ПРАВИЛА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКЗАМЕНА, ВОПРОСЫ И ОБРАЗЕЦ БИЛЕТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»
(бакалавриат, преп. Аргучинцев А. В.)

I. Время выполнения – 2 часа (120 минут).

II. Результаты объявляются в этот же день (кафедра вычислительной математики и оптимизации, ауд. 123 в).

III. На основании пункта 4.1 "Положения о промежуточной аттестации … " (https://files.isu.ru/ru/about/norms/docs/Formi_sroki_kontrolya_25.08.17.pdf) на экзамене будет **запрещено пользоваться мобильными телефонами, смартфонами, планшетами, ноутбуками и т. п. Разрешено использование бумажных вариантов учебных пособий и справочной литературы**.

Положение
о промежуточной аттестации в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Иркутский государственный университет»

…
4.1. …

Во время проведения экзамена, зачета, зачета с оценкой обучающиеся могут пользоваться учебными программами, а также, с разрешения экзаменатора, справочной литературой и другими пособиями. Студентам во время аттестационного испытания запрещается пользоваться, без разрешения преподавателя, современными средствами коммуникации (сотовые телефоны, гарнитуры, смартфоны, микронаушники, планшетные компьютеры и прочее). При обнаружении использования данных средств у обучающегося во время проведения аттестационного испытания преподаватель имеет право удалить из аудитории данного студента и выставить в экзаменационную ведомость оценку «неудовлетворительно», «не зачтено».

IV. На основании пункта 4.4 "Положения о балльно-рейтинговой системе оценки … " (http://math.isu.ru/ru/teacher/docs/polojenie-BRS-2014.pdf) студенту, получившему на экзамене **менее 10 баллов**, выставляется оценка "неудовлетворительно" (вне зависимости от количества баллов, набранных за семестр). Например, если за семестр студент набрал 63 балла, а на экзамене получил 9 баллов, то итоговой оценкой является "неудовлетворительно".

V. Бумага обеспечивается преподавателем.

Положение о балльно-рейтинговой системе оценки успеваемости студентов Института математики, экономики и информатики Иркутского государственного университета

4.4. Студент, набравший в течение семестра за текущую работу ($S_{тек}$) 30 и более баллов допускается к сдаче зачёта (экзамена) по дисциплине, где может набрать баллы ($S_{сес}$) до 30.

Если на зачёте (экзамене) ответ студента оценивается менее чем 10-ю баллами, то зачёт (экзамен) считается не сданным, студенту выставляется $S_{сес} = 0$ баллов, а в ведомость выставляется оценка «не зачтено» («неудовлетворительно»).

Если на зачёте (экзамене) студент набирает 10 и более баллов, то они прибавляются к сумме баллов за текущую работу и переводятся в академическую оценку (см. таблицу), которая фиксируется в зачётной книжке студента.

СТРУКТУРА БИЛЕТА ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ "МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ"

1. Теоретический вопрос с небольшим практическим заданием.

2. Задача из раздела "Методы решения задач математического программирования".

3. Задача из раздела "Вариационное исчисление" или раздела "Введение в оптимальное управление".

Основные теоретические вопросы.

1.1. Определение минимума, максимума, супремума, инфимума, локального и глобального, строгого и нестрогого экстремумов. Буден дан пример, на котором необходимо проиллюстрировать эти понятия.

1.2. Воспользовавшись определением супремума, доказать, что если функция достигает на некотором множестве глобального максимума, то супремум этой функции на данном множестве равен глобальному максимуму. Буден дан пример на знание определений супремума и инфимума.

1.3. Свойства максимума (максимум функции, умноженной на константу; максимум функции, измененной на константу) с доказательством. Буден дан пример на знание определений максимума, минимума, супремума и инфимума.

1.4. Определение отрезка, луча, прямой в конечномерном евклидовом пространстве. Буден дан пример на иллюстрацию понятий.

1.5. Определение вогнутой функции. Критерий вогнутости дважды непрерывно дифференцируемой функции (с доказательством). Проверка функции на выпуклость / вогнутость (будет приведена задача для решения).

1.6. Определение выпуклой функции. Критерий выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции (с доказательством). Проверка функции на выпуклость / вогнутость (будет приведена задача для решения).

1.7. Определение сепарабельной функции. Теорема об экстремуме сепарабельной функции. Решение задачи на экстремум сепарабельной функции (будет приведена задача для решения).

1.8. Экстремальные свойства линейной функции. Будет дан пример решения задачи линейного программирования графоаналитическим методом.

1.9. Вычисление градиента и матрицы вторых производных квадрата нормы $Ax + b$. Проверка функции на выпуклость / вогнутость (будет приведена задача для решения).

1.10. Метод скорейшего спуска решения задачи на безусловный экстремум. Схема. Теорема о сходимости без доказательства. Доказать, что направления спуска на соседних итерациях метода ортогональны, если шаг метода определяется из условия минимума в направлении антиградиента.

1.11. Метод скорейшего спуска решения задачи на безусловный экстремум. Схема. Доказательство теоремы о сходимости для случая, когда шаг выбирается из условия гарантированного убывания.

1.12. Вывод формул для поиска экстремума линейной функции на многомерном прямоугольном параллелепипеде и n-мерном шаре.

1.13. Вывод формул для проекции точки на многомерный прямоугольный параллелепипеде и гиперплоскость.

1.14. Вывод формулы для проекции точки на n-мерный шар с помощью правила множителей Лагранжа.

1.15. Вывод формулы для проекции точки на n-мерную сферу с помощью правила множителей Лагранжа.

1.16. Идея метода штрафных функций. Будет дан пример на составление штрафных функций.

1.17. Вывод системы уравнений Эйлера в многомерной задаче вариационного исчисления (условие оптимальности в виде уравнения Эйлера в простейшей задаче вариационного исчисления считать доказанным). Необходимо будет составить систему уравнений Эйлера для конкретного примера.

1.18. Постановка основной задачи оптимального управления. Её основные элементы. Показать, что задача оптимального управления с интегральным функционалом сводится к задаче Майера. Будет дан пример, на котором нужно будет проиллюстрировать данный способ сведения.

1.19. Постановка основной задачи оптимального управления. Её основные элементы. Показать, что задача Майера сводится к задаче с интегральным функционалом. Будет дан пример, на котором нужно будет проиллюстрировать данный способ сведения.

1.20. Постановка линейно-выпуклой задачи оптимального управления. Доказать, что в линейно-выпуклой задаче оптимального управления принцип максимума Л. С. Понтрягина является достаточным условием оптимальности (формулу приращения целевого функционала для двух произвольных управляемых процессов считать известной). Будет дан пример на проверку, является ли задача линейно-выпуклой.

1.21. Серия простых теоретических вопросов по всему годовому курсу на знание основных определений и теорем (без доказательств).

Задача 1. Основные типы.

2.1. Решить задачу математического программирования (ограничения типа равенств и неравенств) с помощью правила множителей Лагранжа.

2.2. Решить задачу математического программирования на основе теоремы об экстремуме сепарабельных функций (в явном виде в условии задачи не будет фразы об использовании этой теоремы).

2.3. Выполнить одну итерацию метода скорейшего спуска для конкретного примера.

2.4. Выполнить одну итерацию метода условного градиента для конкретного примера.

2.5. Составить штрафную функцию для конкретного примера.

2.6. Найти экстремум линейной функции на многомерном параллелепипеде / кубе / шаре / сфере / эллипсоиде для конкретного примера.

2.7. Найти проекцию точки на многомерный параллелепипед / куб / шар / сферу / "выколотый" шар / гиперплоскость / эллипсоид для конкретного примера.

Задача 2. Основные типы.

3.1. Найти допустимые экстремали в простейшей задаче вариационного исчисления.

3.2. Найти допустимые экстремали в многомерной задаче вариационного исчисления.

3.3. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче вариационного исчисления.

3.4. Найти допустимые экстремали в задаче вариационного исчисления со свободными границами (незакрепленные концы и/или нефиксированный отрезок интегрирования).

3.5. В основной (простейшей) задачи оптимального управления для заданной управляющей функции вычислить состояние процесса и значение целевого функционала.

3.6. Решить линейную задачу оптимального управления с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

"МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ" (ОБРАЗЕЦ)

1. Верны ли следующие утверждения (да или нет). При ответе "нет" дайте правильную формулировку (ответ "нет" без правильной формулировки не будет засчитан).

- В любой экстремальной задаче супремум всегда равен глобальному максимуму. (2 балла)
- Любая точка максимума выпуклой функции на выпуклом множестве является точкой глобального максимума. (2 балла)
- Задача оптимального управления называется линейно-выпуклой, если правая часть системы обыкновенных дифференциальных уравнений в этой задаче линейна по состоянию и выпукла по управлению. (2 балла)
- Любая штрафная функция в методе штрафных функций всегда должна быть неотрицательной. (2 балла)
- Метод наименьших квадратов позволяет определить конкретный вид (линейная, экспоненциальная, полиномиальная и т.п.) функциональной зависимости между двумя величинами. (2 балла)

2. а) Для решения задачи методом скорейшего спуска указать направление спуска из точки $x^0 = (1,1)$:
$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 4x_2 \to min.$ (4 балла)

б) Найти проекцию точки $(-1; 0; 2)$ на множество
$X = \{x \in R^3: -a+4 \le x_1 \le a+20;\ a-6 \le x_2 \le 2a;\ 1 \le x_3 \le a\}$, *a – число букв в Вашем имени.*

(4 балла)

3. Найти допустимую экстремаль (экстремали) в задаче вариационного исчисления (12 баллов)

$$\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to min, \qquad x(0) = 0, \qquad x(1) = 1, \qquad \int_0^1 tx\,dt = 0.$$