В. Г. Антоник

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Иркутск – 2017

§1. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Интегральная форма

Определим *класс (множество) допустимых управлений* как множество m-мерных вектор-функций $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$, кусочно-непрерывных на заданном отрезке $T = [t_0, t_1]$ с условием (*ограничением*) $u(t) \in U$, $t \in T$, где $U \subseteq R^m$ – заданное множество. В формальной записи множество допустимых управлений W имеет вид

$$W = \Big\{ u \in \widehat{C}_m(T) : \, u(t) \in U, \, t \in T \Big\}.$$

На множестве W определим интегральный функционал

$$\Phi(u) = \int\limits_T g(u(t), t) dt,$$

где функция $g(u, t)$ непрерывна по $u \in U$, кусочно-непрерывна по $t \in T$. Поставим следующую задачу оптимального управления

$$\Phi(u) \to \min, \; u \in W. \tag{1}$$

Иными словами, задача (1) состоит в отыскании такого управления $u^* \in W$ (*оптимального управления*), которое доставляет минимум функционалу Φ на множестве W, т. е. характеризуется неравенством

$$\Phi(u^*) \leqslant \Phi(u), \; u \in W.$$

Сформулируем *критерий оптимальности в задаче (1)*:
для оптимальности допустимого управления $u^* \in W$ в задаче (1) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $u^*(t)$ всюду на T являлась

решением конечномерной задачи

$$g(v,t) \to \min,\ v \in U. \tag{2}$$

Здесь v – m-мерный вектор, не зависящий от t.

Таким образом, задача оптимального управления (1) сводится к конечномерной задаче (2) с параметром $t \in T$ (*разрешающей задаче*). При этом решение $u^*(t)$ задачи (2) является оптимальным управлением для задачи (1).

Назовём задачу (1) *простейшей задачей оптимального управления в интегральной форме.*

Пример 1.1. Решить задачу

$$\Phi(u) = \int\limits_0^3 \Big[(t-2)u_1(t) - (t-1)u_2(t)\Big]dt \to \min,$$

$$U = \Big\{u \in R^2 :\ |u_1| \leqslant 2,\ |u_2| \leqslant 1\Big\}.$$

Решение.

В соответствии с критерием оптимальности поставленная задача эквивалентна следующей

$$(t-2)v_1 - (t-1)v_2 \to \min,\ |v_1| \leqslant 2,\ |v_2| \leqslant 1,\ t \in T = [0,3].$$

Поскольку целевая функция здесь является сепарабельной, а ограничения на управление имеют покомпонентный характер, то для поиска оптимального управления $u^*(t)$, $t \in T$ необходимо решить две задачи:

1) $(t-2)v_1 \to \min,\ -2 \leqslant v_1 \leqslant 2;$

2) $(1-t)v_2 \to \min,\ -1 \leqslant v_2 \leqslant 1.$

Отметим, что в обеих этих задачах переменная $t \in [0, 3]$ является параметром.

Исследуем первую из них. При каждом фиксированном $t \in [0, 3]$ она представляет собой задачу минимизации линейной функции на отрезке $[-2, 2]$. Понятно, что решение задачи определяется знаком коэффициента при v_1. Поскольку при $0 \leqslant t < 2$ этот коэффициент отрицателен, то минимум достигается в правом конце отрезка $[-2, 2]$ (целевая функция убывает по v_1 на $[-2, 2]$). Аналогично, при $2 < t \leqslant 3$ целевая функция возрастает на $[-2, 2]$, т. е. её минимум достигается в точке $v_1 = -2$. Следовательно,

$$u_1^*(t) = 2,\ 0 \leqslant t < 2, \quad u_1^*(t) = -2,\ 2 < t \leqslant 3.$$

При $t = 2$ любая точка отрезка $[-2, 2]$ является решением задачи (целевая функция не зависит от v_1), т. е. управление $u_1^*(t)$ в точке $t = 2$ может принимать любое допустимое значение. Для определённости положим $u_1^*(2) = -2$. Таким образом,

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant t < 2, \\ -2, & 2 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

Аналогично рассуждая, получаем решение второй задачи

$$u_2^*(t) = -1,\ 0 \leqslant t < 1, \quad u_2^*(t) = 1,\ 1 < t \leqslant 3.$$

Здесь $t = 1$ – особая точка, в которой управление $u_2^*(t)$ неоднозначно. Для определённости положим, $u_2^*(1) = 1$. В результате имеем

$$u_2^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & 1 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

Таким образом, $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ – оптимальное управление в данной задаче.

Подсчитаем значение $\Phi(u^*)$. Исходя из вида оптимального управления $u^*(t)$, получаем

$$\Phi(u^*) = \int_0^1 \Big[2(t-2) + (t-1)\Big]dt + \int_1^2 \Big[2(t-2) - (t-1)\Big]dt +$$

$$+ \int_2^3 \Big[2(2-t) - (t-1)\Big]dt = -7\frac{1}{2}\,.$$

$\square$

Пример 1.2. Решить задачу

$$\Phi(u) = \int_0^1 \Big(u^2(t) + 4tu(t)\Big)dt \to \min,\ U = [-1, 0].$$

Решение.

Разрешающая конечномерная задача с параметром $t \in T = [0, 1]$ имеет вид

$$g(v,t) = v^2 + 4tv \to \min,\ -1 \leqslant v \leqslant 0. \qquad (3)$$

Целевая функция является выпуклой параболой. Поэтому для поиска её точки минимума (без учёта ограничений) достаточно решить уравнение

$$g'_v(v,t) = 0.$$

Получаем $2v + 4t = 0$. Отсюда, $\overline{u}(t) = -2t$, $t \in T$.

Проверим выполнение ограничений задачи (3) для найденной функции $\overline{u}(t)$. При $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ ограничения выполнены: $-1 \leqslant \overline{u}(t) \leqslant 0$, т. е.

$\overline{u}(t)$ – решение задачи (3) для $t \in [0, 1/2]$. Следовательно, оптимальное управление на отрезке $[0, 1/2]$ определено:

$$u^*(t) = \overline{u}(t) = -2t, \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Для $t \in (1/2, 1]$ ограничения нарушены: $\overline{u}(t) < -1$, т. е. точка минимума параболы лежит левее отрезка $[-1, 0]$. Это означает, что решение задачи (3) совпадает с левым концом промежутка $[-1, 0]$:

$$u^*(t) = -1, \ \frac{1}{2} < t \leqslant 1.$$

В совокупности получаем

$$u^*(t) = \begin{cases} -2t, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2}\,, \\ -1, & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Отметим, что при записи итогового ответа мы использовали тот факт, что $\overline{u}(1/2) = -1$.

Подсчитаем значение функционала:

$$\Phi(u^*) = \int\limits_0^{1/2} \Big(4t^2 - 8t^2\Big) dt + \int\limits_{1/2}^{1} \Big(1 - 4t\Big) dt = -1\frac{1}{6}\,.$$

□

1.2. Стандартная форма

Рассмотрим задачу минимизации линейного терминального функционала

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle \to \min,\ u \in W \tag{4}$$

относительно линейной разделённой управляемой системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(u,t),\ x(t_0) = x^0 \tag{5}$$

в классе допустимых управлений

$$W = \Big\{u \in \widehat{C}_m(T) :\ u(t) \in U,\, t \in T = [t_0, t_1]\Big\}. \tag{6}$$

Предположим, что матричная функция $A(t)$ непрерывна по $t \in T$, вектор-функция $b(u,t)$ непрерывна по своим аргументам на прямом произведении $U \times T$, множество $U \subset R^m$ допустимых значений управления компактно, вектор c и начальное состояние x^0 заданы.

Определим *функцию Понтрягина* для задачи (4)–(6)

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A(t)x + b(u,t)\rangle,$$

где $\psi \in R^n$ – вектор сопряжённых переменных. *Сопряжённая система* (относительно вектор-функции $\psi(t)$, $t \in T$) имеет вид

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x, u, t) = -A(t)^T\psi,\ \psi(t_1) = -c. \tag{7}$$

Пусть $\psi(t,\, t \in T)$ – решение задачи Коши (7). Сформулируем *критерий оптимальности* в задаче (4)–(6) (*принцип максимума*):
для оптимальности допустимого управления $u^* \in V$ в задаче (4)–(6)

необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $u^*(t)$ всюду на T являлась решением конечномерной задачи

$$\langle \psi(t),\, b(v,t) \rangle \to \max,\ v \in U. \tag{8}$$

Здесь v – m-мерный вектор, не зависящий от t.

Отметим, что разрешающая задача (8) эквивалентна задаче на максимум функции Понтрягина

$$H(\psi(t), x, v, t) \to \max,\ v \in U.$$

При этом в (8) фигурирует та часть функции H, которая зависит от v.

Используя этот результат, опишем *схему решения задачи (4)–(6)*.

1. Найдём решение $\psi(t)$, $t \in T$ задачи Коши (7).

2. Определим оптимальное управление $u^*(t)$, $t \in T$ как решение задачи (8).

3. Подсчитаем оптимальную фазовую траекторию $x^*(t)$, $t \in T$ как решение задачи Коши (5) при $u = u^*(t)$.

4. Вычислим значение функционала $\Phi(u^*)$.

Поскольку форма записи задачи (4)–(6) является типичной для задач оптимального управления (функционал, фазовая система, ограничения на управление), то назовём задачу (4)–(6) *простейшей задачей оптимального управления в стандартной форме.*

Пример 1.3. Решить задачу

$$\Phi(u) = -4x(3) + \int_0^3 \Big(2x(t) - u^2(t)\Big)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = 2u,\ x(0) = 1,\ U = [-1, 1].$$

Решение.

В отличие от постановки (4)–(6) в данной задаче в функционале присутствует интегральная часть. Поэтому предварительно приведём функционал $\Phi(u)$ к виду (4). С этой целью введём в рассмотрение дополнительную фазовую переменную с помощью соотношения

$$x_0(t) = \int\limits_0^t \Big(2x(\tau) - u^2(\tau)\Big)d\tau.$$

Отметим, что в интеграле верхний предел – переменный (равен t). Тогда

$$\frac{d}{dt}x_0(t) = 2x(t) - u^2(t).$$

Здесь использован известный в математическом анализе результат: производная от интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции, вычисленном на этом верхнем пределе.

При этом заметим, что

$$\int\limits_0^3 \Big(2x(t) - u^2(t)\Big)dt = x_0(3)$$

и

$$x_0(0) = \int\limits_0^0 \Big(2x(t) - u^2(t)\Big)dt = 0.$$

В итоге исходная задача (с двумя фазовыми переменными x и x_0) представляется в стандартной форме

$$\Phi(u) = -4x(3) + x_0(3) \to \min,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2u, & x(0) = 1, \\ \dot{x}_0 = 2x - u^2, & x_0(0) = 0, \end{cases}$$

$$U = [-1, 1].$$

Составим функцию Понтрягина

$$H = 2\psi u + 2\psi_0 x - \psi_0 u^2$$

и образуем сопряжённую систему

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -H_x = -2\psi_0, & \psi(3) = 4, \\ \dot{\psi}_0 = -H_{x_0} = 0, & \psi_0(3) = -1. \end{cases}$$

Реализуем описанную ранее схему решения задачи. Решение сопряжённой системы имеет вид

$$\psi(t) = 2t - 2,\ \psi_0(t) = -1,\ t \in T.$$

Отметим, что сопряжённая функция $\psi_0(t)$, соответствующая дополнительной фазовой переменной x_0, равна -1. Поэтому функцию H можно записать в виде

$$H(\psi, x, u, t) = 2\psi u - 2x + u^2.$$

Иными словами, сформулируем следующее *правило*:
при наличии в целевом функционале $\Phi(u)$ интегрального слагаемого функция Понтрягина образуется как скалярное произведение сопряжённой вектор-функции на правую часть фазовой системы минус подынтегральная функция.

В дальнейшем, в нестандартных задачах при составлении функции H мы не будем вводить дополнительную фазовую переменную, а будем руководствоваться именно эти правилом.

Вернёмся к рассматриваемому примеру. Итак, решение сопряжённого уравнения имеет вид $\psi(t) = 2t - 2$. Сформируем конечномерную задачу (8) (это задача на максимум той части функции H, которая зависит от управления)

$$v^2 + (4t - 4)v \to \max, \ -1 \leqslant v \leqslant 1. \tag{9}$$

Отметим, что переменная t здесь является параметром, удовлетворяющим условию $0 \leqslant t \leqslant 3$.

Задача (9) представляет собой задачу максимизации выпуклой параболы $g(v,t) = v^2 + (4t - 4)v$ на отрезке $[-1, 1]$. При каждом фиксированном значении параметра $t \in [0, 3]$ её решением является один из концов отрезка $[-1, 1]$, т. е. $u^*(t) = -1 \vee 1$. Следовательно, для решения задачи достаточно сравнить между собой значения целевой функции $g(v,t)$ в граничных точках отрезка $[-1, 1]$. Поскольку эти значения зависят от параметра t, то речь пойдёт о решении неравенства

$$g(-1, t) > g(1, t).$$

Для тех $t \in T$, при которых выполняется это неравенство, имеем $u^*(t) = -1$. Для остальных t – $u^*(t) = 1$. В случае равенства $g(-1,t) = g(1,t)$ имеем $u^*(t) = -1 \vee 1$, т. е. задача (9) для соответствующих t имеет два решения.

В нашем случае имеем

$$g(-1, t) = 5 - 4t, \quad g(1, t) = 4t - 3.$$

Неравенство $5 - 4t > 4t - 3$ справедливо при $t < 1$. Равенство $5 - 4t = 4t - 3$ выполняется для $t = 1$. Следовательно,

$$u^*(t) = -1, \ 0 \leqslant t < 1, \quad u^*(t) = 1, \ 1 < t \leqslant 3.$$

Точка $t = 1$ является особой: в ней управление $u^*(t)$ неоднозначно ($u^*(1) = -1 \vee 1$). Для определённости положим, $u^*(1) = 1$. Таким образом,

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & 1 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

Теперь найдём оптимальную фазовую траекторию $x^*(t) = x(t, u^*)$. Для этого проинтегрируем фазовое уравнений при $u = u^*(t)$. Поскольку, $u^*(t) = -1$, $0 \leqslant t < 1$, то получим уравнение

$$\dot{x} = -2, \ x(0) = 1.$$

Его решение $x^*(t) = 1 - 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пересчитаем начальное условие в точке $t = 1$: $x(1) = -1$. Продолжим интегрирование фазового уравнения при $u = 1$ на отрезке $[1; 3]$:

$$\dot{x} = 2, \ x(1) = -1.$$

Получим решение $x^*(t) = 2t - 3$, $1 \leqslant t \leqslant 3$. Итак,

$$x^*(t) = \begin{cases} 1 - 2t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 2t - 3, & 1 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

Отметим, что полученная фазовая траектория $x^*(t)$ непрерывна в точке $t = 1$.

В заключение, вычислим значение функционала

$$\Phi(u^*) = -4x^*(3) + \int\limits_0^3 \Big(2x^*(t) - (u^*(t))^2\Big) dt =$$

$$= -12 + \int\limits_0^1 \Big(1 - 4t\Big) dt + \int\limits_1^2 \Big(4t - 7\Big) dt = -14.$$

$\square$

Упражнения

Решить задачи:

1.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^2 \Big[(3-4t)u(t) - u^2(t)\Big]dt \to \min,\ U = [-3, 2].$$

2.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^2 \Big[3(3-t)u(t) + u^2(t)\Big]dt \to \min,\ U = [-3, 1].$$

3.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^3 \Big[3(t-6)u(t) + 2u^2(t)\Big]dt \to \min,\ U = [1, 3].$$

4.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^6 \Big[4(1-t)u(t) + 3u^2(t)\Big]dt \to \min,\ U = [-2, 2].$$

5.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^1 \Big[(2-t)u_1(t) + tu_2(t)\Big]dt \to \min,$$

$$U = \Big\{u \in R^2 :\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 2\Big\}.$$

6.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^4 \Big[(3-t)u_1(t) + (t-1)u_2(t)\Big]dt \to \min,$$

$$U = \Big\{u \in R^2 :\ -3 \leqslant u_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant u_2 \leqslant 5\Big\}.$$

7.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^4 \Big[(13-5t)u(t) - u^2(t)\Big]dt \to \min,\ U = [0, 3].$$

8.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^3 \Big[(17 - 6t)u(t) - u^2(t)\Big]dt \to \min,\ U = [1, 4].$$

9.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^2 \Big[2(t + 1)u(t) + u^2(t)\Big]dt \to \min,\ U = [-2, 0].$$

10.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^5 \Big[(4 - 3t)u(t) - u^2(t)\Big]dt \to \min,\ U = [-1, 2].$$

11.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^2 \Big[-2tu_1(t) + (t - 3)u_2(t)\Big]dt \to \min,$$

$$U = \Big\{u \in R^2 :\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 3\Big\}.$$

12.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^6 \Big[(2t - 3)u_1(t) + (9 - 4t)u_2(t)\Big]dt \to \min$$

$$U = \Big\{u \in R^2 :\ -2 \leqslant u_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant u_2 \leqslant 4\Big\}.$$

13.

$$\Phi(u) = x_1(3) - x_2(3) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = x_2 - u_1,\ \dot{x}_2 = u_1 - u_2, \quad x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,$$

$$U = \Big\{u \in R^2 :\ |u_1| \leqslant 2,\ |u_2| \leqslant 1\Big\}.$$

14.

$$\Phi(u) = x(3) + \int\limits_0^3 \left[\frac{1}{2}\,u(t) - x(t)\right] dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u^2,\ x(0) = 1,\ U = [0, 1].$$

15.

$$\Phi(u) = -3x_1(2) + x_2(2) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = (1+2t)x_1 - u^2,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ U = [0, 1].$$

16.

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2}\,x(3) - \int\limits_0^3 \left[u^2(t) - \frac{1}{2}\,x(t)\right] dt \to \min,$$

$$\dot{x} = 2u,\ x(0) = 0,\ U = [-3, 3].$$

17.

$$\Phi(u) = x_1(3) + 2x_2(3) - 5x_3(3) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2}\,u^2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ x_3 = -u,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,\ U = [-1, 2].$$

18.

$$\Phi(u) = 5x_1(3) + x_2(3) + 2\int\limits_0^3 u^2(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = -3u,\ \dot{x}_2 = -x_1,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ U = [-2, 3].$$

19.

$$\Phi(u) = x_1(4) - 2x_2(4) - 4x_3(4) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = 2x_3,\ \dot{x}_2 = u^2,\ x_3 = u,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,\ U = [-2, 2].$$

20.

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\,x_1(3) - 3x_2(3) + \frac{1}{2}\int\limits_0^3 x_2(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u^2,\ \dot{x}_2 = u,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ U = [-1, 2].$$

21.

$$\Phi(u) = -2x(2) + \int\limits_0^2 \Big[x(t) - u(t)\Big]dt \to \min,$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\,u^2,\ x(0) = 0,\ U = [-1, 1].$$

22.

$$\Phi(u) = -x(6) + \int\limits_0^6 \Big[x(t) + u^2(t)\Big]dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u,\ x(0) = 0,\ U = [-2, 2].$$

23.

$$\Phi(u) = x_1(1) + x_2(1) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2, \quad x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,$$

$$U = \Big\{u \in R^2 :\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1\Big\}.$$

24.

$$\Phi(u) = 2x_1(4) - \frac{1}{2}\,x_2(4) - 2\int\limits_0^4 x_1(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = -u,\ \dot{x}_2 = u^2,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ U = [-1, 1].$$

25.

$$\Phi(u) = -2x_1(4) + x_2(4) + 4\int\limits_0^4 u^2(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = 5u,\ \dot{x}_2 = 2x_1,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ U = [0, 4].$$

26.

$$\Phi(u) = 3x(2) - \int\limits_0^2 \Big[u^2(t) + 3x(t)\Big]dt \to \min,$$

$$\dot{x} = 2u,\ x(0) = 0,\ U = [-1, 1].$$

27.

$$\Phi(u) = -2x_1(3) + x_2(3) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = tu,\ \dot{x}_2 = x_1 + u^2,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ U = \Big\{0, 1, 2\Big\}.$$

28.

$$\Phi(u) = x_1(5) - 2x_2(5) + 2\int\limits_0^5 x_2(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = -u,\ \dot{x}_2 = u^2,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ U = \left[0, \frac{1}{12}\right].$$

29.

$$\Phi(u) = x(6) - 2\int\limits_0^6 u(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = |3u + 2t - 3|,\ x(0) = 0,\ U = [0, 1].$$

30.

$$\Phi(u) = x(4) - \int\limits_0^4 u(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = -|t - 2u - 1|,\ x(0) = 0,\ U = [1, 2].$$

31.

$$\Phi(u) = -x(5) + 4\int\limits_0^5 u(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = 5\,|t - 3 - 3u|,\ x(0) = 0,\ U = [-2, 0].$$

32.

$$\Phi(u) = x_1(1) - 2x_2(1) - 2x_3(1) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = 2\,|t + 3 - u_2| + |u_2 - 3|,\ \dot{x}_3 = x_1,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,$$

$$U = \Big\{u \in R^2 :\ -2 \leqslant u_1 \leqslant 5,\ 1 \leqslant u_2 \leqslant 4\Big\}.$$

33.

$$\Phi(u) = -x_1(1) + \frac{1}{2}x_2(1) - x_3(1) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = 2\,|u_1 - t - 2| + |u_1 - 2|,\ \dot{x}_2 = u_2,\ \dot{x}_3 = x_2,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,$$

$$U = \Big\{u \in R^2 :\ 0 \leqslant u_1 \leqslant 4\,,\ -1 \leqslant u_2 \leqslant 1\Big\}.$$

34. *Задача оптимального управления ресурсами* формулируется в следующем виде:

$$\Phi(u) = x_1(t_1) + p(t_1)x_2(t_1) \to \max,$$

$$\dot{x}_1 = -h(x_2) - p(t)u,\ \dot{x}_2 = u,$$

$$x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0,$$

$$u(t) \in U = [u^-, u^+],\ t \in T = [t_0, t_1].$$

Здесь:

- $T = [0, t_1]$ – заданный временной период;
- $x_1(t)$ – величина денежных средств (финансовых ресурсов) в момент времени t;
- $x_2(t)$ – количество товара (материальных ресурсов);
- $u(t)$ – количество покупаемого или продаваемого товара в единицу времени (если $u(t) > 0$, то это означает, что товар покупается в количестве $u(t)$; если $u(t) < 0$, то товар продается в количестве $|u(t)|$);
- u^+ – заданная максимальная величина покупаемого товара;
- u^- – заданная максимальная величина продаваемого товара;
- $p(t)$ – цена на товар в момент t;
- $h(x_2)$ – известная функция, характеризующая финансовые затраты на хранение товара;
- x_1^0, x_2^0 – начальное количество ресурсов.

Требуется решить задачу управления ресурсами при следующих условиях:

а)

$$t_1 = 7,\ h(x_2) = \frac{1}{2}x_2,\ u^- = -1,\ u^+ = 3,$$

$$p(t) = \begin{cases} 7 - 2t, & 0 \leqslant t < 2, \\ t + 1, & 2 \leqslant t < 4, \\ 13 - 2t, & 4 \leqslant t < 5, \\ t - 2, & 5 \leqslant t \leqslant 7. \end{cases}$$

б)

$$t_1 = 12,\ h(x_2) = \frac{1}{3}x_2,\ u^- = -3,\ u^+ = 1,$$

$$p(t) = \begin{cases} 8 - 3t, & 0 \leqslant t < 1, \\ \dfrac{t+9}{2}, & 1 \leqslant t < 5, \\ 12 - t, & 5 \leqslant t < 8, \\ \dfrac{2t-4}{3}, & 8 \leqslant t \leqslant 12. \end{cases}$$

в)

$$t_1 = 14,\ h(x_2) = \frac{1}{2}x_2,\ u^- = -4,\ u^+ = 3,$$

$$p(t) = \begin{cases} 12 - 4t, & 0 \leqslant t < 2, \\ \dfrac{2}{3}t^2 - \dfrac{17}{6}t + 7, & 2 \leqslant t < 6, \\ -\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{5}{3}t + 10, & 6 \leqslant t < 10, \\ t, & 10 \leqslant t \leqslant 14. \end{cases}$$

г)

$$t_1 = 12,\ h(x_2) = \frac{1}{2}\,x_2,\ u^- = -3,\ u^+ = 2,$$

$$p(t) = \begin{cases} 11 - t^2, & 0 \leqslant t < 3, \\ 2t - 4, & 3 \leqslant t < 8, \\ \dfrac{1}{2}\,t^2 - 10t + 60\,, & 8 \leqslant t < 10, \\ t, & 10 \leqslant t \leqslant 12. \end{cases}$$

§2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Постановка задачи. Принцип максимума

Рассмотрим обобщённый вариант простейшей задачи для линейной по состоянию системе с неразделёнными переменными x, u

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle \to \min,\ u \in W, \tag{1}$$

$$\dot{x} = A(u,t)x + b(u,t),\ x(t_0) = x^0, \tag{2}$$

$$W = \Big\{ u \in \widehat{C}_m(T) :\ u(t) \in U,\, t \in T = [t_0, t_1] \Big\}. \tag{3}$$

Пусть матричная функция $A(u,t)$ и вектор-функция $b(u,t)$ непрерывны по своим аргументам на прямом произведении $U \times T$, множество U допустимых значений управления является компактом в R^n.

Сформулируем принцип максимума в задаче (1)–(3). С этой целью введём в рассмотрение функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A(u,t)x + b(u,t)\rangle$$

и сопряжённую систему

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x, u, t) = -A(u,t)^T\psi,\ \psi(t_1) = -c. \tag{4}$$

Заметим, что в отличие от простейшей задачи сопряжённая система зависит от управления u.

Принцип максимума:

для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$ в задаче (1)–(3) необходимо, чтобы всюду на Tвыполнялось условие

$$u(t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi(t,u), x(t,u), v, t). \tag{5}$$

Подчеркнём, что соотношение (5) означает, что управление $u(t)$ всюду на T является решением конечномерной задачи с параметром t

$$H(\psi(t,u), x(t,u), v, t) \to \max,\ v \in U.$$

Отметим, что в (5) фазовая и сопряжённая траектории подсчитаны на управлении $u(t)$.

Определение 2.1. Допустимое управление называется *экстремальным* в задаче (1)–(3) (*удовлетворяет принципу максимума* в задаче (1)–(3)), если для него справедливо равенство (5).

Замечание. Отметим, что в рамках задачи (1)–(3) принцип максимума в отличие от простейшей задачи не является достаточным условием оптимальности, т. е. соотношение (5) не гарантирует оптимальности управления $u(t)$.

2.2. Процедуры улучшения

Укажем способы улучшения допустимых управлений в задаче (1)–(3). *Задача улучшения* состоит в том, что по заданному управлению $u \in W$ требуется найти управление $w \in W$ со свойством

$$\Phi(w) < \Phi(u). \tag{6}$$

Для демонстрации предлагаемых процедур рассмотрим упрощённый вариант задачи (1)–(3))

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1) \rangle \to \min,$$

$$\dot{x} = \Big(A_0(t) + uA_1(t)\Big)x + b(t)u + d(t),\ x(t_0) = x^0,$$

$$u(t) \in U = [u^-, u^+].$$

Таким образом, фазовая система линейна по управлению, которое является скалярным с областью значений $U = [u^-, u^+]$ (*двустороннее ограничение*). Назовём эту задачу *билинейной* (т. е. линейной по x и по u).

В билинейной задаче функция Понтрягина имеет следующую структуру по управлению

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + H_u(\psi, x, t)u.$$

Введём обозначение для коэффициента при u

$$g(\psi, x, t) = H_u(\psi, x, t)$$

и определим максимизирующее управление с помощью условия максимума функции Понтрягина

$$u^*(\psi, x, t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi, x, v, t),\ \psi, x \in R^n,\ t \in T.$$

Для билинейной задачи получаем

$$u^*(\psi, x, t) = \begin{cases} u^-, & g(\psi, x, t) < 0, \\ u^+, & g(\psi, x, t) > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Если $g(\psi, x, t) = 0$, то максимизирующее управление определяется неоднозначно: $u^*(\psi, x, t) \in [u^-, u^+]$.

В частности, если $U = [-\ell, \ell]$ (*модульное ограничение* на управление), то

$$u^*(\psi, x, t) = \ell \cdot \operatorname{sign} g(\psi, x, t).$$

Причём, $\operatorname{sign} 0$ в данной ситуации – это любое число из отрезка $[-\ell, \ell]$.

Назовём функцию $g(\psi, x, t)$ *функцией переключения*.

Первая процедура улучшения (x-процедура)

Пусть задано допустимое управление $u(t)$, $t \in T$.

1. Найдём решение $\psi(t,u)$, $t \in T$ сопряжённой системы.

2. Сформируем функцию переключения

$$g_1(x,t) = g(\psi(t,u),x,t) \tag{8}$$

и вспомогательное управление

$$v(x,t) = u^*(\psi(t,u),x,t).$$

3. Найдём решение $x(t)$, $t \in T$ фазовой системы с управлением $v(x,t)$:

$$\dot{x} = A_0(t)x + \Big(A_1(t)x + b(t)\Big)v(x,t) + d(t),\ x(t_0) = x^0. \tag{9}$$

4. Построим управление

$$w(t) = v(x(t),t),\ t \in T. \tag{10}$$

Процедура закончена. Полученное управление $w(t)$ обладает свойством: $\Phi(w) \leqslant \Phi(u)$.

Описанная процедура позволяет сделать вывод о экстремальности управления $u(t)$.

Условие экстремальности:
если $u(t) = w(t)$, $t \in T$, то управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума (является экстремальным).

Введём множество $T_{u,w} = \Big\{t \in T : \, u(t) \neq w(t)\Big\}$.

Условие неэкстремальности:
если $\operatorname{mes} T_{u,w} > 0$ для любого управления $w(t)$ на выходе процедуры улучшения, то управление $u(t)$ не удовлетворяет принципу максимума (не является экстремальным).

Укажем условия, при которых имеет место *строгое улучшение*: $\Phi(w) < \Phi(u)$. Для этого обратимся к системе (9), с помощью которой ищется траектория $x(t)$. Правая часть этой системы, в силу (7), является кусочно-непрерывной по совокупности (x, t). Такая система называется *разрывной*. При этом равенство $g_1(x, t) = 0$ – уравнение поверхности разрыва в пространстве R^{n+1}.

Определение 2.2. Решение $x(t)$ системы (9) называется *особым* на промежутке $T_0 = [\tau_0, \tau_1] \subseteq T$, $\tau_0 < \tau_1$, если $g_1(x(t), t) = 0$, $t \in T_0$.

Для поиска управления $w(t)$, порождающего особое решение необходимо продифференцировать тождество $g_1(x(t), t) = 0$ по времени и решить полученное уравнение относительно управления с последующей проверкой на выполнение ограничений: если $w(t) \in U$, $t \in T_0$, то особое решение в системе (9) существует. Если же $w(t) \notin U$, $t \in T_0$, то особого решения нет.

Образуем множества

$$T_1 = \Big\{t \in T : \, g_1(x(t), t) \neq 0\Big\}, \quad T_+ = T_1 \cap T_{u,w}$$

и сформулируем **условие строгого улучшения**:
если $\operatorname{mes} T_+ > 0$, то $\Phi(w) < \Phi(u)$.

Иными словами, *строгое улучшение гарантируется*, если решение $x(t)$ разрывной системы (9) имеет неособый участок, на котором управления $u(t)$ и $w(t)$ не совпадают.

Если же $\operatorname{mes} T_+ = 0$, то *улучшение отсутствует*: $\Phi(w) = \Phi(u)$.

Следствие:
если решение $x(t)$ является особым на всем T, т. е. если $T_1 = \varnothing$, то $\Phi(w) = \Phi(u)$.

Пример 2.1.

$$\Phi(u) = -2x_1(1) + 3x_2(1) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = ux_2,\ \dot{x}_2 = u,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1,\ U = [-1, 1].$$

Применить к управлению $u(t) = 0$, $t \in T$ первую процедуру улучшения. Сделать выводы по результатам решения.

Решение.

Построим функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 u x_2 + \psi_2 u,$$

составим сопряжённую систему

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, & \psi_1(1) &= 2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 u, & \psi_2(1) &= -3, \end{aligned}$$

сформируем функцию переключения

$$g(\psi, x, t) = H_u(\psi, x, u, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 \tag{11}$$

и максимизирующее управление

$$u^*(\psi, x, t) = \operatorname{sign} g(\psi, x, t).$$

Приступим к реализации первой процедуры улучшения.

1. Найдём решение сопряжённой системы для управления $u(t)$:

$$\psi_1(t) = 2,\ \psi_2(t) = -3,\ t \in T.$$

2. Сформируем функцию переключения. Для этого подставим найденное решение $\psi(t,u)$ в соотношение (11)

$$g_1(x,t) = g(\psi(t,u),x,t) = \psi_1(t,u)x_2 + \psi_2(t,u) = 2x_2 - 3.$$

Запишем вспомогательное управление:

$$v(x,t) = u^*(\psi(t,u),x,t) = \operatorname{sign} g(\psi(t,u),x,t) = \operatorname{sign} g_1(x,t).$$

3. Составим систему для поиска траектории $x(t)$, подставляя в фазовую систему управление $v(x,t)$ вместо u:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 v(x,t), \\ \dot{x}_2 &= v(x,t). \end{aligned} \tag{12}$$

Дополним эту систему начальными условиями

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, \\ x_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Для интегрирования системы (12) найдём знак функции g_1 при $t = 0$:

$$g_1(x,t)\Big|_{t=0} = g_1(x(0),0) = 2x_2(0) - 3 = -3 < 0.$$

Следовательно, $v(x,t)\Big|_{t=0} = -1$. Поэтому решение $x(t)$ системы (12) определяем из задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2,\ \ x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 &= -1,\quad x_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} - t,\ x_2(t) = 1 - t, \quad t \geqslant 0.$$

Далее, необходимо определить, что произойдёт с функцией переключения g_1 при подстановке в нее найденной траектории $x(t)$:

$$g_1(x(t), t) = 2x_2(t) - 3 = 2(1 - t) - 3 = -2t - 1.$$

Очевидно, что функция g_1 не меняет своего знака на всем отрезке $T = [0, 1]$:

$$g_1(x(t), t) = -1 - 2t < 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Поэтому переходим к последнему (четвёртому) пункту процедуры.

4. Сформируем новое управление $w(t)$ по правилу

$$w(t) = v(x(t), t) = \operatorname{sign} g_1(x(t), t) = -1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Процедура завершена.

Сделаем выводы по результатам решения:

1) поскольку $w(t) \neq u(t)$, $t \in T$, то управление $u(t)$ не экстремально:

$$T_{u,w} = \Big\{t \in T :\ u(t) \neq w(t)\Big\} = [0, 1] \ \Rightarrow\ \operatorname{mes} T_{u,w} = 1 > 0;$$

2) поскольку особого решения при интегрировании системы (12) не было, то $\Phi(w) < \Phi(u)$:

$$T_1 = \Big\{t \in T :\ g_1(x(t), t) \neq 0\Big\} = [0, 1],$$

$$T_+ = T_1 \cap T_{u,w} = [0, 1] \ \Rightarrow\ \operatorname{mes} T_+ = 1 > 0.$$

Таким образом, получаем следующий *ответ*:

$$w(t) = -1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad u(t) - \text{не экстремальное}, \quad \Phi(w) < \Phi(u).$$

$\square$

Пример 2.2.

$$\Phi(u) = x_2(1) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = (u-1)x_1,$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ U = [-1, 1].$$

Применить к управлению $u(t) = -1$, $t \in T$ первую процедуру улучшения. Сделать выводы по результатам решения.

Решение.

Построим функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 u + (u-1)x_1\psi_2,$$

составим сопряжённую систему

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}_1 = -(u-1)\psi_2, && \psi_1(1) = 0, \\ &\dot{\psi}_2 = 0, && \psi_2(1) = -1, \end{aligned}$$

сформируем функцию переключения

$$g(\psi, x, t) = H_u(\psi, x, u, t) = \psi_1 + x_1\psi_2$$

и максимизирующее управление

$$u^*(\psi, x, t) = \operatorname{sign} g(\psi, x, t).$$

Приступим к реализации первой процедуры улучшения.

1. Найдём решение сопряжённой системы для управления $u(t)$:

$$\psi_1(t) = 2 - 2t,\ \psi_2(t) = -1,\ t \in T.$$

2. Сформируем функцию переключения:

$$g_1(x, t) = g(\psi(t, u), x, t) = \psi_1(t, u) + x_1\psi_2(t, u) = 2 - 2t - x_1.$$

Запишем вспомогательное управление:

$$v(x,t) = u^*(\psi(t,u),x,t) = \operatorname{sign} g(\psi(t,u),x,t) = \operatorname{sign} g_1(x,t).$$

3. Составим систему для поиска траектории $x(t)$, подставляя в фазовую систему управление $v(x,t)$ вместо u:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v(x,t), \\ \dot{x}_2 &= (v(x,t)-1)x_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Дополним эту систему начальными условиями

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, \\ x_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Для интегрирования системы (13) найдём знак функции g_1 при $t=0$:

$$g_1(x,t)\Big|_{t=0} = g_1(x(0),0) = 2 - 2\cdot 0 - x_1(0) = 1 > 0.$$

Следовательно, $v(x,t)\Big|_{t=0} = 1$. Поэтому решение $x(t)$ системы (13) определяем из задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1, & x_1(0) &= 1, \\ \dot{x}_2 &= (1-1)x_1 = 0, & x_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$x_1(t) = t+1,\ x_2(t) = 0,\ t \geqslant 0. \tag{14}$$

Далее, необходимо определить, что произойдёт с функцией переключения g_1 при подстановке в нее найденной траектории $x(t)$:

$$g_1(x(t),t) = 2 - 2t - x_1(t) = 2 - 2t - (t+1) = 1 - 3t = 3\left(\frac{1}{3} - t\right). \tag{15}$$

Понятно, что $g_1(x(t),t) > 0,\ 0 \leqslant t < 1/3$. Это означает, что

$$w(t) = v(x(t),t) = \operatorname{sign} g_1(x(t),t) = 1,\ 0 \leqslant t < \frac{1}{3}.$$

Поскольку, $g_1(x(t),t)\Big|_{t=1/3} = 0$, а знак нуля не определён, то для продолжения интегрирования системы (13) на отрезке $[1/3,\, 0]$ проведём следующие рассуждения.

Возможны три ситуации поведения решения $x(t)$ в области $t > 1/3$:

1) *сохранение знака* функции g_1: $g_1(x(t),t) > 0$;

2) *смена знака* функции g_1: $g_1(x(t),t) < 0$;

3) *особый режим*: $g_1(x(t),t) = 0$.

Проведём последовательный анализ всех трёх ситуаций.

1) Пусть $g_1(x(t),t) > 0$, $t > 1/3$. Тем самым мы предполагаем, что $\operatorname{sign} 0 = +1$. Поэтому, $v(x,t)\Big|_{t=1/3} = 1$. Нам необходимо проинтегрировать систему (13) с управлением $v = 1$ и начальными условиями:

$$x_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}, \quad x_2\left(\frac{1}{3}\right) = 0,$$

полученными из (14) при $t = 1/3$. Но это решение нами уже найдено (см. (14)). Причём, в силу (15) $g_1(x(t),t) < 0, t > 1/3$. Получили противоречие, т. е. ситуация сохранения знака $(g_1(x(t),t) > 0,\ t > 1/3)$ проверяется элементарно, и, кроме того, <u>невозможна</u>.

2) Пусть $g_1(x(t),t) < 0$, $t > 1/3$. Тем самым мы предполагаем, что $\operatorname{sign} 0 = -1$. Поэтому, $v(x,t)\Big|_{t=1/3} = -1$. Проинтегрируем систему (13) с управлением $v = -1$. В результате соответствующая задача Коши принимает вид

$$\begin{aligned} &\dot x_1 = -1, && x_1(1/3) = 4/3,\\ &\dot x_2 = -2x_1, && x_2(1/3) = 0. \end{aligned}$$

Её решение:

$$x_1(t) = \frac{5}{3} - t, \quad x_2(t) = t^2 - \frac{10}{3}t + 3, \quad t \geqslant \frac{1}{3}\,.$$

Подставим это решение в функцию переключения g_1 и определим её знак при $t > 1/3$:

$$g_1(x(t), t) = 2 - 2t - x_1(t) = 2 - 2t - \frac{5}{3} + t = \frac{1}{3} - t < 0,\ t > \frac{1}{3}\,.$$

Следовательно, ситуация смены знака $(g_1(x(t), t) \ < \ 0, \ \ t \ > \ 1/3)$ <u>возможна</u>. Причём, функция g_1 отрицательна на всей оставшейся части отрезка T:

$$g_1(x(t), t) < 0,\ \frac{1}{3} < t \leqslant 1.$$

Поэтому

$$w(t) = v(x(t), t) = \operatorname{sign} g_1(x(t), t) = -1,\ \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 1.$$

Отметим, что в точке $t = 1/3$ мы имеем право присвоить $w = -1$, поскольку в процессе анализа ситуации мы предположили, что $v(x(t), t)\Big|_{t=1/3} = -1$.

3) Рассмотрим особую ситуацию, когда $g_1(x(t), t) = 0$, $t \geqslant 1/3$. Проверим возможность её выполнения:

$$\frac{d}{dt}\Big(g_1(x(t), t) = 0\Big) \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt}\, g_1(x(t), t) = 0 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \frac{d}{dt}\left(2 - 2t - x_1(t)\right) = 0 \ \Rightarrow \ -2 - \dot{x}_1(t) = 0.$$

Отсюда, в силу фазового уравнения для $\dot{x}_1$, имеем

$$-2 - u = 0.$$

Получили линейное уравнение относительно управления. Его решение $w(t) = -2$, $t \geqslant 1/3$. Это управление не является допустимым: $w(t) \notin U = [-1, 1]$. Следовательно, особая ситуация <u>невозможна</u>.

Итак, все предложенные ситуации проанализированы.

Наконец, перейдём к последнему пункту процедуры.

4. Сформируем итоговое управление $w(t)$:

$$w(t) = \begin{cases} \ \ 1, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{3}, \\ -1, & \dfrac{1}{3} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Процедура завершена.

Сделаем выводы по результатам решения:

1) поскольку $w(t) \neq u(t)$, $t \in T$, то управление $u(t)$ не экстремально:

$$T_{u,w} = \Big\{t \in T : \, u(t) \neq w(t)\Big\} = [0, 1/3) \ \Rightarrow \ \operatorname{mes} T_{u,w} = \frac{1}{3} > 0;$$

2) поскольку особого решения при интегрировании системы (12) не было, то $\Phi(w) < \Phi(u)$:

$$T_1 = \Big\{t \in T : \, g_1(x(t), t) \neq 0\Big\} = [0, 1/3) \cup (1/3, 1],$$

$$T_+ = T_1 \cap T_{u,w} = [0, 1/3) \ \Rightarrow \ \operatorname{mes} T_+ = \frac{1}{3} > 0.$$

Таким образом, получаем следующий *ответ*:

$$w(t) = \begin{cases} \ \ 1, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{3}, \\ -1, & \dfrac{1}{3} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$u(t) \text{ – не экстремальное}, \quad \Phi(w) < \Phi(u).$$

$\square$

Пример 2.3.

$$\Phi(u) = -x(2) + 2\int_0^2 u(t)x(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u,\ x(0) = 1,\ U = [-2, 2].$$

Применить к управлению $u(t) = t$, $t \in T$ первую процедуру улучшения. Сделать выводы по результатам решения.

Решение.

Построим функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \psi u - 2ux,$$

составим сопряжённое уравнение

$$\dot{\psi} = 2u,\ \psi(2) = 1,$$

сформируем функцию переключения

$$g(\psi, x, t) = H_u(\psi, x, u, t) = \psi - 2x$$

и максимизирующее управление

$$u^*(\psi, x, t) = 2\,\mathrm{sign}\, g(\psi, x, t).$$

Приступим к реализации первой процедуры улучшения.

1. Найдём решение сопряжённого уравнения для управления $u(t)$:

$$\psi(t) = t^2 - 3,\ t \in T.$$

2. Сформируем функцию переключения:

$$g_1(x, t) = g(\psi(t, u), x, t) = \psi(t, u) - 2x = t^2 - 3 - 2x.$$

Запишем вспомогательное управление:

$$v(x,t) = u^*(\psi(t,u),x,t) = 2\,\mathrm{sign}\,g(\psi(t,u),x,t) = 2\,\mathrm{sign}\,g_1(x,t).$$

3. Составим уравнение для поиска траектории $x(t)$, подставляя в фазовое уравнение управление $v(x,t)$ вместо u:

$$\dot{x} = v(x,t). \tag{16}$$

Дополним это уравнение начальным условием

$$x(0) = 1.$$

Для интегрирования уравнения (16) найдём знак функции g_1 при $t = 0$:

$$g_1(x,t)\Big|_{t=0} = g_1(x(0),0) = -3 - 2x(0) = -5 < 0.$$

Следовательно, $v(x,t)\Big|_{t=0} = -2$. Поэтому решение $x(t)$ уравнения (16) определяем из задачи Коши

$$\dot{x}_1 = -2,\ x(0) = 1.$$

Её решение:

$$x(t) = 1 - 2t,\ t \geqslant 0.$$

Далее, необходимо определить, что произойдёт с функцией переключения g_1 при подстановке в нее найденной траектории $x(t)$:

$$g_1(x(t),t) = t^2 - 3 - 2x(t) = t^2 + 4t - 5 = (t-1)(t+5). \tag{17}$$

Понятно, что $g_1(x(t),t) < 0,\ 0 \leqslant t < 1$. Это означает, что

$$w(t) = v(x(t),t) = 2\,\mathrm{sign}\,g_1(x(t),t) = -2,\ 0 \leqslant t < 1.$$

Поскольку, $g_1(x(t),t)\Big|_{t=1} = 0$, а знак нуля не определён, то для продолжения интегрирования уравнения (16) на отрезке $[1,2]$ проведём следующие рассуждения.

Возможны три ситуации поведения решения $x(t)$ в области $t > 1$:

1) *сохранение знака* функции g_1: $g_1(x(t),t) < 0$;

2) *смена знака* функции g_1: $g_1(x(t),t) > 0$;

3) *особый режим*: $g_1(x(t),t) = 0$.

Проанализируем эти ситуации.

1) Пусть $g_1(x(t),t) < 0$, $t > 1$. Эта ситуация невозможна в силу (17).

2) Предположим, что $g_1(x(t),t) > 0$, $t > 1$. Тем самым мы предполагаем, что $\operatorname{sign} 0 = 2$. Поэтому, $v(x,t)\Big|_{t=1} = 2$. Проинтегрируем уравнение (16) с управлением $v = 2$ и начальным условием:

$$x(1) = -1.$$

В результате соответствующая задача Коши примет вид

$$\dot{x} = 2,\ x(1) = -1.$$

Её решение:

$$x(t) = 2t - 3,\ t \geqslant 1.$$

Подставим это решение в функцию переключения g_1 и определим её знак при $t > 1$:

$$g_1(x(t),t) = t^2 - 3 - 2x(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) < 0,\ 1 < t \leqslant 2.$$

Следовательно, ситуация смены знака $(g_1(x(t),t) > 0,\ t > 1)$ невозможна.

3) Рассмотрим особую ситуацию, когда $g_1(x(t),t) = 0$, $t \geqslant 1$. Проверим возможность её выполнения:

$$\frac{d}{dt}\,g_1(x(t),t) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\Big(t^2 - 3 - 2x(t)\Big) = 0 \;\Rightarrow\; 2t - 2\dot{x}(t) = 0.$$

Отсюда, в силу фазового уравнения для $\dot{x}$, имеем

$$2t - 2u = 0.$$

Отсюда имеем $w(t) = t,\; t \geqslant 1$. Это управление является допустимым: $w(t) \in U = [-2,2]$, $1 \leqslant t \leqslant 2$. Следовательно, особая ситуация возможна.

Таким образом, все предложенные ситуации проанализированы.

4. Сформируем итоговое управление:

$$w(t) = \begin{cases} -2, & 0 \leqslant t < 1, \\ t, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Процедура завершена.

Сделаем выводы:

1) управления $w(t)$ и $u(t)$ не совпадают, поэтому $u(t)$ не экстремально:

$$T_{u,w} = \Big\{t \in T:\; u(t) \neq w(t)\Big\} = [0,1) \;\Rightarrow\; \operatorname{mes} T_{u,w} = 1 > 0;$$

2) проверим свойство улучшения:

$$T_1 = \Big\{t \in T:\; g_1(x(t),t) \neq 0\Big\} = [0,1),$$

$$T_+ = T_1 \cap T_{u,w} = [0,1) \;\Rightarrow\; \operatorname{mes} T_+ = 1 > 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Phi(w) < \Phi(u).$$

В результате имеем следующий *ответ*:

$$w(t) = \begin{cases} -2, & 0 \leqslant t < 1, \\ t, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$$

$$u(t) - \text{не экстремальное}, \quad \Phi(w) < \Phi(u).$$

□

Вторая процедура улучшения (ψ-процедура)

Пусть задано допустимое управление $u(t)$, $t \in T$.

1. Найдём решение $x(t, u)$, $t \in T$ фазовой системы.

2. Сформируем функцию переключения

$$g_2(\psi, t) = g(\psi, x(t, u), t)$$

и вспомогательное управление

$$v(\psi, t) = u^*(\psi, x(t, u), t).$$

3. Найдём решение $\psi(t)$, $t \in T$ сопряжённой системы с управлением $v(\psi, t)$:

$$\dot{\psi} = -\Big(A_0(t) + v(\psi, t)A_1(t)\Big)^T \psi, \ \psi(t_1) = -c.$$

4. Построим управление

$$w(t) = v(\psi(t), t), \ t \in T.$$

Процедура закончена. Полученное управление $w(t)$ обладает свойством: $\Phi(w) \leqslant \Phi(u)$.

Анализ возможностей улучшения во второй процедуре проводится в полной аналогии с первой процедурой.

Пример 2.4.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^1 x(t)(u(t)-1)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u,\ x(0) = 1,\ U = [-1, 1].$$

Применить к управлению $u(t) = -1$, $t \in T$ вторую процедуру улучшения. Сделать выводы по результатам решения.

Решение.

Построим функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \psi u - xu + x,$$

составим сопряжённое уравнение

$$\dot{\psi} = u - 1,\ \psi(1) = 0,$$

сформируем функцию переключения

$$g(\psi, x, t) = H_u(\psi, x, u, t) = \psi - x$$

и максимизирующее управление

$$u^*(\psi, x, t) = \operatorname{sign} g(\psi, x, t).$$

Приступим к реализации второй процедуры улучшения.

1. Найдём решение фазового уравнения для управления $u(t)$:

$$x(t) = 1 - t,\ t \in T.$$

2. Сформируем функцию переключения:

$$g_2(\psi, t) = g(\psi, x(t,u), t) = \psi - x(t,u) = \psi - 1 + t.$$

Запишем вспомогательное управление:

$$v(\psi, t) = u^*(\psi, x(t,u), t) = \operatorname{sign} g(\psi, x(t,u), t) = \operatorname{sign} g_2(\psi, t).$$

3. Составим уравнение для поиска траектории $\psi(t)$, подставляя в сопряжённое уравнение управление $v(x,t)$ вместо u:

$$\dot{\psi} = v(\psi, t) - 1. \tag{18}$$

Дополним это уравнение начальным условием

$$\psi(1) = 0.$$

Для интегрирования уравнения (18) найдём знак функции g_2 при $t = 1$:

$$g_2(\psi, t)\Big|_{t=1} = g_2(\psi(1), 1) = \psi(1) - 1 + 1 = 0.$$

Это означает, что возможны три ситуации поведения $\psi(t)$ в области $t < 1$:

1) $g_2(\psi(t), t) < 0$;

2) $g_2(\psi(t), t) > 0$;

3) *особый режим*: $g_2(\psi(t), t) = 0$.

Проанализируем эти ситуации.

1) Пусть $g_2(\psi(t), t) < 0$, $t < 1$. Тем самым мы предполагаем, что $\operatorname{sign} 0 = -1$. Поэтому, $v(\psi, t)\Big|_{t=1} = -1$. Составим задачу Коши:

$$\dot{\psi} = -2,\ \psi(1) = 0.$$

Её решение: $\psi(t) = 2 - 2t$, $t \leqslant 1$. Теперь подставим это решение в функцию переключения g_2 и определим её знак при $t < 1$:

$$g_2(\psi(t), t) = \psi(t) - 1 + t = 2 - 2t - 1 + t = 1 - t > 0,\ t < 1.$$

Следовательно, первая ситуация <u>невозможна</u>.

2) Предположим, что $g_2(\psi(t), t) > 0$, $t < 1$. Тем самым мы предполагаем, что $\operatorname{sign} 0 = 1$. Поэтому, $v(\psi, t)\Big|_{t=1} = 1$. Составим задачу Коши:

$$\dot{\psi} = 0,\ \psi(1) = 0.$$

Её решение: $\psi(t) = 0$, $t \leqslant 1$. Подставляя его в функцию g_2, имеем:

$$g_2(\psi(t), t) = \psi(t) - 1 + t = t - 1 < 0,\ t < 1.$$

Поэтому вторая ситуация также <u>невозможна</u>.

3) Рассмотрим особую ситуацию, когда $g_2(\psi(t), t) = 0$, $t \leqslant 1$. Проверим возможность её выполнения:

$$\frac{d}{dt}\, g_2(\psi(t), t) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\Big(\psi(t) - 1 + t\Big) = 0 \ \Rightarrow\ \dot{\psi}(t) + 1 = 0.$$

Отсюда, в силу сопряжённого уравнения для $\dot{\psi}$, имеем

$$u - 1 + 1 = 0.$$

Отсюда имеем $w(t) = 0,\ t \leqslant 1$. Это управление является допустимым: $w(t) \in U = [-1, 1]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Следовательно, особая ситуация <u>возможна</u>.

Таким образом, все предложенные ситуации проанализированы.

4. Сформируем итоговое управление:

$$w(t) = 0,\ t \in T.$$

Процедура завершена.

Сделаем выводы:

1) управления $w(t)$ и $u(t)$ не совпадают, поэтому $u(t)$ не экстремально:

$$T_{u,w} = \Big\{ t \in T : \, u(t) \neq w(t) \Big\} = [0,1] \;\Rightarrow\; \operatorname{mes} T_{u,w} = 1 > 0;$$

2) проверим свойство улучшения:

$$T_2 = \Big\{ t \in T : \, g_2(\psi(t), t) \neq 0 \Big\} = \varnothing,$$

$$T_+ = T_2 \cap T_{u,w} = \varnothing \;\Rightarrow\; \operatorname{mes} T_+ = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Phi(w) = \Phi(u).$$

В результате имеем следующий *ответ*:

$$w(t) = 0, \; t \in T,$$

$u(t)$ – не экстремальное, $\quad \Phi(w) = \Phi(u).$

□

Упражнения

1. В следующих задачах применить к заданному управлению $u(t)$ первую процедуру улучшения и сделать выводы по результатам решения.

1.1.

$$\Phi(u) = x(4) - \frac{1}{2}\int\limits_0^4 x(t)\left(u(t) - \frac{3}{4}\right)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = -u,\ x(0) = -5,\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = \frac{1}{4}\,,\ t \in T.$$

1.2

$$\Phi(u) = x_1(3) + 4x_2(3) + 2\int\limits_0^3 x_2(t)u(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = 6x_2,\ \dot{x}_2 = -u,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 7,\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = -1,\ t \in T.$$

1.3.

$$\Phi(u) = -2x(2) - \int\limits_0^2 x(t)(u(t) - 2)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = 2u,\ x(0) = 1,\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = \frac{1}{2}\,,\ t \in T.$$

1.4.

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}x_1(3) + 2x_2(3) + \int\limits_0^3 x_1(t)u(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = 2u,\ \dot{x}_2 = x_1,$$

$$x_1(0) = -1,\ x_2(0) = 0,\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = 0,\ t \in T.$$

1.5.

$$\Phi(u) = 2x_1(4) + x_2(4) + 2\int\limits_0^4 x_2(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = 2x_2u,\ \dot{x}_2 = -3u,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 18,\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = \frac{1}{2}\,,\ t \in T.$$

1.6.

$$\Phi(u) = 3x_1(2) + x_2(2) + x_3(2) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = 3x_1u,\ \dot{x}_3 = x_1,$$

$$x_1(0) = -2,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = -\frac{1}{3}\,,\ t \in T.$$

1.7.

$$\Phi(u) = -3x_1(2) - 4x_2(2) - 4\int\limits_0^2 x_1(t)u(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = -u,\ \dot{x}_2 = x_1,$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = \begin{cases} -\dfrac{3}{4}, & 0 \leqslant t < 1, \\[2ex] -1, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

1.8.

$$\Phi(u) = x_1(2) - 4x_2(2) - 3x_3(2) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = -4x_3,\ \dot{x}_2 = x_3u,\ \dot{x}_3 = -u,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 1,\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = \begin{cases} -\dfrac{3}{4}, & 0 \leqslant t < 1, \\ -1, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

1.9.

$$\Phi(u) = x_1(3) - x_2(3) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = x_1 u,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1, \\ 0, & 1 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

2. В следующих задачах применить к заданному управлению $u(t)$ вторую процедуру улучшения и сделать выводы по результатам решения.

2.1.

$$\Phi(u) = 3x(2) - \int\limits_0^2 x(t)(u(t) + 2)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = -u,\ x(0) = \frac{1}{2},\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = \frac{1}{2},\ t \in T.$$

2.2.

$$\Phi(u) = 4x(3) + 3\int\limits_0^3 x(t)(u(t) + 1)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u,\ x(0) = -2,\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = \frac{2}{3},\ t \in T.$$

2.3.

$$\Phi(u) = x_1(1) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = -ux_2,\ \dot{x}_2 = x_2 + u,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ U = [-1, 1],$$

$$u(t) = 0,\ t \in T.$$

§3. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) \to \min,\ u \in W, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x, u, t),\ x(t_0) = x^0, \tag{2}$$

$$W = \Big\{ u \in \widehat{C}_m(T) : \, u(t) \in U,\, t \in T = [t_0, t_1] \Big\}. \tag{3}$$

Предположим, что в задаче (1)–(3) функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема на R^n, вектор-функция $f(x, u, t)$ непрерывна по каждому из своих аргументов на $R^n \times U \times T$ вместе с матрицей частных производных $f_x(x, u, t)$, множество U – компактно.

Введём в рассмотрение сопряжённую вектор-функцию $\psi(t)$ и образуем функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle.$$

Определим сопряжённую задачу для $\psi(t)$

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x, u, t),\ \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Пусть $u(t)$, $t \in T$ – допустимое управление, $x(t, u)$, $\psi(t, u)$ – соответствующие фазовая и сопряжённая траектории.

Сформулируем *принцип максимума в задаче (1)–(3)*:
для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$ необходимо выполнение соотношения

$$u(t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi(t, u), x(t, u), v, t),\ t \in T. \tag{4}$$

3.1. Метод условного градиента

Продолжим изучение основной задачи (1)–(3). Дополнительно к предыдущему предположим, что вектор-функция $f(x,u,t)$ имеет непрерывную производную $f_u(x,u,t)$, множество U – выпукло.

Сформулируем *дифференциальный принцип максимума в задаче (1)–(3)*:
для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$ необходимо выполнения соотношения

$$u(t) = \arg\max_{v\in U} \Big\langle H_u(\psi(t,u), x(t,u), u(t), t),\ v\Big\rangle,\ t \in T.$$

Опишем метод последовательных приближений для поиска управлений, удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума в задаче (1)–(3) – *метод условного градиента*.

Пусть на k-том шаге итерационного процесса имеется допустимое управление $u^k(t)$ с соответствующими траекториями $x^k(t) = x(t,u^k)$, $\psi^k(t) = \psi(t,u^k)$, $t \in T$, $k = 0,1,\ldots$. Определим вспомогательное управление $\overline{u}^k(t)$ как решение задачи

$$\overline{u}^k(t) = \arg\max_{v\in U} \Big\langle H_u(\psi^k(t), x^k(t), u^k(t), t),\ v\Big\rangle,\ t \in T.$$

Подсчитаем величину (*невязку дифференциального принципа максимума*)

$$\delta_k = \int\limits_T \Big\langle H_u(\psi^k(t), x^k(t), u^k(t), t),\ \overline{u}^k(t) - u^k(t)\Big\rangle dt \geqslant 0.$$

Если $\delta_k = 0$, то это означает, что управление $u^k(t)$ удовлетворяет дифференциальному принципу максимума. Поэтому метод прекращает свою работу.

Рассмотрим основной случай, когда $\delta_k > 0$. Сформируем семейство управлений с параметром α (выпуклую комбинацию управлений u^k и $\overline{u}^k$)

$$u_\alpha^k(t) = u^k(t) + \alpha \cdot \Big(\overline{u}^k(t) - u^k(t)\Big),\ t \in T,\ \alpha \in [0,1].$$

Тогда следующее приближение ищется в виде

$$u^{k+1}(t) = u_{\alpha_k}^k(t),\ t \in T,$$

где α_k – решение задачи одномерного поиска

$$\Phi(u_\alpha^k) \to \min,\ \alpha \in [0,1].$$

Пример 3.1.

$$\Phi(u) = -x(2) + \int\limits_0^2 \Big(x^2(t) + (t-2)u^2(t)\Big)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u,\ x(0) = 0,\ U = [-1,1].$$

Провести одну итерацию метода условного градиента для управления $u^0(t) = 0$, $t \in T$.

Решение.

Отметим, что в этой задаче $\varphi(x) = -x$. Поэтому $\varphi_x(x) = -1$.

Составим функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \psi u - x^2 - (t-2)u^2$$

и найдем её производную по управлению

$$H_u = \psi - 2(t-2)u.$$

Образуем сопряжённое уравнение

$$\dot{\psi} = x,\ \psi(2) = -\varphi_x(x(2)) = 1.$$

Для поиска фазовой траектории $x^0(t) = x(t, u^0)$ составим задачу Коши

$$\dot{x} = 0,\ x(0) = 0.$$

Её решение $x^0(t) = 0$, $t \in T$.

Тогда сопряжённая задача Коши принимает вид

$$\dot{\psi} = 0,\ \psi(2) = 1.$$

Следовательно, $\psi^0(t) = 1$.

Сформируем вспомогательное управление

$$\overline{u}^0(t) = \arg\max_{v \in U} \Big\langle H_u(\psi^0(t), x^0(t), u^0(t), t),\ v \Big\rangle =$$

$$= \arg \max_{-1 \leqslant v \leqslant 1} \Big(\psi^0(t) - 2(t-2)u^0(t)\Big)v = \arg \max_{-1 \leqslant v \leqslant 1}\ v = 1,\ t \in T.$$

Таким образом, $\overline{u}^0(t) = 1$, $t \in T$.

Поскольку $\overline{u}^0(t) \neq u^0(t)$, то очевидно, что невязка дифференциального принципа максимума $\delta_k \neq 0$.

Определим семейство управлений

$$u^0_\alpha(t) = u^0(t) + \alpha \cdot \Big(\overline{u}^0(t) - u^0(t)\Big) = \alpha,\ \alpha \in [0, 1],\ t \in T.$$

Вычислим значение параметра α_0, как решение задачи

$$\Phi(u^0_\alpha) \to \min,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Для этого найдём представление функционала $\Phi(u^0_\alpha)$:

$$\Phi(u^0_\alpha) = -x(2, u^0_\alpha) + \int\limits_0^2 \bigg(\Big[x(t, u^0_\alpha)\Big]^2 + (t-2)\Big[u^0_\alpha(t)\Big]^2\bigg)dt.$$

С этой целью составим задачу Коши

$$\dot{x} = u^0_\alpha(t) = \alpha,\ x(0) = 0.$$

Её решение имеет вид $x(t, u^0_\alpha) = \alpha t$, $t \in T$. Тогда

$$\Phi(u^0_\alpha) = -2\alpha + \int\limits_0^2 \Big(\alpha^2 t^2 + (t-2)\alpha^2\Big)dt = \frac{2\alpha^2}{3} - 2\alpha.$$

Сформируем задачу поиска параметра

$$\frac{2\alpha^2}{3} - 2\alpha \to \min,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Это задача минимизации выпуклой параболы на отрезке. Для поиска её вершины (стационарной точки) составим уравнение

$$\frac{4\alpha}{3} - 2 = 0.$$

Отсюда, $\overline{\alpha} = 3/2$. Поскольку, $\overline{\alpha} > 1$, то $\alpha_0 = 1$. Следовательно,

$$u^1(t) = u^0_{\alpha_0}(t) = \alpha_0 = 1,\ t \in T.$$

$\square$

3.2. Метод проекции градиента

Предварительно дадим определение проекции точки на множество.

Определение 3.1. *Проекцией* точки $y \in R^n$ на множество $X \subseteq R^n$ называется такая точка $z \in X$, для которой выполняется соотношение

$$\|y - z\| = \min_{x \in X} \|y - x\|.$$

Иначе говоря проекция z является решением задачи

$$\|y - x\| \to \min, \ x \in X \tag{5}$$

Это означает, что точка $z \in X$ является ближайшей к y среди всех точек множества X.

Для проекции z будем использовать следующее обозначение:

$$z = \mathrm{P}_X(y).$$

Опишем метод последовательных приближений для поиска управлений, удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума в задаче (1)–(3) – *метод проекции градиента*.

Пусть на k-том шаге итерационного процесса имеется допустимое управление $u^k(t)$ с соответствующими траекториями $x^k(t) = x(t, u^k)$, $\psi^k(t) = \psi(t, u^k)$, $t \in T$, $k = 0, 1, \ldots$. Построим вспомогательное управление $\overline{u}^k(t)$ по правилу

$$\overline{u}^k(t) = \mathrm{P}_U\Big(u^k(t) + H_u(\psi^k(t), x^k(t), u^k(t), t)\Big), \ t \in T. \tag{6}$$

Вычислим *невязку дифференциального принципа максимума*

$$\delta_k = \int\limits_T \Big\langle H_u(\psi^k(t), x^k(t), u^k(t), t), \, \overline{u}^k(t) - u^k(t)\Big\rangle dt \geqslant 0.$$

Если $\delta_k = 0$, то управление $u^k(t)$ удовлетворяет дифференциальному принципу максимума. Следовательно, метод прекращает свою работу.

Рассмотрим основную ситуацию, когда $\delta_k > 0$. Сформируем семейство управлений с параметром α (выпуклую комбинацию управлений u^k и $\overline{u}^k$)

$$u^k_\alpha(t) = u^k(t) + \alpha \cdot \Big(\overline{u}^k(t) - u^k(t)\Big), \ t \in T, \ \alpha \in [0, 1].$$

Тогда следующее приближение ищется в виде

$$u^{k+1}(t) = u^k_{\alpha_k}(t),\ t \in T,$$

где α_k – решение задачи одномерного поиска

$$\Phi(u^k_\alpha) \to \min,\ \alpha \in [0,1].$$

Таким образом, отличие метода проекции градиента от метода условного градиента состоит только в правиле выбора вспомогательного управления $\overline{u}^k(t)$.

В заключение отметим, что при реализации соотношения (6) следует ориентироваться на решение задачи

$$\left\| u^k(t) + H_u(\psi^k(t), x^k(t), u^k(t), t) - v \right\| \to \min,\ v \in U,$$

получаемой из (5) при соответствующей корректировке в обозначениях.

Пример 3.2.

$$\Phi(u) = -x^2(3) - \int\limits_0^3 x(t)(1 + u(t))dt \to \min,$$

$$\dot{x} = -u,\ x(0) = 0,\ U = [2,4].$$

Провести одну итерацию метода условного градиента для управления $u^0(t) = 3$, $t \in T$.

Решение.

Отметим, что в этой задаче $\varphi(x) = -x^2$. Поэтому $\varphi_x(x) = -2x$.

Составим функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = -\psi u + (1 + u)x$$

и найдем её производную по управлению

$$H_u = -\psi + x.$$

Образуем сопряжённое уравнение

$$\dot{\psi} = -1 - u,\ \psi(3) = -\varphi_x(x(3)) = 2x(3).$$

Для поиска фазовой траектории $x^0(t) = x(t, u^0)$ составим задачу Коши

$$\dot{x} = -3,\ x(0) = 0.$$

Её решение $x^0(t) = -3t$, $t \in T$. Причём, $x^0(3) = -9$.

Тогда сопряжённая задача Коши принимает вид

$$\dot{\psi} = -4,\ \psi(3) = 2x^0(3) = -18.$$

Следовательно, $\psi^0(t) = -4t - 6$.

Построим вспомогательное управление по правилу

$$\overline{u}^0(t) = \mathrm{P}_U\Big(u^0(t) + H_u(\psi^0(t), x^0(t), u^0(t), t)\Big) =$$

$$= \mathrm{P}_{[2,4]}\Big(u^0(t) - \psi^0(t) + x^0(t)\Big) = \mathrm{P}_{[2,4]}\Big(9 + t\Big),\ t \in T.$$

Для $0 \leqslant t \leqslant 3$ справедливо неравенство $9 + t > 4$. Тогда делаем вывод, что

$$\overline{u}^0(t) = 4,\ t \in T.$$

Поскольку $\overline{u}^0(t) \neq u^0(t)$, то невязка дифференциального принципа максимума $\delta_k \neq 0$.

Определим семейство управлений

$$u^0_\alpha(t) = u^0(t) + \alpha \cdot \Big(\overline{u}^0(t) - u^0(t)\Big) = 3 + \alpha,\ \alpha \in [0, 1],\ t \in T.$$

Вычислим значение параметра α_0, как решение задачи

$$\Phi(u^0_\alpha) \to \min,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Для этого найдём представление функционала $\Phi(u^0_\alpha)$:

$$\Phi(u^0_\alpha) = -\Big(x(3, u^0_\alpha)\Big)^2 - \int\limits_0^3 x(t, u^0_\alpha)(1 + u^0_\alpha(t))dt.$$

С этой целью составим задачу Коши

$$\dot{x} = -u^0_\alpha(t) = -3 - \alpha,\ x(0) = 0.$$

Её решение имеет вид $x(t, u^0_\alpha) = -(3+\alpha)t$, $t \in T$. Тогда

$$\Phi(u^0_\alpha) = -9(3+\alpha)^2 + \int\limits_0^3 (3+\alpha)(4+\alpha)\, t\, dt = -\frac{9}{2}\,\alpha^2 - \frac{45}{2}\,\alpha - 27.$$

Сформируем задачу поиска параметра

$$s(\alpha) = -\frac{9}{2}\,\alpha^2 - \frac{45}{2}\,\alpha - 27 \to \min,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Это задача минимизации вогнутой параболы на отрезке. Сравним её значения на концах отрезка $[0, 1]$:

$$s(1) = -54 < s(0) = -27.$$

Отсюда, $\alpha_0 = 1$. Следовательно,

$$u^1(t) = u^0_{\alpha_0}(t) = 3 + \alpha_0 = 4,\ t \in T.$$

$\square$

3.3. Метод игольчатого варьирования

Опишем метод последовательных приближений для поиска управлений, удовлетворяющих принципу максимума в задаче (1)–(3) – *метод игольчатого варьирования*.

Пусть на k-м шаге итерационного процесса имеется допустимое управление $u^k \in W$, $k = 0, 1, \ldots$. Найдём соответствующие решения

$$x^k(t) = x(t, u^k),\ \psi^k(t) = \psi(t, u^k),\ t \in T.$$

Подсчитаем вспомогательное управление $\overline{u}^k(t)$ по правилу

$$\overline{u}^k(t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi^k(t), x^k(t), v, t),\ t \in T.$$

Сформируем функцию переключения

$$g_k(t) = H(\psi^k(t), x^k(t), \overline{u}^k(t), t) - H(\psi^k(t), x^k(t), u^k(t), t) \geqslant 0,\ t \in T.$$

Вычислим величину (*невязку принципа максимума*)

$$\delta_k = \int\limits_T g_k(t)dt \geqslant 0.$$

Если $\delta_k = 0$, то для управления u^k выполнено соотношение (4), т. е. оно удовлетворяет принципу максимума. Метод в этом случае останавливается.

Пусть $\delta_k > 0$. Определим крайние значения функции переключения

$$\lambda_{\min} = \min_{t \in T} g_k(t),\ \lambda_{\max} = \max_{t \in T} g_k(t).$$

Образуем λ-параметрическое семейство управлений

$$u^k_\lambda(t) = \begin{cases} u^k(t), & g_k(t) < \lambda, \\ \overline{u}^k(t), & g_k(t) > \lambda, \end{cases}$$

где $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.

Найдем величину параметра как решение задачи одномерного поиска

$$\Phi(u^k_\lambda) \to \min,\ \lambda_{\min} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\max}.$$

Тогда очередное $k+1$-е приближение определим по правилу

$$u^{k+1}(t) = u^k_{\lambda_k}(t),\ t \in T.$$

Пример 3.3.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^2 x^2(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u,\ x(0) = 1,\ U = [-1, 1].$$

Провести одну итерацию метода игольчатого варьирования для управления $u^0(t) = 1$, $t \in T$.

Решение.

Составим функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \psi u - x^2$$

и сопряжённое уравнение

$$\dot{\psi} = 2x,\ \psi(2) = 0.$$

Найдём решение фазового уравнения, соответствующее управлению u^0:

$$x^0(t) = t + 1,\ t \in T.$$

Тогда соответствующая сопряжённая траектория имеет вид

$$\psi^0(t) = t^2 + 2t - 8,\ t \in T.$$

Вычислим вспомогательное управление

$$\overline{u}^0(t) = \arg \max_{-1 \leqslant v \leqslant 1} \psi^0(t)v = \arg \max_{-1 \leqslant v \leqslant 1} \Big((t+1)^2 - 9\Big)v = -1, \ t \in T.$$

Функция переключения имеет вид

$$g_0(t) = \psi^0(t)\Big(\overline{u}^0(t) - u^0(t)\Big) = 2\Big(9 - (t+1)^2\Big), \ t \in T.$$

Поскольку функция $g_0(t)$ положительна при $t \in [0,2]$, то нет особого смысла вычислять невязку δ_0: она заведомо положительна, т. е. $\delta_0 > 0$. Это означает, что управление $u^0(t)$ не удовлетворяет принципу максимума.

Найдём крайние значения функции $g_0(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 2$:

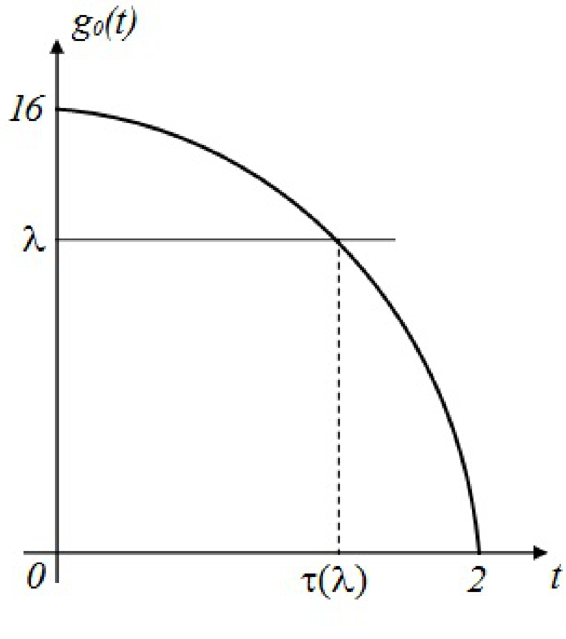
$$\lambda_{\min} = 0, \ \lambda_{\max} = 16$$

и образуем λ-параметрическое семейство

$$u^0_\lambda(t) = \begin{cases} u^0(t), & g_0(t) < \lambda, \\ \overline{u}^0(t), & g_0(t) > \lambda \end{cases} = \begin{cases} 1, & g_0(t) < \lambda, \\ -1, & g_0(t) > \lambda \end{cases}$$

при $\lambda \in [0, 16]$.

Представим ситуацию графически.



Следовательно,

$$u^0_\lambda(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < \tau(\lambda), \\ 1, & \tau(\lambda) \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$$

где $\tau(\lambda) \in [0,2]$ – единственный корень уравнения $g_0(t) = \lambda$ на T. Понятно, что в данном случае имеет взаимно-однозначное соответствие $\lambda \Leftrightarrow \tau(\lambda)$, $\lambda \in [0,16]$, $\tau(\lambda) \in T$ (функция $g_0(t)$ монотонно убывает на T). Поэтому имеется возможность от параметра λ перейти к параметру τ и образовать τ-параметрическое семейство управлений

$$u^0_\tau(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < \tau, \\ 1, & \tau \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$$

где $\tau \in [0,2]$. При этом следующее приближение определяется по правилу

$$u^1(t) = u^0_{\tau_0}(t),\ t \in T,$$

где τ_0 – решение задачи $\Phi(u^0_\tau) \to \min$, $0 \leqslant \tau \leqslant 2$.

Поскольку

$$\Phi(u^0_\tau) = \int\limits_0^2 \Big(x(t, u^0_\tau)\Big)^2 dt,$$

то найдём явное представление для функционала $\Phi(u^0_\tau)$ через параметр τ. С этой целью подсчитаем траекторию $x(t, u^0_\tau)$, интегрируя фазовое уравнение с управлением $u^0_\tau(t)$ на T. Поэтому решая задачу Коши $\dot{x} = -1,\ x(0) = 1$ на отрезке $[0,\tau]$, определим траекторию

$$x(t, u^0_\tau) = 1 - t,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Далее, проинтегрируем уравнение $\dot{x} = 1,\ x(\tau) = 1 - \tau$ на отрезке $[\tau, 2]$. В итоге получим

$$x(t, u^0_\tau) = t - 2\tau + 1,\ \tau \leqslant t \leqslant 2.$$

Подсчитаем функционал

$$\Phi(u_\tau^0) = \int\limits_0^\tau (1-t)^2 dt + \int\limits_\tau^2 (t-2\tau+1)^2 dt = -2\tau^3 + 10\tau^2 - 16\tau + \frac{26}{3}\,.$$

Обозначим

$$s(\tau) = -2\tau^3 + 10\tau^2 - 16\tau + \frac{26}{3}$$

и решим точку минимума в задаче

$$s(\tau) \to \min,\ 0 \leqslant \tau \leqslant 2. \tag{7}$$

Для этого вычислим стационарные точки функции $s(\tau)$:

$$s'(\tau) = -6\tau^2 + 20\tau - 16 = 0.$$

Отсюда

$$\tau_1 = \frac{4}{3},\ \ \tau_2 = 2.$$

Определим знак второй производной $s''(\tau)$ в этих точках:

$$s''(\tau_1) = 4 > 0,\ s''(\tau_2) = -4 < 0.$$

Следовательно, в точке τ_1 функция $s(\tau)$ достигает минимума на отрезке $[0, 2]$. В результате получаем решение задачи (7): $\tau_0 = 4/3$. Следовательно,

$$u^1(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < 4/3, \\ \ \ 1, & 4/3 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

$\square$

Упражнения

1. В следующих задачах провести одну итерацию метода условного градиента.

1.1.

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\,x_2(1) + 2x_3(1) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = x_1^2,\ \dot{x}_3 = (t-2)u,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,\ U = [-1, 2],$$

$$u^0(t) = 0,\ t \in T.$$

1.2.

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Big(x^2(t) + 2u^2(t)\Big)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = 2u,\ x(0) = 0,\ U = [-1, 1],$$

$$u^0(t) = 1,\ t \in T.$$

1.3.

$$\Phi(u) = x_1(1) + x_2(1) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = 2ux_1,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ U = [-1, 1],$$

$$u^0(t) = 0,\ t \in T.$$

1.4.

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\,x_1^2(\pi) + x_2^2(\pi) - 3x_2(\pi) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u - x_2,\ \dot{x}_2 = x_1,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1,\ U = [0, 1],$$

$$u^0(t) = 0,\ t \in T.$$

1.5.

$$\Phi(u) = x_1^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + x_2^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u,$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ U = [-1, 1],$$

$$u^0(t) = 0,\ t \in T.$$

2. В следующих задачах провести одну итерацию метода проекции градиента.

2.1.

$$\Phi(u) = -2x(1) - \int\limits_0^1 x(t)(3u(t) + 1)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = -u,\ x(0) = 1,\ U = [-1, 1],$$

$$u^0(t) = 0,\ t \in T.$$

2.2.

$$\Phi(u) = -3x_1(2) - \frac{1}{2}x_2^2(2) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2 - x_1,$$

$$x_1(0) = -1,\ x_2(0) = -1,$$

$$U = \left\{u \in R^2 :\ u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0,\ u_1 + u_2 \leqslant 1\right\},$$

$$u^0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3.

$$\Phi(u) = -\frac{3}{2}\,x_1^2(2) + \frac{3}{2}\,x_2(2) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = u_2,\ \dot{x}_2 = (1 + x_1)u_1,$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,$$

$$U = \Big\{u \in R^2 :\ u_1 \leqslant 0,\ u_2 \geqslant 0,\ -u_1 + 2u_2 \leqslant 4\Big\},$$

$$u^0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. В следующих задачах провести одну итерацию метода игольчатого варьирования.

3.1.

$$\Phi(u) = -4x(3) - \frac{x^2(3)}{2} + \int\limits_0^3 u(t)(4x(t) - t)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u,\ x(0) = 0,\ U = [-1, 1]$$

$$u^0(t) = 0,\ t \in T.$$

3.2.

$$\Phi(u) = -x_1(3) + 4x_2(3) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = (x_2 + 1)u,\ \dot{x}_2 = 2u - 1,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1,\ U = [0, 2],$$

$$u^0(t) = 1,\ t \in T.$$

3.3.

$$\Phi(u) = x_1(3) + 4x_2(3) + 2x_3(3) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = -6x_2,\ \dot{x}_2 = -u,\ \dot{x}_3 = ux_2,$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 7,\ x_3(0) = 0,\ U = [0, 2],$$

$$u^0(t) = 0,\ t \in T.$$