha > 0, \quad y \in R^n.$$

Из неравенства $B_\alpha(\tau, u^0) \leq 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ получаем $B_0(\tau, u^0) \leq 0$, $\tau \in T_0$. В развернутой форме

$$\langle f_u[\tau, u^0], \Psi_0(\tau, u^0)f_u[\tau, u^0] \rangle + \langle H_{ux}[\tau, u^0], f_u[\tau, u^0] \rangle \leq 0.$$

Это известное условие Габасова для оптимальности особых управлений, которое в данном случае получено как следствие условия A_1 .

Остается заметить, что в силу указанного выше свойства отрицательной определенности матрицы $\Psi(t, u^0)$ регуляризованное условие $B_\alpha(\tau, u^0) \leq 0$ является следствием неравенства $B_0(\tau, u^0) \leq 0$, т.е. неравенства $B_\alpha(\tau, u^0) \leq 0$ и $B_0(\tau, u^0) \leq 0$ эквивалентны. Таким образом, процедура регуляризации (замена $\Psi_0(t, u^0)$ на $\Psi_\alpha(t, u^0)$) не усиливает условия Габасова, которое является следствием (результатом локализации) условия A_1 .

1.3.3. Вторая процедура улучшения и условия оптимальности

Рассмотрим задачу (1.33) с регуляризацией (1.34). Возьмем за основу вторую формулу приращения функционала Φ_α на паре u, u^0

$$\Delta\Phi_\alpha(u, u^0) = - \int_T \Delta_{u(t)} H(p^\alpha(t, u, x(t, u^0)), x(t, u^0), u^0(t), t) dt, \quad (1.44)$$

$$p^\alpha(t, u, x) = \psi^\alpha(t, u) + \Psi_\alpha(t, u)(x - x(t, u)).$$

Учитывая сопряженные системы (1.36), (1.37), найдем дифференциальное описание вектор-функции $q^\alpha(t) = p^\alpha(t, u, x(t, u^0))$. Для фазового приращения $\Delta x(t) = x(t, u) - x(t, u^0)$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= A(u, t)x(t, u) - A(u^0, t)x(t, u^0) + \Delta_u b(u^0, t) = \\ &= A(u, t)\Delta x(t) + \Delta_u f(x(t, u^0), u^0, t).\end{aligned}\quad (1.45)$$

Непосредственным дифференцированием в силу уравнений (1.36), (1.37), (1.45) получаем

$$\begin{aligned}\dot{q}^\alpha(t) &= -A(u, t)^T \Psi^\alpha(t, u) + a(u, t) + Q(u, t)x(t, u) + \alpha \Delta x(t) + \\ &+ (A(u, t)^T \Psi_\alpha(t, u) + \Psi_\alpha(t, u)A(u, t) - Q(u, t) - \alpha E)\Delta x(t) - \\ &- \Psi_\alpha(t, u)(A(u, t)\Delta x(t) + \Delta_u f(x(t, u^0), u^0, t)) = \\ &= -A(u, t)^T q^\alpha(t) + a(u, t) + Q(u, t)x(t, u^0) - \\ &- \Psi_\alpha(t, u)\Delta_u f(x(t, u^0), u^0, t).\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}q^\alpha(t_1) &= -(c + Dx(t_1, u)) - \alpha(x(t_1, u) - x(t_1, u^0)) + \\ &+ (-D - \alpha E)(x(t_1, u^0) - x(t_1, u)) = -c - Dx(t_1, u^0).\end{aligned}$$

Таким образом, вектор-функция $p^\alpha(t, u, x(t, u^0))$ в формуле (1.44) является решением комбинированной сопряженной системы

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -A(u, t)^T p + a(u, t) + Q(u, t)x(t, u^0) - \\ &- \Psi_\alpha(t, u)\Delta_u f(x(t, u^0), u^0(t), t), \\ p(t_1) &= -(c + Dx(t_1, u^0)).\end{aligned}\quad (1.46)$$

Отметим, что система (1.46) не зависит от траектории $x(t, u)$, что открывает возможность конструктивного использования формулы (1.44).

Вторая процедура улучшения:

- 1) образуем экстремальное управление $v^*(p, t) = u^*(p, x(t, u^0), t)$,
- 2) найдем решение $p^\alpha(t)$, $\Psi_\alpha(t)$ сопряженных систем (1.46), (1.37) при $u = v^*(p, t)$ вместе с управлением $v^\alpha(t) = v^*(p^\alpha(t), t)$, $t \in T$.

Понятно, что выходное управление $v^\alpha(t)$ характеризуется соотношением

$$v^\alpha(t) = \arg \max_{u \in U} H(p^\alpha(t, v^\alpha, x(t, u^0)), x(t, u^0), u, t),$$

поэтому на основании формулы (1.44) при $u = v^\alpha$ имеет место улучшение $\Delta \Phi_\alpha(v^\alpha, u^0) \leq 0$ с оценкой уменьшения (1.35) для функционала $\Phi(u)$.

В данном случае разрывными относительно переменной p являются сопряженные системы (1.46), (1.37).

Сформулируем условия оптимальности управления u^0 , связанные с данной процедурой.

Обозначим через $V_\alpha^2(u^0)$ множество управлений $v^\alpha(t)$, $t \in T$ на выходе второй процедуры и предположим выполнение условия регулярности: $v^\alpha \neq u^0$, $\alpha > 0 \Rightarrow J(v^\alpha, u^0) \neq 0$.

Принцип максимума. Для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче (1.33) необходимо, чтобы $u^0 \in V_\alpha^2(u^0)$ хотя бы для одного $\alpha \geq 0$.

Условие A_2 . Для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче (1.33) необходимо, чтобы $V_\alpha^2(u^0) = \{u^0\}$ для всех $\alpha > 0$.

Для обоснования этих утверждений достаточно отметить, что в случае $v^\alpha = u^0$, $\alpha \geq 0$ единственным решением системы (1.46) при $u = v^\alpha$ является сопряженная траектория $\psi(t, u^0)$. Если $v^\alpha \neq u^0$, $\alpha > 0$, то в силу оценки (1.35) управление v^α является улучшающим.

Приведем альтернативные формулировки в терминах сопряженной траектории $\psi(t, u^0)$.

Принцип максимума. Для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче (1.33) необходимо, чтобы траектория $\psi(t, u^0)$ являлась решением системы (1.46) при $u = v^*(p, t)$ хотя бы для одного $\alpha \geq 0$.

Условие A_2 . Для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче (1.33) необходимо, чтобы траектория $\psi(t, u^0)$ являлась единственным решением системы (1.46) при $u = v^*(p, t)$ для всех $\alpha > 0$.

Дальнейшие комментарии по поводу взаимосвязи условий оптимальности и возможностей улучшения в рамках второй процедуры полностью аналогичны утверждениям по первой процедуре.

1.3.4. Первый метод последовательных приближений

Построим итерационный метод на основе первой процедуры улучшения.

Зафиксируем параметр регуляризации $\alpha > 0$ и опишем общую итерацию метода. Пусть $k = 0, 1, \dots$, $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$ — допустимая пара в задаче (1.33). Найдем решение $\psi^k(t)$, $\Psi_\alpha^k(t)$ сопряженных систем

$$\dot{\psi} = -A(u^k, t)^T \psi + a(u^k, t) + Q(u^k, t)x^k(t), \quad \psi(t_1) = -c - Dx^k(t_1),$$

$$\dot{\Psi} = -A(u^k, t)^T \Psi - \Psi A(u^k, t) + Q(u^k, t) + \alpha E, \quad \Psi(t_1) = -D - \alpha E$$

и образуем вектор-функцию

$$p_\alpha^k(t, u^k, x) = \psi^k(t) + \Psi_\alpha^k(t)(x - x^k(t)).$$

Найдем решение $x^{k+1}(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, v^k(x, t, \alpha), t), \quad x(t_0) = x^0,$$

где

$$v^k(x, t, \alpha) = u^*(p_\alpha^k(t, u^k, x), x, t).$$

Выделим управление $u^{k+1}(t) = v^k(x^{k+1}(t), t, \alpha)$. В результате получаем допустимую пару $(u^{k+1}(t), x^{k+1}(t))$, $t \in T$, что и завершает итерацию метода.

Соответствующая оценка уменьшения функционала имеет вид

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k) \leq -\alpha J(u^{k+1}, u^k). \quad (1.47)$$

Величина $\delta_k = \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})$ является невязкой принципа максимума для управления u^k :

$$\delta_k = 0 \Rightarrow J(u^{k+1}, u^k) = 0 \Rightarrow x^{k+1}(t) = x^k(t), \quad t \in T,$$

что эквивалентно принципу максимума для управления u^k .

Поскольку функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу на V (множество U ограничено), и последовательность $\Phi(u^k)$, $k = 0, 1, \dots$ монотонно убывает, то имеет место сходимость метода по невязке принципа максимума: $\delta_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Отсюда, в силу оценки (1.47) следует, что отклонения по фазовым траекториям стремятся к нулю: $J(u^{k+1}, u^k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ (здесь существенно, что $\alpha > 0$).

Исследуем вопрос о сходимости метода на уровне выпуклых задач

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \langle c, x(t_1) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t_1), Dx(t_1) \rangle + \\ & + \int_T (b_0(u, t) + \langle a(t), x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t)x(t) \rangle) dt, \\ & \dot{x} = A(t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \end{aligned}$$

$$D \geq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad t \in T.$$

В этом случае матричная функция $\Psi(t, u)$ не зависит от управления, и приращение функционала допускает оценку вида

$$\Delta_v \Phi(u) \geq - \int_T (\langle \Psi(t, u), \Delta_{v(t)} b(u(t), t) \rangle - \Delta_{v(t)} b_0(u(t), t)) dt. \quad (1.48)$$

Первая формула приращения функционала $\Phi_\alpha(u, u^k)$ на паре u^k, u^{k+1} имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_\alpha(u^{k+1}, u^k) = \\ = - \int_T (\langle \Psi^k(t) + \Psi_\alpha(t)(x^{k+1}(t) - x^k(t)), \Delta_{u^{k+1}(t)}b(u^k(t), t) \rangle - \\ - \Delta_{u^{k+1}(t)}b_0(u^k(t), t)) dt. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Сформулируем основное утверждение о сходимости метода.

Теорема 1.1. В выпуклой задаче с оптимальным управлением $u^* \in V$ первый итерационный метод для любого $\alpha > 0$ порождает минимизирующую последовательность управлений: $\Phi(u^k) \rightarrow \Phi(u^*)$, $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу выпуклости задачи на основании оценки (1.48) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq \Phi(u^k) - \Phi(u^*) \leq \\ \leq \int_T (\langle \Psi^k(t), \Delta_{u^*(t)}b(u^k(t), t) \rangle - \Delta_{u^*(t)}b_0(u^k(t), t)) dt. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Согласно построению

$$u^{k+1}(t) = \arg \max_{u \in U} (\langle p_\alpha^k(t, u^k, x^{k+1}(t)), b(u, t) \rangle - b_0(u, t)), \quad t \in T,$$

т.е. выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \langle p_\alpha^k(t, u^k, x^{k+1}(t)), \Delta_{v(t)}b(u^{k+1}(t), t) \rangle - \\ - \Delta_{v(t)}b_0(u^{k+1}(t), t) \leq 0, \quad v(t) \in U. \end{aligned}$$

Используя очевидное представление

$$\Delta_v b(u^{k+1}, t) = \Delta_v b(u^k, t) - \Delta_{u^{k+1}} b(u^k, t),$$

$$\Delta_v b_0(u^{k+1}, t) = \Delta_v b_0(u^k, t) - \Delta_{u^{k+1}} b_0(u^k, t)$$

и полагая $v(t) = u^*(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \langle p_\alpha^k(t, u^k, x^{k+1}(t)), \Delta_{u^*(t)}b(u^k(t), t) \rangle - \Delta_{u^*(t)}b_0(u^k(t), t) \leq \\ \leq \langle p_\alpha^k(t, u^k, x^{k+1}(t)), \Delta_{u^{k+1}(t)}b(u^k(t), t) \rangle - \Delta_{u^{k+1}(t)}b_0(u^k(t), t). \end{aligned}$$

После интегрирования по $t \in T$ с учетом оценки (1.50) и определения $p_\alpha^k(t, u^k, x^{k+1}(t))$ имеем

$$\Phi(u^k) - \Phi(u^*) \leq I_1 + I_2, \quad (1.51)$$

$$I_1 = \int_T \langle \Psi_\alpha(t)(x^k(t) - x^{k+1}(t)), \Delta_{u^*(t)}b(u^k(t), t) \rangle dt,$$

$$I_2 = \int_T \langle p_\alpha^k(t, u^k, x^{k+1}(t)), \Delta_{u^{k+1}(t)} b(u^k(t), t) - \Delta_{u^{k+1}(t)} b_0(u^k(t), t) \rangle dt.$$

Для интеграла I_1 справедлива оценка

$$I_1 \leq C_\alpha C_1 \int_T \|x^k(t) - x^{k+1}(t)\| dt$$

с константами

$$C_\alpha : \|\Psi_\alpha(t)\| \leq C_\alpha, \quad t \in T,$$

$$C_1 : \|b(v, t) - b(u, t)\| \leq C_1, \quad u, v \in U, \quad t \in T.$$

Здесь матричная норма согласована с евклидовой нормой вектора.

Далее, используя известное неравенство и определение функционала J , получаем

$$\begin{aligned} \int_T \|x^k(t) - x^{k+1}(t)\| dt &\leq \sqrt{t_1 - t_0} \left(\int_T \|x^k(t) - x^{k+1}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{2(t_1 - t_0)} J(u^{k+1}, u^k)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В результате

$$I_1 \leq C_\alpha C_1 \sqrt{2(t_1 - t_0)} J(u^{k+1}, u^k)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.52)$$

На основании формулы приращения (1.49) для интеграла I_2 имеем представление

$$\begin{aligned} -I_2 &= \Phi_\alpha(u^{k+1}, u^k) - \Phi_\alpha(u^k, u^k) = \\ &= \Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k) + \alpha J(u^{k+1}, u^k) \geq \Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_2 \leq \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1}). \quad (1.53)$$

Объединяя неравенства (1.51), (1.52), (1.53), получаем итоговую оценку

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) \leq C_\alpha C_1 \sqrt{2(t_1 - t_0)} J(u^{k+1}, u^k)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.54)$$

Остается заметить, что $J(u^{k+1}, u^k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Отметим, что при $\alpha = 0$ (без регуляризации) утверждение теоремы не имеет места.

Обсудим вопрос о приемлемом выборе параметра регуляризации α . С этой целью обратимся к оценке (1.54). Используя неравенство

$$J(u^{k+1}, u^k) \leq \frac{1}{\alpha} (\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})),$$

представим ее в виде

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) \leq \frac{C_\alpha}{\sqrt{\alpha}} C_1 \sqrt{2(t_1 - t_0)} (\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1}))^{\frac{1}{2}}. \quad (1.55)$$

Далее, выясним структуру константы C_α . В соответствии с уравнением для матричной функции $\Psi_\alpha(t)$ имеет место представление

$$\Psi_\alpha(t) = \Psi_0(t) + \alpha\Psi(t),$$

где симметричные матрицы $\Psi_0(t)$, $\Psi(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\Psi}_0 = -A(t)^T \Psi_0 - \Psi_0 A(t) + Q(t), \quad \Psi_0(t_1) = -D,$$

$$\dot{\Psi} = -A(t)^T \Psi - \Psi A(t) + E, \quad \Psi(t_1) = -E.$$

Следовательно,

$$\|\Psi_\alpha(t)\| \leq \|\Psi_0(t)\| + \alpha \|\Psi(t)\| \leq C_0 + \alpha C,$$

$$C_0 = \max_{t \in T} \|\Psi_0(t)\|, \quad C = \max_{t \in T} \|\Psi(t)\|.$$

При этом в качестве матричной нормы можно использовать, например, норму Фробениуса $\left(\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)$, которая согласована с евклидовой нормой вектора.

Таким образом, в неравенстве (1.55) $C_\alpha = C_0 + \alpha C$. С целью оптимизации оценки (1.55) по α поставим задачу

$$\varphi(\alpha) \rightarrow \min, \quad \alpha > 0, \quad \varphi(\alpha) = \frac{C_0 + \alpha C}{\sqrt{\alpha}}.$$

Понятно, что $\varphi(\alpha) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$. Следовательно, точка минимума определяется условием стационарности

$$\varphi'(\alpha) = \frac{C\alpha - C_0}{2\alpha\sqrt{\alpha}} = 0$$

В результате,

$$\alpha_* = \frac{C_0}{C}.$$

Такова теоретическая рекомендация относительно выбора параметра регуляризации.

Отметим условный характер такого выбора, ибо в оценке (1.55) невязка $\delta_k = \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})$ также зависит от α (но ограничена сверху для любого $\alpha > 0$).

1.3.5. Второй метод последовательных приближений

Опишем итерационную реализацию второй процедуры улучшения.

Зафиксируем параметр регуляризации $\alpha > 0$. Пусть $k = 0, 1, \dots$, $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$ — допустимая пара в задаче (1.33). Найдем решение $p_\alpha^k(t)$, $\Psi_\alpha^k(t)$ векторно-матричной сопряженной системы при $v^k = u^*(p, x^k(t), t)$

$$\dot{p} = -A(v^k, t)^T p + a(v^k, t) + Q(v^k, t)x^k(t) - \Psi_{\Delta, v^k} f(x^k(t), u^k(t), t),$$

$$\dot{\Psi} = -A(v^k, t)^T \Psi - \Psi A(v^k, t) + Q(v^k, t) + \alpha E,$$

$$p(t_1) = -c - Dx^k(t_1), \quad \Psi(t_1) = -D - \alpha E.$$

Сформируем управление $u^{k+1}(t) = u^*(p_\alpha^k(t), x^k(t), t)$ и найдем соответствующую фазовую траекторию $x^{k+1}(t)$. В результате получаем допустимую пару $(u^{k+1}(t), x^{k+1}(t))$, $t \in T$, что и завершает итерацию метода.

Свойства метода для общих квадратичных задач (оценка уменьшения целевого функционала, невязка принципа максимума, сходимость по невязке) полностью идентичны предыдущему случаю (п. 1.3.4).

Рассмотрим вопрос о сходимости метода для выпуклых задач. В этом случае, как и ранее, матричная функция $\Psi_\alpha^k(t)$ не зависит от индекса k , и очередное приближение определяется условием

$$u^{k+1}(t) = \arg \max_{u \in U} (\langle p_\alpha^k(t), b(u, t) \rangle - b_0(u, t)). \quad (1.56)$$

Сформулируем утверждение о сходимости.

Теорема 1.2. Для выпуклой задачи с оптимальным управлением $u^* \in V$ второй итерационный метод для любого $\alpha > 0$ порождает

минимизирующую последовательность управлений: $\Phi(u^k) \rightarrow \Phi(u^*)$, $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Возьмем за основу оценку

$$\begin{aligned} & \Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) \leq \\ & \leq \int_T \langle \langle \psi(t, u^{k+1}), \Delta_{u^*(t)} b(u^{k+1}(t), t) \rangle - \Delta_{u^*(t)} b_0(u^{k+1}(t), t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (1.57)$$

При этом в соответствии с условием (1.56) выполняется неравенство

$$\langle p_\alpha^k(t), \Delta_{u^*(t)} b(u^{k+1}(t), t) \rangle - \Delta_{u^*(t)} b_0(u^{k+1}(t), t) \leq 0. \quad (1.58)$$

Согласно исходному определению вектор-функция $p_\alpha^k(t)$ имеет следующее представление

$$p_\alpha^k(t) = \psi^\alpha(t, u^{k+1}) + \Psi_\alpha(t)(x^k(t) - x^{k+1}(t)).$$

При этом сопряженная вектор-функция $\psi^\alpha(t, u^{k+1})$ является решением системы

$$\dot{\psi} = -A(t)^T \psi + a(t) + Q(t)x^{k+1}(t) + \alpha(x^{k+1}(t) - x^k(t)),$$

$$\psi(t_1) = -(c + Dx^{k+1}(t_1)) - \alpha(x^{k+1}(t_1) - x^k(t_1)).$$

Отсюда получаем представление $\psi^\alpha(t, u^{k+1}) = \psi(t, u^{k+1}) + \alpha q^k(t)$, в котором вектор-функция $q^k(t)$ определяется уравнением

$$\dot{q} = -A(t)^T q + x^{k+1}(t) - x^k(t), \quad (1.59)$$

$$q(t_1) = x^k(t_1) - x^{k+1}(t_1).$$

Таким образом,

$$p_\alpha^k(t) = \psi(t, u^{k+1}) + \alpha q^k(t) + \Psi_\alpha(t)(x^k(t) - x^{k+1}(t)).$$

Интегрируя неравенство (1.58) по $t \in T$ и принимая во внимание оценку (1.57), получаем

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) \leq I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_T \langle \Psi_\alpha(t)(x^k(t) - x^{k+1}(t)), \Delta_{u^{k+1}(t)} b(u^*(t), t) \rangle dt,$$

$$I_2 = \alpha \int_T \langle q^k(t), \Delta_{u^{k+1}(t)} b(u^*(t), t) \rangle dt.$$

Интеграл I_1 оценивается в полной аналогии с предыдущим

$$I_1 \leq C_\alpha C_1 \sqrt{2(t_1 - t_0)} J(u^{k+1}, u^k)^{\frac{1}{2}}.$$

Для интеграла I_2 имеем

$$I_2 \leq \alpha C_1 \int_T \|q^k(t)\| dt.$$

Используя формулу Коши для линейной системы (1.59), приходим к оценке

$$\|q^k(t)\| \leq C_2 \left(\|x^{k+1}(t_1) - x^k(t_1)\| + \int_T \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\| dt \right) = C_2 I(k).$$

Следовательно, $I_2 \leq \alpha C_1 C_2 (t_1 - t_0) I(k)$.

Таким образом, итоговая оценка для приращения функционала Φ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) &\leq C_\alpha C_1 \sqrt{2(t_1 - t_0)} J(u^{k+1}, u^k)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \alpha C_1 C_2 (t_1 - t_0) I(k). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Перейдем теперь к пределу при $k \rightarrow \infty$. Поскольку $J(u^{k+1}, u^k) \rightarrow 0$, то $I(k) \rightarrow 0$. Это значит, что $\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что в рамках оценки (1.60) предпочтительными являются малые значения параметра регуляризации α (поскольку, как и ранее, $C_\alpha = C_0 + \alpha C$).

1.4. ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА. СЛАБАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

В данном разделе объектом изучения является линейно-квадратичная задача с выпуклым множеством допустимых управлений. Для повышения качества процедур улучшения проводится регуляризация задачи по управлению. Фактически это означает, что для организации спуска по функционалу используется операция проектирования на выпуклое множество U , которая, в отличие от процедуры максимизации функции H , обладает свойством непрерывности и сохраняет свою корректность в случае неограниченного множества U . Результатом является метод проекций, который не связан с разрывными системами, улучшает любое управление, не удовлетворяющее принципу максимума и порождает минимизирующую последовательность управлений в выпуклой задаче. С другой стороны, метод проекций не обладает свойством улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума.

1.4.1. Необходимые конструкции

Рассмотрим квадратичную задачу (1.33) при условии линейности по управлению целевого функционала и фазовой системы (ЛК-задача). Дополнительно предположим, что U — выпуклое, замкнутое множество.

В данном случае функция Понтрягина имеет следующую структуру

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + \langle H_u(\psi, x, t), u \rangle,$$

поэтому $\Delta_v H(\psi, x, u, t) = \langle H_u(\psi, x, t), v - u \rangle$.

По данному управлению $u \in V$ с фазовой траекторией $x(t, u)$ введем сопряженные объекты $\psi(t, u)$, $\Psi(t, u)$ как решение векторно-матричной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -A(u, t)^T \psi + a(u, t) + Q(u, t)x(t, u), \\ \dot{\Psi} &= -A(u, t)^T \Psi - \Psi A(u, t) + Q(u, t), \\ \psi(t_1) &= -(c + Dx(t_1, u)), \quad \Psi(t_1) = -D \end{aligned} \quad (1.61)$$

и образуем комбинированную вектор-функцию

$$p(t, u, x) = \psi(t, u) + \Psi(t, u)(x - x(t, u)), \quad x \in R^n.$$

Первая формула приращения функционала Φ на паре u, v имеет вид

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T \langle H_u(p(t, u, x(t, v)), x(t, v), t), v(t) - u(t) \rangle dt. \quad (1.62)$$

Вторая формула получается по правилу симметрии

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T \langle H_u(p(t, v, x(t, u)), x(t, u), t), v(t) - u(t) \rangle dt. \quad (1.63)$$

При этом вектор-функция $p(t, v, x(t, u))$ является решением комбинированной сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -A(v, t)^T p + a(v, t) + Q(v, t)x(t, u) - \\ &\quad - \Psi(t, v) f_u(x(t, u), t)(v(t) - u(t)), \\ p(t_1) &= -(c + Dx(t_1, u)). \end{aligned}$$

Укажем, наконец, одно соотношение, которое в дальнейшем послужит связующим звеном для объединения двух процедур улучшения в единый метод. Оно имеет вид

$$p(t, v, x(t, u)) + \Psi(t, v)(x - x(t, u)) = p(t, v, x). \quad (1.64)$$

Используя формулы приращения (1.62), (1.63), построим процедуры улучшения для управления $u(t)$ на основе операции проектирования.

Пусть P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой норме. Предположим, что множество U имеет простую структуру в том смысле, что проекция $v = P_U(w)$ выражается явным образом через проектируемый элемент w (задача проектирования решается аналитически).

По заданному управлению $u \in V$, используя параметр $\alpha > 0$, определим семейство проекционных управлений

$$u^\alpha(\psi, x, t) = P_U(u(t) + \alpha H_u(\psi, x, t)), \quad \psi, x \in R^n, t \in T.$$

Согласно известному свойству проекции имеет место неравенство — оценка

$$\langle H_u(\psi, x, t), u^\alpha(\psi, x, t) - u(t) \rangle \geq \frac{1}{\alpha} \|u^\alpha(\psi, x, t) - u(t)\|^2. \quad (1.65)$$

Кроме того, на основании условия Липшица для оператора P_U вектор-функция $u^\alpha(\psi, x, t)$ непрерывна по совокупности (ψ, x) и кусочно-непрерывна по $t \in T$.

Принцип максимума для управления $u(t)$ в ЛК-задаче описывается следующим соотношением

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T, \alpha > 0.$$

1.4.2. Процедуры улучшения

Возьмем за основу формулу приращения (1.62) и опишем *первую процедуру улучшения*:

1) по данной допустимой паре $(u(t), x(t, u))$, $t \in T$ найдем решение $\psi(t, u)$, $\Psi(t, u)$ векторно-матричной системы (1.61);

2) сформируем вектор-функцию

$$p(t, u, x) = \psi(t, u) + \Psi(t, u)(x - x(t, u))$$

и определим вспомогательное управление

$$\bar{u}^\alpha(x, t) = u^\alpha(p(t, u, x), x, t), \quad x \in R^n, t \in T; \quad (1.66)$$

3) найдем решение $x^\alpha(t)$, $t \in T$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}^\alpha(x, t), t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (1.67)$$

вместе с управлением $v^\alpha(t) = \bar{u}^\alpha(x^\alpha(t), t)$, $t \in T$.

Поскольку $x^\alpha(t) = x(t, v^\alpha)$, то на выходе процедуры получаем допустимую пару $(v^\alpha(t), x(t, v^\alpha))$.

Обоснуем свойство улучшения. Отметим, что управление $v^\alpha(t)$ определяется условием

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(p(t, u, x(t, v^\alpha)), x(t, v^\alpha), t), t \in T.$$

Отсюда, на основании неравенства (1.65) имеем

$$\begin{aligned} \langle H_u(p(t, u, x(t, v^\alpha)), x(t, v^\alpha), t), v^\alpha(t) - u(t) \rangle &\geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha} \|v^\alpha(t) - u(t)\|^2. \end{aligned}$$

После интегрирования по $t \in T$, с учетом формулы (1.62) получаем оценку уменьшения целевого функционала

$$\Phi(v^\alpha) - \Phi(u) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v^\alpha(t) - u(t)\|^2 dt. \quad (1.68)$$

Итак, в случае $v^\alpha \neq u$ свойство улучшения гарантируется для любого $\alpha > 0$. Равенство $v^\alpha(t) = u(t)$, $t \in T$, $\alpha > 0$ (условие неулучшения) есть принцип максимума для управления $u(t)$.

Таким образом, первая процедура (при любом $\alpha > 0$) улучшает любое допустимое управление $u(t)$, не удовлетворяющее принципу максимума в ЛК-задаче. Величина $\delta_\alpha(u) = \Phi(u) - \Phi(v^\alpha)$ может служить невязкой принципа максимума для управления u : $\delta_\alpha(u) = 0 \Leftrightarrow v^\alpha = u$.

Отметим также вычислительные затраты на реализацию первой процедуры (цена улучшения): векторно-матричная задача Коши $(\psi(t, u), \Psi(t, u))$ и векторная задача Коши $(x(t, v^\alpha))$.

Опишем *вторую процедуру улучшения*, учитывая формулу приращения (1.63):

1) для данного управления $u \in V$ найдем решение $x(t, u)$ фазовой системы;

2) определим вспомогательное управление

$$\bar{u}^\alpha(p, t) = u^\alpha(p, x(t, u), t), p \in R^n, t \in T; \quad (1.69)$$

3) найдем решение $p^\alpha(t)$, $\Psi_\alpha(t)$ векторно-матричной системы для $\bar{u} = \bar{u}^\alpha(p; t)$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -A(\bar{u}, t)^T p + a(\bar{u}, t) + Q(\bar{u}, t)x(t, u) - \\ &\quad - \Psi f_u(x(t, u), t)(\bar{u} - u(t)), \\ \dot{\Psi} &= -A(\bar{u}, t)^T \Psi - \Psi A(\bar{u}, t) + Q(\bar{u}, t), \end{aligned} \quad (1.70)$$

$$p(t_1) = -(c + Dx(t_1, u)), \Psi(t_1) = -D$$

и выделим управление $v^\alpha(t) = \bar{u}^\alpha(p^\alpha(t), t)$, $t \in T$.

Отметим свойства данной процедуры. Поскольку $p^\alpha(t) = p(t, v^\alpha, x(t, u))$, $\Psi_\alpha(t) = \Psi(t, v^\alpha)$, то управление $v^\alpha(t)$ определяется условием

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(p(t, v^\alpha, x(t, u)), x(t, u), t), t \in T.$$

Следовательно, на основании неравенства (1.65)

$$\langle H_u(p(t, v^\alpha, x(t, u)), x(t, u), t), v^\alpha(t) - u(t) \rangle \geq \frac{1}{\alpha} \|v^\alpha(t) - u(t)\|^2.$$

После интегрирования по $t \in T$ с учетом формулы (1.63) получаем оценку (1.68) вместе с соответствующими утверждениями по части улучшения и принципа максимума. Вычислительные затраты на реализацию обеих процедур одинаковы.

Подведем итог. Формулы (1.62), (1.63) посредством операции проектирования на множество U позволяют организовать две независимые процедуры спуска по функционалу $\Phi(u)$ в ЛК-задаче, которые обеспечивают улучшение для любого управления, не удовлетворяющего принципу максимума. Особо отметим нелокальный характер улучшения (в процедурах отсутствует малый параметр, управления u , v^α на входе и выходе не имеют свойства близости), что выгодно отличает представленные процедуры от известных градиентных методов спуска для рассматриваемой задачи. К примеру, в стандартном методе проекции градиента используется итерационная формула

$$v^\alpha(t) = P_U(u(t) + \alpha H_u(\psi(t, u), x(t, u), t)),$$

в которой производная H_u (антиградиент функционала $\Phi(u)$) зафиксирована на траекториях, соответствующих управлению $u(t)$. При этом улучшение носит локальный характер: $(\Phi(v^\alpha) < \Phi(u))$ для достаточно малых $\alpha > 0$). В предлагаемых процедурах производная H_u фактически подсчитывается вдоль «смешанной» совокупности траекторий, соответствующих паре управлений u , v^α . В результате улучшение приобретает нелокальный характер $(\Phi(v^\alpha) < \Phi(u))$ для любых $\alpha > 0$, что освобождает от необходимости α -параметрического поиска на каждой итерации.

Несколько слов о выборе параметра α . Думается, что наиболее простой и естественный способ положить $\alpha = 1$. В принципе оптимальное значение α получается в результате минимизации оценки (1.68) по $\alpha > 0$. Поскольку соответствующая задача, вообще говоря, аналитически не разрешима, то вопрос уместно перенести на эвристический (экспериментальный) уровень. Нетрудно ви-

деть, что $\|v^\alpha(t) - u(t)\|$ есть величина порядка α , поэтому при $\alpha < 1$ процедура приобретает более локальный характер, что желательно для последних итераций метода (в окрестности оптимума). Выбор $\alpha > 1$ является более подходящим для начального этапа численного решения, когда естественен «большой» разброс по приближениям.

Охарактеризуем, далее, структуру формул (1.66), (1.69), определяющих вспомогательное управление, при увеличении α . Рассмотрим типовой случай скалярного управления $u(t)$ с модульным ограничением $|u(t)| \leq 1$, $t \in T$. Тогда при условии $H_u \neq 0$ для достаточно больших $\alpha > 0$ формулы (1.66), (1.69) реализуют релейный закон управления $u^* = \text{sign } H_u$, который получается из условия максимума гамильтониана и является базовым для процедур улучшения из разделов 1.1–1.3. Таким образом, выбор $\alpha > 1$ (большие α) позволяет лучше аппроксимировать в рамках операции проектирования релейные управления, т.е. является целесообразным в невырожденных задачах, где оптимальное управление не содержит особых участков с характеристикой $H_u = 0$. Напротив, выбор $\alpha < 1$ (малые α), по-видимому, лучше обслуживает вырожденные задачи, когда оптимальное управление является особым с внутренними участками ($|u(t)| < 1$) и его реализация с помощью релейных управлений становится проблематичной.

Далее отметим, что в силу свойств оператора проектирования P_U (однозначность, условие Липшица) вспомогательные управления $\bar{u}^\alpha(x, t)$, $\bar{u}^\alpha(p, t)$ процедур улучшения являются, как минимум, непрерывными вектор-функциями по переменным x, p соответственно. Это значит, что фазовая и сопряженная системы (1.67), (1.70) имеют, вообще говоря, единственные решения $x^\alpha(t)$, $p^\alpha(t)$, $t \in T$, что однозначно определяет выходное управление $v^\alpha(t)$ процедур улучшения для любого заданного $\alpha > 0$. Потеря свойства разрывности (свойства неединственности решения) означает, что проекционные процедуры не преодолевают «барьер» принципа максимума: управления, удовлетворяющие принципу максимума, не улучшаются. Примеры 1.1, 1.2, 1.4, 1.5 подтверждают это заключение.

Следует также отметить, что базовое управление $u^\alpha(\psi, x, t)$ можно представить с помощью оператора $\arg \max$ в следующем виде

$$u^\alpha(\psi, x, t) = \arg \max_{v \in U} (H(\psi, x, v, t) - \frac{1}{2\alpha} \|v - u(t)\|^2).$$

Это значит, что проекционные процедуры улучшения можно получить по обычной схеме (через операцию $\arg \max$) после регуляризации задачи по управлению

$$\Phi_\alpha(v) = \Phi(v) + \frac{1}{2\alpha} \int_T \|v(t) - u(t)\|^2 dt.$$

1.4.3. Метод проекций

Объединим полученные выше процедуры в метод последовательных приближений, который в пределах той же трудоемкости, что и каждая процедура в отдельности, обеспечивает двойное улучшение по функционалу.

Пусть $(u(t), x(t, u), t \in T)$ — допустимая пара в ЛК-задаче. Применим вторую процедуру улучшения и получим управление $v^\alpha(t)$ вместе с вектор-функцией $p(t, v^\alpha, x(t, u))$ и матричной функцией $\Psi(t, v^\alpha)$. При этом $\Phi(v^\alpha) \leq \Phi(u)$.

Далее, к управлению $v^\alpha(t)$ применим первую процедуру. Для этого необходимо оперировать с вектор-функцией

$$p(t, v^\alpha, x) = \psi(t, v^\alpha) + \Psi(t, v^\alpha)(x - x(t, v^\alpha)).$$

Поскольку траектории $\psi(t, v^\alpha), x(t, v^\alpha)$ здесь неизвестны, то воспользуемся альтернативным выражением для $p(t, v^\alpha, x)$, которое зафиксировано в соотношении (1.64)

$$p(t, v^\alpha, x) = p(t, v^\alpha, x(t, u)) + \Psi(t, v^\alpha)(x - x(t, u)).$$

Здесь все траектории в правой части известны. Остается завершить первую процедуру. Сформируем проекционное управление

$$\bar{v}^\alpha(x, t) = P_U(v^\alpha(t) + \alpha H_u(p(t, v^\alpha, x), x, t))$$

и найдем решение $x^\alpha(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, \bar{v}^\alpha(x, t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

В результате получаем управление $w^\alpha(t) = \bar{v}^\alpha(x^\alpha(t), t)$ вместе с фазовой траекторией $x^\alpha(t) = x(t, w^\alpha), t \in T$. При этом имеет место второе улучшение $\Phi(w^\alpha) \leq \Phi(v^\alpha)$. Общие вычислительные затраты на переход $u \rightarrow w^\alpha$ — две векторные задачи Коши ($p(t, v^\alpha, x(t, u)), x(t, w^\alpha)$) и одна матричная задача Коши ($\Psi(t, v^\alpha)$).

Проведем описание метода в итерационной форме. Зафиксируем параметр $\alpha > 0$. Пусть на k -той итерации имеется допустимая

пара $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$ и вычислено значение функционала $\Phi(u^k)$, $k = 0, 1, \dots$. Образует проекционное управление

$$\bar{u}^k(p, t) = P_U(u^k(t) + \alpha H_u(p, x^k(t), t)).$$

Найдем решение $p^k(t)$, $\Psi^k(t)$ векторно-матричной системы для $\bar{u} = \bar{u}^k(p, t)$

$$\dot{p} = -A(\bar{u}, t)^T p + a(\bar{u}, t) + Q(\bar{u}, t)x^k(t) - \Psi f_u(x^k(t), t)(\bar{u} - u^k(t)),$$

$$\dot{\Psi} = -A(\bar{u}, t)^T \Psi - \Psi A(\bar{u}, t) + Q(\bar{u}, t),$$

$$\psi(t_1) = -(c + Dx^k(t_1)), \quad \Psi(t_1) = -D$$

вместе с промежуточным управлением $v^k(t) = \bar{u}^k(p^k(t), t)$, $t \in T$. Сформируем вектор-функцию

$$q^k(x, t) = p^k(t) + \Psi^k(t)(x - x^k(t))$$

и вспомогательное управление

$$\bar{v}^k(x, t) = P_U(v^k(t) + \alpha H_u(q^k(x, t), x, t)).$$

Найдем решение $x^{k+1}(t)$, $t \in T$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, \bar{v}^k(x, t), t), \quad x(t_0) = x^0$$

и выделим соответствующее управление $u^{k+1}(t) = \bar{v}^k(x^{k+1}(t), t)$, $t \in T$. Подсчитаем значение функционала $\Phi(u^{k+1})$. Итерация закончена.

Отметим, что в процессе итерации происходит двойной спуск по функционалу:

$$\Phi(u^{k+1}) \leq \Phi(v^k) \leq \Phi(u^k),$$

причем знак равенства означает принцип максимума для соответствующего управления и может служить условием остановки.

Рассмотрим вопрос о сходимости метода. Введем неотрицательную величину $\delta(u^k) = \Phi(u^k) - \Phi(v^k)$. Это невязка принципа максимума для управления u^k . Используя оценку (1.68), запишем неравенства

$$\frac{1}{\alpha} \int_T \|v^k(t) - u^k(t)\|^2 dt \leq \delta(u^k) \leq \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1}). \quad (1.71)$$

Сформулируем первое утверждение о сходимости.

Теорема 1.3. Пусть в ЛК-задаче функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу на множестве V . Тогда метод проекций обладает свойством сходимости по невязке принципа максимума: $\delta(u^k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Монотонная последовательность $\Phi(u^k), k=0, 1, \dots$ ограничена снизу, поэтому имеет конечный предел, т.е. $\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1}) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Остается воспользоваться правым неравенством из (1.71).

Рассмотрим выпуклую ЛК-задачу, которая выделяется из общей выпуклой задачи (1.15)–(1.18) условиями линейности по управлению

$$b_0(u, t) = \langle b_0(t), u \rangle, \quad b(u, t) = B(t)u + c(t).$$

Для упрощения выкладок предположим, что $b_0(t) \equiv 0$ (управление u отсутствует в функционале).

В этом случае $H_u(\psi, t) = B(t)^T \psi$, и матричная функция $\Psi(t)$ не зависит от управления. Формула приращения (1.62) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_v \Phi(u) &= \\ &= - \int_T \langle \psi(t, u) + \Psi(t)(x(t, v) - x(t, u)), B(t)(v(t) - u(t)) \rangle dt. \end{aligned} \quad (1.72)$$

В силу выпуклости функционала $\Phi(u)$ справедлива оценка

$$\Delta_v \Phi(u) \geq - \int_T \langle \psi(t, u), B(t)(v(t) - u(t)) \rangle dt.$$

Сравнивая с (1.72), получаем вспомогательное неравенство

$$\int_T \langle \Psi(t)(x(t, v) - x(t, u)), B(t)(v(t) - u(t)) \rangle dt \leq 0. \quad (1.73)$$

Сформулируем второе утверждение о сходимости.

Теорема 1.4. Пусть в выпуклой ЛК-задаче с оптимальным управлением $u^* \in V$, множество U ограничено. Тогда метод проекций для любого $\alpha > 0$ порождает минимизирующую последовательность: $\Phi(u^k) \rightarrow \Phi(u^*), k \rightarrow \infty$.

Доказательство. В соответствии с методом имеем

$$p^k(t) = p(t, v^k, x^k(t)) = \psi(t, v^k) + \Psi(t)(x^k(t) - x(t, v^k)),$$

$$v^k(t) = P_U(u^k(t) + \alpha H_u(p^k(t), t)), \quad t \in T.$$

Используя свойство проекции, получаем неравенство

$$\langle H_u(p^k(t), t), w - v^k(t) \rangle \leq \frac{1}{\alpha} \langle u^k(t) - v^k(t), v^k(t) - w \rangle, \quad w \in U \quad (1.74)$$

На основании формулы (1.72)

$$\begin{aligned} & \Phi(v^k) - \Phi(u^*) = \\ & = \int_T \langle \Psi(t, v^k) + \Psi(t)(x^*(t) - x(t, v^k)), B(t)(u^*(t) - v^k(t)) \rangle dt. \end{aligned}$$

Представим

$$x^*(t) - x(t, v^k) = (x^*(t) - x^k(t)) + (x^k(t) - x(t, v^k)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(v^k) - \Phi(u^*) &= \int_T \langle p^k(t), B(t)(u^*(t) - v^k(t)) \rangle dt + \\ &+ \int_T \langle \Psi(t)(x^*(t) - x^k(t)), B(t)(u^*(t) - v^k(t)) \rangle dt. \end{aligned}$$

Для оценки первого интеграла в правой части используем неравенство (1.74) для $w = u^*(t)$. Во втором интеграле положим

$$u^*(t) - v^k(t) = (u^*(t) - u^k(t)) + (u^k(t) - v^k(t)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(v^k) - \Phi(u^*) &\leq \frac{1}{\alpha} \int_T \langle u^k(t) - v^k(t), v^k(t) - u^*(t) \rangle dt + \\ &+ \int_T \langle \Psi(t)(x^*(t) - x^k(t)), B(t)(u^*(t) - u^k(t)) \rangle dt + \\ &+ \int_T \langle \Psi(t)(x^*(t) - x^k(t)), B(t)(u^k(t) - v^k(t)) \rangle dt. \end{aligned}$$

С учетом неравенства (1.73) второй интеграл в правой части неположителен. В силу ограниченности множества U имеем

$$\|v^k(t) - u^*(t)\| \leq C_1, \quad t \in T.$$

При этом семейство фазовых траекторий $\{x(t, u), u \in U\}$ также ограничено, поэтому $\|x^k(t) - x^*(t)\| \leq C_2, t \in T$. Наконец, по непрерывности

$$\|\Psi(t)\| \leq C_3, \quad \|B(t)\| \leq C_4, \quad t \in T.$$

В результате получаем требуемую оценку

$$\Phi(v^k) - \Phi(u^*) \leq C \int_T \|u^k(t) - v^k(t)\| dt.$$

С учетом утверждения теоремы 1.3 (в условиях теоремы 1.4 функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу на V), на основании левого неравенства из (1.71) приходим к заключению, что $\Phi(v^k) - \Phi(u^*) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Остается заметить, что

$$0 \leq \Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) \leq \Phi(v^k) - \Phi(u^*).$$

Теорема доказана.

Глава 2

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В данной главе проводится конструктивный анализ задачи оптимального управления, обобщающей на нелинейный уровень (нелинейная управляемая система, нелинейный целевой функционал) линейные и квадратичные задачи, рассмотренные в предыдущей главе. Представленные методы улучшения связаны с разнообразными линейными и квадратичными аппроксимациями функционала (локальные формулы приращения) и используют процедуры игольчатого и слабого варьирования управлений, что вызывает необходимость параметрического поиска на каждой итерации (подбор параметра варьирования с целью уменьшения функционала). При этом обоснование методов связано с доказательством свойства улучшения для достаточно малых значений параметра (локальное улучшение). Эффективность разработанных методов обусловлена качеством соответствующих аппроксимаций и определяется в теоретическом плане тем фактом, что в линейных и квадратичных задачах (в зависимости от порядка метода) улучшение обеспечивается для любого значения параметра. Стандартные методы игольчатого и слабого варьирования указанным свойством не обладают.

Рассмотрим задачу оптимального управления (задача (P))

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

связанную с обыкновенной динамической системой

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (2.2)$$

на множестве допустимых управлений

$$V = \{u \in L_\infty^r(T) : u(t) \in U, t \in T = [t_0, t_1]\}. \quad (2.3)$$

Здесь, как и ранее, $t \in T$ — время, $u(t) \in R^r$, $x(t) \in R^n$ — управление и фазовое состояние в момент t .

Отметим, что множество V допустимых управлений содержит в данном случае измеримые вектор-функции $u(t)$, $t \in T$ с поточечным ограничением типа включения. Такой не совсем стандартный для исследований по численным методам выбор класса допустимых связан с существом дела: для обоснования методов игольчатого варьирования в задаче (P) систематически используется одно изящное свойство интеграла Лебега, которое является следствием теоремы А.А. Ляпунова [1, 2, 26]. Сформулируем соответствующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть $p \in L_\infty^m(T)$. Тогда для любого $\alpha \in (0, 1)$ найдется такое измеримое подмножество $T_\alpha \subset T$ с мерой $\text{mes } T_\alpha = \alpha \text{ mes } T$, что

$$\int_{T_\alpha} p(t) dt = \alpha \int_T p(t) dt.$$

Этот результат весьма органично связан с процедурой игольчатого варьирования и является рабочим инструментом для обоснования свойств улучшения соответствующих методов. В разделах 2.2, 2.3 используется обобщенный вариант леммы 2.1, когда вектор-функция $p(t)$ зависит от параметра α : $p(t) = p(t, \alpha)$.

Сформулируем некоторые общие предположения относительно задачи (P) , которые действуют на протяжении всей главы 2.

Будем считать, что каждому управлению $u \in V$ соответствует единственное решение $x(t) = x(t, u)$ системы (2.2), определенное на T . Это решение есть абсолютно-непрерывная вектор-функция времени, которая удовлетворяет системе (2.2) почти всюду на T . Пару $(u(t), x(t))$, $t \in T$ назовем допустимой в задаче (P) , если $u \in V$, $x(t) = x(t, u)$.

Предположим, что семейство фазовых траекторий системы (2.2) ограничено:

$$x(t, u) \in X, t \in T, u \in V, \quad (2.4)$$

где $X \subset R^n$ — выпуклое компактное множество.

Подкрепим принятые предположения достаточными условиями их выполнения.

Утверждение 1. Пусть вектор-функция $f(x, u, t)$ определена и непрерывна по совокупности своих переменных $(x, u, t) \in R^n \times R^r \times T$ и удовлетворяет условию Липшица по x . Тогда для любого управления $u \in V$ задача Коши (2.2) имеет единственное решение $x(t) = x(t, u)$, определенное на T (глобальная теорема существования и единственности [15]).

Утверждение 2. Оценка

$$\|f(x, u, t)\| \leq C(\|x\| + 1), \quad x \in R^n, \quad u \in R^r, \quad t \in T$$

является достаточным условием ограниченности (2.4).

В целом задача (P) не осложнена дополнительными ограничениями (терминальными, фазовыми, смешанными) и является хорошей моделью для демонстрации и реализации основных принципов и подходов к построению итерационных методов. Проведем локальный анализ задачи (P) на предмет разработки методов локального улучшения на основе процедур локального варьирования.

Отметим, что все соотношения, связанные с измеримыми функциями, следует понимать в смысле «почти всюду» на соответствующем множестве.

2.1. МЕТОД ИГОЛЬЧАТОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Введем следующий набор условий для задачи (P) (предположения (A)):

- функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема на X ;
- функция $F(x, u, t)$ и вектор-функция $f(x, u, t)$ непрерывны по совокупности своих аргументов на $X \times U \times T$ вместе с частными производными $F_x(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$;
- множество $U \subset R^r$ компактно.

В этих условиях для задачи (P) справедлив принцип максимума.

Введем в рассмотрение сопряженную переменную $\psi \in R^n$ и образуем функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t).$$

Определим сопряженную задачу

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x, u, t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (2.5)$$

Пусть $u(t)$, $t \in T$ — некоторое допустимое управление, $x(t)$ — соответствующая ему фазовая траектория, $\psi(t)$ — решение сопряженной системы (2.5) при $u = u(t)$, $x = x(t)$. Принцип максимума для управления $u(t)$ описывается соотношением

$$u(t) = \arg \max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, t), \quad t \in T. \quad (2.6)$$

Укажем формулу приращения функционала Φ (аппроксимацию функционала Φ), которая порождает принцип максимума на игольчатой вариации управления.

Пусть $u(t)$, $w(t)$, $t \in T$ — допустимые управления с фазовыми траекториями $x(t)$, $x(t, w) = x(t) + \Delta x(t)$. Тогда имеет место представление [12]

$$\Delta_w \Phi(u) = - \int_T \Delta_{w(t)} H(\psi(t), x(t), u(t), t) dt + \eta, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \eta = & - \int_T \langle \Delta_{w(t)} H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \Delta x(t) \rangle dt - \\ & - \int_T o_H(\|\Delta x(t)\|) dt + o_\Phi(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned}$$

Здесь остаточные члены o_H , o_Φ определяются разложениями

$$\begin{aligned} & H(\psi, x + \Delta x, w, t) - H(\psi, x, w, t) = \\ & = \langle H_x(\psi, x, w, t), \Delta x \rangle + o_H(\|\Delta x\|), \end{aligned}$$

$$\varphi(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)) = \langle \varphi_x(x(t_1)), \Delta x(t_1) \rangle + o_\Phi(\|\Delta x(t_1)\|).$$

При этом справедлива следующая оценка для фазового приращения

$$\|\Delta x(t)\| \leq C \int_T \|\Delta_{w(t)} f(x(t), u(t), t)\| dt, \quad t \in T. \quad (2.8)$$

Отметим, что формула (2.7) является точной ($\eta = 0$) для простейшей задачи оптимального управления

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \langle \chi, x(t_1) \rangle + \int_T (b_0(u, t) + \langle a(t), x(t) \rangle) dt \rightarrow \min, \\ & \dot{x} = A(t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T, \end{aligned}$$

которая элементарно решается с помощью принципа максимума.

2.1.1. Процедура игольчатого варьирования

Рассмотрим задачу (P) в предположениях (A). Введем следующую метрику на множестве V

$$\rho(u, v) = \text{mes} \{t \in T: u(t) \neq v(t)\}, \quad u, v \in V.$$

Пусть $u(t)$, $t \in T$ — допустимое управление. Определим процедуру его варьирования. Выберем некоторое управление $v \in V$ ($v \neq u$) и введем функцию варьирования $\chi(t)$ согласно условиям

$$\chi \in L_\infty(T), \quad \chi(t) \in \{0, 1\}, \quad t \in T. \quad (2.9)$$

Построим семейство варьированных управлений по правилу выпуклой комбинации с функцией $\chi(t)$

$$u_{v,\chi}(t) = u(t) + \chi(t)(v(t) - u(t)), \quad t \in T. \quad (2.10)$$

Пусть $T_\chi = \{t \in T: \chi(t) = 1\}$. Тогда управление $u_{v,\chi}$ представляется в виде

$$u_{v,\chi}(t) = \begin{cases} v(t), & t \in T_\chi, \\ u(t), & t \in T \setminus T_\chi. \end{cases}$$

Следовательно, $u_{v,\chi} \in V$, т.е. формула (2.10) определяет процедуру допустимого варьирования в задаче (P) с условиями (A).

Проведем параметризацию процедуры (2.10). С этой целью нормируем функцию варьирования с помощью параметра $\alpha \in [0, 1]$ по правилу

$$\int_T \chi(t) dt = \alpha(t_1 - t_0). \quad (2.11)$$

Поскольку интеграл в левой части есть $mes T_\chi$, то величина α пропорциональна мере множества варьирования:

$$\alpha = \frac{mes T_\chi}{mes T}.$$

Отметим, далее, что

$$\rho(u, u_{v,\chi}) \leq mes T_\chi = \alpha(t_1 - t_0),$$

поэтому с помощью параметра варьирования α можно обеспечить близость управлений $u, u_{v,\chi}$ в метрике ρ .

Формула (2.10) с условиями (2.9), (2.11) определяет в общем виде процедуру игольчатого варьирования для управления $u(t)$. При этом локальность варьирования обеспечивается за счет параметра $\alpha \in [0, 1]$ в метрике ρ .

Отметим одно полезное свойство процедуры варьирования (2.10): для любой вектор-функции $s(u, t)$ имеет место представление

$$s(u_{v,\chi}(t), t) - s(u(t), t) = \chi(t) \Delta_{v(t)} s(u(t), t), \quad t \in T. \quad (2.12)$$

Рассмотрим фазовое приращение

$$\Delta x(t) = x(t, u_{v,\chi}) - x(t, u), \quad t \in T,$$

соответствующее варьированию (2.10). Выясним порядок $\|\Delta x(t)\|$ относительно α . С этой целью используем оценку (2.8) при $w(t) = u_{v,\chi}(t)$ с учетом свойства (2.12)

$$\begin{aligned} \|\Delta x(t)\| &\leq C \int_T \chi(t) \|\Delta_{v(t)} f(x(t), u(t), t)\| dt \leq CC_1 \int_T \chi(t) dt = \\ &= CC_1(t_1 - t_0)\alpha, \quad t \in T. \end{aligned}$$

Итак, фазовое приращение $\Delta x(t)$ при варьировании (2.10) имеет порядок α :

$$\|\Delta x(t)\| \leq C\alpha, \quad t \in T. \quad (2.13)$$

Перейдем на уровень приращения функционала. Рассмотрим формулу (2.7) при $w(t) = u_{v,\chi}(t)$. Выясним порядок величины η относительно параметра α . С учетом оценки (2.13) заключаем, что

$$\int_T o_H(\|\Delta x(t)\|) dt = o(\alpha), \quad o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|) = o(\alpha).$$

Кроме того, в силу представления (2.12)

$$\begin{aligned} &\int_T \langle \Delta_{w(t)} H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \Delta x(t) \rangle dt = \\ &= \int_T \chi(t) \langle \Delta_{v(t)} H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \Delta x(t) \rangle dt = o(\alpha). \end{aligned}$$

Таким образом, величина η в формуле (2.7) имеет порядок $o(\alpha)$.

Рассмотрим интегральный член в (2.7) при $w = u_{v,\chi}$

$$\int_T \Delta_{w(t)} H(\psi(t), x(t), u(t), t) dt = \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H(\psi(t), x(t), u(t), t) dt.$$

Обозначим

$$\delta\Phi(u, v, \chi) = - \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H(\psi(t), x(t), u(t), t) dt. \quad (2.14)$$

Понятно, что величина $\delta\Phi$ имеет порядок α . При этом справедливо представление

$$\Phi(u_{v,\chi}) - \Phi(u) = \delta\Phi(u, v, \chi) + \eta, \quad \eta = o(\alpha). \quad (2.15)$$

Итак, величина $\delta\Phi(u, v, \chi)$ содержит главный член приращения функционала Φ относительно параметра варьирования α . Назовем функционал $\delta\Phi(u, v, \chi)$, определяемый формулой (2.14), игольчатой вариацией функционала Φ на управлении $u(t)$. При этом $v(t)$, $\chi(t)$ — функциональные параметры варьирования.

2.1.2. Метод улучшения

Пусть $u(t)$, $t \in T$ — допустимое управление в задаче (P) с соответствующими траекториями $x(t)$, $\psi(t)$ фазовой и сопряженной систем. Проведем игольчатое варьирование управления $u(t)$ по формуле (2.10) с условиями (2.9), (2.11). Для заданного $\alpha \in (0, 1]$ введем множество функций варьирования

$$X_\alpha = \{\chi \in L_\infty(T) : \chi(t) = 0 \vee 1, \int_T \chi(t) dt = \alpha(t_1 - t_0)\}.$$

Построим метод улучшения управления $u(t)$ в классе управлений варьирования (2.10) на основе аппроксимации (2.15) целевого функционала.

Зафиксируем $\alpha \in (0, 1]$ и определим вспомогательную задачу на минимум игольчатой вариации функционала

$$\delta\Phi(u, v, \chi) \rightarrow \min, v \in V, \chi \in X_\alpha. \quad (2.16)$$

Проведем решение этой задачи в два этапа. Фиксируя $\chi \in X_\alpha$, получаем задачу поиска вспомогательного управления

$$\int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H(\psi(t), x(t), u(t), t) dt \rightarrow \max, v \in V. \quad (2.17)$$

Ее решение $\bar{u}(t)$ для $t \in T_\chi$, ($\chi(t) = 1$) определяется условием максимума функции Понтрягина

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{w \in U} H(\psi(t), x(t), w, t). \quad (2.18)$$

Для $t \in T \setminus T_\chi$ ($\chi(t) = 0$) задача вырождается, и решением является любое допустимое управление $v(t)$. Положим $v(t) = \bar{u}(t)$, $t \in T \setminus T_\chi$.

Таким образом, максимизирующее управление $\bar{u}(t)$, $t \in T$ является решением задачи (2.17) для любой функции варьирования $\chi \in X_\alpha$.

Введем неотрицательную функцию

$$g(t) = \Delta_{\bar{u}(t)} H(\psi(t), x(t), u(t), t), t \in T$$

и сформулируем задачу поиска функции варьирования $\chi_\alpha(t)$ (задача (2.16) при $v = \bar{u}$)

$$\int_T \chi(t) g(t) dt \rightarrow \max, \chi \in X_\alpha. \quad (2.19)$$

При $\alpha = 1$ множество X_α содержит единственную функцию $\chi(t) = 1$, $t \in T$, которая и является решением задачи (2.19).

Для $\alpha \in (0, 1)$ решим задачу (2.19) с помощью принципа максимума, который справедлив в данном случае в нормальной форме ($\lambda_0 = 1$) и является необходимым и достаточным условием оптимальности. В соответствии с этим результатом найдется множитель λ_α такой, что

$$\chi_\alpha(t) = \arg \max_{\chi \in (0,1)} (g(t) - \lambda_\alpha)\chi, \quad t \in T.$$

Следовательно, решение вспомогательной задачи (2.19) (оптимальная функция варьирования) определяется по формуле

$$\chi_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & g(t) < \lambda_\alpha, \\ 1, & g(t) > \lambda_\alpha, \\ 0 \vee 1, & g(t) = \lambda_\alpha. \end{cases} \quad (2.20)$$

Здесь параметр λ_α обеспечивает интегральное условие

$$\int_T \chi_\alpha(t) dt = \alpha(t_1 - t_0).$$

Подведем итог. Задача в вариациях (2.16) относительно параметров v, χ имеет решение $\bar{u}(t), \chi_\alpha(t), t \in T$. Вспомогательное управление $\bar{u}(t)$ определяется условием максимума функции Понтрягина (2.18). Функция варьирования $\chi_\alpha(t)$ задается соотношением (2.20).

Перейдем к последнему этапу построения метода. Пара $(\bar{u}(t), \chi_\alpha(t)), t \in T$ определяет в соответствии с формулой (2.10) α -параметрическое семейство управлений варьирования

$$u_\alpha(t) = u(t) + \chi_\alpha(t)(\bar{u}(t) - u(t)), \quad t \in T.$$

Параметр $\alpha \in (0, 1]$ находится из условия улучшения по целевому функционалу: $\Phi(u_\alpha) \leq \Phi(u)$. В качестве базовой здесь выступает задача параметрического поиска

$$\Phi(u_\alpha) \rightarrow \min, \quad \alpha \in (0, 1].$$

В заключение приведем формальную схему итерации улучшения в методе игольчатой линеаризации:

1) исходная информация —

$$u \in V, \quad x(t) = x(t, u), \quad \psi(t) = \psi(t, u);$$

2) вспомогательное управление —

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{w \in U} H(\psi(t), x(t), w, t), \quad t \in T;$$

3) функция переключения —

$$g(t) = \Delta_{\bar{u}(t)} H(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T;$$

4) функция варьирования с параметром $\alpha \in (0, 1]$ —

$$\chi_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & g(t) < \lambda_\alpha, \\ 1, & g(t) > \lambda_\alpha, \\ 0 \vee 1, & g(t) = \lambda_\alpha. \end{cases}$$

$$\lambda_\alpha : \text{mes} \{t \in T : \chi_\alpha(t) = 1\} = \alpha(t_1 - t_0);$$

5) семейство управлений варьирования —

$$u_\alpha(t) = u(t) + \chi_\alpha(t)(\bar{u}(t) - u(t)), \quad t \in T;$$

6) параметр варьирования $\alpha \in (0, 1]$ —

$$\Phi(u_\alpha) \leq \Phi(u).$$

2.1.3. Обоснование метода

Введем неотрицательную величину

$$\delta(u) = \int_T g(t) dt.$$

Нетрудно видеть, что равенство $\delta(u) = 0$ эквивалентно принципу максимума для управления $u(t)$. Следовательно, величина $\delta(u)$ может служить невязкой принципа максимума для управления u .

Равенство $\delta(u) = 0$ является условием остановки метода. Для случая $\delta(u) > 0$ докажем следующее утверждение.

Теорема 2.1 (свойство улучшения). *Если $\delta(u) > 0$, то $\Phi(u_\alpha) < \Phi(u)$ для достаточно малых $\alpha > 0$.*

Доказательство. Предварительно установим одно свойство оптимальной функции варьирования $\chi_\alpha(t)$. Как известно, она является решением задачи (2.19), т.е.

$$\int_T \chi_\alpha(t) g(t) dt \geq \int_T \chi(t) g(t) dt, \quad \chi \in X_\alpha. \quad (2.21)$$

Используем теперь лемму 2.1 при $p(t) = g(t)$, $t \in T$: для любого $\alpha \in (0, 1)$ найдется такое измеримое подмножество $T_\alpha \subset T$, $\text{mes } T_\alpha = \alpha(t_1 - t_0)$, что

$$\int_{T_\alpha} g(t) dt = \alpha \int_T g(t) dt.$$

Пусть $\chi(t, \alpha)$, $t \in T$ — характеристическая функция множества T_α :

$$\chi(t, \alpha) = \begin{cases} 1, & t \in T_\alpha, \\ 0, & t \in T \setminus T_\alpha. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_T \chi(t, \alpha) dt = \text{mes } T_\alpha = \alpha(t_1 - t_0).$$

Следовательно, $\chi(t, \alpha) \in X_\alpha$ — функция варьирования. При этом, согласно утверждению леммы 2.1

$$\int_T \chi(t, \alpha) g(t) dt = \alpha \int_T g(t) dt.$$

Тогда из неравенства (2.21) при $\chi(t) = \chi(t, \alpha)$ получаем оценку

$$\int_T \chi_\alpha(t) g(t) dt \geq \alpha \int_T g(t) dt.$$

Учитывая этот результат, перейдем собственно к доказательству теоремы. Согласно определению игольчатой вариации функционала

$$\delta\Phi(u, \bar{u}, \chi_\alpha) = - \int_T \chi_\alpha(t) g(t) dt,$$

поэтому предыдущее неравенство представляется в виде оценки уменьшения вариации через невязку принципа максимума

$$\delta\Phi(u, \bar{u}, \chi_\alpha) \leq -\alpha\delta(u), \quad \alpha \in (0, 1].$$

Рассмотрим приращение функционала Φ на управлениях u , u_α . На основании формулы (2.15) при $v = \bar{u}$, $\chi = \chi_\alpha$ получаем

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) = \delta\Phi(u, \bar{u}, \chi_\alpha) + o(\alpha) \leq -\alpha\delta(u) + o(\alpha).$$

Поскольку $\delta(u) > 0$, то локальное улучшение имеет место. Теорема доказана.

Следствие 2.1. (принцип максимума). Для оптимальности управления $u(t)$ в задаче (P) необходимо, чтобы $\delta(u) = 0$.

Представим метод в итерационной форме и рассмотрим вопрос о сходимости последовательных приближений.

Пусть $k = 1, 2, \dots$ — номер итерации, $u^k(t)$ — соответствующее управление, $u_\alpha^k(t)$ — семейство варьированных управлений. Выбор шага α_k проведем по способу наискорейшего спуска

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in [0, 1]} \Phi(u_\alpha^k) \quad (2.22)$$

Очередное приближение имеет вид

$$u^{k+1}(t) = u_{\alpha_k}^k(t), \quad t \in T.$$

Теорема 2.2. (свойство сходимости). Пусть в задаче (P) дополнительно к предположениям (A) производные $\varphi_x(x)$, $F_x(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$ удовлетворяют условию Липшица по x на множествах X и $X \times U \times T$ соответственно. Тогда метод игольчатой линеаризации с выбором шага α_k по правилу (2.22) сходится по невязке принципа максимума: $\delta(u^k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. В условиях теоремы остаточный член η формулы приращения (2.15) допускает квадратичную оценку: $|\eta| \leq C\alpha^2$. С учетом теоремы 2.1 уменьшение функционала на k -ой итерации характеризуется неравенством

$$\Phi(u_\alpha^k) - \Phi(u^k) \leq -\alpha\delta(u^k) + C\alpha^2. \quad (2.23)$$

Поскольку $\Phi(u_\alpha^k) \geq \Phi(u^{k+1})$, $\alpha \in (0, 1]$, то

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k) \leq -\alpha\delta(u^k) + C\alpha^2, \quad \alpha \in (0, 1].$$

В силу ограниченности семейства фазовых траекторий ($x(t, u) \in X$, $t \in T$, $u \in V$) последовательность $\Phi(u^k)$, $k = 1, 2, \dots$ ограничена снизу. Следовательно, с учетом свойства монотонности она является сходящейся, т.е.

$$\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Представим неравенство (2.23) в виде

$$\delta(u^k) \leq \frac{1}{\alpha} (\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})) + C\alpha.$$

Переходя здесь последовательно к пределу при $k \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$, получаем требуемый результат. Теорема доказана.

Усилим результат о сходимости метода применительно к выпуклой задаче, которая описывается соотношениями

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T (F^{(1)}(x(t), t) + F^{(2)}(u(t), t)) dt \rightarrow \min, \quad u \in V, \quad (2.24)$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0$$

при условии, что функции $\varphi(x)$, $F^{(1)}(x, t)$ выпуклы по $x \in X$.

Для данного случая в формуле приращения (2.7) $\eta \geq 0$, т.е. имеет место оценка

$$\Phi(u) - \Phi(w) \leq \int_T \Delta_{w(t)} H(\psi(t), x(t), u(t), t) dt.$$

С учетом определения максимизирующего управления $\bar{u}(t)$ получаем

$$\begin{aligned} \Phi(u) - \Phi(w) &\leq \int_T \Delta_{\bar{u}(t)} H(\psi(t), x(t), u(t), t) dt = \\ &= \int_T g(t) dt = \delta(u). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Сформулируем утверждение о сходимости.

Теорема 2.3. Пусть в выпуклой задаче (2.24) с оптимальным управлением $u^* \in V$ дополнительно к предположениям (A) производные $\Phi_x(x)$, $F_x^{(1)}(x, t)$ удовлетворяют условию Липшица по $x \in X$. Тогда метод игольчатой линеаризации порождает минимизирующую последовательность управлений: $\Phi(u^k) \rightarrow \Phi(u^*)$, $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Оценка (2.25) при $u = u^k$, $w = u^*$ принимает вид

$$\Phi(u^k) - \Phi(u^*) \leq \delta(u^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

На основании теоремы 2.2 в принятых предположениях имеет место сходимость по невязке: $\delta(u^k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

2.1.4. Вопросы реализации метода

По части вычислительной реализации метода отметим следующее.

Задача на максимум функции H по управлению в конкретных ситуациях разрешается, как правило, аналитически. Поэтому для поиска вспомогательного управления $\bar{u}(t)$ не требуется отдельной итерационной процедуры.

При построении функции варьирования $\chi_\alpha(t)$ нет необходимости использовать формулу (2.20), т.е. для каждого $\alpha \in (0, 1]$ отыскивать множитель λ_α исходя из условия

$$\int_T \chi_\alpha(t) dt = \alpha(t_1 - t_0).$$

В качестве параметра варьирования целесообразно взять множитель Лагранжа λ и организовать процедуру варьирования по правилу

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} u(t), & g(t) < \lambda, \\ \bar{u}(t), & g(t) > \lambda, \\ u(t) \vee \bar{u}(t), & g(t) = \lambda. \end{cases}$$

(варьирование по множествам уровня функции $g(t)$).

При этом область содержательного изменения параметра λ есть отрезок $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, где

$$\lambda_{\min} = \inf_{t \in T} g(t), \quad \lambda_{\max} = \sup_{t \in T} g(t).$$

Параметр $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ подбирается с целью уменьшения функционала: $\Phi(u_\lambda) < \Phi(u)$.

В заключение опишем вычислительную схему метода игольчатой линеаризации:

- 1) исходные данные — $u \in V$, $x(t) = x(t, u)$, $t \in T$;
- 2) решение сопряженной системы на паре $(u(t), x(t))$, формирование вспомогательного управления и функции переключения

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{v \in U} H(\psi(t), x(t), v, t),$$

$$g(t) = \Delta_{\bar{u}(t)} H(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

вычисление крайних значений λ_{\min} , λ_{\max} и невязки

$$\delta(u) = \int_T g(t) dt;$$

- 3) критерий остановки — $\delta(u) \leq \epsilon$, где $\epsilon > 0$ — заданная точность выполнения принципа максимума;

- 4) процедура варьирования — для $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} u(t), & g(t) \leq \lambda, \\ \bar{u}(t), & g(t) > \lambda, \end{cases}$$

- 5) итерационный поиск параметра λ с ориентировкой на решение задачи

$$\Phi(u_\lambda) \rightarrow \min, \quad \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}].$$

2.2. МЕТОДЫ ФАЗОВОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Продолжим локальный анализ задачи (P) в предположениях (A).

Стандартная формула приращения (2.7) обеспечивает, по существу, игольчатую линеаризацию целевого функционала и ориентирована, в первую очередь, на получение принципа макси-

муна в задаче (P). С точки зрения качества аппроксимации недостатком формулы (2.7) является присутствие линейного по Δx выражения в структуре остаточного члена η . Это значит, что игольчатая вариация функционала имеет первый порядок точности относительно фазового приращения: $\eta \sim \|\Delta x\|$.

В данном разделе основой для построения методов является нестандартные формулы приращения функционала, которые обеспечивают фазовую аппроксимацию с порядком точности $o(\|\Delta x\|)$. Это приводит к повышению качества соответствующих методов улучшения.

2.2.1. Фазовые вариации функционала

Пусть $u(t)$, $w(t)$, $t \in T$ — допустимые управления с фазовыми траекториями $x(t, u)$, $x(t, w) = x(t, u) + \Delta x(t)$. Приращение $\Delta x(t)$ определяется уравнением

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) &= f(x(t, w), w(t), t) - f(x(t, u), u(t), t) = \\ &= \Delta_{x,u} f(x(t, u), u(t), t), \quad \Delta x(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Для произвольной абсолютно-непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, $t \in T$ представим приращение функционала Φ на паре u, w в виде

$$\begin{aligned} \Delta_w \Phi(u) &= \Delta \varphi(x(t_1, u)) + \int_T \Delta_{x,u} F(x(t, u), u(t), t) dt + \\ &+ \int_T \langle \psi(t), \Delta \dot{x}(t) - \Delta_{x,u} f(x(t, u), u(t), t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Используя функцию Понтрягина, получаем

$$\begin{aligned} \Delta_w \Phi(u) &= \Delta \varphi(x(t_1, u)) + \int_T \langle \psi(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle dt - \\ &- \int_T \Delta_{x,u} H(\psi(t), x(t, u), u(t), t) dt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Проведем фазовую линеаризацию приращений в правой части следующим образом

$$\Delta \varphi = \langle \varphi_x(x(t_1, u)), \Delta x(t_1) \rangle + o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|),$$

$$\begin{aligned} \Delta_{x,u} H &= \Delta_{w(t)} H(\psi(t), x(t, w), u(t), t) + H(\psi(t), x(t, w), u(t), t) - \\ &- H(\psi(t), x(t, u), u(t), t) = \Delta_{w(t)} H(\psi(t), x(t, w), u(t), t) + \\ &+ \langle H_x(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \Delta x(t) \rangle + o_H^{(1)}(\|\Delta x(t)\|). \end{aligned}$$

Для интеграла, содержащего $\Delta \dot{x}(t)$, применим формулу интегрирования по частям

$$\int_T \langle \psi(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle dt = \langle \psi(t_1), \Delta x(t_1) \rangle - \int_T \langle \dot{\psi}(t), \Delta x(t) \rangle dt.$$

Определим вектор-функцию $\psi(t)$ уравнением

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x(t, u), u(t), t), \quad \psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1, u)).$$

Это обычная сопряженная система с решением $\psi(t) = \psi(t, u)$.

В результате выражение (2.26) для приращения функционала принимает вид (первая формула)

$$\Delta_w \Phi(u) = - \int_T \Delta_{w(t)} H(\psi(t, u), x(t, w), u(t), t) dt + \eta^{(1)} \quad (2.27)$$

$$\eta^{(1)} = o_\Phi(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_T o_H^{(1)}(\|\Delta x(t)\|) dt.$$

Для построения второй формулы будем использовать следующую линеаризацию приращения $\Delta_{x,u} H$ в выражении (2.26)

$$\begin{aligned} \Delta_{x,u} H &= \Delta_{w(t)} H(\psi(t), x(t, u), u(t), t) + H(\psi(t), x(t, w), w(t), t) - \\ &- H(\psi(t), x(t, u), w(t), t) = \Delta_{w(t)} H(\psi(t), x(t, u), u(t), t) + \\ &+ \langle H_x(\psi(t), x(t, u), w(t), t), \Delta x(t) \rangle + o_H^{(2)}(\|\Delta x(t)\|). \end{aligned}$$

Тогда вектор-функция $\psi(t)$ подчиняется уравнению

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x(t, u), w(t), t), \quad \psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1, u)).$$

Это комбинированная сопряженная система с решением $\psi(t) = \psi(t, u, w)$.

Соответствующая формула приращения функционала имеет вид

$$\Delta_w \Phi(u) = - \int_T \Delta_{w(t)} H(\psi(t, u, w), x(t, u), u(t), t) dt + \eta^{(2)}, \quad (2.28)$$

$$\eta^{(2)} = o_\Phi(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_T o_H^{(2)}(\|\Delta x(t)\|) dt.$$

Полученные формулы (2.27), (2.28) в полной мере обеспечивают фазовую линеаризацию функционала Φ : остаточные члены

$\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$ имеют порядок $o(\|\Delta x\|)$. Это значит, что в линейных по фазовому состоянию задачах (1.1)–(1.3) аппроксимации (2.27), (2.28) являются точными: $\eta^{(1)} = 0$, $\eta^{(2)} = 0$. В этом случае полученные представления совпадают с соответствующими формулами (1.5), (1.6).

Перейдем в формулах (2.27), (2.28) к игольчатому варьированию, полагая $w(t) = u_{v,\chi}(t)$, $t \in T$. Поскольку фазовое приращение $\Delta x(t)$ имеет при этом порядок α , то остаточные члены $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$ являются величинами порядка $o(\alpha)$. С учетом свойства (2.12) процедуры варьирования формулы приращения принимают вид

$$\Phi(u_{v,\chi}) - \Phi(u) = \delta^{(i)}\Phi(u, v, \chi) + \eta^{(i)}, \quad \eta^{(i)} = o(\alpha), \quad i = 1, 2,$$

$$\delta^{(1)}\Phi(u, v, \chi) = - \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H(\psi(t, u), x(t, u_{v,\chi}), u(t), t) dt,$$

$$\delta^{(2)}\Phi(u, v, \chi) = - \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H(\psi(t, u, u_{v,\chi}), x(t, u), u(t), t) dt.$$

Назовем функционалы $\delta^{(i)}\Phi(u, v, \chi)$, $i = 1, 2$, имеющие порядок α , фазовыми вариациями функционала Φ на управлении $u(t)$ с параметрами игольчатого варьирования $v(t)$, $\chi(t)$.

Фазовые вариации $\delta^{(i)}\Phi$ в информационном плане являются более емкими конструкциями, нежели игольчатая вариация $\delta\Phi$, определенная выражением (2.14) на основе формулы приращения (2.7). В линейных задачах (1.1)–(1.3) фазовые вариации, в отличие от игольчатой, обеспечивают точную аппроксимацию функционала. Кроме того, отметим, что фазовые вариации сохраняют, вообще говоря, свою информативность в вырожденном случае, когда $u(t)$ — особое управление, т.е.

$$\Delta_v H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t) = 0, \quad v \in U, \quad t \in T.$$

При этом игольчатая вариация обращается в нуль.

Выделим случай, когда все рассматриваемые вариации совпадают. Пусть в задаче (P) переменные x , u разделены, т.е.

$$F(x, u, t) = F^{(1)}(x, t) + F^{(2)}(u, t),$$

$$f(x, u, t) = f^{(1)}(x, t) + f^{(2)}(u, t).$$

К примеру, выпуклая задача (2.24) имеет такую структуру.

Тогда фазовые и игольчатая вариации функционала совпадают: $\delta^{(i)}\Phi = \delta\Phi$, $i = 1, 2$. Действительно, в этом случае приращение

$\Delta_u H$ не зависит от x (т.е. $\delta^{(1)}\Phi = \delta\Phi$), и производная H_x не зависит от u (т.е. $\psi(t, u, w) = \psi(t, u)$).

Построим методы улучшения на основе фазовых вариаций функционала. При этом будем использовать H -максимизирующее управление

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{u \in U} H(\psi, x, u, t).$$

2.2.2. Процедуры улучшения

Возьмем за основу фазовую вариацию $\delta^{(1)}\Phi(u, v, \chi)$ и опишем соответствующую процедуру улучшения для управления $u(t)$. Отметим, что задача на минимум вариации

$$\delta^{(1)}\Phi(u, v, \chi) \rightarrow \min, \quad v \in V, \quad \chi \in X_\alpha$$

в данном случае не допускает аналитического решения, поскольку в выражении для $\delta^{(1)}\Phi(u, v, \chi)$ присутствует варьируемая фазовая траектория $x(t, u, v, \chi)$.

Учитывая этот факт, ограничим себя следующей целью: для данного $\alpha \in (0, 1]$ найти параметры варьирования v_α, χ_α , которые уменьшают вариацию $\delta^{(1)}\Phi$ на величину порядка α , т.е. обеспечивают оценку вида

$$\delta^{(1)}\Phi(u, v_\alpha, \chi_\alpha) \leq -\alpha\delta_\alpha(u), \quad \delta_\alpha(u) \geq 0. \quad (2.29)$$

Отметим, что это свойство вполне согласуется с полученной ранее оценкой для минимального значения игольчатой вариации функционала

$$\delta\Phi(u, \bar{u}, \chi_\alpha) \leq -\alpha\delta(u),$$

где $\delta(u)$ — невязка принципа максимума.

С учетом выражения для $\delta^{(1)}\Phi$ поставим вспомогательную задачу на поиск параметров варьирования v, χ

$$\int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H(\psi(t, u), x(t), u(t), t) dt \rightarrow \max, \quad v \in V, \quad \chi \in X_\alpha. \quad (2.30)$$

Здесь $x(t)$ — произвольная абсолютно-непрерывная функция, играющая роль функционального параметра.

Решение задачи проводится по схеме п. 2.1.3. Разрешающие соотношения имеют вид

$$v^*(t, x) = u^*(\psi(t, u), x, t),$$

$$\chi(t, x, \alpha) = \begin{cases} 0, & g(t, x) < \lambda(x, \alpha), \\ 1, & g(t, x) > \lambda(x, \alpha), \\ 0 \vee 1, & g(t, x) = \lambda(x, \alpha), \end{cases}$$

$$g(t, x) = \Delta_{v^*(t, x)} H(\psi(t, u), x, u(t), t),$$

где $\lambda(x, \alpha)$ — множитель Лагранжа, обслуживающий интегральное ограничение на $\chi(t)$.

При этом пара $v^*(t, x(t)), \chi(t, x(t), \alpha)$ решает вспомогательную задачу (2.30) для заданной вектор-функции $x(t)$, $t \in T$. Необходимо «сделать» эту вектор-функцию варьированной фазовой траекторией с параметрами $v^*(t, x), \chi(t, x, \alpha)$.

Образуем управление

$$u(t, x, \alpha) = u(t) + \chi(t, x, \alpha)(v^*(t, x) - u(t))$$

и найдем соответствующее ему решение $x_\alpha(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u(t, x, \alpha), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Введем серию обозначений

$$v_\alpha(t) = v^*(t, x_\alpha(t)), \quad g_\alpha(t) = g(t, x_\alpha(t)), \quad \lambda_\alpha = \lambda(x_\alpha, \alpha),$$

$$\chi_\alpha(t) = \chi(t, x_\alpha(t), \alpha), \quad u_\alpha(t) = u(t, x_\alpha(t), \alpha).$$

Отметим, что $x_\alpha(t) = x(t, u_\alpha)$, причем

$$\delta^{(1)}\Phi(u, v_\alpha, \chi_\alpha) = - \int_T \chi_\alpha(t) g_\alpha(t) dt, \quad g_\alpha(t) \geq 0. \quad (2.31)$$

Таким образом, на базе вспомогательной задачи (2.30) построено α -параметрическое семейство управлений варьирования

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} u(t), & g_\alpha(t) < \lambda_\alpha, \\ v_\alpha(t), & g_\alpha(t) > \lambda_\alpha, \\ u(t) \vee v_\alpha(t), & g_\alpha(t) = \lambda_\alpha. \end{cases}$$

В сравнении с методом игольчатой линейризации процедура (2.32) обеспечивает более гибкое варьирование: вспомогательное управление $v_\alpha(t)$ и функция переключения $g_\alpha(t)$ зависят от параметра α .

Введем неотрицательную величину

$$\delta_\alpha(u) = \int_T g_\alpha(t) dt$$

и обоснуем оценку (2.29) для фазовой вариации.

Согласно построению функция варьирования $\chi_\alpha(t)$ является решением задачи (2.30) при $v(t) = v_\alpha(t)$, $x(t) = x_\alpha(t)$

$$\int_T \chi(t) g_\alpha(t) dt \rightarrow \max, \chi \in X_\alpha.$$

Далее, используем лемму 2.1 при $p(t) = g_\alpha(t)$: для любого $\alpha \in (0, 1)$ найдется функция варьирования $\chi(t, \alpha)$ с условием

$$\int_T \chi(t, \alpha) g_\alpha(t) dt = \alpha \int_T g_\alpha(t) dt.$$

При $\alpha = 1$ утверждение очевидно.

Следовательно, имеет место неравенство

$$\int_T \chi_\alpha(t) g_\alpha(t) dt \geq \alpha \int_T g_\alpha(t) dt, \alpha \in (0, 1].$$

В результате получаем заявленную оценку (2.29).

Перейдем к обоснованию свойства улучшения для семейства u_α . Предварительно установим связь между величинами $\delta_\alpha(u)$, $\delta(u)$.

Лемма 2.2. *Справедлива оценка*

$$|\delta_\alpha(u) - \delta(u)| \leq C\alpha.$$

Доказательство. Согласно определению имеем

$$\begin{aligned} \delta_\alpha(u) - \delta(u) &= \int_T (\Delta_{v_\alpha(t)} H(\psi(t, u), x_\alpha(t); u(t), t) - \\ &\quad - \Delta_{\bar{u}(t)} H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)) dt \end{aligned}$$

Учитывая условие максимума для управления $\bar{u}(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \delta_\alpha(u) - \delta(u) &\leq \int_T (\Delta_{v_\alpha(t)} H(\psi(t, u), x_\alpha(t), u(t), t) - \\ &\quad - \Delta_{v_\alpha(t)} H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)) dt = \\ &= \int_T ([H(\psi(t, u), x_\alpha(t), v_\alpha(t), t) - H(\psi(t, u), x(t, u), v_\alpha(t), t)] + \\ &\quad + [H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t) - H(\psi(t, u), x_\alpha(t), u(t), t)]) dt. \end{aligned}$$

Далее, отметим, что в предположениях (A) функции $F(x, u, t)$, $f(x, u, t)$ удовлетворяют условию Липшица по переменной x на множестве $X \times U \times T$. Следовательно, в силу ограниченности на T сопряженной траектории $\psi(t, u)$ приращения под знаком интеграла можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta_1 H = & \langle \psi(t, u), f(x_\alpha(t), v_\alpha(t), t) - f(x(t, u), v_\alpha(t), t) \rangle + \\ & + (F(x(t, u), v_\alpha(t), t) - F(x_\alpha(t), v_\alpha(t), t)) \leq C_1 \|x_\alpha(t) - x(t, u)\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 H = & \langle \psi(t, u), f(x(t, u), u(t), t) - f(x_\alpha(t), u(t), t) \rangle + \\ & + (F(x_\alpha(t), u(t), t) - F(x(t, u), u(t), t)) \leq C_2 \|x_\alpha(t) - x(t, u)\|. \end{aligned}$$

С учетом общей оценки (2.8) для фазового приращения имеем

$$\|x_\alpha(t) - x(t, u)\| \leq C \int_T \chi_\alpha(t) \|\Delta_{v_\alpha(t)} f(x(t, u), u(t), t)\| dt \leq C_3 \alpha.$$

В совокупности заключаем, что

$$\delta_\alpha(u) - \delta(u) \leq C\alpha. \quad (2.33)$$

Рассмотрим теперь обратную разность $\delta(u) - \delta_\alpha(u)$ и применим условие максимума для управления $v_\alpha(t)$. Это приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \delta(u) - \delta_\alpha(u) \leq & \int_T (\Delta_{\bar{u}(t)} H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t) - \\ & - \Delta_{\bar{u}(t)} H(\psi(t, u), x_\alpha(t), u(t), t)) dt = \int_T ([H(\psi(t, u), x(t, u), \bar{u}(t), t) - \\ & - H(\psi(t, u), x_\alpha(t), \bar{u}(t), t)] + [H(\psi(t, u), x_\alpha(t), u(t), t) - \\ & - H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)]) dt. \end{aligned}$$

Дальнейший ход рассуждений сохраняется. В результате получаем оценку $\delta(u) - \delta_\alpha(u) \leq C\alpha$, которая вместе с (2.33) дает утверждение леммы.

Сформулируем, наконец, итоговый результат о возможности улучшения.

Теорема 2.4. Если управление $u(t)$ не удовлетворяет принципу максимума в задаче (P), то $\Phi(u_\alpha) < \Phi(u)$ для малых $\alpha > 0$.

Доказательство. По условию $\delta(u) > 0$. Оценим приращение функционала Φ на управлениях u_α, u

$$\begin{aligned}\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) &= \delta^{(1)}\Phi(u, v_\alpha, \chi_\alpha) + o(\alpha) \leq -\alpha\delta_\alpha(u) + o(\alpha) = \\ &= -\alpha\delta(u) + \alpha(\delta(u) - \delta_\alpha(u)) + o(\alpha) = -\alpha\delta(u) + o_1(\alpha).\end{aligned}$$

Отсюда получаем свойство локального улучшения. Теорема доказана.

Качество улучшения хорошо иллюстрируется на примере линейной задачи (1.1)–(1.3). В этом случае фазовая вариация $\delta^{(1)}\Phi$ совпадает с приращением функционала, и свойство улучшения приобретает нелокальный характер

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) = \delta^{(1)}\Phi(u, v_\alpha, \chi_\alpha) \leq -\alpha\delta_\alpha(u) \leq 0, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Положим, в частности, $\alpha = 1$. Тогда

$$\chi_\alpha(t) = 1, \quad u_\alpha(t) = v_\alpha(t) = u^*(\psi(t, u), x_\alpha(t), t).$$

Получили первую процедуру улучшения в линейной задаче.

Аналогичным образом проводится построение и обоснование процедуры улучшения на основе фазовой вариации $\delta^{(2)}\Phi(u, v, \chi)$. В этом случае вспомогательная задача имеет вид

$$\int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H(\psi(t), x(t, u), u(t), t) dt \rightarrow \max, \quad v \in V, \quad \chi \in X_\alpha,$$

где вектор-функция $\psi(t)$ играет роль функционального параметра.

Разрешающие соотношения имеют вид

$$v^*(t, \psi) = u^*(\psi, x(t, u), t),$$

$$\chi(t, \psi, \alpha) = \begin{cases} 0, & g(t, \psi) < \lambda(\psi, \alpha), \\ 1, & g(t, \psi) > \lambda(\psi, \alpha), \\ 0 \vee 1, & g(t, \psi) = \lambda(\psi, \alpha), \end{cases}$$

$$g(t, \psi) = \Delta_{v^*(t, \psi)} H(\psi, x(t, u), u(t), t).$$

Сформируем варьированное управление

$$u(t, \psi, \alpha) = u(t) + \chi(t, \psi, \alpha)(v^*(t, \psi) - u(t))$$

и найдем решение $\psi_\alpha(t)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x(t, u), u(t, \psi, \alpha), t), \quad \psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1, u)).$$

После соответствующих переобозначений вдоль траектории $\psi_\alpha(t)$ получаем семейство управлений $u_\alpha(t)$ вида (2.32) и выражение (2.31) для $\delta^{(2)}\Phi(u, v_\alpha, \chi_\alpha)$. В полной аналогии с предыдущим доказывается оценка уменьшения фазовой вариации

$$\delta^{(2)}\Phi(u, v_\alpha, \chi_\alpha) \leq -\alpha\delta_\alpha(u), \quad \delta_\alpha(u) = \int_T g_\alpha(t) dt.$$

Для доказательства леммы 2.2 в рассматриваемом случае необходимо получить оценку для приращения сопряженной траектории

$$\Delta\psi(t) = \psi_\alpha(t) - \psi(t, u), \quad t \in T.$$

В силу соответствующих уравнений имеем

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\psi} = & -f_x(x(t, u), u_\alpha(t), t)^T \Delta\psi - \\ & - \chi_\alpha(t) \Delta_{v_\alpha(t)} H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad \Delta\psi(t_1) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, с помощью стандартных преобразований (переход к интегральной форме, оценка по норме, лемма Гронуолла) приходим к неравенству-оценке

$$\|\Delta\psi(t)\| \leq C_1 \int_T \chi_\alpha(t) \|\Delta_{v_\alpha(t)} H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)\| dt \leq C_2 \alpha, \quad t \in T.$$

С учетом этого результата лемма 2.2 доказывается вполне аналогично предыдущему (замена пары $(\psi(t, u), x_\alpha(t)) \Rightarrow (\psi_\alpha(t), x(t, u))$ и использование линейности функции H по ψ).

В итоге получаем свойство локального улучшения. Для линейной задачи улучшение носит нелокальный характер (для любых $\alpha \in (0, 1]$), причем при $\alpha = 1$ выделяется вторая процедура улучшения.

2.2.3. Методы улучшения

Проведем описание первого метода, связанного с первой процедурой улучшения в задаче (P). При этом в качестве основного параметра варьирования целесообразно выбрать множитель Лагранжа $\lambda = \lambda_\alpha$, фигурирующий в схеме улучшения.

Пусть $u(t)$, $t \in T$ — допустимое управление с соответствующими решениями $x(t, u)$, $\psi(t, u)$ фазовой и сопряженной систем. Найдем экстремальное управление

$$v^*(x, t) = u^*(\psi(t, u), x, t)$$

и образуем функцию переключения

$$g(x, t) = \Delta_{v^*(x, t)} H(\psi(t, u), x, u(t), t).$$

Для данного $\lambda \geq 0$ сформируем управление

$$u(x, t, \lambda) = \begin{cases} u(t), & g(x, t) < \lambda, \\ v^*(x, t), & g(x, t) \geq \lambda. \end{cases}$$

Найдем соответствующее решение $x_\lambda(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u(x, t, \lambda), t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (2.34)$$

вместе с управлением $u_\lambda(t) = u(x_\lambda(t), t, \lambda)$. Параметр $\lambda \geq 0$ находится из условия улучшения: $\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(u)$.

Условие $\lambda \geq 0$ связано с неотрицательностью функции переключения: $g(x, t) \geq 0$. Найдем оценку сверху для параметра λ в предположении, что система (2.34) имеет единственное решение $x_\lambda(t)$. Пусть $\lambda_{\max} = \sup_{t \in T} g(t)$, где $g(t) = g(x(t, u), t)$ — функция переключения в методе игольчатой линеаризации. Покажем, что $x_\lambda(t) = x(t, u)$, $t \in T$, если $\lambda > \lambda_{\max}$.

Действительно, проверим, что траектория $x(t, u)$ удовлетворяет системе (2.34) при $\lambda > \lambda_{\max}$. Рассмотрим управление

$$u(x(t, u), t, \lambda) = \begin{cases} u(t), & g(t) < \lambda, \\ v^*(x(t, u), t), & g(t) \geq \lambda. \end{cases}$$

Поскольку $\lambda > \lambda_{\max}$, то $g(t) < \lambda$, $t \in T$, т.е.

$$u(x(t, u), t, \lambda) = u(t), \quad t \in T.$$

При этом соответствующее решение системы (2.34) есть $x(t, u)$, $t \in T$.

Таким образом, при $\lambda > \lambda_{\max}$ в методе фазовой линеаризации варьирование отсутствует: $u_\lambda(t) = u(t)$, $t \in T$. Следовательно, область содержательного варьирования параметра λ есть отрезок $[0, \lambda_{\max}]$, т.е. в процедуре параметрического поиска $\lambda \in [0, \lambda_{\max}]$.

Выделим частный случай описанной процедуры, полагая $x = x(t, u)$. В результате получаем метод игольчатой линеаризации (п. 2.1.5). Здесь фазовая траектория зафиксирована и соответствует управлению $u(t)$.

Метод фазовой линеаризации удовлетворяет условию эффективности: в линейной задаче (1.1)–(1.3) улучшение обеспечивается для любого значения параметра, т.е. $\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(u)$, $\lambda \in [0, \lambda_{\max}]$.

В частности, при $\lambda = 0$ получаем первую процедуру улучшения в линейной задаче.

Метод игольчатой линеаризации не реагирует на линейную задачу — улучшение как и в общем случае достигается за счет λ -параметрического поиска.

Отметим, что затраты на подсчет значения функционала $\Phi(u_\lambda)$ для заданного λ в методах игольчатой и фазовой линеаризации одинаковы.

Нетрудно представить второй метод фазовой линеаризации, отвечающий второй процедуре улучшения. Соответствующие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} v^*(\psi, t) &= u^*(\psi, x(t, u), t), \\ g(\psi, t) &= \Delta_{v^*(\psi, t)} H(\psi, x(t, u), u(t), t), \\ u(\psi, t, \lambda) &= \begin{cases} u(t), & g(\psi, t) < \lambda, \\ v^*(\psi, t), & g(\psi, t) \geq \lambda. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\psi_\lambda(t) : \dot{\psi} = -H_x(\psi, x(t, u), u(\psi, t, \lambda), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)),$$

$$\lambda \in [0, \lambda_{\max}] : \Phi(u_\lambda) \leq \Phi(u), \quad u_\lambda(t) = u(\psi_\lambda(t), t, \lambda),$$

$$\lambda_{\max} = \sup_{t \in T} g(t), \quad g(t) = g(\psi(t, u), t).$$

Данный метод можно считать обобщением второй процедуры улучшения для линейных задач на нелинейный случай. Метод удовлетворяет условию эффективности. По части затрат на реализацию отметим, что каждый подсчет значения $\Phi(u_\lambda)$ в сравнении с первым вариантом требует дополнительного интегрирования ψ -системы.

Замечание. Пусть в задаче (P) переменные x, u разделены. Тогда методы фазовой и игольчатой линеаризации совпадают.

2.3. МЕТОД КВАДРАТИЧНО-ФАЗОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Рассмотрим вопрос о численном решении задачи (P) с помощью метода второго порядка, основанного на квадратичной аппроксимации целевого функционала относительно фазового приращения.

Дополнительно к условиям (A) предположим, что в задаче (P) — терминальная функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно-дифференцируема на X ,

— подынтегральная функция $F(x, u, t)$ и вектор-функция правых частей $f(x, u, t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по состоянию x на множестве $X \times U \times T$.

Как обычно, начнем с базовой формулы приращения, задающей требуемую аппроксимацию целевого функционала.

2.3.1. Квадратичная фазовая аппроксимация функционала

Пусть $u(t), w(t)$ — допустимые управления с траекториями $x(t, u), x(t, w), t \in T$. Для сокращения записи будем использовать обозначение $s[t, u] = s(x(t, u), u(t), t)$. Уравнение для фазового приращения $\Delta x(t) = x(t, w) - x(t, u)$ представим следующим образом

$$\Delta \dot{x} = \Delta_{w(t)} f(x(t, w), u(t), t) + f(x(t, w), u(t), t) - f[t, u]. \quad (2.35)$$

Приращение функционала имеет вид

$$\Delta_w \Phi(u) = \delta_2 \varphi(x(t_1, u)) + o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|^2) + \int_T \Delta_{x,u} F[t, u] dt,$$

$$\delta_2 \varphi(x) = \langle \varphi_x(x), \Delta x(t_1) \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta x(t_1), \varphi_{xx}(x) \Delta x(t_1) \rangle,$$

$$\Delta_{x,u} F[t, u] = \Delta_{w(t)} F(x(t, w), u(t), t) + F(x(t, w), u(t), t) - F[t, u].$$

Введем в рассмотрение $(n \times 1)$ вектор-функцию $\psi(t)$ и $(n \times n)$ симметричную матричную функцию $\Psi(t)$, полагая

$$\psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)), \quad \Psi(t_1) = -\varphi_{xx}(x(t_1, u)). \quad (2.36)$$

Тогда

$$\delta_2 \varphi(x(t_1, u)) = - \int_T \frac{d}{dt} \left(\langle \psi(t), \Delta x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta x(t), \Psi(t) \Delta x(t) \rangle \right) dt.$$

Проведем дифференцирование под знаком интеграла с учетом уравнения (2.35). При этом используются следующие представления для членов, содержащих производную $\Delta \dot{x}$:

$$\begin{aligned} \langle \psi(t), \Delta \dot{x} \rangle - \Delta_{x,u} F[t, u] &= \Delta_{w(t)} H(\psi(t), x(t, w), u(t), t) + \\ &+ H(\psi(t), x(t, w), u(t), t) - H(\psi(t), x(t, u), u(t), t) = \\ &= \Delta_{w(t)} H(\psi(t), x(t, w), u(t), t) + \langle H_x(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \Delta x \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle \Delta x, H_{xx}(\psi(t), x(t, u), u(t), t) \Delta x \rangle + o_H(\|\Delta x\|^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle \Delta \dot{x}, \Psi(t) \Delta x \rangle = \\ & = \langle \Delta_{w(t)} f(x(t, w), u(t), t) + f_x[t, u] \Delta x + o_f(\|\Delta x\|), \Psi(t) \Delta x \rangle. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \Delta_w \Phi(u) = & - \int_T \Delta_{w(t)} H(\psi(t), x(t, w), u(t), t) dt - \\ & - \int_T \langle \dot{\psi}(t) + H_x(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \Delta x(t) \rangle dt - \\ & - \int_T \langle \Psi(t) \Delta x(t), \Delta_{w(t)} f(x(t, w), u(t), t) \rangle dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_T \langle \Delta x(t), (\dot{\Psi}(t) + f_x[t, u]^T \Psi(t) + \Psi(t) f_x[t, u] + \\ & + H_{xx}(\psi(t), x(t, u), u(t), t)) \Delta x(t) \rangle dt - \int_T o_H(\|\Delta x(t)\|^2) dt - \\ & - \int_T \langle o_f(\|\Delta x(t)\|), \Psi(t) \Delta x(t) \rangle dt + o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|^2). \end{aligned}$$

Определим $\psi(t)$, $\Psi(t)$ с помощью уравнений

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x(t, u), u(t), t),$$

$$\dot{\Psi} = -f_x[t, u]^T \Psi - \Psi f_x[t, u] - H_{xx}(\psi, x(t, u), u(t), t). \quad (2.37)$$

Пусть $\psi(t, u)$, $\Psi(t, u)$ — решение векторно-матричной задачи Коши (2.36), (2.37). Формула приращения принимает итоговый вид

$$\begin{aligned} \Delta_w \Phi(u) = & - \int_T \Delta_{w(t)} H(\psi(t, u) + \\ & + \Psi(t, u) \Delta x(t), x(t, w), u(t), t) dt + \eta_2, \quad (2.38) \\ \eta_2 = & o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \int_T o_H(\|\Delta x(t)\|^2) dt - \\ & - \int_T \langle \Delta x(t), \Psi(t) o_f(\|\Delta x(t)\|) \rangle dt. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что остаток η_2 имеет относительно $\|\Delta x\|$ порядок выше второго, т.е. соотношение (2.38) определяет фазовую квадратичную аппроксимацию функционала Φ . Для квадратичных за-

дач (1.15)–(1.17) $\eta_2 = 0$, и представление (2.38) совпадает с полученной ранее формулой (1.24).

Перейдем к игольчатому варьированию управления $u(t)$, полагая $w(t) = u_{v,\chi}(t)$. Приращение функционала принимает вид

$$\Delta_w \Phi(u) = \delta_2 \Phi(u, v, \chi) + \eta_2, \quad \eta_2 = o(\alpha^2), \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 \Phi(u, v, \chi) = \\ = - \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H(p(t, u, x(t, u_{v,\chi})), x(t, u_{v,\chi}), u(t), t) dt, \\ p(t, u, x) = \psi(t, u) + \Psi(t, u) (x - x(t, u)). \end{aligned}$$

Здесь $\delta_2 \Phi(u, v, \chi)$ — квадратичная фазовая аппроксимация функционала Φ на управлении $u(t)$ с параметрами варьирования $v(t)$, $\chi(t)$.

2.3.2. Метод улучшения

Выясним возможность конструктивного использования аппроксимации (2.39) для улучшения управления $u(t)$ в задаче (P). Будем использовать схему исследования, выработанную в п.2.2.2, и выделять только основные моменты построения процедуры улучшения.

Вспомогательная задача на поиск параметров варьирования формулируется в виде

$$\int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H(p(t, u, x(t)), x(t), u(t), t) dt \rightarrow \max, \quad v \in V, \quad \chi \in X_\alpha.$$

Здесь $x(t)$ — произвольная фазовая траектория.

Решение задачи определяется соотношениями

$$v^*(t, x) = u^*(p(t, u, x), x, t),$$

$$g(t, x) = \Delta_{v^*(t, x)} H(p(t, u, x), x, u(t), t),$$

$$\chi(t, x, \alpha) = \begin{cases} 0, & g(t, x) < \lambda(x, \alpha), \\ 1, & g(t, x) > \lambda(x, \alpha), \\ 0 \vee 1, & g(t, x) = \lambda(x, \alpha), \end{cases}$$

Образуем варьированное управление

$$u(t, x, \alpha) = u(t) + \chi(t, x, \alpha)(v^*(t, x) - u(t))$$

и найдем решение $x_\alpha(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u(t, x, \alpha), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Введем обозначения

$$v_\alpha(t) = v^*(t, x_\alpha(t)), \quad g_\alpha(t) = g(t, x_\alpha(t)), \quad \lambda_\alpha = \lambda(x_\alpha, \alpha),$$

$$\chi_\alpha(t) = \chi(t, x_\alpha(t), \alpha), \quad u_\alpha(t) = u(t, x_\alpha(t), \alpha), \quad p_\alpha(t) = p(t, u, x_\alpha).$$

Отметим, что

$$x_\alpha(t) = x(t, u_\alpha), \quad \delta_2\Phi(u, v_\alpha, \chi_\alpha) = - \int_T \chi_\alpha(t) g_\alpha(t) dt.$$

В полной аналогии с предыдущим (п.2.2.2) получается оценка уменьшения квадратичной аппроксимации функционала

$$\delta_2\Phi(u, v_\alpha, \chi_\alpha) \leq -\alpha \delta_\alpha(u), \quad \delta_\alpha(u) = \int_T g_\alpha(t) dt. \quad (2.40)$$

Докажем оценку близости величины $\delta_\alpha(u)$ и невязки принципа максимума $\delta(u)$:

$$|\delta_\alpha(u) - \delta(u)| \leq C\alpha. \quad (2.41)$$

Согласно определению имеем

$$\delta_\alpha(u) - \delta(u) = \int_T (\Delta_{v_\alpha(t)} H(p_\alpha(t), x_\alpha(t), u(t), t) - \Delta_{\bar{u}(t)} H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)) dt.$$

Применяя условие максимума для управления $\bar{u}(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \delta_\alpha(u) - \delta(u) &\leq \int_T (\Delta_{v_\alpha(t)} H(p_\alpha(t), x_\alpha(t), u(t), t) - \\ &- \Delta_{v_\alpha(t)} H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)) dt = \int_T (H(p_\alpha(t), x_\alpha(t), v_\alpha(t), t) - \\ &- H(\psi(t, u), x(t, u), v_\alpha(t), t)) dt + \int_T (H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t) - \\ &- H(p_\alpha(t), x_\alpha(t), u(t), t)) dt = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Поскольку

$$p_\alpha(t) = \psi(t, u) + \Psi(t, u)(x_\alpha(t) - x(t, u)),$$

то

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_T (H(\psi(t, u), x_\alpha(t), v_\alpha(t), t) - H(\psi(t, u), x(t, u), v_\alpha(t), t)) dt + \\ &+ \int_T (\Psi(t, u)(x_\alpha(t) - x(t, u)), f(x_\alpha(t), v_\alpha(t), t)) dt. \end{aligned}$$

Учитывая условие Липшица для функции H по x вместе с оценкой для фазового приращения

$$\|x_\alpha(t) - x(t, u)\| \leq C\alpha, \quad t \in T,$$

получаем $I_1 \leq C_1\alpha$. Аналогично, $I_2 \leq C_2\alpha$.

Следовательно,

$$\delta_\alpha(u) - \delta(u) \leq C\alpha. \quad (2.42)$$

Рассмотрим теперь разность $\delta(u) - \delta_\alpha(u)$ и применим условие максимума для управления $v_\alpha(t)$. Это приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \delta(u) - \delta_\alpha(u) \leq \int_T (\Delta_{\bar{u}(t)} H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t) - \\ - \Delta_{\bar{u}(t)} H(p_\alpha(t), x_\alpha(t), u(t), t)) dt. \end{aligned}$$

Дальнейший вывод проводится аналогично предыдущему. В результате получаем неравенство $\delta(u) - \delta_\alpha(u) \leq C\alpha$, что вместе с (2.42) приводит к оценке (2.41).

Сформулируем конечный результат о локальном улучшении: если управление $u(t)$, $t \in T$ не удовлетворяет принципу максимума в задаче (P), то $\Phi(u_\alpha) < \Phi(u)$ для малых $\alpha \in (0, 1]$.

Действительно, на основании представления (2.39) с учетом оценок (2.40), (2.41) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(u_\alpha) - \Phi(u) &\leq -\alpha\delta_\alpha(u) + o(\alpha^2) = \\ &= -\alpha\delta(u) + \alpha(\delta(u) - \delta_\alpha(u)) + o(\alpha^2). \end{aligned}$$

Для квадратичных задач (1.15)–(1.17) свойство улучшения ($\Phi(u_\alpha) \leq \Phi(u)$) имеет место для всех $\alpha \in (0, 1]$. В частности, при $\alpha = 1$ получаем первую процедуру улучшения.

Отметим, что потенциал улучшения представленного метода, вообще говоря, выше, чем множество управлений со свойством $\delta(u) > 0$. Во всяком случае в квадратичных задачах при $\alpha = 1$ метод улучшает управления, удовлетворяющие принципу максимума (см. п. 1.2.3).

В заключение опишем метод квадратично-фазовой аппроксимации в итоговом варианте.

Пусть $(u(t), x(t, u))$ — допустимая пара. Найдем решение $(\psi(t, u), \Psi(t, u))$ системы (2.37) с начальными условиями (2.36) и сформируем вектор-функцию

$$p(t, u, x) = \psi(t, u) + \Psi(t, u)(x - x(t, u)).$$

Определим экстремальное управление

$$v^*(x, t) = u^*(p(t, u, x), x, t)$$

и функцию переключения

$$g(x, t) = \Delta_{v^*(x, t)} H(p(t, u, x), x, u(t), t).$$

Построим управление

$$u(x, t, \lambda) = \begin{cases} u(t), & g(x, t) < \lambda, \\ v^*(x, t), & g(x, t) \geq \lambda \end{cases}$$

с параметром $\lambda \geq 0$. Найдем решение $x_\lambda(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u(x, t, \lambda), t), \quad x(t_0) = x^0$$

вместе с управлением $u_\lambda(t) = u(x_\lambda(t), t, \lambda)$. Параметр $\lambda \geq 0$ определяется условием улучшения $\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(u)$.

Выделим частные случаи этой процедуры. Фиксируя фазовое состояние $x = x(t, u)$, получаем метод игольчатой линеаризации. Если положить $\Psi(t, u) = 0$, то приходим к методу фазовой линеаризации в первом варианте. Для квадратичных задач (1.15)–(1.17) метод обеспечивает нелокальное улучшение: $\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(u)$ для любого $\lambda \geq 0$. В частности, при $\lambda = 0$ получаем первую процедуру улучшения в квадратичной задаче.

2.4. МЕТОДЫ СЛАБОГО ВАРЬИРОВАНИЯ

В данном разделе проводится построение и обоснование квазиградиентных методов, которые в качестве направления функционального спуска используют некоторую коррекцию обычного градиента. Основу модификаций составляют линейно-квадратичные фазовые аппроксимации функционала, построенные в предыдущих разделах. Структура рассматриваемого класса методов определяется процедурой слабого варьирования управлений с локальностью в норме пространства $L_\infty^1(T)$. При этом аппроксимирующие конструкции связаны с линеаризацией задачи по управлению. Базовым условием оптимальности служит дифференциальный принцип максимума.

Рассмотрим, по-прежнему, основную задачу оптимального управления (задача (P))

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min, \quad u \in V,$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0,$$

$$V = \{u \in L_\infty(T): u(t) \in U, t \in T = [t_0, t_1]\}$$

Предположим, что в задаче действует набор условий (В):

- функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема на X ;
- функция $F(x, u, t)$ и вектор-функция $f(x, u, t)$ непрерывны на $X \times U \times T$ вместе с производными по x, u ;
- производные $F_x(x, u, t), f_x(x, u, t)$ удовлетворяют условию Липшица по u на множестве $X \times U \times T$;
- производные $F_u(x, u, t), f_u(x, u, t)$ удовлетворяют условию Липшица по x на множестве $X \times U \times T$;
- множество U — выпуклый компакт.

В данном случае для задачи (Р) справедлив дифференциальный принцип максимума: для оптимальности управления $u \in V$ с траекториями $x(t), \psi(t)$ фазовой и сопряженной систем необходимо, чтобы

$$u(t) = \arg \max_{v \in U} \langle H_u(\psi(t), x(t), u(t), t), v \rangle, \quad t \in T.$$

В этой ситуации методы работают с управлениями, которые определяются линеаризованным условием максимума относительно базового управления $u(t)$

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{v \in U} \langle H_u(\psi, x, u(t), t), v \rangle,$$

$$\psi, x \in R^n, t \in T. \quad (2.43)$$

2.4.1. Процедура слабого варьирования

Пусть $u(t), t \in T$ — допустимое управление в задаче (Р). Опишем процедуру его слабого варьирования в условиях (В).

Выберем некоторое управление $v \in V$ ($v \neq u$) и определим функцию варьирования $\chi(t)$ условиями

$$\chi \in L_\infty(T), \quad \chi(t) \in [0, 1], \quad t \in T. \quad (2.44)$$

Построим семейство варьированных управлений по правилу выпуклой комбинации с функцией $\chi(t)$

$$u_{v,\chi}(t) = u(t) + \chi(t)(v(t) - u(t)), \quad t \in T. \quad (2.45)$$

Понятно, что в условиях (В) (U — выпуклое множество) формулы (2.44), (2.45) определяют допустимое варьирование: $u_{v,\chi}(t) \in V$.

Проведем локализацию процедуры (2.45). С этой целью нормируем функцию варьирования в пространстве $L_\infty(T)$, полагая

$\|\chi\|_\infty = \alpha$, где $\alpha \in (0, 1]$ — параметр. После этой операции функция варьирования определяется условиями

$$\chi \in L_\infty(T), \quad 0 \leq \chi(t) \leq \alpha, \quad t \in T. \quad (2.46)$$

Пусть X_α — множество функций варьирования для заданного $\alpha \in (0, 1]$.

Формула (2.45) с условием (2.46) определяет в общем виде процедуру слабого варьирования для управления $u(t)$. Локальность варьирования обеспечивается параметром α в норме пространства $L_\infty^r(T)$:

$$\|u_{v,\chi} - u\|_\infty \leq \alpha \|v - u\|_\infty \leq \alpha d,$$

где d — диаметр множества V .

Рассмотрим фазовое приращение

$$\Delta x(t) = x(t, u_{v,\chi}) - x(t), \quad t \in T,$$

соответствующее варьированию (2.45). На основании общей оценки (2.8) при $w(t) = u_{v,\chi}(t)$ с учетом условия Липшица для вектор-функции f по u заключаем, что $\|\Delta x(t)\| \sim \alpha$, $t \in T$:

$$\|\Delta x(t)\| \leq C_1 \int_T \|u_{v,\chi}(t) - u(t)\| dt \leq C_2 \alpha, \quad t \in T.$$

Выделим главный член формулы приращения (2.7) относительно параметра α . С этой целью проведем линеаризацию приращения $\Delta_w H$ под знаком интеграла

$$\begin{aligned} \Delta_w \Phi(u) = & - \int_T \langle H_u(\psi(t), x(t), u(t), t), \Delta u(t) \rangle dt - \\ & - \int_T o_H(\|\Delta u(t)\|) dt + \eta, \quad \Delta u(t) = w(t) - u(t). \end{aligned}$$

В рамках слабого варьирования

$$\Delta u(t) = \chi(t)(v(t) - u(t)), \quad \|\Delta u(t)\| \sim \alpha, \quad t \in T.$$

Это значит, что $\eta = o(\alpha)$, и слабая аппроксимация функционала Φ имеет вид

$$\Phi(u_{v,\chi}) - \Phi(u) = \delta\Phi(u, v, \chi) + o(\alpha), \quad (2.47)$$

$$\delta\Phi(u, v, \chi) = - \int_T \chi(t) \langle H_u(\psi(t), x(t), u(t), t), v(t) - u(t) \rangle dt.$$

Функционал $\delta\Phi(u, v, \chi)$ порядка α назовем слабой вариацией функционала Φ на управлении $u(t)$ с параметрами варьирования $v(t), \chi(t)$.

2.4.2. Стандартный метод слабого варьирования

Найдем параметры варьирования v, χ из условия минимума слабой вариации функционала

$$\delta\Phi(u, v, \chi) \rightarrow \min, v \in V, \chi \in X_\alpha \quad (2.48)$$

для фиксированного значения $\alpha \in (0, 1]$.

Эта задача в полной мере соответствует вспомогательной задаче (2.16) метода игольчатой линеаризации.

С учетом выражения (2.47) решение задачи (2.48) по $v \in V$ определяется условием

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{w \in U} \langle H_u(\psi(t), x(t), u(t), t), w), t \in T.$$

Введем неотрицательную функцию

$$g(t) = \langle H_u(\psi(t), x(t), u(t), t), \bar{u}(t) - u(t) \rangle, t \in T$$

и рассмотрим фрагмент задачи (2.48) при $v(t) = \bar{u}(t)$

$$\int_T \chi(t)g(t)dt \rightarrow \max, \chi(t) \in [0, \alpha].$$

Решение очевидно и имеет вид $\chi_\alpha(t) = \alpha, t \in T$.

Таким образом, пара $(\bar{u}(t), \alpha)$ решает вспомогательную задачу (2.48), причем

$$\delta\Phi(u, \bar{u}, \alpha) = -\alpha\delta(u), \delta(u) = \int_T g(t)dt.$$

Процедура варьирования принимает вид

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha(\bar{u}(t) - u(t)), t \in T.$$

Параметр $\alpha \in (0, 1]$ выбирается из условия улучшения: $\Phi(u_\alpha) \leq \Phi(u)$.

Это условие проверяется элементарно. Величина $\delta(u)$ есть невязка дифференциального принципа максимума на управлении $u(t)$. Если $\delta(u) > 0$, то

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) = \delta\Phi(u, \bar{u}, \alpha) + o(\alpha) = -\alpha\delta(u) + o(\alpha).$$

Отсюда получаем свойство локального улучшения.

Вопросы сходимости метода решаются вполне аналогично предыдущему (см. п. 2.1.4).

В заключение, опишем вычислительную схему представленного метода слабого улучшения:

- 1) исходные данные — $u \in V$, $x(t) = x(t, u)$, $t \in T$;
- 2) решение сопряженной системы на паре $(u(t), x(t))$, формирование вспомогательного управления

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{w \in U} \langle H_u(\psi(t), x(t), u(t), t), w),$$

функции $g(t) = \langle H_u(\psi(t), x(t), u(t), t), \bar{u}(t) - u(t) \rangle$, $t \in T$ и вычислительные невязки

$$\delta(u) = \int_T g(t) dt;$$

- 3) критерий остановки — $\delta(u) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — точность выполнения дифференциального принципа максимума;

- 4) процедура варьирования — для $\alpha \in (0, 1]$

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha(\bar{u}(t) - u(t)), \quad t \in T;$$

- 5) итерационный поиск параметра α с ориентировкой на решение задачи

$$\Phi(u_\alpha) \rightarrow \min, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Замечание. В условиях (В) вектор-функцию

$$\nabla \Phi(u) = -H_u(\psi(t), x(t), u(t), t)$$

можно интерпретировать как градиент функционала Φ на управлении $u(t)$. При этом процедура слабого улучшения приобретает традиционные черты метода условного градиента [12, 14].

2.4.3. Модификации метода

Модификации метода связаны с использованием формул приращения (2.27), (2.28), (2.38), которые обеспечивают более высокий порядок аппроксимации функционала в сравнении со стандартной формулой (2.7).

Построим первую модификацию. Линеаризация формулы (2.27) по управлению приводит к представлению

$$\begin{aligned} \Delta_w \Phi(u) = & - \int_T \langle H_u(\psi(t, u), x(t, w), u(t), t), \Delta u(t) \rangle dt - \\ & - \int_T o_H(\|\Delta u(t)\|) dt + \eta^{(1)}, \quad \Delta u(t) = w(t) - u(t). \end{aligned}$$

Переходя к слабому варьированию ($w = u_{v,\chi}$) и оценивая остаточные члены относительно α , получаем

$$\Phi(u_{v,\chi}) - \Phi(u) = \delta^{(1)}\Phi(u, v, \chi) + o(\alpha), \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\Phi(u, v, \chi) = \\ = - \int_T \chi(t) \langle H_u(\psi(t, u), x(t, u_{v,\chi}), u(t), t), v(t) - u(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Здесь $\delta^{(1)}\Phi(u, v, \chi)$ — слабая квазивариация функционала Φ на управлении $u(t)$ с параметрами варьирования $v(t)$, $\chi(t)$.

Сформулируем задачу в вариациях

$$\begin{aligned} \int_T \chi(t) \langle H_u(\psi(t, u), x(t), u(t), t), v(t) - u(t) \rangle dt \rightarrow \max, \\ v \in V, \chi \in X_\alpha \end{aligned}$$

с произвольной вектор-функцией $x(t)$, $t \in T$.

Ее решение имеет вид

$$v^*(t, x(t)) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \chi_\alpha(t) = \alpha,$$

где максимизирующее управление u^* определяется выражением (2.43).

Образует варьированное управление

$$u(t, x, \alpha) = u(t) + \alpha(v^*(t, x) - u(t))$$

и найдем соответствующее решение $x_\alpha(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u(t, x, \alpha), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Положим

$$v_\alpha(t) = v^*(t, x_\alpha(t)), \quad u_\alpha(t) = u(t, x_\alpha(t), \alpha), \quad t \in T.$$

Тогда

$$x_\alpha(t) = x(t, u_\alpha), \quad \delta^{(1)}\Phi(u, v_\alpha, \alpha) = -\alpha\delta_\alpha(u),$$

$$\delta_\alpha(u) = \int_T \langle H_u(\psi(t, u), x_\alpha(t), u(t), t), v_\alpha(t) - u(t) \rangle dt,$$

причем $\delta_\alpha(u) \geq 0$.

В результате процедура варьирования представляется в виде

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha(v_\alpha(t) - u(t)), \quad t \in T.$$

Задача поиска параметра $\alpha \in (0, 1]$ определяется условием улучшения: $\Phi(u_\alpha) \leq \Phi(u)$.

Обоснование свойства улучшения проводится по стандартной схеме (см. п. 2.2.2). В полной аналогии с предыдущим доказывает-

ся оценка близости величины $\delta_\alpha(u)$ к невязке дифференциального принципа максимума

$$\|\delta_\alpha(u) - \delta(u)\| \leq C\alpha. \quad (2.50)$$

В итоге обеспечивается локальное улучшение для управлений $u(t)$ с условием $\delta(u) > 0$

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) = -\alpha\delta_\alpha(u) + o(\alpha) = -\alpha\delta(u) + \alpha(\delta(u) - \delta_\alpha(u)) + o(\alpha).$$

Для билинейных задач аппроксимация (2.49) является точной и улучшение приобретает нелокальный характер

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) = -\alpha\delta_\alpha(u) \leq 0, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Стандартный метод слабого улучшения этим свойством не обладает.

Таким образом, итоговая схема первой модификации метода слабого варьирования имеет следующий вид:

1) по данной допустимой паре $(u(t), x(t, u))$ найдем решение $\psi(t, u)$ сопряженной системы и сформируем максимизирующее управление

$$v^*(t, x) = u^*(\psi(t, u), x, t), \quad t \in T, \quad x \in R^n;$$

2) для заданного $\alpha \in (0, 1]$ проведем варьирование

$$u(t, x, \alpha) = u(t) + \alpha(v^*(t, x) - u(t))$$

и найдем решение $x_\alpha(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u(t, x, \alpha), t), \quad x(t_0) = x^0$$

вместе с управлением $u_\alpha(t) = u(t, x_\alpha(t), \alpha)$, $t \in T$;

3) выберем шаг $\alpha \in (0, 1]$ из условия улучшения $\Phi(u_\alpha) \leq \Phi(u)$.

Вторая модификация связана с формулой приращения (2.28), которая после линеаризации по управлению принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_w \Phi(u) = & - \int_T \langle H_u(\psi(t, u, w), x(t, u), u(t), t), \Delta u(t) \rangle dt - \\ & - \int_T o_H(\|\Delta u(t)\|) dt + \eta^{(2)}. \end{aligned}$$

Используя процедуру слабого варьирования, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(u_{v,\chi}) - \Phi(u) &= \delta^{(2)}\Phi(u, v, \chi) + o(\alpha), \\ \delta^{(2)}\Phi(u, v, \chi) &= \\ &= - \int_T \chi(t) \langle H_u(\psi(t, u, u_{v,\chi}), x(t, u), u(t), t), v(t) - u(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Здесь $\delta^{(2)}\Phi(u, v, \chi)$ — слабая квазивариация функционала.

Дальнейшие построения полностью аналогичны предыдущему с естественной корректировкой в обозначениях. Итоговая схема второй модификации метода слабого варьирования имеет следующий вид:

1) по данной допустимой паре $(u(t), x(t, u))$ сформируем максимизирующее управление

$$v^*(t, \psi) = u^*(\psi, x(t, u), t), \quad t \in T, \quad \psi \in R^n;$$

2) для заданного $\alpha \in (0, 1]$ проведем варьирование

$$u(t, \psi, \alpha) = u(t) + \alpha(v^*(t, \psi) - u(t))$$

и найдем решение $\psi_\alpha(t)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x(t, u), u(t, \psi, \alpha), t), \quad \psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1, u))$$

вместе с управлением $u_\alpha(t) = u(t, \psi_\alpha(t), \alpha)$, $t \in T$;

3) выберем шаг $\alpha \in (0, 1]$ из условия улучшения $\Phi(u_\alpha) \leq \Phi(u)$.

Для билинейных задач улучшение обеспечивается для любого $\alpha \in (0, 1]$.

Возьмем, наконец, за основу квадратичную формулу (2.38). После линеаризации и перехода к слабому варьированию аппроксимация имеет вид

$$\Phi(u_{v,\chi}) - \Phi(u) = \delta_2\Phi(u, v, \chi) + o(\alpha^2), \quad (2.51)$$

$$\delta_2\Phi(u, v, \chi) =$$

$$= - \int_T \chi(t) \langle H_u(p(t, u, x(t, u_{v,\chi})), x(t, u_{v,\chi}), u(t), t), v(t) - u(t) \rangle dt,$$

$$p(t, u, x) = \psi(t, u) + \Psi(t, u)(x - x(t, u)).$$

Проведем описание соответствующего метода второго порядка, который конструируется по стандартной схеме, представленной выше (третья модификация).

По данной допустимой паре $(u(t), x(t, u))$ найдем решение $\psi(t, u)$, $\Psi(t, u)$ векторно-матричной задачи Коши (2.36), (2.37). Образует вектор-функцию $p(t, u, x)$ и определим максимизирующее управление

$$v^*(t, x) = u^*(p(t, u, x), x, t), \quad t \in T, \quad x \in R^n.$$

Проведем варьирование с параметром $\alpha \in (0, 1]$

$$u(t, x, \alpha) = u(t) + \alpha(v^*(t, x) - u(t))$$

и найдем решение $x_\alpha(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u(t, x, \alpha), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Выделим управление $u_\alpha(t) = u(t, x_\alpha(t), \alpha)$, $t \in T$ и определим задачу поиска параметра $\alpha \in (0, 1]$ условием улучшения $\Phi(u_\alpha) \leq \Phi(u)$.

Коротко обсудим вопрос обоснования процедуры. Положим

$$v_\alpha(t) = v^*(t, x_\alpha(t)), \quad p_\alpha(t) = p(t, u, x_\alpha(t)), \quad t \in T.$$

Тогда

$$\delta_2 \Phi(u, v_\alpha, \alpha) = -\alpha \delta_\alpha(u),$$

$$\delta_\alpha(u) = \int_T \langle H_u(p_\alpha(t), x_\alpha(t), u(t), t), v_\alpha(t) - u(t) \rangle dt,$$

причем $\delta_\alpha(u) \geq 0$.

В результате получаем представление

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) = -\alpha \delta_\alpha(u) + o(\alpha^2).$$

Аналогично предыдущему доказывается оценка (2.50), что обеспечивает локальное улучшение для управлений $u(t)$, не удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума. Для линейно-квадратичных задач аппроксимация (2.51) является точной, поэтому улучшение имеет нелокальный характер.

2.4.4. Методы проектирования

В рамках используемой процедуры слабого варьирования нетрудно построить проекционные варианты полученных выше методов. В этом случае вспомогательные управления определяются как проекция на множество U относительно базового управления $u(t)$

$$u^*(\psi, x, t) = P_U(u(t) + H_u(\psi, x, u(t), t)), \quad \psi, x \in R^n, t \in T.$$

Дифференциальный принцип максимума для управления $u(t)$ в этой терминологии имеет вид

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T.$$

Стандартный метод проекции описывается соотношениями

$$\bar{u}(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t),$$

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha(\bar{u}(t) - u(t)), \quad t \in T,$$

$$\alpha \in (0, 1]; \quad \Phi(u_\alpha) \leq \Phi(u).$$

Представим итоговые схемы модифицированных версий метода.

Первая модификация:

$$\begin{aligned}v^*(t, x) &= u^*(\psi(t, u), x, t), \quad x \in R^n, \\v(t, x, \alpha) &= u(t) + \alpha(v^*(t, x) - u(t)), \\x_\alpha(t) &: \dot{x} = f(x, v(t, x, \alpha), t), \quad x(t_0) = x^0, \\u_\alpha(t) &= v(t, x_\alpha(t), t), \quad t \in T.\end{aligned}$$

Вторая модификация:

$$\begin{aligned}v^*(t, \psi) &= u^*(\psi, x(t, u), t), \quad \psi \in R^n, \\v(t, \psi, \alpha) &= u(t) + \alpha(v^*(t, \psi) - u(t)), \\ \psi_\alpha(t) &: \dot{\psi} = -H_x(\psi, x(t, u), v(t, \psi, \alpha), t), \quad \psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1, u)), \\u_\alpha(t) &= v(t, \psi_\alpha(t), t), \quad t \in T.\end{aligned}$$

Третья модификация:

$$\begin{aligned}p(t, u, x) &= \psi(t, u) + \Psi(t, u)(x - x(t, u)), \quad x \in R^n, \\v^*(t, x) &= u^*(p(t, u, x), x, t), \\v(t, x, \alpha) &= u(t) + \alpha(v^*(t, x) - u(t)), \\x_\alpha(t) &: \dot{x} = f(x, v(t, x, \alpha), t), \quad x(t_0) = x^0, \\u_\alpha(t) &= v(t, x_\alpha(t), t), \quad t \in T.\end{aligned}$$

Обоснование свойств улучшения проводится по аналогии с предыдущим.

Отметим, что методы проектирования не требуют ограниченности множества U . В частности, при $U = R^r$ получаем процедуры слабого улучшения для задач без ограничений на управление.



Глава 3

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В данной главе рассматривается основная задача оптимального управления при наличии дополнительных ограничений терминального типа, которые описываются с помощью стандартных функционалов. В целом, задача характеризуется конечным набором функционалов, и ее численный анализ существенно усложняется по сравнению с основной задачей для одного функционала.

Развиваемый подход связан с линеаризацией функционалов задачи в рамках процедур игольчатого и слабого варьирования. Тактика итерационного преобразования управлений зависит от типа ограничений. В задачах с ограничениями-неравенствами (раздел 3.1) методы конструируются в классе допустимых управлений с сохранением всех функциональных ограничений на каждой итерации. Соответствующие вспомогательные задачи поиска параметров варьирования носят минимаксный характер. Доказывается сходимость методов по невязке принципа максимума. В задачах с ограничениями-равенствами (раздел 3.2) методы работают в классе доступных управлений, когда функциональные ограничения не выполнены. В этом случае цель итерации — уменьшение функционала Лагранжа и функционала-невязки (типа максимума) по ограничениям задачи. Соответствующие вспомогательные процедуры относительно параметров варьирования являются интегральными задачами ляпуновского типа.

Вопросы численного решения вспомогательных задач рассматриваются в разделе 3.3. Для минимаксных задач построен специализированный метод игольчатого улучшения. Интегральные задачи решаются в рамках метода параметризации с помощью процедуры нелокального спуска для семейства квадратичных функционалов. Аналогичный подход иллюстрируется для линейной задачи быстрого действия.

Заключительный раздел 3.4 посвящен нелинейной задаче минимаксного типа, для которой построен своеобразный метод игольчатого улучшения.

3.1. ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВА

3.1.1. Постановка задачи. Условия оптимальности

Рассмотрим управляемый процесс ($u(t) \in R^r$) — управление, $x(t) \in R^n$ — фазовое состояние), который на заданном промежутке $T = [t_0, t_1]$ описывается с помощью динамической системы

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Введем множество доступных управлений

$$V = \{u \in L_\infty(T) : u(t) \in U, t \in T\}.$$

На множестве V определим набор функционалов

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) + \int_T F_i(x(t), u(t), t) dt, \quad i = \overline{0, m}$$

и поставим задачу оптимального управления (задача P1)

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min, \quad \Phi_i(u) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad u \in V.$$

Управление $u \in V$ назовем допустимым в задаче P1, если выполнены функциональные ограничения $\Phi_i(u) \leq 0, i = \overline{1, m}$. Обозначим через W множество допустимых управлений.

Введем следующие наборы условий относительно данной задачи.

(А). Терминальные функции $\varphi_i(x), i = \overline{0, m}$ непрерывно-дифференцируемы по $x \in R^n$, вектор-функция $f(x, u, t)$ и интегранты $F_i(x, u, t), i = \overline{0, m}$ непрерывны по совокупности своих аргументов на $R^n \times U \times T$ вместе с производными по x , множество U компактно.

(В). Дополнительно к условиям (А) вектор-функция $f(x, u, t)$ и подынтегральные функции $F_i(x, u, t), i = \overline{0, m}$ непрерывно-дифференцируемы по $u \in U$, множество U выпукло.

Пусть $u(t), t \in T$ — допустимое управление, $x(t) = x(t, u)$ — соответствующая ему фазовая траектория. Выделим набор индексов активных ограничений вместе с индексом целевого функционала

$$I = \{0, i = 1, \dots, m : \Phi_i(u) = 0\}.$$

Для каждого функционала $\Phi_i(u), i \in I$ определим функцию Понтрягина

$$H^i(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - F_i(x, u, t)$$

и решение $\psi^i(t)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x^i(\psi, x(t), u(t), t), \quad \psi(t_1) = -\nabla\varphi_i(x(t_1)).$$

Будем использовать обозначения

$$\Delta_{v(t)} H^i[t, u] = H^i(\psi^i(t), x(t), v(t), t) - H^i(\psi^i(t), x(t), u(t), t), \quad v \in V,$$

$$H_u^i[t, u] = H_u^i(\psi^i(t), x(t), u(t), t).$$

Введем множество векторов Лагранжа

$$\Lambda = \{\lambda = (\lambda_i, i \in I): \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1\}$$

и сформулируем необходимые условия оптимальности.

1. Если управление $u(t)$, $t \in T$ является оптимальным в задаче P1 с условиями (A), то найдется такой вектор $\bar{\lambda} \in \Lambda$, что выполняется принцип максимума (ПМ)

$$\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \Delta_{v(t)} H^i[t, u] \leq 0, \quad v \in U, t \in T. \quad (3.1)$$

2. Если управление $u(t)$, $t \in T$ является оптимальным в задаче P1 с условиями (B), то найдется такой вектор $\bar{\lambda} \in \Lambda$, что выполняется дифференциальный принцип максимума (ДПМ)

$$\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \langle H_u^i[t, u], v - u(t) \rangle \leq 0, \quad v \in U, t \in T. \quad (3.2)$$

Будем говорить, что в задаче P1 управление $u \in W$ удовлетворяет ПМ (ДПМ), если выполнено условие (3.1) (условие (3.2)).

Выясним возможности применения этих условий для решения задачи об улучшении управления $u(t)$, не удовлетворяющего ПМ (ДПМ). Как известно, эта задача состоит в построении управления $\bar{u} \in W$ с меньшим значением целевого функционала: $\Phi_0(\bar{u}) < \Phi_0(u)$. Отметим, что в приведенной традиционной форме условия (3.1), (3.2) носят неконструктивный характер, так как вопрос об отыскании вектора $\bar{\lambda}$ остается открытым. Укажем другую форму представления условий (3.1), (3.2), более приемлемую для реализации и позволяющую построить процедуры улучшения управления $u(t)$.

Пусть $u \in W$. Введем следующую характеристику допустимого управления

$$\mu(u) = \max_{v \in V} \min_{i \in I} \int_T \Delta_{v(t)} H^i[t, u] dt. \quad (3.3)$$

Поскольку при $v(t) = u(t)$ все интегралы обращаются в нуль, то $\mu(u) \geq 0$. Докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. Пусть $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$ — действительные числа. Тогда неравенства

$$\min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \leq 0, \quad \min_{i \in I} a_i \leq 0 \quad (3.4)$$

эквивалентны.

Доказательство. Пусть выполнено первое неравенство из (3.4), но $\min_{i \in I} a_i > 0$. Тогда $a_i > 0$, $i \in I$ и

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a_i > 0, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Поскольку Λ — компактное множество, то

$$\min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i a_i > 0.$$

Это противоречит исходному предположению.

Обратно, пусть $\min_{i \in I} a_i \leq 0$ и минимум достигается при $i = i_*$, т.е. $a_{i_*} \leq 0$. Определим вектор $\lambda^* \in \Lambda$ следующим образом

$$\lambda_{i_*} = \begin{cases} 1, & i = i_* \\ 0, & i \in I \setminus i_* \end{cases}.$$

Тогда $a_{i_*} = \sum_{i \in I} \lambda_{i_*} a_i \leq 0$. Следовательно,

$$\min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \leq 0.$$

Лемма доказана.

Следующая теорема устанавливает связь ПМ с величиной $\mu(u)$.

Теорема 3.1. Управление $u \in W$ удовлетворяет принципу максимума в задаче PI тогда и только тогда, когда $\mu(u) = 0$.

Доказательство. Пусть управление $u \in W$ удовлетворяет принципу максимума, т.е. выполнено условие (3.1). Тогда для любого доступного управления $v(t)$, $t \in T$

$$\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \Delta_{v(t)} H^i[t, u] \leq 0, \quad \bar{\lambda} \in \Lambda.$$

Переходя к интегралам, получаем

$$\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \int_T \Delta_{v(t)} H^i[t, u] dt \leq 0.$$

Следовательно, $\min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i \int_T \Delta_{v(t)} H^i[t, u] dt \leq 0$. Отсюда, используя результат леммы 3.1., имеем

$$\min_{i \in I} \int_T \Delta_{v(t)} H^i[t, u] dt \leq 0, \quad v \in V. \quad (3.5)$$

Поскольку при $v(t) = u(t)$, $t \in T$ данный минимум равен нулю, то $\mu(u) = 0$.

Обратно, пусть $u \in W$, $\mu(u) = 0$. Это значит, что выполнено неравенство (3.5). Образует вспомогательную задачу оптимального управления с параметром ξ

$$\xi \rightarrow \max, \quad \int_T \Delta_{v(t)} H^i[t, u] dt \geq \xi, \quad i \in I, \quad v \in V. \quad (3.6)$$

Условие (3.5) означает, что пара $(\xi_* = 0, u(t))$ является решением этой задачи. При этом все ограничения на оптимали $(\xi_*, u(t))$ активны. Сформулируем принцип максимума для управления $u(t)$ в задаче (3.6): найдется такой вектор $\bar{\lambda} \in \Lambda$, что

$$\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \Delta_{v(t)} H^i[t, u] \leq 0, \quad v \in U, \quad t \in T.$$

Полученное соотношение есть ПМ для управления $u(t)$ в задаче P1. Теорема доказана.

Таким образом, величина $\mu(u)$ является невязкой ПМ для управления $u \in W$.

Аналогичным образом получается экстремальный вариант ДПМ. В этом случае для управления $u \in W$ введем неотрицательную величину

$$\eta(u) = \max_{v \in V} \min_{i \in I} \int_T \langle H_u^i[t, u], v(t) - u(t) \rangle dt.$$

Тогда равенство $\eta(u) = 0$ эквивалентно выполнению ДПМ для управления $u \in W$, т.е. величина $\eta(u)$ является невязкой ДПМ на управлении $u(t)$.

3.1.2. Процедуры улучшения допустимых управлений

Опишем процедуру игольчатого варьирования, на основе которой решается задача об улучшении допустимого управления и строится соответствующий метод последовательных приближений.

Пусть $u(t)$, $t \in T$ — допустимое управление. Выберем некоторое управление $v \in V$ и введем функцию варьирования $\chi(t)$, $t \in T$ из пространства $L_\infty(T)$, принимающую только два значения $\{0, 1\}$. Построим семейство варьированных управлений

$$u_{v,\chi}(t) = u(t) + \chi(t)(v(t) - u(t)), \quad t \in T. \quad (3.7)$$

Нормируем функцию варьирования с помощью параметра $\alpha \in [0, 1]$ по правилу

$$\int_T \chi(t) dt = \alpha(t_1 - t_0). \quad (3.8)$$

Формула (3.7) с условием (3.8) определяет в общем виде процедуру игольчатого варьирования управления $u(t)$.

Понятно, что данная процедура сохраняет прямые ограничения на управление, т.е. $u_{v,\chi} \in V$.

Определим семейство функций варьирования

$$X_\alpha^{(1)} = \{\chi \in L_\infty(T), \chi(t) = 0 \vee 1, \int_T \chi(t) dt = \alpha(t_1 - t_0)\}.$$

Набор (v, χ, α) , $v \in V$, $\chi \in X_\alpha^{(1)}$, $\alpha \in [0, 1]$ задает вариацию управления $u(t)$, $t \in T$.

Перейдем к описанию процедуры улучшения. Приращения функционалов Φ_i , $i \in I$, отвечающие варьированию (3.7), имеют вид

$$\Phi_i(u_{v,\chi}) - \Phi_i(u) = \delta_1 \Phi_i(u, v, \chi) + o_i(\alpha). \quad (3.9)$$

Здесь

$$\delta_1 \Phi_i(u, v, \chi) = - \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H^i[t, u] dt \quad (3.10)$$

— игольчатая вариация функционала Φ_i на управлении $u(t)$ с параметрами варьирования $v(t)$, $\chi(t)$.

Для того, чтобы при варьировании управления $u \in W$ обеспечить уменьшение функционалов $\Phi_i(u)$, $i \in I$ необходимо согласно формуле (3.9), при малых α выбрать параметры варьирования $v \in V$, $\chi \in X_\alpha^{(1)}$ из условия минимизации соответствующих вариаций $\delta \Phi_i(u, v, \chi)$, $i \in I$.

Применяя свертку типа максимума, поставим для $u \in W$ следующую задачу в вариациях

$$\max_{i \in I} \delta_1 \Phi_i(u, v, \chi) \rightarrow \min, \quad v \in V, \chi \in X_\alpha^{(1)}.$$

С учетом выражения (3.10) приходим к задаче вида

$$\min_{i \in I} \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H^i[t, u] dt \rightarrow \max, v \in V, \chi \in X_\alpha^{(1)}. \quad (3.11)$$

Проведем ее декомпозицию на две подзадачи. Полагая $\alpha = 1$, ($\chi(t) = 1$), получаем первую вспомогательную задачу поиска величины $\mu(u)$

$$\min_{i \in I} \int_T \Delta_{v(t)} H^i[t, u] dt \rightarrow \max, v \in V. \quad (3.12)$$

Пусть $\bar{u}(t)$, $t \in T$ — ее решение (вспомогательное управление), тогда

$$\mu(u) = \min_{i \in I} \int_T \Delta_{\bar{u}(t)} H^i[t, u] dt. \quad (3.13)$$

Введем функции

$$g_i(t) = \Delta_{\bar{u}(t)} H^i[t, u], i \in I.$$

Сформулируем вторую вспомогательную задачу с параметром $\alpha \in (0, 1)$ на поиск функции варьирования (это фрагмент задачи (3.11) при $v(t) = \bar{u}(t)$).

$$\min_{i \in I} \int_T \chi(t) g_i(t) dt \rightarrow \max, \chi \in X_\alpha^{(1)}. \quad (3.14)$$

Пусть $\chi_\alpha(t)$, $t \in T$ — решение этой задачи. Введем величину

$$\mu_\alpha(u) = \min_{i \in I} \int_T \chi_\alpha(t) g_i(t) dt \quad (3.15)$$

(это значение задачи (3.14)).

Итак, в результате решения двух вспомогательных задач получены функции $\bar{u}(t)$ (вспомогательное управление), $\chi_\alpha(t)$ (функция варьирования). Образует α -параметрическое семейство варьированных управлений

$$u_\alpha(t) = u(t) + \chi_\alpha(t)(\bar{u}(t) - u(t)), t \in T, \alpha \in (0, 1). \quad (3.16)$$

Покажем, что в случае $\mu(u) > 0$ при достаточно малых $\alpha \in (0, 1)$ управление $u_\alpha(t)$ является допустимым и обладает свойством улучшения, т.е.

$$\Phi_i(u_\alpha) \leq 0, i = \bar{1}, m, \Phi_0(u_\alpha) - \Phi_0(u) < 0.$$

Предварительно установим связь между значениями вспомогательных задач, т.е. величинами $\mu_\alpha(u)$, $\mu(u)$.

Лемма 3.2. Для любого $\alpha \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$\alpha\mu(u) \leq \mu_\alpha(u). \quad (3.17)$$

Доказательство. Будем использовать лемму 2.1 (следствие теоремы Ляпунова) применительно к системе функций $g_i(t)$, $i \in I$; для любого $\alpha \in (0, 1)$ найдется такое измеримое множество $T_\alpha \subset T$, $\text{mes } T_\alpha = \alpha(t_1 - t_0)$, что

$$\int_{T_\alpha} g_i(t) dt = \alpha \int_T g_i(t) dt, \quad i \in I. \quad (3.18)$$

Представим этот результат в используемой терминологии.

Пусть $\chi(t, \alpha)$ — характеристическая функция множества T_α . Тогда

$$\int_T \chi(t, \alpha) dt = \text{mes } T_\alpha = \alpha(t_1 - t_0).$$

Следовательно, $\chi(t, \alpha) \in X_\alpha^{(1)}$ — функция варьирования. При этом равенство (3.18) представляется в виде

$$\int_T \chi(t, \alpha) g_i(t) dt = \alpha \int_T g_i(t) dt, \quad i \in I.$$

Отсюда

$$\min_{i \in I} \int_T \chi(t, \alpha) g_i(t) dt = \alpha \min_{i \in I} \int_T g_i(t) dt,$$

т.е. с учетом (3.13)

$$\min_{i \in I} \int_T \chi(t, \alpha) g_i(t) dt = \alpha\mu(u).$$

Так как $\chi_\alpha(t)$, $t \in T$ — решение задачи (3.14) и $\chi(t, \alpha) \in X_\alpha^{(1)}$, то

$$\min_{i \in I} \int_T \chi(t, \alpha) g_i(t) dt \leq \min_{i \in I} \int_T \chi_\alpha(t) g_i(t) dt = \mu_\alpha(u).$$

Сравнивая с предыдущим, получаем требуемую оценку $\alpha\mu(u) \leq \mu_\alpha(u)$. Лемма доказана.

Докажем результирующее утверждение о возможности улучшения.

Теорема 3.2. Пусть управление $u \in W$ не удовлетворяет ПМ в задаче P1. Тогда для малых $\alpha \in (0, 1)$ управление u_α является допустимым со свойством улучшения $\Phi_0(u_\alpha) < \Phi_0(u)$.

Доказательство. Для приращения функционалов $\Phi_i(u)$, $i \in I$ на основании формулы (3.9) справедливо представление

$$\Phi_i(u_\alpha) - \Phi_i(u) = \delta_1 \Phi_i(u, \bar{u}, \chi_\alpha) + o_i(\alpha) = - \int_T \chi_\alpha(t) g_i(t) dt + o_i(\alpha),$$

$$i \in I.$$

С учетом определения $\mu_\alpha(u)$ и доказанной оценки

$$\Phi_i(u_\alpha) - \Phi_i(u) \leq -\mu_\alpha(u) + o_i(\alpha) \leq -\alpha\mu(u) + o_i(\alpha), \quad i \in I.$$

По условию теоремы $\mu(u) > 0$. Следовательно, для малых $\alpha \in (0, 1)$ $\Phi_i(u_\alpha) < \Phi_i(u)$, $i \in I$, т.е.

$$\Phi_i(u_\alpha) < 0, \quad i \in I \setminus \{0\}, \quad \Phi_0(u_\alpha) - \Phi_0(u) < 0.$$

Для неактивных ограничений ($\Phi_i(u) < 0$) выполнение обеспечено вследствие локальности варьирования: $\Phi_i(u_\alpha) = \Phi_i(u) + O_i(\alpha)$, $i \notin I$. Теорема доказана.

Замечание. Если в задаче P1 функциональные ограничения не активны на управлении $u \in W$ ($\Phi_i(u) < 0$, $i = \overline{1, m}$), то решения вспомогательных задач (3.12), (3.14) можно представить в явном виде. В этом случае $I = \{0\}$, и вспомогательное управление определяется условием максимума функции Понтрягина, соответствующей целевому функционалу

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{v \in U} H^0(\psi^0(t), x(t), v, t), \quad t \in T.$$

Оптимальная функция варьирования имеет вид

$$\chi_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & g_0(t) < \lambda_\alpha \\ 1, & g_0(t) > \lambda_\alpha \\ 0 \vee 1, & g_0(t) = \lambda_\alpha \end{cases},$$

где λ_α — множитель Лагранжа, обеспечивающий интегральное условие

$$\int_T \chi_\alpha(t) dt = \alpha(t_1 - t_0).$$

В общем случае, когда $I \neq \{0\}$, вспомогательные задачи требуют численного решения.

Рассмотрим задачу P1 в предположениях (B). Опишем процедуру слабого варьирования управлений.

Пусть $u(t)$, $t \in T$ допустимое управление. Выберем некоторое управление $v \in V$ и определим функцию варьирования $\chi(t)$, $t \in T$ условиями: $\chi \in L_\infty(T)$, $\chi(t) \in [0, 1]$, $t \in T$.

Образуем семейство управлений варьирования по формуле (3.7). Нормируем функцию $\chi(t)$ с помощью параметра $\alpha \in [0, 1]$ следующим образом

$$\chi(t) \in [0, \alpha], \quad t \in T. \quad (3.19)$$

Введем множество функций варьирования

$$X_\alpha^{(2)} = \{\chi \in L_\infty(T): 0 \leq \chi(t) \leq \alpha, \quad t \in T\}.$$

Формула (3.7) с условием (3.19) определяет процедуру слабого варьирования для управления $u(t)$. При этом локальность варьирования (в норме $L_\infty(T)$) обеспечивается параметром α .

Рассмотрим соответствующие приращения функционалов $\Phi_i(u)$, $i \in I$. Согласно известной формуле имеем

$$\Phi_i(u_{v,\chi}) - \Phi_i(u) = \delta_2 \Phi_i(u, v, \chi) + o_i(\alpha),$$

$$\delta_2 \Phi_i(u, v, \chi) = - \int_T \chi(t) \langle H_u^i[t, u], v(t) - u(t) \rangle dt.$$

Здесь $\delta_2 \Phi_i(u, v, \chi)$ — слабая вариация функционала $\Phi_i(u)$ на управлении u с параметрами варьирования v, χ .

Приступим к описанию схемы улучшения для управления $u(t)$, $t \in T$, не удовлетворяющего ДПМ ($\eta(u) > 0$). Задача в вариациях имеет минимаксную форму

$$\max_{i \in I} \delta_2 \Phi_i(u, v, \chi) \rightarrow \min, \quad v \in V, \quad \chi \in X_\alpha^{(2)}$$

и служит основой для двух подзадач относительно вариационных параметров v и χ соответственно.

Первая вспомогательная задача формулируется в виде

$$\min_{i \in I} \int_T \langle H_u^i[t, u], v(t) - u(t) \rangle dt \rightarrow \max, \quad v \in V. \quad (3.20)$$

Это задача поиска величины $\eta(u)$. Пусть $\bar{u} \in V$ — ее решение. Тогда

$$\eta(u) = \min_{i \in I} \int_T \langle H_u^i[t, u], \bar{u}(t) - u(t) \rangle dt. \quad (3.21)$$

Введем функции

$$w_i(t) = \langle H_u^i[t, u], \bar{u}(t) - u(t) \rangle, \quad i \in I.$$

Сформулируем вторую вспомогательную задачу с параметром $\alpha \in [0, 1]$ на поиск функции варьирования

$$\min_{i \in I} \int_T \chi(t) w_i(t) dt \rightarrow \max, \quad \chi \in X_\alpha^{(2)}. \quad (3.22)$$

Пусть $\chi_\alpha(t)$ — решение этой задачи. Обозначим

$$\eta_\alpha(u) = \min_{i \in I} \int_T \chi_\alpha(t) w_i(t) dt. \quad (3.23)$$

Итак, в результате решения вспомогательных задач (3.20), (3.22) находятся составляющие процедуру варьирования функции $\bar{u}(t)$, $\chi_\alpha(t)$, $t \in T$. образуем α — параметрическое семейство варьированных управлений по формуле (3.16) и проведем обоснование свойства улучшения.

Предварительно установим связь между значениями вспомогательных задач (3.20), (3.22). Поскольку функция $\chi(t) = \alpha$, $t \in T$ является допустимой в задаче (1.22), то

$$\eta_\alpha(u) = \min_{i \in I} \int_T \chi_\alpha(t) w_i(t) dt \geq \min_{i \in I} \int_T \alpha w_i(t) dt = \alpha \eta(u).$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\eta_\alpha(u) \geq \alpha \eta(u). \quad (3.24)$$

Учитывая формулу приращения и оценку (3.24), имеем

$$\begin{aligned} \Phi_i(u_\alpha) - \Phi_i(u) &= - \int_T \chi_\alpha(t) w_i(t) dt + o_i(\alpha) \leq -\eta_\alpha(u) + o_i(\alpha) \leq \\ &\leq -\alpha \eta(u) + o_i(\alpha), \quad i \in I. \end{aligned}$$

Отсюда для малых $\alpha > 0$

$$\Phi_i(u_\alpha) < 0, \quad i \in I \setminus \{0\}, \quad \Phi_0(u_\alpha) - \Phi_0(u) < 0.$$

Неактивные ограничения не нарушаются вследствие локальности варьирования: $\Phi_i(u_\alpha) = \Phi_i(u) + O_i(\alpha)$, $i \in I$.

Таким образом, $u_\alpha(t)$ обеспечивает локальное улучшение управления $u(t)$ по функционалу $\Phi_0(u)$ с сохранением всех ограничений.

Замечание. Если на управлении $u \in W$ все ограничения не активны ($I = \{0\}$), то решения вспомогательных задач имеют вид

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{v \in U} \langle H_u^0[t, u], v \rangle, \quad \chi_\alpha(t) = \alpha, \quad t \in T.$$

В результате получаем стандартную процедуру слабого улучшения, соответствующую методу условного градиента:

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha(\bar{u}(t) - u(t)), \quad t \in T.$$

3.1.3. Методы линеаризации в классе допустимых управлений

Рассмотрим задачу P1 в предположениях (A). Построим метод последовательных допустимых приближений на основе процедуры игольчатого улучшения (метод игольчатой линеаризации).

Пусть $k = 1, 2, \dots$ — номер итерации, $\varepsilon_k > 0$ — положительное число, $u^k(t)$, $t \in T$ — допустимое управление, $x^k(t)$, $t \in T$ — соответствующая фазовая траектория. Выделим индексное множество

$$I_k(\varepsilon_k) = \{0, i = 1, \dots, m: \Phi_i(u^k) \geq -\varepsilon_k\}.$$

Для $i \in I_k(\varepsilon_k)$ обозначим

$$\Delta_v H^{i,k}[t] = \Delta_v H^i(\psi^{i,k}(t), x^k(t), u^k(t), t),$$

где $\psi^{i,k}(t)$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x^i(\psi, x^k(t), u^k(t), t), \quad \psi(t_1) = -\nabla \Phi_i(x^k(t_1)).$$

Сформулируем первую вспомогательную задачу

$$\min_{i \in I_k(\varepsilon_k)} \int_T \Delta_{v(t)} H^{i,k}[t] dt \rightarrow \max, \quad v \in V. \quad (3.25)$$

Пусть $\bar{u}^k(t)$, $t \in T$ — решение этой задачи,

$$\mu_k = \min_{i \in I_k(\varepsilon_k)} \int_T \Delta_{\bar{u}^k(t)} H^{i,k}[t] dt$$

— ее значение. Введем следующие обозначения

$$g_i^k(t) = \Delta_{\bar{u}^k(t)} H^{i,k}[t], \quad i \in I_k(\varepsilon_k).$$

Определим вторую вспомогательную задачу с параметром $\alpha \in [0, 1]$

$$\min_{i \in I_k(\varepsilon_k)} \int_T \chi(t) g_i^k(t) dt \rightarrow \max, \quad \chi \in X_\alpha^{(1)}. \quad (3.26)$$

Пусть $\chi_\alpha^k(t)$, $t \in T$ — решение этой задачи,

$$\mu_\alpha^k = \min_{i \in I_k(\varepsilon_k)} \int_T \chi_\alpha^k(t) g_i^k(t) dt$$

— ее значение.

Отметим, что в соответствии с леммой 3.2. имеет место следующая связь между значениями вспомогательных задач

$$\mu_\alpha^k \geq \alpha \mu_k. \quad (3.27)$$

Образуем семейство варьированных управлений

$$u_\alpha^k(t) = u^k(t) + \chi_\alpha^k(t)(\bar{u}^k(t) - u^k(t)), \quad t \in T.$$

Переход к очередному приближению осуществляется по правилу

$$\text{а) если } \mu_k \leq \varepsilon_k, \text{ то } \varepsilon_{k+1} = \frac{1}{2} \varepsilon_k, \quad u^{k+1}(t) = u^k(t),$$

$$\text{в) если } \mu_k > \varepsilon_k, \text{ то } \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k, \quad u^{k+1}(t) = u_{\alpha_k}^k(t).$$

При этом шаг $\alpha_k \in (0, 1]$ выбирается из условия уменьшения функционала при сохранении ограничений:

$$\Phi_0(u^{k+1}) < \Phi_0(u^k), \quad \Phi_i(u^{k+1}) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Возможность такого выбора обеспечивается результатами раздела 3.1.2.

Перейдем к вопросам сходимости последовательных приближений. Дополним условия (А) задачи P1 следующими предположениями (A1):

1) множество фазовых траекторий $\{x(t, u), u \in V\}$ ограничено: $x(t, u) \in X, t \in T, u \in V$, где $X \subset R^n$ — выпуклый компакт,

2) на множестве $X \times U \times T$ выполнены условия Липшица по переменной x

$$\|\nabla \varphi_i(x + \Delta x) - \nabla \varphi_i(x)\| \leq L \|\Delta x\|,$$

$$\|\nabla_x F_i(x + \Delta x, u, t) - \nabla_x F_i(x, u, t)\| \leq L \|\Delta x\|, \quad i = \overline{0, m},$$

$$\|f_x(x + \Delta x, u, t) - f_x(x, u, t)\| \leq L \|\Delta x\|.$$

На основании известных формул приращения функционалов $\Phi_i, i = \overline{0, m}$ на управлениях u_{α}^k, u^k представимы в виде

$$\Phi_i(u_{\alpha}^k) - \Phi_i(u^k) = - \int_T \chi_{\alpha}^k(t) g_i^k(t) dt + o_i^k(\alpha).$$

При этом в предположениях (А), (A1) справедливы оценки [12, 35]

$$|\Phi_i(u_{\alpha}^k) - \Phi_i(u^k)| \leq C_1 \alpha, \quad |o_i^k(\alpha)| \leq C_2 \alpha^2. \quad (3.28)$$

Отметим, что постоянные C_1, C_2 не зависят от параметра α и номера k . Докажем одно вспомогательное утверждение

Лемма 3.3. Пусть в задаче P1 выполнены предположения (А), (A1). Тогда в случае в) метода для всех

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon_k}{C_1}, \frac{\mu_k}{2C_2} \right\} \quad (3.29)$$

выполняются соотношения

$$\Phi_0(u_{\alpha}^k) - \Phi_0(u^k) \leq -\frac{1}{2} \alpha \mu_k, \quad \Phi_i(u_{\alpha}^k) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Пусть шаг α удовлетворяет условиям (3.29). Рассмотрим случай $i \in I_k$. На основании первой оценки из (3.28) получаем

$$\Phi_i(u_\alpha^k) \leq \Phi_i(u^k) + C_1 \alpha < -\varepsilon_k + C_1 \alpha \leq 0,$$

так как $\alpha \leq \frac{\varepsilon_k}{C_1}$.

Пусть $i \in I_k$. Используя вторую оценку из (3.28) и неравенство (3.27), имеем

$$\Phi_i(u_\alpha^k) - \Phi_i(u^k) \leq -\alpha \mu_k + C_2 \alpha^2.$$

Поскольку в силу (3.29) $C_2 \alpha \leq \frac{1}{2} \mu_k$, то приходим к неравенству

$$\Phi_i(u_\alpha^k) - \Phi_i(u^k) \leq -\frac{1}{2} \alpha \mu_k, \quad i \in I_k.$$

Лемма доказана.

Для обоснования сходимости метода назначим конкретный способ выбора шага α_k . Рассмотрим геометрическую прогрессию $\beta_s = 2^{-s}$, $s = 0, 1, \dots$. В случае в) метода перебором по $s = 0, 1, \dots$ найдем индекс $s_k = \min \{s = 0, 1, \dots : \Phi_i(u_{\beta_s}^k) \leq 0, i = 1, m, \Phi_0(u_{\beta_s}^k) - \Phi_0(u^k) \leq -\frac{1}{2} \beta_s \mu_k\}$.

Утверждение леммы гарантирует существование конечного s_k . Далее, полагаем $\alpha_k = \beta_{s_k}$.

Теорема 3.3. В условиях (A), (A1) сходимость метода с $\alpha_k = \beta_{s_k}$ описывается соотношениями

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0, \quad \downarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$$

($\downarrow \lim$ — нижний предел).

Доказательство. Допустим, вопреки первому утверждению теоремы, что $\varepsilon_k \geq \bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Это означает, что, начиная с некоторого индекса \bar{k} , реализуется только случай в). Учитывая утверждение леммы 3.3, для $k > \bar{k}$ получаем ($s_k > 0$)

$$\beta_{s_k-1} > \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon_k}{C_1}, \frac{\mu_k}{2C_2} \right\} \geq \min \left\{ 1, \frac{\bar{\varepsilon}}{C_1}, \frac{\bar{\varepsilon}}{2C_2} \right\} = \bar{\alpha} > 0.$$

Следовательно, $\alpha_k = \beta_{s_k} = \frac{1}{2} \beta_{s_k-1} > \frac{1}{2} \bar{\alpha}$, $k > \bar{k}$. Если $s_k = 0$, то

$\alpha_k = 1 > \frac{1}{2} \bar{\alpha}$. Поэтому, используя определение индекса s_k , имеем

$$\Phi_0(u^{k+1}) - \Phi_0(u^k) \leq -\frac{1}{2} \alpha_k \mu_k < -\frac{1}{4} \bar{\alpha} \bar{\epsilon}, \quad k > \bar{k}.$$

Это противоречит ограниченности снизу монотонной последовательности $\Phi_0(u^k)$. Итак, $\bar{\epsilon} = 0$, что и доказывает первое утверждение теоремы.

По доказанному, случай а) метода выполняется бесконечное число раз, т.е. найдется подпоследовательность номеров k_s , $s = 1, 2, \dots$, для которой $\mu_{k_s} \leq \epsilon_{k_s}$. Поскольку $\mu_{k_s} \geq 0$, $\epsilon_{k_s} \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, то получаем второе утверждение. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению задачи P1 в предположениях (B). Опишем в итерационной форме метод слабого варьирования, связанный с ДПМ. Введем обозначение

$$H_u^{i,k} [t] = H_u^i(\psi^{i,k}(t), x^k(t), u^k(t), t)$$

и сформулируем первую вспомогательную задачу

$$\min_{i \in I_k(\epsilon_k)} \int_T \langle H_u^{i,k} [t], v(t) - u^k(t) \rangle dt \rightarrow \max, \quad v \in V.$$

Пусть $\bar{u}^k(t)$, $t \in T$ — ее решение,

$$\eta_k = \min_{i \in I_k(\epsilon_k)} \int_T \langle H_u^{i,k} [t], \bar{u}^k(t) - u^k(t) \rangle dt.$$

Обозначим $w_i^k(t) = \langle H_u^{i,k} [t], \bar{u}^k(t) - u^k(t) \rangle$.

Вторая вспомогательная задача имеет вид

$$\min_{i \in I_k(\epsilon_k)} \int_T \chi(t) w_i^k(t) dt \rightarrow \max, \quad \chi \in X_\alpha^{(2)}.$$

Пусть $\chi_\alpha^k(t)$, $t \in T$ — ее решение,

$$\eta_\alpha^k = \min_{i \in I_k(\epsilon_k)} \int_T \chi_\alpha^k(t) w_i^k(t) dt.$$

Связь между величинами η_k , η_α^k определяется неравенством $\eta_\alpha^k \geq \alpha \eta_k$, которое доказывается аналогично предыдущему (см. п. 3.1.2).

Образуем семейство варьированных управлений

$$u_\alpha^k(t) = u^k(t) + \chi_\alpha^k(t) (\bar{u}^k(t) - u^k(t)), \quad t \in T.$$

Переход к очередному приближению осуществляется следующим образом:

а) если $\eta_k \leq \epsilon_k$, то $\epsilon_{k+1} = \frac{1}{2} \epsilon_k$, $u^{k+1}(t) = u^k(t)$,

в) если $\eta_k > \epsilon_k$, то $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k$, $u^{k+1}(t) = u_{\alpha_k}^k(t)$.

Шаг $\alpha_k \in [0, 1]$ выбирается из условия уменьшения функционала при сохранении ограничений.

Рассмотрим вопрос о сходимости последовательных приближений. Определим набор дополнительных условий (B1), включив в него предположения (A1) вместе с условиями Липшица по совокупности (x, u)

$$\|\nabla_x F_i(x + \Delta x, u + \Delta u, t) - \nabla_x F_i(x, u, t)\| \leq L(\|\Delta x\| + \|\Delta u\|),$$

$$i = \overline{0, m},$$

$$\|\nabla_u F_i(x + \Delta x, u + \Delta u, t) - \nabla_u F_i(x, u, t)\| \leq L(\|\Delta x\| + \|\Delta u\|),$$

$$i = \overline{0, m},$$

$$\|f_x(x + \Delta x, u + \Delta u, t) - f_x(x, u, t)\| \leq L(\|\Delta x\| + \|\Delta u\|),$$

$$\|f_u(x + \Delta x, u + \Delta u, t) - f_u(x, u, t)\| \leq L(\|\Delta x\| + \|\Delta u\|).$$

на множестве $X \times U \times T$.

Тогда справедливы оценки [14]

$$|\Phi_i(u_{\alpha}^k) - \Phi_i(u^k)| \leq C_1 \alpha,$$

$$\Phi_i(u_{\alpha}^k) - \Phi_i(u^k) \leq -\alpha \int_T w_i^k(t) dt + C_2 \alpha^2, \quad i = \overline{0, m}.$$

Дальнейший ход рассуждений с естественными изменениями сохраняется. Приведем формулировки основных утверждений.

Лемма 3.4. Пусть в задаче P1 выполнены предположения (B), (B1). Тогда в случае в) метода для всех

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ 1, \frac{\epsilon_k}{C_1}, \frac{\eta_k}{2C_2} \right\}$$

выполняются неравенства

$$\Phi_0(u_{\alpha}^k) - \Phi_0(u^k) \leq -\frac{1}{2} \alpha \eta_k, \quad \Phi_i(u_{\alpha}^k) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Выбор шага α_k проводится на основе прогрессии $\beta_s = 2^{-s}$, $s = 0, 1, \dots$. Индекс s_k определяется соотношением

$$s_k = \min \{ s = 0, 1, \dots : \Phi_i(u_{\beta_s}^k) \leq 0, i = \overline{1, m},$$

$$\Phi_0(u_{\beta_s}^k) - \Phi_0(u^k) \leq -\frac{1}{2} \beta_s \eta_k \}$$

Теорема 3.4. В условиях (B), (B1) сходимость метода с $\alpha_k = \beta_{s_k}$ характеризуется свойствами

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0, \quad \downarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = 0.$$

Доказательство этих утверждений проводится в полной аналогии с предыдущим (лемма 3.3, теорема 3.3).

3.2. ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВА

3.2.1. Постановка задачи. Условия оптимальности

Рассмотрим управляемый процесс $(u(t), x(t))$, $t \in T$, который описывается с помощью обыкновенной динамической системы

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (3.30)$$

Введем класс доступных управлений

$$V = \{u \in L_\infty^r(T) : u(t) \in U, t \in T\}$$

и предположим, что множество U , определяющее прямые ограничения на управление, является компактным.

Будем считать, что каждому доступному управлению $u(t)$, $t \in T$ отвечает единственное абсолютно — непрерывное решение $x(t) = x(t, u)$ фазовой системы (3.30), которое определено всюду на T . Предположим, что семейство фазовых траекторий $\{x(t, u), u \in V\}$ в совокупности ограничено: $x(t, u) \in X$, $t \in T$, $u \in V$, где $X \subset R^n$ — компактное множество.

На множестве V определим набор функционалов

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) + \int_T F_i(x(t), u(t), t) dt, \quad i = \overline{0, m}$$

и поставим задачу оптимального управления (задача P2)

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min, \quad \Phi_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad u \in V.$$

Введем следующие наборы условий относительно данной задачи.

(A). Функции $f(x, u, t)$, $\varphi_i(x)$, $F_i(x, u, t)$, $i = \overline{0, m}$ непрерывны по совокупности своих аргументов на $X \times U \times T$ вместе с производными по x .

(B). Дополнительно к условиям (A) существуют непрерывные производные $f_u(x, u, t)$ и $\nabla_u F_i(x, u, t)$, $i = \overline{0, m}$, множество U выпукло.

Введем функционал, характеризующий невязку выполнения ограничений — равенств в задаче P2

$$\Phi(u) = \max_{1 \leq i \leq m} |\Phi_i(u)|.$$

Управление $u \in V$ назовем допустимым в задаче P2, если $\Phi(u) = 0$ (все ограничения выполнены).

Определим необходимые конструкции, связанные с поставленной задачей.

Пусть $u(t)$, $t \in T$ — доступное управление с фазовой траекторией $x(t)$. Для каждого функционала Φ_i определим функцию Понтрягина

$$H^i(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - F_i(x, u, t)$$

вместе с решением $\psi^i(t)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x^i(\psi, x(t), u(t), t), \quad \psi(t_1) = -\nabla \Phi_i(x(t_1)).$$

Как и ранее, будем использовать обозначение

$$\Delta_{v(t)} H^i[t] = H^i(\psi^i(t), x(t), v(t), t) - H^i(\psi^i(t), x(t), u(t), t).$$

Пусть $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — вектор множителей Лагранжа в задаче P2 с условием $\lambda_0 = 0 \vee 1$. Введем общую сопряженную вектор-функцию

$$\psi(t, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi^i(t)$$

и соответствующую функцию Понтрягина

$$H(\lambda, \psi, x, u, t) = \sum_{i=0}^m \lambda_i H^i(\psi^i, x, u, t).$$

Понятно, что $\psi(t, \lambda)$ определяется системой

$$\dot{\psi} = -H_x(\lambda, \psi, x, u, t), \quad \psi(t_1) = -\sum_{i=0}^m \lambda_i \nabla \Phi_i(x(t_1)),$$

причем

$$H(\lambda, \psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - \sum_{i=0}^m \lambda_i F_i(x, u, t).$$

Примем обозначение

$$\Delta_{v(t)} H[t, \lambda] = H(\lambda, \psi(t, \lambda), x(t), v(t), t) - H(\lambda, \psi(t, \lambda), x(t), u(t), t).$$

Отметим, что функция H обслуживает функционал Лагранжа в задаче P2

$$L(u, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \Phi_i(u).$$

Сформулируем необходимые условия оптимальности в задаче P2:

1) если управление $u(t)$, $t \in T$ является оптимальным в задаче P2 с условиями (A), то найдется ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\lambda_0 = 0 \vee 1$, для которого выполняется принцип максимума (ПМ)

$$\Delta_v H[t, \lambda] \leq 0, \quad v \in U, \quad t \in T; \quad (3.31)$$

2) если управление $u(t)$, $t \in T$ является оптимальным в задаче P2 с условиями (B), то найдется ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\lambda_0 = 0 \vee 1$, для которого выполняется дифференциальный принцип максимума (ДПМ)

$$\langle H_u[t, \lambda], v - u(t) \rangle \leq 0, \quad v \in U, \quad t \in T. \quad (3.32)$$

Наша цель состоит в итерационном отыскании допустимого управления, удовлетворяющего ПМ (ДПМ) в рамках последовательной линеаризации задачи с помощью игольчатых (слабых) вариаций управления. Соответствующие методы работают в классе доступных управлений и ориентированы на последовательное уменьшение функционалов $\Phi(u)$, $L(u, \lambda)$ на основе решения специальных вспомогательных задач.

3.2.2. Процедура игольчатого улучшения доступных управлений

Пусть $u(t)$, $t \in T$ — доступное управление в задаче P2. Оформим процедуру игольчатого варьирования следующими соотношениями

$$u_{v,\chi}(t) = u(t) + \chi(t)(v(t) - u(t)), \quad t \in T,$$

$$v \in V, \quad \chi \in X_\alpha^{(1)}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

$$X_\alpha^{(1)} = \{ \chi \in L_\infty(T) : \chi(t) = 0 \vee 1, \quad \int_T \chi(t) dt = \alpha(t_1 - t_0) \}.$$

Соответствующие приращения функционалов Φ_i представляются в виде

$$\Phi_i(u_{v,\chi}) - \Phi_i(u) = \delta_1 \Phi_i(u, v, \chi) + o_i(\alpha), \quad i = \overline{0, m}, \quad (3.33)$$

где $\delta_1 \Phi_i$ — игольчатая вариация функционала Φ_i , которая выражается по формуле

$$\delta_1 \Phi_i(u, v, \chi) = - \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H^i[t] dt.$$

Отметим, что величина $\delta_1 \Phi_i$ имеет порядок α : $|\delta_1 \Phi_i| \leq C\alpha$.

Аналогично, приращение функционала Лагранжа с вектором множителей λ аппроксимируется в виде

$$L(u_{v,\chi}, \lambda) - L(u, \lambda) = \delta_1 L(u, \lambda, v, \chi) + o(\alpha),$$

$$\delta_1 L(u, \lambda, v, \chi) = - \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H[t, \lambda] dt.$$

Зафиксируем α и перейдем к построению вспомогательной задачи в вариациях относительно параметров $v \in V$, $\chi \in X_\alpha^{(1)}$. В качестве целевого функционала этой задачи естественно выбрать вариацию $\delta \Phi_0(u, v, \chi)$. По части ограничений поставим задачу поиска параметров варьирования v, χ таким образом, чтобы обеспечить уменьшение модуля каждого функционала Φ_i , $i = \overline{1, m}$, ($\Phi_i \neq 0$) на величину порядка α . В формальном исполнении это требование имеет вид

$$\Phi_i(u_{v,\chi}) = (1 - \alpha)\Phi_i(u) + o_i(\alpha), \quad i = \overline{1, m}.$$

Понятно, что в регулярном случае ($\Phi_i \neq 0$) для малых $\alpha \in (0, 1]$ функционал Φ_i сохраняет знак ($\text{sign } \Phi_i(u_{v,\chi}) = \text{sign } \Phi_i(u)$) и уменьшается по модулю ($|\Phi_i(u_{v,\chi})| < |\Phi_i(u)|$).

В итоге, с учетом представления (3.33), формулируется следующая задача в вариациях

$$\delta_1 \Phi_0(u, v, \chi) \rightarrow \min, \quad (3.34)$$

$$\delta_1 \Phi_i(u, v, \chi) = -\alpha \Phi_i(u), \quad i = \overline{1, m},$$

$$v \in V, \quad \chi \in X_\alpha^{(1)}.$$

Здесь $u \in V$ — базовое управление, $\alpha \in [0, 1]$ — параметр. Учитывая выражения для вариаций $\delta \Phi_i$ и определение множества $X_\alpha^{(1)}$, представим задачу в интегральной форме

$$\int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H^0[t] dt \rightarrow \max, \quad v \in V, \quad \chi \in X, \quad (3.35)$$

$$\int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H^i[t] dt = \alpha \Phi_i(u), \quad i = \overline{1, m},$$

$$\int_T \chi(t) dt = \alpha(t_1 - t_0).$$

Здесь $X = \{\chi \in L_\infty(T): \chi(t) = 0 \vee 1\}$.

Построенная задача отвечает заявленным требованиям, однако по части численной реализации представляется трудоемкой в силу смешанного характера подынтегральных выражений (композиция параметров варьирования v и χ). Проведем декомпозицию задачи (3.35) с сохранением цели ее построения.

Полагая $\alpha = 1$ ($\chi(t) \equiv 1$), получаем первую вспомогательную задачу на поиск управления $v(t)$

$$\int_T \Delta_{v(t)} H^0(\psi^0(t), x(t), u(t), t) dt \rightarrow \max, v \in V, \quad (3.36)$$

$$\int_T \Delta_{v(t)} H^i(\psi^i(t), x(t), u(t), t) dt = \Phi_i(u), \quad i = \overline{1, m}.$$

Пусть $\bar{u}(t)$, $t \in T$ — ее решение, $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_0, \dots, \bar{\lambda}_m)$, $\bar{\lambda}_0 = 0 \vee 1$ — соответствующий вектор множителей. Согласно принципу максимума для задачи (3.36)

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \arg \max_{v \in U} \left(\sum_{i=0}^m \bar{\lambda}_i H^i(\psi^i(t), x(t), v, t) \right) = \\ &= \arg \max_{v \in U} H(\bar{\lambda}, \psi(t, \bar{\lambda}), x(t), v, t), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Образует вспомогательные функции

$$g(t, \bar{\lambda}) = \Delta_{\bar{u}(t)} H[t, \bar{\lambda}], \quad g_i(t) = \Delta_{\bar{u}(t)} H^i[t], \quad i = \overline{1, m}.$$

и введем величину

$$\delta(u) = \int_T g(t, \bar{\lambda}) dt.$$

В силу соотношения (3.37) $g(t, \bar{\lambda}) \geq 0$, $t \in T$, то есть $\delta(u) \geq 0$. Кроме того, с учетом ограничений задачи (3.36)

$$\int_T g_i(t) dt = \Phi_i(u), \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.38)$$

Отметим, что величина $\delta(u)$ есть невязка ПМ для управления $u \in V$ в задаче на минимум функционала Лагранжа без ограничений

$$L(u, \bar{\lambda}) \rightarrow \min, \quad \dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u \in V. \quad (3.39)$$

Равенство $\delta(u) = 0$ означает, что управление $u(t)$, $t \in T$ удовлетворяет ПМ в этой задаче.

Сформулируем вторую вспомогательную задачу на поиск функции варьирования $\chi(t)$

$$\int_T \chi(t)g(t, \bar{\lambda})dt \rightarrow \max, \chi \in X, \quad (3.40)$$

$$\int_T \chi(t)g_i(t)dt = \alpha\Phi_i(u), \quad i = \overline{1, m}, \quad \int_T \chi(t)dt = \alpha(t_1 - t_0).$$

Отметим, что здесь в качестве целевого функционала, в отличие от задачи (3.35), фигурирует вариация функционала Лагранжа $\delta_1 L(u, \bar{\lambda}, \bar{u}, \chi)$. Ограничения задачи (3.40) получены из соответствующих ограничений задачи (3.35) при $v(t) = \bar{u}(t)$. Подчеркнем, что задача зависит от параметра $\alpha \in [0, 1]$.

Пусть $\chi_\alpha(t)$ — решение задачи (3.40). Образует α -параметрическое семейство управлений варьирования

$$u_\alpha(t) = u(t) + \chi_\alpha(t)(\bar{u}(t) - u(t)), \quad t \in T.$$

Изучим свойства управления $u_\alpha(t)$ по части уменьшения функционалов $\Phi(u)$, $L(u, \lambda)$, связанных с задачей P2.

Рассмотрим функционалы $\Phi_i(u)$, $i = \overline{1, m}$. Согласно формуле приращения (3.23) получаем

$$\Phi_i(u_\alpha) - \Phi_i(u) = - \int_T \chi_\alpha(t)g_i(t)dt + o_i(\alpha).$$

Отсюда, учитывая ограничения задачи (3.40), имеем

$$\Phi_i(u_\alpha) - \Phi_i(u) = -\alpha\Phi_i(u) + o_i(\alpha)$$

или

$$\Phi_i(u_\alpha) = (1 - \alpha)\Phi_i(u) + o_i(\alpha).$$

Переходя к модулю, получаем

$$|\Phi_i(u_\alpha)| \leq (1 - \alpha)|\Phi_i(u)| + |o_i(\alpha)|.$$

Далее, последовательно перейдем к $\max_{1 \leq i \leq m}$ в правой и левой частях

$$\max_{1 \leq i \leq m} |\Phi_i(u_\alpha)| \leq (1 - \alpha) \max_{1 \leq i \leq m} |\Phi_i(u)| + \max_{1 \leq i \leq m} |o_i(\alpha)|.$$

В результате приходим к неравенству

$$\Phi(u_\alpha) \leq (1 - \alpha)\Phi(u) + \bar{o}(\alpha),$$

где

$$\Phi(u) = \max_{1 \leq i \leq m} |\Phi_i(u)|, \quad \bar{o}(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq m} |o_i(\alpha)|.$$

Таким образом, в случае $\Phi(u) > 0$ (управление $u \in V$ не допустимо) управление u_α при достаточно малых $\alpha > 0$ обеспечивает спуск по функционалу $\Phi(u)$

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) \leq -\alpha\Phi(u) + \bar{o}(\alpha).$$

Получим оценку снизу для значения задачи (3.40). С этой целью применим лемму 2.1. к вектор-функции $p(t) = (g(t, \bar{\lambda}), g_1(t), \dots, g_m(t))$: для любого $\alpha \in (0, 1)$ найдется такая функция $\chi(t, \alpha) \in X_\alpha^{(1)}$, что

$$\int_T \chi(t, \alpha) p(t) dt = \alpha \int_T p(t) dt.$$

Отсюда следует, что с учетом соотношений (3.38) функция $\chi(t, \alpha)$ является допустимой в задаче (3.40)

$$\int_T \chi(t, \alpha) g_i(t) dt = \alpha \int_T g_i(t) dt = \alpha \Phi_i(u), \quad i = \overline{1, m},$$

$$\int_T \chi(t, \alpha) dt = \alpha(t_1 - t_0).$$

Кроме того,

$$\int_T \chi(t, \alpha) g(t, \bar{\lambda}) dt = \alpha \int_T g(t, \bar{\lambda}) dt = \alpha \delta(u).$$

Поскольку $\chi_\alpha(t)$ — решение задачи (3.40), то

$$\int_T \chi_\alpha(t) g(t, \bar{\lambda}) dt \geq \int_T \chi(t, \alpha) g(t, \bar{\lambda}) dt.$$

Отсюда, на основании предыдущего равенства, получаем требуемую оценку

$$\int_T \chi_\alpha(t) g(t, \bar{\lambda}) dt \geq \alpha \delta(u), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (3.41)$$

Рассмотрим приращение функционала Лагранжа с вектором множителей $\bar{\lambda}$ на паре u_α, u

$$L(u_\alpha, \bar{\lambda}) - L(u, \bar{\lambda}) = - \int_T \chi_\alpha(t) g(t, \bar{\lambda}) dt + o(\alpha).$$

С учетом (3.41) получаем оценку

$$L(u_\alpha, \bar{\lambda}) - L(u, \bar{\lambda}) \leq -\alpha \delta(u) + o(\alpha).$$

Предположим, что $\delta(u) > 0$ (управление $u(t)$ не удовлетворяет ПМ в задаче (3.39)). Тогда управление $u_\alpha(t)$ для малых $\alpha > 0$ обеспечивает спуск по функционалу $L(u, \bar{\lambda})$.

Подведем итог. Вспомогательные задачи (3.36), (3.40) позволяют построить семейство управлений $u_\alpha \in V$, $\alpha \in [0, 1]$ со свойством локального (для малых $\alpha > 0$) улучшения по двум функционалам $\Phi(u)$, $L(u, \bar{\lambda})$:

$$\Phi(u_\alpha) < \Phi(u), \quad (\text{если } \Phi(u) > 0),$$

$$L(u_\alpha, \bar{\lambda}) < L(u, \bar{\lambda}), \quad (\text{если } \delta(u) > 0).$$

В случае $\Phi(u) = 0$ или $\delta(u) = 0$ уменьшения соответствующего функционала не происходит (и не требуется).

Таким образом, в рамках предлагаемой итерационной процедуры качество каждого доступного управления $u \in V$ оценивается с помощью двух критериев: $\Phi(u)$ — невязка по ограничениям, $\delta(u)$ — невязка ПМ для функционала Лагранжа. Предельный случай $\Phi(u) = 0$, $\delta(u) = 0$ означает, что управление u удовлетворяет ПМ в задаче P2 в целом. Цель итерации — уменьшить функционалы $\Phi(u)$, $L(u, \bar{\lambda})$ — достигается за счет специальной структуры вспомогательных задач. Для облегчения процедуры можно использовать комбинированный критерий — модифицированный функционал Лагранжа $M(u) = L(u, \bar{\lambda}) + \Phi(u)$.

Замечание. Проведем преобразование целевого функционала во второй вспомогательной задаче (3.40). Согласно определению

$$g(t, \bar{\lambda}) = \sum_{i=0}^m \bar{\lambda}_i g_i(t),$$

где $g_0(t) = \Delta_{\bar{u}(t)} H^0[t]$, $t \in T$.

Отсюда, с учетом ограничений задачи (3.40)

$$\int_T \chi(t) g(t, \bar{\lambda}) dt = \bar{\lambda}_0 \int_T \chi(t) g_0(t) dt + \alpha \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \Phi_i(u).$$

Если $\bar{\lambda}_0 = 0$ (вырожденный случай), то целевой функционал задачи (3.40) фактически не зависит от функции варьирования $\chi(t)$ и в качестве решения $\chi_\alpha(t)$ можно взять любую допустимую функцию задачи (3.40).

В регулярном случае ($\bar{\lambda}_0 = 1$) задача (3.40) эквивалентна по решению $\chi_\alpha(t)$ следующей задаче, не содержащей множителей Лагранжа

$$\int_T \chi(t) g_0(t) dt \rightarrow \max, \quad \chi \in X,$$

$$\int_T \chi(t) g_i(t) dt = \alpha \Phi_i(u), \quad \int_T \chi(t) dt = \alpha(t_1 - t_0).$$

Эта задача естественно получается из общей задачи в вариациях (3.35) при $v(t) = \bar{u}(t)$, $t \in T$. Кроме того, имеет место оценка снизу для величины максимума

$$\int_T \chi_\alpha(t) g_0(t) dt \geq \alpha \int_T g_0(t) dt.$$

Отсюда следует, что в случае

$$\delta_0(u) = \int_T g_0(t) dt > 0$$

управление $u_\alpha(t)$ обеспечивает локальное уменьшение целевого функционала Φ_0 исходной задачи с оценкой

$$\Phi_0(u_\alpha) - \Phi_0(u) \leq -\alpha \delta_0(u) + o(\alpha).$$

Если $\delta_0(u) \leq 0$, то гарантируется, как и ранее, уменьшение функционала Лагранжа $L(u, \bar{\lambda})$.

Таким образом, вторая вспомогательная задача (3.40) может быть сформулирована без множителей Лагранжа $\bar{\lambda}_i$, $i = \overline{0, m}$. При этом в регулярном случае ($\bar{\lambda}_0 = 1$, $\delta_0(u) > 0$) ее решение гарантирует локальный спуск по целевому функционалу $\Phi_0(u)$ исходной задачи, т.е. итерация улучшения проводится без использования двойственных переменных.

3.2.3. Процедура слабого улучшения доступных управлений

Предположим, что в задаче P2 действует набор условий (B). Построим метод последовательного улучшения доступных управлений на основе процедуры слабого варьирования.

Пусть имеется доступное управление $u(t)$, $t \in T$ вместе с соответствующими решениями $x(t)$, $\psi^i(t)$, $i = \overline{0, m}$ фазовой и сопряженных систем.

Проведем слабое варьирование управления $u(t)$, $t \in T$ с помощью произвольного управления $v \in V$ и функции варьирования $\chi(t)$, $t \in T$ из множества

$$X_\alpha^{(2)} = \{\chi \in L_\infty(T): 0 \leq \chi(t) \leq \alpha, t \in T\}.$$

Здесь $\alpha \in [0, 1]$ — параметр варьирования. Образует семейство варьированных управлений по обычному правилу

$$u_{v,\chi}(t) = u(t) + \chi(t)(v(t) - u(t)), t \in T.$$

Как известно, соответствующие приращения функционалов Φ_i допускают представление

$$\Phi_i(u_{v,\chi}) - \Phi_i(u) = \delta_2 \Phi_i(u, v, \chi) + o_i(\alpha), \quad i = \overline{0, m},$$

где $\delta_2 \Phi_i$ — слабая вариация функционала Φ_i , которая выражается по формуле

$$\delta_2 \Phi_i(u, v, \chi) = - \int_T \chi(t) \langle H_u^i[t], v(t) - u(t) \rangle dt.$$

Вспомогательная задача в вариациях формулируется в полной аналогии со случаем игольчатого варьирования

$$\delta_2 \Phi_0(u, v, \chi) \rightarrow \min, \quad v \in V, \quad \chi \in X_\alpha^{(2)},$$

$$\delta_2 \Phi_i(u, v, \chi) = -\alpha \Phi_i(u), \quad i = \overline{1, m}.$$

С учетом выражения для вариаций задача принимает вид

$$\int_T \chi(t) \langle H_u^0[t], v(t) - u(t) \rangle dt \rightarrow \max, \quad v \in V, \quad \chi \in X_\alpha^{(2)},$$

$$\int_T \chi(t) \langle H_u^i[t], v(t) - u(t) \rangle dt = \alpha \Phi_i(u), \quad i = \overline{1, m}.$$

Как и ранее, проведем декомпозицию этой задачи на две подзадачи. Полагая $\alpha = \chi(t) = 1$, получаем первую вспомогательную задачу на поиск управления $v(t)$

$$\int_T \langle H_u^0[t], v(t) - u(t) \rangle dt \rightarrow \max, \quad v \in V,$$

$$\int_T \langle H_u^i[t], v(t) - u(t) \rangle dt = \Phi_i(u), \quad i = \overline{1, m}.$$

Пусть $\bar{u}(t)$, $t \in T$ — ее решение, $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_0, \dots, \bar{\lambda}_m)$, $\bar{\lambda}_0 = 0 \vee 1$ — соответствующий вектор множителей. Согласно принципу максимума

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{v \in U} \left(\sum_{i=0}^m \bar{\lambda}_i \langle H_u^i[t], v \rangle \right) = \arg \max_{v \in U} \langle H_u[t, \bar{\lambda}], v \rangle.$$

Образует вспомогательные функции

$$w_i(t) = \langle H_u^i[t], \bar{u}(t) - u(t) \rangle, \quad i = \overline{1, m},$$

$$w(t, \bar{\lambda}) = \langle H_u[t, \bar{\lambda}], \bar{u}(t) - u(t) \rangle.$$

Отметим, что

$$\int_T w_i(t) dt = \Phi_i(u), \quad i = \overline{1, m}, \quad w(t, \bar{\lambda}) \geq 0.$$

Введем неотрицательную величину

$$\delta(u) = \int_T w(t, \bar{\lambda}) dt.$$

Это невязка ДПМ для управления $u \in V$ в задаче

$$L(u, \bar{\lambda}) \rightarrow \min, u \in V. \quad (3.42)$$

Сформулируем вторую вспомогательную задачу на поиск функции варьирования

$$\int_T \chi(t) w(t, \bar{\lambda}) dt \rightarrow \max, \chi \in X_\alpha^{(2)},$$

$$\int_T \chi(t) w_i(t) dt = \alpha \Phi_i(u), \quad i = \overline{1, m}.$$

Поскольку $w(t, \bar{\lambda}) \geq 0$, $t \in T$ и функция $\chi(t) = \alpha$ является допустимой, то решение задачи очевидно: $\chi_\alpha(t) = \alpha$, $t \in T$.

Введем семейство управлений варьирования

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha(\bar{u}(t) - u(t)), \quad t \in T.$$

Согласно формуле приращения функционала Лагранжа имеем

$$L(u_\alpha, \bar{\lambda}) - L(u, \bar{\lambda}) = -\alpha \int_T w(t, \bar{\lambda}) dt + o(\alpha) = -\alpha \delta(u) + o(\alpha).$$

Предположим, что управление $u(t)$ не удовлетворяет ДПМ в задаче (3.42) ($\delta(u) > 0$). Тогда управление u_α для малых $\alpha > 0$ обеспечивает уменьшение функционала Лагранжа.

Рассмотрим приращения функционалов Φ_i , $i = \overline{1, m}$

$$\Phi_i(u_\alpha) - \Phi_i(u) = -\alpha \int_T w_i(t) dt + o_i(\alpha) = -\alpha \Phi_i(u) + o_i(\alpha).$$

Отсюда, в полной аналогии с предыдущим получаем оценку

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) \leq -\alpha \Phi(u) + \bar{o}(\alpha), \quad \Phi(u) = \max_{1 \leq i \leq m} |\Phi_i(u)|.$$

Предположим, что управление $u \in V$ не допустимо в задаче P2, то есть $\Phi(u) > 0$. Тогда управление u_α при достаточно малых $\alpha > 0$ обеспечивает уменьшение по функционалу $\Phi(u)$.

Заключительные замечания по части выбора параметра варьирования $\alpha \in [0, 1]$ вполне аналогичны случаю игольчатого улучшения.

3.2.4. Линейная система. Процедура игольчатого улучшения

Рассмотрим задачу с ограничениями-равенствами

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min, \quad \Phi_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (3.43)$$

применительно к линейной по состоянию системе с разделенными переменными x, u

$$\dot{x} = A(t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (3.44)$$

Предположим, что один из функционалов задачи (3.43) является также линейным по фазовой переменной

$$\Phi_k(u) = \langle c^k, x(t_1) \rangle + \int_T (\langle a^k(t), x(t) \rangle + F_k(u(t), t)) dt. \quad (3.45)$$

Тогда для любой пары $u, v \in V$ имеет место точная формула приращения

$$\Delta_v \Phi_k(u) = - \int_T \Delta_{v(t)} H^k(\psi^k(t), u(t), t) dt.$$

Здесь

$$H^k(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A(t)x + b(u, t) \rangle - \langle a^k(t), x \rangle - F_k(u, t),$$

$\psi^k(t)$ — решение сопряженной задачи

$$\dot{\psi} = -A(t)^T \psi + a^k(t), \quad \psi(t_1) = -c^k.$$

Отсюда следует, что приращение функционала Φ_k на паре $u(t), u_{v,\chi}(t)$, $t \in T$ совпадает с его игольчатой вариацией

$$\Phi_k(u_{v,\chi}) - \Phi_k(u) = - \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H^k[t, u] dt = \delta_1 \Phi_k(u, v, \chi). \quad (3.46)$$

Пусть $k \in \{1, \dots, m\}$. Тогда в первой вспомогательной задаче процедуры игольчатого улучшения k -тое ограничение равносильно исходному ограничению, т.е. имеет вид $\Phi_k(v) = 0$.

Таким образом, в случае (3.44), (3.45) для любого доступного управления $u(t)$ вспомогательное управление $\bar{u}(t)$ (решение задачи (3.36)) является допустимым по ограничению $\Phi_k(u) = 0$.

Рассмотрим k -тое ограничение второй вспомогательной задачи на решении $\chi_\alpha(t)$

$$\int_T \chi_\alpha(t) g_k(t) dt = \alpha \Phi_k(u).$$

С учетом формулы (3.46) получаем

$$\Phi_k(u) - \Phi_k(u_\alpha) = \alpha \Phi_k(u).$$

Отсюда заключаем, что

1) если $\Phi_k(u) = 0$, то $\Phi_k(u_\alpha) = 0$, $\alpha \in (0, 1]$ (управление u_α является допустимым по k -тому ограничению для любого $\alpha \in (0, 1]$),

2) если $\Phi_k(u) \neq 0$, то $\Phi_k(u_\alpha) = (1 - \alpha)\Phi_k(u)$ (для любого $\alpha \in (0, 1]$ имеет место уменьшение модуля: $|\Phi_k(u_\alpha)| < |\Phi_k(u)|$).

Рассмотрим задачу (3.43), (3.44) с линейными ограничениями (все функционалы $\Phi_i(u)$, $i = \overline{1, m}$ являются линейными). Тогда при любом доступном управлении $u(t)$ вспомогательное управление $\bar{u}(t)$ является допустимым. Если $u(t)$ — допустимое управление в задаче с линейными ограничениями, то выходное управление $u_\alpha(t)$ является также допустимым для любого $\alpha \in (0, 1]$. Если управление $u(t)$ не допустимо ($\Phi(u) > 0$), то для любого $\alpha \in (0, 1)$ имеет место уменьшение невязки: $\Phi(u_\alpha) \leq (1 - \alpha)\Phi(u) < \Phi(u)$.

Приведенные утверждения являются вполне очевидным следствием предыдущих заключений относительно линейного функционала $\Phi_k(u)$.

Пусть задача (3.43), (3.44) является линейной (все функционалы $\Phi_i(u)$, $i = \overline{0, m}$ линейны по состоянию). Тогда первая вспомогательная задача независимо от управления $u(t)$ принимает вид

$$\Phi_0(v) \rightarrow \min, \quad \Phi_i(v) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad v \in V,$$

т.е. совпадает с исходной.

Это значит, что метод игольчатой линеаризации решает линейную задачу за одну итерацию (без процедуры варьирования) для любого начального управления $u \in V$.

Отметим, что принцип максимума в регулярном случае $\lambda_0 = 1$ является для линейной задачи достаточным условием оптимальности.

Рассмотрим, наконец, задачу (3.43), (3.44) с линейными ограничениями в случае, когда целевой функционал является вогнутым по x — переменной: $\Phi_0(x)$ — вогнутая на R^n функция, $F_0(x, u, t) = F_0^1(x, t) + F_0^2(u, t)$, $F_0^1(x, t)$ — вогнутая по $x \in R^n$ функция.

Тогда имеет место следующая оценка для приращения

$$\Delta_v \Phi_0(u) \leq - \int_T \Delta_{v(t)} H^0(\psi^0(t, u), u(t), t) dt.$$

Пусть $u(t)$ — допустимое управление. Первая вспомогательная задача имеет вид

$$\int_T \Delta_{v(t)} H^0[t, u] dt \rightarrow \max, \quad v \in V,$$

$$\Phi_i(v) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Ее решение $\bar{u}(t)$ является допустимым управлением ($\Phi_i(\bar{u}) = 0$, $i = \overline{1, m}$), причем значение задачи неотрицательно

$$\delta_0(u) = \int_T \Delta_{\bar{u}(t)} H^0[t, u] dt \geq 0.$$

Регулярный случай $\delta_0(u) > 0$ приводит к уменьшению целевого функционала без процедуры варьирования: $\Delta_{\bar{u}(t)} \Phi_0(u) \leq -\delta_0(u) < 0$.

Пусть $\delta_0(u) = 0$. Рассмотрим невязку принципа максимума

$$\begin{aligned} \delta_1(u) &= \int_T \Delta_{\bar{u}(t)} H[t, \bar{\lambda}] dt = \sum_{i=0}^m \bar{\lambda}_i \int_T \Delta_{\bar{u}(t)} H^i[t, u] dt = \\ &= \bar{\lambda}_0 \delta_0(u) + \sum_{i=0}^m \bar{\lambda}_i (\Phi_i(u) - \Phi_i(\bar{u})). \end{aligned}$$

Это значит, что в случае $\delta_0(u) = 0$ управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума.

В заключение отметим, что приведенные выше утверждения позволяют существенно облегчить реализацию метода игольчатой линеаризации в задачах со специальной структурой (линейная управляемая система, линейные и вогнутые функционалы).

Приведем соответствующую иллюстрацию.

Пример 3.1

$$\Phi_0(u) = \int_0^1 x_2(t) dt \rightarrow \min, \quad \Phi_1(u) = x_1(1) = 0,$$

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

Это линейная задача, в которой принцип максимума с $\lambda_0 = 1$ является достаточным условием оптимальности.

Рассмотрим управление $u(t) = 1$. Оно не является допустимым ($\Phi_1(u) = 1$). Построим первую вспомогательную задачу. В данном

случае $H^0 = \psi_1 u + \psi_2 x_1 - x_2$, причем $\psi_1^0(t) = t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\Delta_v H^0[t, u] = \psi_1^0(t)(v - 1).$$

Аналогично, $H^1 = \psi_1 u + \psi_2 x_1$, $\psi_1^1(t) = -1$, то есть $\Delta_v H^1[t, u] = 1 - v$.

В результате, первая вспомогательная задача имеет вид

$$\int_0^1 \left(t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right) v(t) dt \rightarrow \max, \quad \int_0^1 v(t) dt = 0, \quad |v(t)| \leq 1.$$

Она эквивалентна исходной задаче. Проведем решение с помощью регулярного принципа максимума ($\lambda_0 = 1$).

Определим функцию переключения $w(t, \lambda) = t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + \lambda$. Тогда $\bar{u}(t) = \text{sign } w(t, \bar{\lambda})$. Поскольку функция $w(t, \lambda)$ для любого λ монотонно возрастает на $[0, 1]$, то можно перейти к параметру $\tau \in [0, 1]$ и положить

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau], \\ 1, & t \in (\tau, 1]. \end{cases}$$

При этом точка переключения находится из условия

$$\int_0^1 \bar{u}(t) dt = 0,$$

то есть $\tau = \frac{1}{2}$ ($\bar{\lambda} = \frac{1}{8}$).

Таким образом, управление $\bar{u}(t)$ при $\tau = \frac{1}{2}$ решает первую вспомогательную задачу и является оптимальным в исходной задаче.

Пример 3.2

$$\Phi_0(u) = x_2^2(2) \rightarrow \min, \quad \Phi_1(u) = x_1(2) + x_2(2) = 0,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 1,$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 2].$$

Это линейно-выпуклая задача (линейная система, линейное ограничение, выпуклый функционал).

Рассмотрим доступное управление $u(t) = 1$ ($\Phi_1(u) = 8$).

Тогда $\psi_2^0(t) = -6$, $\psi_2^1(t) = t - 3$. Первая вспомогательная задача имеет вид

$$\int_0^2 v(t) dt \rightarrow \min, \quad \int_0^2 (t - 3)v(t) dt = 4,$$

$$|v(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 2].$$

Отметим, что интегральное ограничение эквивалентно условию $\Phi_1(v) = 0$. При этом нетрудно видеть, что единственным допустимым управлением вспомогательной задачи (исходной задачи) является $v(t) = -1$, $t \in [0, 2]$. Следовательно, управление

$\bar{u}(t) = -1$ решает вспомогательную задачу и является оптимальным в исходной задаче.

Пример 3.3

$$\Phi_0(u) = \int_0^1 x(t)(u(t) - 1) dt \rightarrow \min, \quad \Phi_1(u) = x(1) - \frac{2}{3} = 0,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

Это задача с билинейным по совокупности (x, u) функционалом, в которой принцип максимума, вообще говоря, не является достаточным условием оптимальности.

Рассмотрим доступное управление $u(t) = -1, t \in [0, 1]$ ($\Phi_1(u) = -\frac{2}{3}$).

Образую первую вспомогательную задачу

$$\int_0^1 (1-t)v(t) dt \rightarrow \max, \quad \int_0^1 v(t) dt = -\frac{1}{3}, \quad |v(t)| \leq 1.$$

Функция переключения имеет вид $w(t, \lambda) = 1 - t + \lambda$, то есть решение задачи можно искать в форме

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau] \\ -1, & t \in (\tau, 1]. \end{cases}$$

При этом параметр τ определяется изопериметрическим условием: $\tau = \frac{1}{3}$.

Итак, управление $\bar{u}(t)$ ($\tau = \frac{1}{3}$) решает вспомогательную задачу и является допустимым для исходной задачи. Кроме того, $\bar{u}(t) = \text{sign } w(t, \bar{\lambda})$, где $\bar{\lambda} = -\frac{2}{3}$ — соответствующий множитель Лагранжа.

Перейдем ко второму этапу итерации улучшения. Поскольку $\bar{u}(t) = u(t), t \in (\frac{1}{3}, 1]$, то поиск функции варьирования $\chi(t)$ следует производить только для $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Это значит, что вторая вспомогательная задача содержательно определена только на про-

межутке $[0, \frac{1}{3}]$. Нетрудно видеть, что первое интегральное ограничение χ — задачи эквивалентно условию нормировки функции $\chi(t)$. В результате получаем задачу с параметром $\alpha \in [0, 1]$.

$$\int_0^{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3} - t)\chi(t)dt \rightarrow \max; \int_0^{\frac{1}{3}} \chi(t)dt = \frac{1}{3}\alpha; \chi(t) \in \{0, 1\}; t \in [0, \frac{1}{3}].$$

Решение задачи определяется условием

$$(\frac{1}{3} - t + \lambda)\chi \rightarrow \max, \chi \in \{0, 1\},$$

то есть имеет следующую структуру

$$\chi(t, \tau) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau] \\ 0, & t \in (\tau, \frac{1}{3}]. \end{cases}$$

Точка переключения находится из условия нормировки: $\tau = \frac{\alpha}{3}$. В результате получаем функцию варьирования $\chi_\alpha(t) = \chi(t, \frac{\alpha}{3})$, $t \in [0, \frac{1}{3}]$.

Перейдем к завершающему этапу итерации. Сформируем семейство варьированных управлений

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{\alpha}{3}] \\ -1, & t \in (\frac{\alpha}{3}, 1]. \end{cases}$$

и решим вопрос о выборе параметра α . С этой целью образуем функционал Лагранжа $L(u, \bar{\lambda}) = \Phi_0(u) + \bar{\lambda}\Phi_1(u)$ и поставим задачу

$$L(u_\alpha, \bar{\lambda}) \rightarrow \min, \alpha \in [0, 1].$$

После элементарного подсчета получаем ($\bar{\lambda} = -\frac{2}{3}$)

$$\frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{10}{9}\alpha \rightarrow \min, \alpha \in [0, 1].$$

В результате $\alpha_* = 1$, то есть на выходе итерации улучшения получаем управление

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ -1, & t \in (\frac{1}{3}, 1]. \end{cases}$$

Отметим, что это управление является допустимым. Более того, оно удовлетворяет принципу максимума. Несложный анализ показывает, что $\bar{u}(t)$ — оптимальное управление в рассматриваемой задаче.

3.3. РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

3.3.1. Минимаксная задача

Исследуем проблему численного решения вспомогательных задач метода игольчатой линеаризации, разработанного в разделе 3.1. Рассмотрим соответствующую задачу в общей формулировке.

На множестве допустимых управлений

$$V = \{u \in L_\infty^1(T): u(t) \in U, t \in T\}$$

определим набор интегральных функционалов

$$S_i(u) = \int_T g_i(u(t), t) dt, \quad i = \overline{1, m}.$$

Введем функционал максимума

$$S(u) = \max_{1 \leq i \leq m} S_i(u)$$

и поставим задачу оптимального управления

$$S(u) \rightarrow \min, \quad u \in V. \quad (3.47)$$

Предположим, что в данной задаче множество U компактно, подынтегральные функции $g_i(u, t)$ непрерывны по $u \in U$, измеримы и ограничены по $t \in T$.

Построим метод последовательного улучшения допустимых управлений на основе процедуры игольчатого варьирования.

Предварительно решим серию простейших задач на минимум по каждому функционалу S_i , $i = \overline{1, m}$

$$S_i(u) \rightarrow \min, \quad u \in V.$$

Оптимальное управление определяется условием

$$u_i^*(t) = \arg \min_{u \in U} g_i(u, t), \quad t \in T.$$

Пусть $S_i^* = S_i(u_i^*)$ — значение i -той задачи. Тогда значение $S^* = S(u^*)$ минимаксной задачи (3.47) можно оценить снизу

$$S^* \geq \max_{1 \leq i \leq m} S_i^*.$$

Выделим здесь случай равенства $S^* = S_j^*$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Он означает, что оптимальное управление u^* минимаксной задачи (3.47) является решением простейшей задачи на минимум

$$S_j(u) \rightarrow \min, \quad u \in V.$$

Действительно, приведем очевидную цепочку соотношений

$$S^* = S(u^*) \geq S_j(u^*) \geq S_j(u_j^*) = S_j^*.$$

В нашем случае получаем $S_j(u^*) = S_j^*$, что и сформулировано выше.

Кроме того, отметим, что управление $u_j^*(t)$ будет решением задачи (3.47), если $S(u_j^*) = S_i(u_j^*)$.

В дальнейшем будем предполагать выполнение строгого неравенства (общий случай)

$$S^* > \max_{1 \leq i \leq m} S_i^*. \quad (3.48)$$

Пусть $u \in V$, $\varepsilon \geq 0$. Выделим множество индексов ε -активных функционалов

$$I_\varepsilon(u) = \{i = \overline{1, m} : S_i(u) \geq S(u) - \varepsilon\}.$$

Возьмем за основу процедуру игольчатого варьирования

$$u_{v,\chi}(t) = u(t) + \chi(t)(v(t) - u(t)), \quad t \in T,$$

$$v \in V, \quad \chi \in X_\alpha, \quad \alpha \in [0, 1],$$

$$X_\alpha = \{\chi \in L_\infty(T) : \chi(t) = 0 \vee 1, \quad \int_T \chi(t) dt = \alpha(t_1 - t_0)\}.$$

Соответствующие приращения функционалов S_i имеют вид

$$S_i(u_{v,\chi}) - S_i(u) = \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} g_i(u(t), t) dt, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.49)$$

Отметим, что независимо от v , χ имеет место оценка

$$|S_i(u_{v,\chi}) - S_i(u)| \leq C_i \alpha, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.50)$$

Зафиксируем $\alpha \in (0, 1]$ и определим условие выбора параметров варьирования $v \in V$, $\chi \in X_\alpha$ соотношениями

$$S_i(u_{v,\chi}) - S_i(u) = \alpha(S_i^* - S_i(u)), \quad i \in I_\varepsilon(u). \quad (3.51)$$

Введенное условие имеет вполне прозрачный смысл. Для заданного $\alpha \in (0, 1]$ требуется построить управление $u_{v,\chi}(t)$, которое обеспечивает уменьшение ε -активных функционалов S_i на величину, пропорциональную расстоянию от текущего значения $S_i(u)$ до минимального значения S_i^* .

Выделим частный случай, когда $\alpha = 1$, $I_\varepsilon(u) = \{j\}$. В этой ситуации $u_{v,\chi} = v$, условие (3.51) принимает вид $S_j(v) = S_j^*$, $v \in V$ и разрешается управлением $v = u_j^*$. В общем случае соотношения (3.51) могут оказаться несовместными. Смысл такой ситуации будет обсужден ниже.

Используя формулы приращения (3.49) и определение X_α , представим соотношения (3.51) в явном виде как систему интегральных уравнений относительно функциональных параметров варьирования

$$\begin{aligned} \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} g_i(u(t), t) dt &= \alpha(S_i^* - S_i(u)), \quad i \in I_\varepsilon(u), \\ \int_T \chi(t) dt &= \alpha(t_1 - t_0), \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\chi(t) \in \{0, 1\}, \quad v(t) \in U, \quad t \in T.$$

Предположим, что данная задача в вариациях имеет решение $v_\alpha(t)$, $\chi_\alpha(t)$, $t \in T$ для всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$, где $\alpha_0 \in (0, 1]$. Образует семейство варьированных управлений

$$u_\alpha(t) = u(t) + \chi_\alpha(t)(v_\alpha(t) - u(t)), \quad t \in T, \quad \alpha \in (0, \alpha_0).$$

Докажем одно вспомогательное утверждение относительно индексных множеств $I_\varepsilon(u)$, $I_\varepsilon(u_\alpha)$. Определим положительное число

$$\gamma = S(u) - \max_{i \in I_0(u)} S_i(u).$$

Следовательно, для $i \in I_0(u)$ имеет место неравенство $S(u) - S_i(u) \geq \gamma$ (если $S(u) - S_i(u) < \gamma$, то $i \in I_0(u)$). Кроме того, отметим, что $I_\varepsilon(u) = I_0(u)$ для $\varepsilon \in (0, \gamma)$.

Лемма 3.5. Для достаточно малых $\alpha \in (0, \alpha_0)$ справедливо включение $I_\varepsilon(u_\alpha) \subset I_\varepsilon(u)$ при $\varepsilon \in [0, \frac{\gamma}{2}]$.

Доказательство. Будем использовать известное неравенство для функции максимума

$$|S(u_\alpha) - S(u)| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |S_i(u_\alpha) - S_i(u)|.$$

В соответствии с оценкой (3.50) для достаточно малых $\alpha \in (0, \alpha_0)$ можно обеспечить неравенства

$$|S_i(u_\alpha) - S_i(u)| < \frac{1}{4} \gamma, \quad i = \overline{1, m}.$$

С учетом предыдущего также имеем

$$|S(u_\alpha) - S(u)| < \frac{1}{4} \gamma.$$

Пусть теперь $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2} \gamma]$, $i \in I_\varepsilon(u_\alpha)$. Это значит, что

$$S(u_\alpha) - S_i(u_\alpha) \leq \varepsilon.$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} S(u) - S_i(u) &= (S(u) - S(u_\alpha)) + (S(u_\alpha) - S_i(u_\alpha)) + \\ &+ (S_i(u_\alpha) - S_i(u)) < \frac{1}{4} \gamma + \varepsilon + \frac{1}{4} \gamma \leq \gamma. \end{aligned}$$

Итак, $S(u) - S_i(u) < \gamma$. В силу определения γ это значит, что $i \in I_\varepsilon(u)$. Следовательно, $i \in I_\varepsilon(u_\alpha) \Rightarrow i \in I_\varepsilon(u)$. Лемма доказана.

Перейдем к обоснованию свойства улучшения для функционала $S(u)$ на семействе управлений u_α . Согласно формуле (3.49) с учетом задачи (3.52) для $\alpha \in (0, \alpha_0)$ имеем

$$\begin{aligned} S_i(u_\alpha) - S_i(u) &= \int_T \chi_\alpha(t) \Delta_{v_\alpha(t)} g_i(u(t), t) dt = \\ &= \alpha(S_i^* - S_i(u)), \quad i \in I_\varepsilon(u). \end{aligned}$$

Отсюда, используя оценку (3.48), получаем

$$S_i(u_\alpha) = \alpha S_i^* + (1 - \alpha) S_i(u) < \alpha S^* + (1 - \alpha) S(u).$$

В силу утверждения леммы 3.5. для достаточно малых $\alpha \in (0, \alpha_0)$

при $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2} \gamma]$

$$S(u_\alpha) = \max_{i \in I_\varepsilon(u_\alpha)} S_i(u_\alpha) \leq \max_{i \in I_\varepsilon(u)} S_i(u_\alpha) < \alpha S^* + (1 - \alpha) S(u).$$

В результате получаем оценку уменьшения для функционала S

$$S(u_\alpha) - S(u) < \alpha(S^* - S(u)). \quad (3.53)$$

Если $S(u) = S^*$, то $u = u^*$ — оптимальное управление задачи (3.47). В общем случае $S(u) > S^*$, и неравенство (3.53) гарантирует локальное убывание функционала S : $S(u_\alpha) < S(u)$ для малых $\alpha \in (0, \alpha_0)$.

Отметим, что условием улучшения является разрешимость вспомогательной задачи (3.52) хотя бы для малых $\alpha > 0$. Следовательно, необходимым условием оптимальности управления $u(t)$, $t \in T$ в задаче (3.47) является неразрешимость вспомогательной задачи (3.52) для малых $\alpha > 0$.

Выделим случай, когда $I_\varepsilon(u) = \{k\}$ ($S_k(u)$ — единственный ε -активный функционал). В этой ситуации необходимо организовать игольчатый спуск по функционалу S_k , используя минимизирующее управление u_k^* как вспомогательное. Соответствующая процедура имеет вид

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} u(t), & \Delta_{u(t)} g_k(u_k^*(t), t) < \lambda, \\ u_k^*(t), & \Delta_{u(t)} g_k(u_k^*(t), t) \geq \lambda. \end{cases}$$

Параметр $\lambda \geq 0$ выбирается из условия улучшения по функционалу S : $S(u_\lambda) < S(u)$.

Численное решение вспомогательной задачи (3.52) целесообразно проводить через редукцию к задаче оптимального управления на основе метода наименьших квадратов

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= \chi(t), \quad \dot{y}_i = \chi(t) \Delta_{v(t)} g_i(u(t), t), \quad y_0(t_0) = 0, \quad y_i(t_0) = 0, \quad i \in I_\varepsilon(u), \\ (y_0(t_1) - \alpha(t_1 - t_0))^2 + \sum_{i \in I_\varepsilon(u)} (y_i(t_1) - \alpha(S_i^* - S_i(u)))^2 &\rightarrow \min, \end{aligned}$$

$$\chi(t) \in \{0, 1\}, \quad v(t) \in U, \quad t \in T.$$

Здесь $(\chi(t), v(t))$ — управление, $(y_0(t), y_i(t))$ — фазовые переменные.

Специальный метод нелокального улучшения для задач подобного типа изучается в следующем пункте.

3.3.2. Интегральная задача

Рассмотрим вопрос о численном решении вспомогательных задач процедуры игольчатого улучшения, построенной в разделе 3.2. В отвлеченной формулировке это задачи следующего типа (ляпуновские задачи [2]).

$$\int_T g_0(u(t), t) dt \rightarrow \min, u \in V, \quad (3.54)$$

$$\int_T g_i(u(t), t) dt = a_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$V = \{u \in L_\infty^r(T) : u(t) \in U, t \in T\}.$$

Здесь образующие функции $g_i(u, t)$, $i = \overline{0, m}$ непрерывны по $u \in U$, измеримы и ограничены по $t \in T$ и множество $U \subset R^r$ компактно.

Представим задачу в дифференциальной форме, используя переменные

$$y_i(t) = \int_{t_0}^t g_i(u(\tau), \tau) d\tau, \quad i = \overline{0, m}.$$

В результате получаем динамический вариант интегральной задачи (3.54)

$$\dot{y}_i(t) = g_i(u, t), \quad y_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{0, m},$$

$$y_0(t_1) \rightarrow \min, \quad y_i(t_1) = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad u \in V.$$

Пусть $Y \subset R^{m+1}$ — множество достижимости y — системы в момент времени t_1 (выпуклый компакт). В пространстве R^{m+1} переменных $y = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ задача представляется в конечномерной форме

$$y_0 \rightarrow \min, \quad y_i = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad y \in Y. \quad (3.55)$$

Для численного решения данной задачи возьмем за основу метод параметризации целевой функции [24]. Приведем основные соотношения метода.

Пусть $y^* = (y_0^*, y_1^*, \dots, y_m^*)$ — решение задачи (3.55). Образую функцию — свертку с параметром β

$$S(y, \beta) = (y_0 - \beta)^2 + \sum_{i=1}^m (y_i - a_i)^2$$

и сформулируем вспомогательную задачу проектирования на множество Y

$$S(y, \beta) \rightarrow \min, \quad y \in Y. \quad (3.56)$$

Пусть $y(\beta) = (y_0(\beta), y_1(\beta), \dots, y_m(\beta))$ — решение этой задачи,

$$\beta_* = \min\{\beta : S(y(\beta), \beta) = 0\}$$

— минимальное β , при котором значение задачи (3.56) равно нулю.

Связь между задачами (3.55), (3.56) вполне очевидна:

$$y_i^* = y_i(\beta_*), \quad i = \overline{0, m}.$$

Для отыскания β_* строится последовательность β_l , $l=0, 1, \dots$ с условиями

$$\beta_l \leq \beta_{l+1} \leq \beta_*, \quad \beta_l \rightarrow \beta_*, \quad l \rightarrow \infty.$$

Величина β_0 находится как значение простейшей задачи:

$$y_0 \rightarrow \min, \quad y \in Y, \quad \left(\int_T g_0(u(t), t) dt \rightarrow \min, \quad u \in V \right).$$

Далее действует итерационная формула

$$\beta_{l+1} = \beta_l + \sqrt{S(y(\beta_l), \beta_l)}, \quad l=0, 1, \dots \quad (3.57)$$

Таким образом, исходная задача (3.55) сводится к последовательному решению задач (3.56) в рамках формулы пересчета (3.57).

Понятно, что эффективность метода в целом связана с возможностью «быстрого» решения β -задачи (3.56). Построим специальный метод численного решения этой задачи, обладающий свойством не-локального улучшения по функционалу на каждой итерации.

Будем работать с β -задачей, представленной в динамической постановке

$$S(u) = \frac{1}{2} [(y_0(t_1) - \beta)^2 + \sum_{i=1}^m (y_i(t_1) - a_i)^2] \rightarrow \min, \quad u \in V,$$

$$\dot{y}_i = g_i(u, t), \quad y_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{0, m}.$$

Для удобства записи введем векторные объекты

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_m), \quad g = (g_0, g_1, \dots, g_m), \quad a = (\beta, a_1, \dots, a_m)$$

и сформулируем задачу в виде

$$S(u) = \frac{1}{2} \langle y(t_1) - a, y(t_1) - a \rangle \rightarrow \min, \quad u \in V, \quad (3.58)$$

$$\dot{y} = g(u, t), \quad y(t_0) = 0.$$

На первом этапе получим конструктивное представление для приращения функционала $S(u)$. Для пары управлений $u, v \in V$ с соответствующими траекториями $y(t, u), y(t, v)$ имеем

$$\Delta_v S(u) = \langle y(t_1, u) - a, \Delta y(t_1) \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta y(t_1), \Delta y(t_1) \rangle = S_1 + S_2.$$

Здесь приращение $\Delta y(t) = y(t, v) - y(t, u)$ определяется уравнением

$$\Delta \dot{y}(t) = \Delta_{v(t)} g(u(t), t), \quad \Delta y(t_0) = 0.$$

Следовательно,

$$S_1 = \int_T \langle y(t_1, u) - a, \Delta_{v(t)} g(u(t), t) \rangle dt.$$

Далее, рассмотрим тождество

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta y(t), \Delta y(t) \rangle = 2 \langle \Delta \dot{y}(t), \Delta y(t) \rangle.$$

После интегрирования получаем

$$S_2 = \int_T \langle \Delta y(t), \Delta_{v(t)} g(u(t), t) \rangle dt.$$

В результате требуемая формула имеет вид

$$\Delta_v S(u) = \int_T \langle p(t, u, y(t, v)), \Delta_{v(t)} g(u(t), t) \rangle dt, \quad (3.59)$$

где вспомогательная вектор-функция p определяется соотношением

$$p(t, u, y) = y(t_1, u) - a + y - y(t, u).$$

Формула (3.59) позволяет организовать процедуру нелокального улучшения управления $u \in V$ на основе минимизирующего управления

$$u^*(p, t) = \arg \min_{w \in U} \langle p, g(w, t) \rangle.$$

Процедура улучшения:

1) сформируем управление $v^*(y, t) = u^*(p(t, u, y), t)$, $y \in R^{m+1}$, $t \in T$;

2) найдем решение $y(t)$ фазовой системы

$$\dot{y} = g(v^*(y, t), t), \quad y(t_0) = 0$$

вместе с управлением $v(t) = v^*(y(t), t)$, $t \in T$.

Выходное управление $v(t)$ характеризуется соотношением ($y(t) = y(t, v)$)

$$v(t) = \arg \min_{w \in U} \langle p(t, u, y(t, v)), g(w, t) \rangle$$

и согласно формуле (3.59) обеспечивает свойство улучшения: $\Delta_v S(u) \leq 0$.

Подчеркнем экономичность процедуры: вычислительные затраты на одно улучшение — одно интегрирование y -системы. Для

построения метода последовательных приближений со свойством сходимости проведем итеративную регуляризацию целевого функционала в задаче (3.58).

Пусть $k=0, 1, \dots$ — номер итерации, $(u^k(t), y^k(t))$ — соответствующая допустимая пара. Введем вспомогательный функционал

$$S_\varepsilon(u, u^k) = S(u) + \varepsilon J(u, u^k)$$

с параметром регуляризации $\varepsilon \geq 0$ и интегральным стабилизатором

$$J(u, u^k) = \frac{1}{2} \int_T \|y(t, u) - y^k(t)\|^2 dt.$$

Найдем управление u^{k+1} из условия уменьшения функционала $S_\varepsilon(u, u^k)$: $\Delta S_\varepsilon(u^{k+1}, u^k) \leq 0$. При этом получаем оценку улучшения по исходному функционалу

$$S(u^{k+1}) - S(u^k) \leq -\varepsilon J(u^{k+1}, u^k). \quad (3.60)$$

Для построения очередного приближения $u^{k+1}(t)$ получим формулу приращения для функционала $S_\varepsilon(u, u^k)$ на паре u^k, u . Согласно определению

$$\Delta S_\varepsilon(u, u^k) = \Delta_u S(u^k) + \varepsilon J(u, u^k).$$

Формула приращения функционала S имеет вид (3.59). Найдем аналогичное представление для $J(u, u^k)$.

Положим $\Delta y^k(t) = y(t, u) - y^k(t)$, $t \in T$. Тогда выполняется уравнение

$$\Delta \dot{y}^k(t) = \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t), \quad \Delta y^k(t_0) = 0.$$

Рассмотрим тождество

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta y^k(t), \Delta y^k(t) \rangle = 2 \langle \Delta \dot{y}^k(t), \Delta y^k(t) \rangle, \quad t \in T.$$

После интегрирования по $t \in [t_0, \tau]$, $\tau \in T$ имеем

$$\frac{1}{2} \langle \Delta y^k(\tau), \Delta y^k(\tau) \rangle = \int_{t_0}^{\tau} \langle \Delta \dot{y}^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt.$$

Отсюда

$$J(u, u^k) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \langle \Delta \dot{y}^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt d\tau.$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем итоговое представление

$$\begin{aligned} J(u, u^k) &= \int_{t_0}^{t_1} \int_t^{t_1} (t_1 - t) \langle \Delta y^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \langle \Delta y^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt. \end{aligned}$$

В совокупности с формулой (3.59) приходим к требуемому выражению

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon(u, u^k) &= \int_T \langle p_\varepsilon(t, u^k, y(t, u)), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt, \\ p_\varepsilon(t, u^k, y) &= y^k(t_1) - a + (1 + \varepsilon(t_1 - t))(y - y^k(t)). \end{aligned}$$

Данное представление сразу определяет процедуру итерационного улучшения управления u^k по функционалу S_ε :

1) сформируем управление $v^k(y, t) = u^*(p_\varepsilon(t, u^k, y), t)$, $y \in R^{m+1}$, $t \in T$;

2) найдем решение $y^{k+1}(t)$ фазовой системы

$$\dot{y} = g(v^k(y, t), t), \quad y(t_0) = 0$$

вместе с управлением $u^{k+1}(t) = v^k(y^{k+1}(t), t)$, $t \in T$.

Трудоёмкость итерации — одна задача Коши для y -системы с экстремальным управлением v^k . При этом имеет место оценка улучшения (3.60).

Рассмотрим вопрос о сходимости метода. Покажем, что последовательность $\{u^k\}$ является минимизирующей в задаче (3.58): $S(u^k) \rightarrow S(u^*)$, $k \rightarrow \infty$, где $u^* \in V$ — оптимальное управление.

Из доказательства формулы приращения (3.59) для функционала S следует, что

$$\Delta_v S(u) \geq S_1 = \int_T \langle y(t_1, u) - a, \Delta_{v(t)} g(u(t), t) \rangle dt.$$

Полагая здесь $u = u^k$, $v = u^*$, получаем оценку сверху

$$S(u^k) - S(u^*) \leq \int_T \langle a - y^k(t_1), \Delta_{u^*(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt. \quad (3.61)$$

Согласно построению

$$u^{k+1}(t) = \arg \min_{u \in U} \langle p_\varepsilon(t, u^k, y^{k+1}(t)), g(u, t) \rangle, \quad t \in T,$$

то есть выполняется неравенство

$$\int_T \langle p_\varepsilon(t, u^k, y^{k+1}(t)), \Delta_{v(t)} g(u^{k+1}(t), t) \rangle dt \geq 0, \quad v(t) \in U.$$

Воспользуемся очевидным представлением

$$\Delta_v g(u^{k+1}, t) = \Delta_v g(u^k, t) + \Delta_{u^k} g(u^{k+1}, t)$$

и положим $v = u^*$. Тогда с учетом формулы приращения для функционала S_ε предыдущее неравенство принимает вид

$$\int_T \langle p_\varepsilon(t, u^k, y^{k+1}(t)), \Delta_{u^*(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt - \Delta S_\varepsilon(u^{k+1}, u^k) \geq 0.$$

Отсюда, принимая во внимание выражения для p_ε , S_ε , получаем оценку сверху для правой части из (3.61)

$$\begin{aligned} & \int_T \langle a - y^k(t_1), \Delta_{u^*(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt \leq \\ & \leq \int_T (1 + \varepsilon(t_1 - t)) \langle y^{k+1}(t) - y^k(t), \Delta_{u^*(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt + \\ & \quad + S(u^k) - S(u^{k+1}) - \varepsilon J(u^{k+1}, u^k) \leq \\ & \leq \int_T (1 + \varepsilon(t_1 - t)) \|y^{k+1}(t) - y^k(t)\| \|\Delta_{u^*(t)} g(u^k(t), t)\| dt + \\ & \quad + S(u^k) - S(u^{k+1}). \end{aligned}$$

Далее, в силу непрерывности вектор-функции $g(u, t)$ по $u \in U$ и компактности множества U имеет место ограниченность приращения: для любой пары $u, v \in V$

$$\|\Delta_{v(t)} g(u(t), t)\| \leq C_1, \quad t \in T.$$

Следовательно, последний интеграл оценивается сверху величиной

$$C_1(1 + \varepsilon(t_1 - t_0)) \int_T \|y^{k+1}(t) - y^k(t)\| dt.$$

Кроме того, на основании известного неравенства для норм

$$\int_T \|y^{k+1}(t) - y^k(t)\| dt \leq C_2 [J(u^{k+1}, u^k)]^{\frac{1}{2}}.$$

В совокупности, отправляясь от неравенства (3.61), получаем итоговую оценку вида

$$S(u^{k+1}) - S(u^*) \leq C(1 + \varepsilon(t_1 - t_0)) [J(u^{k+1}, u^k)]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.62)$$

Остается заметить, что из (3.60)

$$J(u^{k+1}, u^k) \leq \frac{1}{\varepsilon} [S(u^k) - S(u^{k+1})], \quad (3.63)$$

причем вследствие монотонности последовательности $\{S(u^k)\}$ имеет место сходимость $S(u^k) - S(u^{k+1}) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Таким образом, последовательность $\{u^k\}$ является минимизирующей в задаче (3.58) для любого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что при $\varepsilon = 0$ (без регуляризации) это утверждение, вообще говоря, не имеет места.

В заключение, обсудим вопрос о выборе параметра регуляризации ε . С точки зрения неравенства (3.62) малые значения ε являются предпочтительными. С другой стороны, на основании оценки (3.63) малость ε приводит к замедлению сходимости $J(u^{k+1}, u^k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, что в свою очередь негативно влияет на скорость сходимости по функционалу S . Думается, что вопрос о рациональном выборе параметра ε следует решать в рамках вычислительного эксперимента.

Тем не менее, некоторое компромиссное значение параметра ε можно получить, если объединить оценки (3.62), (3.63)

$$S(u^{k+1}) - S(u^*) \leq C\varphi(\varepsilon)[S(u^k) - S(u^{k+1})]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.64)$$

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1 + \varepsilon(t_1 - t_0)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Следовательно, задача оптимизации оценки имеет вид

$$\varphi(\varepsilon) \rightarrow \min, \quad \varepsilon > 0.$$

Поскольку $\varphi(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow \infty$, то решением задачи является стационарная точка функции $\varphi(\varepsilon)$: $\bar{\varepsilon} = (t_1 - t_0)^{-1}$. Это значение можно считать теоретической рекомендацией для выбора ε . Ограниченность этого выбора связана с тем, что в оценке (3.64) величина приращения $S(u^k) - S(u^{k+1})$ зависит от ε , но не может быть учтена в ε -задаче.

Замечание 1. Вторая вспомогательная задача метода игольчатой линеаризации является частным случаем базовой задачи (3.54), так что ее численное решение можно проводить по предложенной выше схеме. Ситуация здесь осложняется присутствием параметра игольчатого варьирования $\alpha \in [0, 1]$. С учетом линейности задачи относительно функции варьирования $\chi(t)$ здесь в качестве альтернативы можно использовать метод дискретизации, заменяя интегралы квадратурными суммами. В результате получаем целочисленную (булеву) задачу линейного программирования с параметром α .

Замечание 2. В разделе 3.2 было отмечено, что на выходе первой вспомогательной задачи необходимо иметь не только управление $\bar{u}(t), t \in T$, но и соответствующий двойственный вектор (вектор

множителей) $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)$. В этой связи для решения задачи (3.55) можно в принципе использовать двойственный метод (метод множителей Лагранжа).

Следуя [35], приведем основные конструкции метода применительно к задаче (3.55). Рассматривается нормальный случай, когда $\bar{\lambda}_0 = 1$. Введем обозначения

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad y = (y_1, \dots, y_m), \quad a = (a_1, \dots, a_m).$$

Образую целевую функцию двойственной задачи

$$\varphi(\lambda) = \min_{(y_0, y) \in Y} (y_0 + \langle y - a, \lambda \rangle).$$

Отметим, что каждый подсчет значения $\varphi(\lambda)$ связан с решением простейшей задачи оптимального управления

$$y_0 + \langle y - a, \lambda \rangle \rightarrow \min, \quad (y_0, y) \in Y. \quad (3.65)$$

Разрешающее управление $u(t, \lambda)$, $t \in T$ сразу определяется экстремальным соотношением

$$u(t, \lambda) = \arg \min_{u \in U} (g_0(u, t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(u, t))$$

и порождает соответствующую точку множества Y : $y_0(\lambda)$, $y(\lambda)$ (задача Коши для y -системы). При этом $\varphi(\lambda) = y_0(\lambda) + \langle y(\lambda) - a, \lambda \rangle$. Если задача (3.65) имеет единственное решение $(y_0(\lambda), y(\lambda))$, то функция $\varphi(\lambda)$ дифференцируема в точке λ с градиентом $\nabla \varphi(\lambda) = y(\lambda) - a$ (вектор невязок по ограничениям).

Сформулируем двойственную задачу

$$\varphi(\lambda) \rightarrow \max, \quad \lambda \in R^m. \quad (3.66)$$

Пусть λ^* — ее решение. Тогда в некоторых предположениях регулярности [35] пара $y_0(\lambda^*)$, $y(\lambda^*)$ является решением задачи (3.55). При этом текущая величина $\varphi(\lambda)$ является оценкой снизу для значения задачи (3.55): $\varphi(\lambda) \leq y_0(\lambda^*)$. В процессе решения двойственной задачи эта оценка уточняется, что в идейном плане сближает метод множителей с методом параметризации.

Таким образом, в результате решения двойственной задачи (3.66) получаем управление $\bar{u}(t) = u(t, \lambda^*)$, $t \in T$ (решение интегральной задачи (3.54)) вместе с вектором множителей $\bar{\lambda} = (1, \lambda^*)$.

Двойственная задача является задачей выпуклого программирования ($\varphi(\lambda)$ — вогнутая функция). Для ее решения в условиях дифференцируемости можно использовать градиентную процедуру подъема

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \gamma_k \nabla \varphi(\lambda^k), \quad \gamma_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.67)$$

Основная проблема при решении двойственной задачи связана с возможной недифференцируемостью целевой функции в текущей точке λ^k . В этом случае процедура (3.67) не действует и для поиска направления наискорейшего подъема функции $\varphi(\lambda)$ в точке λ^k решается вспомогательная задача минимизации невязки

$$\|y - a\| \rightarrow \min, (y_0, y) \in Y(\lambda^k),$$

$$Y(\lambda^k) = \text{Arg} \min_{(y_0, y) \in Y} (y_0 + \langle y - a, \lambda^k \rangle).$$

Специфика задач оптимального управления позволяет построить в ряде случаев конструктивную аппроксимацию множества $Y(\lambda^k)$ [35].

Итак, двойственный метод в предположениях регулярности можно использовать в качестве альтернативной процедуры для численного решения интегральной задачи (3.54).

3.3.3. Линейная задача быстрогодействия

Задача быстрогодействия занимает особое место в теории оптимального управления. Это одна из базовых задач, впервые сформулированных на языке оптимального управления и лежащих в основе теории принципа максимума. На протяжении многих лет задача быстрогодействия как в качественном отношении, так и в численном плане является объектом устойчивого интереса исследователей.

В данном разделе численное решение линейной задачи быстрогодействия проводится в рамках той же технологии параметризации, которая была использована для интегральной задачи (3.54). При этом в качестве параметра естественным образом выбирается конечный момент времени, который в задаче быстрогодействия служит критерием качества управления, то есть минимизируется. Для каждого значения параметра, не превосходящего оптимального момента времени, решается вспомогательная задача минимизации расстояния до целевой точки. Для повышения эффективности метода проводится преобразование вспомогательной задачи к канонической форме.

Рассмотрим линейную двухточечную задачу быстрогодействия в типовой постановке

$$\dot{x} = A(t)x + b(u, t),$$

$$x(t_0) = x^0, x(t_1) = 0, t_1 - t_0 \rightarrow \min, \quad (3.68)$$

$$u \in V(t_1) = \{u \in L_\infty^1[t_0, t_1], u(t) \in U, t \in [t_0, t_1]\}.$$

Предположим, что матричная функция $A(t)$ и вектор-функция $b(u, t)$ непрерывны по своим аргументам для $t \geq t_0$, $u \in U$, множество U компактно.

Зафиксируем момент времени $t_1 \geq t_0$, введем множество достижимости (выпуклый компакт)

$$D(t_1) = \{x(t_1, u), u \in V(t_1)\}$$

и образуем вспомогательную задачу с параметром t_1

$$\|x\| \rightarrow \min, x \in D(t_1). \quad (3.69)$$

Тогда оптимальное время t_* есть наименьшее значение параметра t_1 , для которого значение задачи (3.69) равно нулю:

$$t_* = \min \{t_1 \geq t_0: 0 \in D(t_1)\}.$$

При этом оптимальное управление $u^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_*$ является решением задачи (3.69).

Данная интерпретация задачи (3.68) вполне аналогична методу параметризации применительно к интегральной задаче (3.54). Остается организовать итерационную процедуру поиска оптимального момента времени t_* .

С этой целью введем сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -A(t)^T \psi \quad (3.70)$$

и рассмотрим ее произвольное, ненулевое решение $\psi(t)$, $t \geq t_0$. Определим экстремальное управление

$$u^*(\psi(t), t) = \arg \max_{u \in U} \langle \psi(t), b(u, t) \rangle, t \geq t_0,$$

и пусть $x^*(t)$ — соответствующее решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + b(u^*(\psi(t), t), t), x(t_0) = x^0.$$

Образуем функцию

$$\mu(t) = -\langle \psi(t), x^*(t) \rangle, t \geq t_0.$$

Согласно построению это опорная функция множества достижимости $D(t)$

$$\mu(t) = \min_{x \in D(t)} \langle -\psi(t), x \rangle.$$

Отсюда следует характеристика оптимального момента t_* : для любого ненулевого решения $\psi(t)$, $t \geq t_0$ сопряженной системы выполняется неравенство $\mu(t_*) \leq 0$.

Используя этот результат, представим метод поиска t_* . Пусть получено приближение $t_k \leq t_*$, $k = 0, 1, \dots$. Решим вспомогательную задачу минимизации нормы

$$\frac{1}{2} \|x\|^2 \rightarrow \min, x \in D(t_k). \quad (3.71)$$

Пусть $u^k(t), x^k(t)$, $t_0 \leq t \leq t_k$ — оптимальная пара этой задачи.

Если $x^k(t_k) = 0$, то $t_k = t_*$, и полученная пара является оптимальной в задаче быстрогодействия (3.68).

В общем случае $x^k(t_k) \neq 0$, то есть $t_k < t_*$. Пусть $\psi^k(t)$, $t \geq t_0$ — решение сопряженной системы с начальным условием $\psi(t_k) = -x^k(t_k)$. Тогда в силу принципа максимума

$$u^k(t) = u^*(\psi^k(t), t), \quad t_0 \leq t \leq t_k.$$

Образуем функцию

$$\mu_k(t) = -\langle \psi^k(t), x^k(t) \rangle, \quad t \geq t_k,$$

где $x^k(t)$, $t \geq t_k$ — решение фазовой системы с начальным условием $x(t_k) = x^k(t_k)$ и управлением $u^*(\psi^k(t), t)$. Понятно, что $\mu_k(t_k) = \|x^k(t_k)\|^2 > 0$. Следующее приближение t_{k+1} определяется соотношением

$$t_{k+1} = \min\{t > t_k: \mu_k(t) = 0\}.$$

Поскольку $\mu_k(t) > 0$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, то $t_{k+1} \leq t_*$.

По части реализации отметим, что для приближенного отыскания момента t_{k+1} необходимо интегрировать систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(u^*(\psi, t), t),$$

$$\dot{\psi} = -A(t)^T \psi$$

с начальным условием $x(t_k) = x^k(t_k)$, $\psi(t_k) = -x^k(t_k)$ до тех пор, пока функция $\mu_k(t) = -\langle \psi^k(t), x^k(t) \rangle$ не сменит знак с плюса на минус в пределах шага интегрирования.

Понятно, что качество метода в целом связана с возможностями эффективного решения вспомогательных задач минимизации нормы (3.71). В принципе для решения задачи (3.71) можно использовать, например, метод приращений, который обеспечивает на каждой итерации нелокальное улучшение по норме терминального состояния без применения процедуры параметрического поиска. При этом, однако, необходимо работать с сопряженной матричной функцией $\Psi(t)$, что связано с дополнительными вычислительными затратами.

В этом плане представляется целесообразным провести предварительное преобразование задачи (3.71) к канонической форме,

используя сопряженную систему (3.70). Эта процедура реализуется следующим образом.

Пусть $\psi^i(t)$, $t_0 \leq t \leq t_k$ — решение сопряженной системы (3.70) с начальным условием $\psi(t_k) = e^i$, $i = \overline{1, n}$. Тогда имеет место интегральное представление для координат терминального состояния

$$x_i(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} \langle \psi^i(t), b(u(t), t) \rangle dt + \langle \psi^i(t_0), x(t_0) \rangle = y_i(t_k), \quad i = \overline{1, n}.$$

При этом новые фазовые переменные $y_i(t)$, $t_0 \leq t \leq t_k$ определяются уравнениями

$$\dot{y}_i = \langle \psi^i(t), b(u, t) \rangle + \langle \psi^i(t_0), x(t_0) \rangle, \quad y_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

а задача принимает вид ($y = (y_1, \dots, y_n)$)

$$\frac{1}{2} \|y(t_k)\|^2 \rightarrow \min, \quad u \in V. \quad (3.72)$$

Это, по-прежнему, задача на минимум нормы, однако управляемая система имеет благоприятную форму (правая часть не зависит от y) в том смысле, что соответствующие сопряженные системы тривиальны: $\dot{\psi}(t) = 0$, $\dot{\Psi}(t) = 0$. Следовательно, в рамках задачи (3.72) $\psi(t) = -y(t_k)$, $\Psi(t) = -E$, $t \in [t_0, t_k]$, то есть отпадает необходимость интегрирования сопряженных систем. Думается, что это свойство повышает экономичность метода и окупает, вообще говоря, затраты на предварительное преобразование задачи.

Отметим, что описанная редукция еще более эффективна, если решение сопряженной системы (3.70) можно получить в аналитической форме.

Задача (3.72) является частным случаем вспомогательной задачи (3.58) метода параметризации и может быть решена с помощью соответствующего метода нелокального улучшения.

3.4. МИНИМАКСНАЯ ЗАДАЧА ЧЕБЫШЕВСКОГО ТИПА

Рассмотрим управляемый процесс $(u(t), x(t))$, $t \in T$, который описывается с помощью обыкновенной динамической системы

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Введем множество допустимых управлений

$$V = \{u \in L_\infty^r(T): u(t) \in U, \quad t \in T\}$$

и определим набор функционалов

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) + \int_T F_i(x(t), u(t), t) dt, \quad i = \overline{1, m}.$$

Образует функционал-свертку

$$\Phi(u) = \max_{1 \leq i \leq m} |\Phi_i(u)|$$

и поставим задачу оптимального управления

$$\Phi(u) \rightarrow \min, \quad u \in V. \quad (3.73)$$

Пусть в задаче (3.73) действуют предположения (А) раздела 3.2.

Используя подход, развитый в разделе 3.2 для задачи с ограничениями типа равенства, построим процедуру игольчатого улучшения допустимых управлений в рамках минимаксной задачи (3.73).

Рассмотрим базовое управление $u \in V$ ($\Phi(u) > 0$) вместе с соответствующими траекториями $x(t)$, $\psi^i(t)$, $i = \overline{1, m}$ фазовой и сопряженных систем. Проведем игольчатое варьирование управления $u(t)$ на основе семейства

$$u_{v,\chi}(t) = u(t) + \chi(t)(v(t) - u(t)), \quad t \in T$$

с параметрами $v \in V$, $\chi \in X_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, где

$$X_\alpha = \{\chi \in L_\infty(T): \chi(t) = 0 \vee 1, \int_T \chi(t) dt = \alpha(t_1 - t_0)\}.$$

Соответствующее приращение функционала Φ_i , $i = \overline{1, m}$ представляется следующим образом

$$\Phi_i(u_{v,\chi}) - \Phi_i(u) = - \int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H^i [t, u] dt + o_i(\alpha).$$

Здесь

$$\Delta_v H^i [t, u] = H^i(\psi^i(t), x(t), v, t) - H^i(\psi^i(t), x(t), u(t), t).$$

Введем малый параметр $0 \leq \varepsilon < \Phi(u)$ и образуем множество индексов ε -активных функционалов

$$I_\varepsilon(u) = \{i = \overline{1, m}: |\Phi_i(u)| \geq \Phi(u) - \varepsilon\}.$$

Параметры варьирования v , χ при фиксированном $\alpha \in (0, 1]$ будем искать исходя из условия модульного уменьшения

$$\Phi_i(u_{v,\chi}) = (1 - \alpha)\Phi_i(u) + o_i(\alpha), \quad i \in I_\varepsilon(u).$$

Это требование приводит к общей задаче в вариациях с параметром $\alpha \in (0, 1]$ (система интегральных уравнений относительно v , χ с дополнительными условиями)

$$\int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H^i [t, u] dt = \alpha \Phi_i(u), \quad i \in I_\varepsilon(u), \quad v \in V, \quad \chi \in X_\alpha. \quad (3.74)$$

Проведем разделение задачи на две составляющие. Полагая $\alpha = 1$, получаем первую вспомогательную задачу поиска управления $v(t)$

$$\int_T \Delta_{v(t)} H^i [t, u] dt = \Phi_i(u), \quad v \in V, \quad i \in I_\varepsilon(u). \quad (3.75)$$

Пусть $\bar{u}(t)$, $t \in T$ — решение этой задачи. Введем функции

$$g_i(t) = \Delta_{\bar{u}(t)} H^i [t, u], \quad i \in I_\varepsilon(u).$$

Полагая в (3.74) $v(t) = \bar{u}(t)$, образуем вторую вспомогательную задачу с параметром $\alpha \in (0, 1)$ на поиск функции варьирования $\chi(t)$

$$\int_T \chi(t) g_i(t) dt = \alpha \Phi_i(u), \quad i \in I_\varepsilon(u), \quad (3.76)$$

$$\int_T \chi(t) dt = \alpha(t_1 - t_0), \quad \chi(t) \in \{0, 1\}.$$

Пусть $\chi_\alpha(t)$, $t \in T$ — решение этой задачи. В результате образуется семейство варьированных управлений

$$u_\alpha(t) = u(t) + \chi_\alpha(t)(\bar{u}(t) - u(t)), \quad t \in T.$$

Проведем обоснование свойства улучшения. С учетом формулы приращения в силу задачи (3.76) имеем

$$\Phi_i(u_\alpha) - \Phi_i(u) = - \int_T \chi_\alpha(t) g_i(t) dt + o_i(\alpha) = -\alpha \Phi_i(u) + o_i(\alpha), \quad i \in I_\varepsilon(u).$$

Отсюда получаем модульную оценку

$$|\Phi_i(u_\alpha)| \leq (1 - \alpha)\Phi(u) + o(\alpha), \quad i \in I_\varepsilon(u),$$

$$o(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq m} |o_i(\alpha)|. \quad (3.77)$$

Докажем одно вспомогательное утверждение. Предварительно выделим индексное множество

$$I_0(u) = \{i = 1, m; |\Phi_i(u)| = \Phi(u)\}$$

и введем величину

$$\gamma = \Phi(u) - \max_{i \in I_0(u)} |\Phi_i(u)|.$$

Понятно, что для $i \in I_0(u)$ выполняется неравенство $\Phi(u) - |\Phi_i(u)| \geq \gamma$. Кроме того, отметим, что $I_\varepsilon(u) = I_0(u)$ при $\varepsilon \in [0, \gamma)$.

Лемма 3.6. Для достаточно малых $\alpha \in (0, 1)$ имеет место включение $I_\varepsilon(u_\alpha) \subset I_\varepsilon(u)$ при $\varepsilon \in [0, \frac{\gamma}{2}]$.

Доказательство. Рассмотрим общий случай, когда $I_0(u) \neq \{1, \dots, m\}$.

Будем использовать известные неравенства для модулей и функции максимума

$$\| |\Phi_i(u_\alpha)| - |\Phi_i(u)| \| \leq |\Phi_i(u_\alpha) - \Phi_i(u)|, \quad i = \overline{1, m},$$

$$|\Phi(u_\alpha) - \Phi(u)| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \| |\Phi_i(u_\alpha)| - |\Phi_i(u)| \|.$$

В соответствии с процедурой варьирования $\Phi_i(u_\alpha) - \Phi_i(u) = O_i(\alpha)$, $i = \overline{1, m}$, то есть для достаточно малых $\alpha \in (0, 1)$ можно обеспечить оценки

$$\| |\Phi_i(u_\alpha)| - |\Phi_i(u)| \| < \frac{1}{4} \gamma, \quad i = \overline{1, m}, \quad |\Phi(u_\alpha) - \Phi(u)| < \frac{1}{4} \gamma.$$

Пусть теперь $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2} \gamma]$, $i \in I_\varepsilon(u_\alpha)$. Это значит, что $|\Phi(u_\alpha) - |\Phi_i(u_\alpha)|| \leq \varepsilon$. Оценим разность

$$\begin{aligned} \Phi(u) - |\Phi_i(u)| &= (\Phi(u) - \Phi(u_\alpha)) + (\Phi(u_\alpha) - |\Phi_i(u_\alpha)|) + \\ &+ (|\Phi_i(u_\alpha)| - |\Phi_i(u)|) < \frac{1}{4} \gamma + \varepsilon + \frac{1}{4} \gamma \leq \gamma. \end{aligned}$$

Итак, $\Phi(u) - |\Phi_i(u)| < \gamma$. В силу определения γ это возможно только для $i \in I_\varepsilon(u)$. Лемма доказана.

Вернемся к неравенству (3.77). С учетом доказанного заключаем, что для достаточно малых $\alpha \in (0, 1)$

$$\Phi(u_\alpha) = \max_{i \in I_\varepsilon(u_\alpha)} |\Phi_i(u_\alpha)| \leq \max_{i \in I_\varepsilon(u)} |\Phi_i(u_\alpha)| \leq (1 - \alpha)\Phi(u) + o(\alpha).$$

В результате имеем оценку улучшения

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) \leq -\alpha\Phi(u) + o(\alpha). \quad (3.78)$$

Таким образом, вспомогательные задачи (3.75), (3.76) позволяют построить семейство допустимых управлений $u_\alpha(t)$, $t \in T$ со свойством локального спуска по функционалу $\Phi(u)$.

Обсудим вопрос о разрешимости вспомогательных задач (3.75), (3.76). Предположим, что решение первой задачи существует. Тогда вторая задача имеет решение $\chi_\alpha(t)$, $t \in T$ для любого $\alpha \in (0, 1)$. Это сразу следует из леммы 2.1.

Отсюда заключаем, что в случае разрешимости первой задачи исходное управление $u(t)$, $t \in T$ может быть улучшено с помо-

шью семейства $u_\alpha(t)$, $t \in T$. Следовательно, имеет место необходимое условие оптимальности (условие не улучшения): для оптимальности управления $u(t)$, $t \in T$ ($\Phi(u) > 0$) в задаче (3.73) необходимо, чтобы задача (3.75) не имела решения при $\varepsilon = 0$.

Отметим, что если задача (3.75) не разрешима при $\varepsilon = 0$, то она имеет то же свойство и при $\varepsilon > 0$ в силу включения $I_0(u) \subset I_\varepsilon(u)$.

Если задача (3.75) не имеет решения, то возможности улучшения в рамках данного подхода еще не исчерпаны. В этом случае можно обратиться к общей задаче (3.74). Пусть $v_\alpha(t)$, $\chi_\alpha(t)$, $t \in T$ — ее решение для $\alpha \in (0, 1)$. Тогда для управления $u_\alpha(t) = u(t) + \chi_\alpha(t)(v_\alpha(t) - u(t))$ справедливы оценки (3.77), (3.78), обеспечивающие локальное улучшение по функционалу $\Phi(u)$.

Обсудим проблему численного решения вспомогательных задач (3.75), (3.76). Здесь однозначно используется редукция к экстремальной задаче в дифференциальной форме через метод наименьших квадратов. В результате получаем квадратичные задачи оптимального управления — первая задача:

$$S_1(v) = \sum_{i \in I_\varepsilon(u)} (y_i(t_1) - \Phi_i(u))^2 \rightarrow \min, \quad v \in V,$$

$$\dot{y}_i = \Delta_{v(t)} H^i[t, u], \quad y_i(t_0) = 0, \quad i \in I_\varepsilon(u),$$

вторая задача:

$$S_{2,\alpha}(\chi) = \sum_{i \in I_\varepsilon(u)} (z_i(t_1) - \alpha \Phi_i(u))^2 + (z_0(t_1) - \alpha(t_1 - t_0))^2 \rightarrow \min,$$

$$\chi(t) \in \{0, 1\},$$

$$\dot{z}_0 = \chi(t), \quad z_0(t_0) = 0,$$

$$\dot{z}_i = \chi(t) g_i(t), \quad z_i(t_0) = 0, \quad i \in I_\varepsilon(u).$$

Вопросы численного решения подобного сорта задач в рамках метода параметризации рассматривались в разделе 3.3.

Аналогичным образом обрабатывается общая вспомогательная задача (3.74).

Замечание. Выделим случай, когда ε -активным на управлении $u \in V$ является единственный функционал $\Phi_j(u)$, то есть $I_\varepsilon(u) = \{j\}$. Тогда для уменьшения $\Phi(u)$ можно использовать стандартную процедуру игольчатого улучшения относительно $\Phi_j(u)$ с учетом знака:

1) если $\Phi_j(u) > 0$, то $\Phi_j(u_{v,\chi}) < \Phi_j(u)$,

2) если $\Phi_j(u) < 0$, то $\Phi_j(u_{v,\chi}) > \Phi_j(u)$ (уменьшение или увеличение без потери знака).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аваков Е.Р.* Необходимые условия минимума для нерегулярных задач в банаховых пространствах // Труды МИ АН СССР. — 1988. — Т. 185. — С. 3–29.
2. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
3. *Аргунинцев А.В., Васильев О.В.* Итерационные процессы принципа максимума и их модификации в системах с распределенными параметрами // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32. № 6. — С. 797–803.
4. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. — М.: Изд-во «Факториал», 1997.
5. *Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А.* Необходимое условие в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1990.
6. *Ащенков Л.Т.* Оптимальное управление разрывными системами. — Новосибирск: Наука, 1987.
7. *Батурун В.А., Урбанович Д.Е.* Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. — Новосибирск: Наука, 1997.
8. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.
9. *Васильев О.В., Тятюшкин А.И.* Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1981. — Т. 21, № 6. — С. 1376–1384.
10. *Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А.* Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление. — Новосибирск: Наука, 1990.
11. *Васильев О.В., Бельтюков Н.Б., Терлецкий В.А.* Алгоритмы оптимизации динамических систем, основанные на принципе максимума // Вопросы кибернетики. Модели и методы анализа больших систем. — 1991. — С. 17–38.
12. *Васильев О.В.* Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994.
13. *Васильев О.В., Надежкина Н.В.* Об одном классе обратных задач оптимального управления // Изв. ВУЗов. Математика. — 1996. — № 3. — С. 14–20.
14. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
15. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988.
16. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971.
17. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.
18. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Конструктивные методы оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1983. — № 2. — С. 169–185.
19. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. — Минск: Изд-во «Университетское», 1984.
20. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И., Ракецкий В.М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 5. Нелинейные задачи. — Минск: Изд-во «Университетское», 1998.
21. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. — М.: Наука, 1997.
22. *Дикусар В.В., Милютин А.А.* Качественные и численные методы в принципе максимума. — М.: Наука, 1989.
23. *Дыхта В.А.* Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных процессов. — Иркутск: Изд-во ИГЭА, 1995.
24. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982.
25. *Ермольев Ю.М., Гуленко В.П., Царенко Т.И.* Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. — Киев: Наук. думка, 1978.
26. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
27. *Кирич Н.Е.* Вычислительные методы теории оптимального управления. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1968.
28. *Кирич Н.Е.* Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1975.

29. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
30. Кротов В.Ф., Фельдман И.Н. Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1983. — № 2. — С. 160–168.
31. Любушин А.А., Черноусько Ф.Л. Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления // Изв. АН СССР. — Техн. кибернетика. — 1983. — № 2. — С. 147–159.
32. Милютин А.А., Илютович А.Е., Осмоловский Н.П., Чуканов С.В. Оптимальное управление в линейных системах. — М.: Наука, 1993.
33. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. — М.: Мир, 1974.
34. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.
35. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1989.
36. Срочко В.А. Метод фазовой линеаризации в задачах оптимального управления со свободным правым концом // Изв. ВУЗов. Математика. — 1992. — № 7. — С. 70–77.
37. Срочко В.А., Антоник В.Г. К решению задач оптимального управления на основе методов линеаризации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1992. — Т. 32, № 7. — С. 979–991.
38. Срочко В.А. Метод квадратичной фазовой аппроксимации для решения задач оптимального управления // Изв. ВУЗов. Математика. — 1993. — № 12. — С. 81–88.
39. Срочко В.А. Методы линейно-квадратичных аппроксимаций для решения задач оптимального управления // Оптимизация, управление, интеллект. — Иркутск: ИрВЦ СОРАН. — 1995. — № 1. — С. 110–135.
40. Срочко В.А., Захарченко В.С. Метод приращений для решения квадратичных задач оптимального управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1995. — № 6. — С. 145–154.
41. Срочко В.А., Мамонова Н.В. Квазиградиентный метод решения задач оптимального управления // Изв. ВУЗов. Математика. — 1996. — № 12. — С. 84–91.
42. Срочко В.А., Антоник В.Г. Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 4. — С. 564–572.
43. Срочко В.А., Душутина С.Н., Пудалова Е.И. Регуляризация принципа максимума и методов улучшения в квадратичных задачах оптимального управления // Изв. ВУЗов. Математика. — 1998. — № 12. — С. 82–92.
44. Тятюшкин А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 1992.
45. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
46. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
47. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. — М.: Наука, 1973.
48. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления // Математический анализ. Итоги науки и техники. — 1977. — Т. 14. — С. 101–166.
49. Krotov V.F. Global methods in optimal control. — N.Y.: Marcel Dekker, 1996.
50. Strekalovsky A.S. On global maximum of a convex terminal functional in optimal control problems // Journal of Global Optimization. — 1995. — № 7. — P. 75–91.
51. Strekalovsky A.S., Vasiliev I.L. On global search for non-convex optimal control problems // Developments in Global Optimization and its Applications. Kluwer Academic Publishers. — 1997. — P. 121–133.