Оглавление

Глава 1
Множества и функции в n – мерном евклидовом пространстве

§1. Исходные понятия

1. n–мерное вещественное пространство

Пусть n – натуральное число. Совокупность всевозможных упорядоченных систем n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *n–мерным вещественным пространством* и обозначается через R^n. Элементы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n–мерного вещественного пространства называются *векторами* или *точками*, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – их *компонентами*, или *координатами*.

Равенство векторов в n–мерном вещественном пространстве понимается как равенство их соответствующих компонент, то есть вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равен вектору $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_n = y_n$. Нулевой вектор, сложение векторов и умножение вектора на число определяются следующим образом:

$$0 = (0, 0, \ldots, 0),$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Вектор x называется *линейной комбинацией* векторов $x^1, x^2, \ldots, x^k$, если он представим в виде

$$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i, \tag{1.1}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ - некоторые числа (*коэффициенты линейной комбинации* (1.1)). Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной* в противном случае.

Векторы $x^1, x^2, \ldots, x^k$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю, то есть если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k = 0. \tag{1.2}$$

Если равенство (1.2) возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то векторы $x^1, x^2, \ldots, x^k$ называются *линейно независимыми.*

Т е о р е м а 1.1. *Всякие k векторов из R^n линейно зависимы при $k > n$.*

О п р е д е л е н и е 1.1. Система линейно независимых векторов

$$x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_s} \tag{1.3}$$

называется *максимальной линейно независимой подсистемой* или *базой* системы

$$x^1, x^2, \ldots, x^k, \tag{1.4}$$

если все векторы системы (1.3) принадлежат системе (1.4) и добавление к (1.3) любого другого вектора из (1.4) приводит к линейно зависимой системе. Система линейно независимых векторов из R^n называется *максимальной линейно независимой системой* (в R^n), если добавление к ней любого другого вектора $x \in R^n$ дает уже линейно зависимую систему.

Все базы одной и той же системы векторов содержат одинаковое число векторов. Это число называется *рангом* данной системы. Если все векторы системы нулевые, то ее ранг считается равным нулю. Если вся система линейно независима, то ее ранг равен числу векторов системы.

Всякая максимальная линейно независимая система векторов в R^n состоит из n векторов и называется *базисом* пространства R^n. Векторы, его составляющие, называются *базисными векторами.* Любой вектор $x \in R^n$ можно однозначно представить в виде линейной комбинации базисных векторов. Такое представление называется *разложением вектора x по базису*, а коэффициенты линейной комбинации – *координатами* вектора x относительно данного базиса.

Упражнения

1.1. Доказать, что

a) *если некоторые из векторов* $x^1, x^2, \ldots, x^k$ *линейно зависимы, то и вся система* $x^1, x^2, \ldots, x^k$ *линейно зависима*;

b) *всякая подсистема линейно независимой системы линейно независима*;

c) *векторы* $x^1, x^2, \ldots, x^k$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных*;

d) *если векторы* $x^1, x^2, \ldots, x^k$ *линейно независимы и вектор* x *есть их линейная комбинация,* $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k$, *то это представление единственно*;

e) *если среди векторов* $x^1, x^2, \ldots, x^k$ *имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы*;

f) *система, состоящая из одного ненулевого вектора, линейно независима.*

1.2. Вектор x называется *пропорциональным* вектору y, если существует число λ такое, что $x = \lambda y$. Очевидно, что если вектор x пропорционален вектору y, то и вектор y пропорционален вектору x. Доказать, что *если среди векторов* $x^1, x^2, \ldots, x^k$ *есть пропорциональные, то система* $x^1, x^2, \ldots, x^k$ *линейно зависима.*

1.3. Доказать, что *система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.*

1.4. Если вектор z является линейной комбинацией векторов

$$x^1, x^2, \ldots, x^k, \tag{1.5}$$

то говорят, что вектор z *линейно выражается через систему* (1.5). *Система векторов*

$$z^1, z^2, \ldots, z^s, \tag{1.6}$$

линейно выражается через систему (1.5), если каждый вектор системы (1.6) линейно выражается через систему (1.5). Две системы векторов называются *эквивалентными*, если каждая из них линейно выражается через другую.

Доказать, что

a) *если система* (1.6) *линейно выражается через систему* (1.5), *а система* (1.5), *в свою очередь, линейно выражается через систему*

$$u^1, u^2, \ldots, u^t, \tag{1.7}$$

то система (1.6) *линейно выражается через систему* (1.7);

b) *если система* (1.6) *линейно независима и линейно выражается через систему* (1.5), *то число векторов в системе* (1.6) *не больше, чем число векторов в системе* (1.5) : $s \leq k$;

c) *если система* (1.6) *линейно независима и линейно выражается через систему* (1.5), *а система* (1.5) - *линейно зависимая, то* $s < k$;

d) *всякие две эквивалентные линейно независимые системы содержат равное число векторов.*

1.5. Доказать, что *всякая максимальная линейно независимая подсистема одной и той же системы векторов содержит одинаковое число векторов; любую линейно независимую подсистему можно дополнить до максимальной линейно независимой подсистемы.*

1.6. Система *единичных* векторов из R^n

$$e^1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e^n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

называется *естественным или каноническим базисом* этого пространства. Показать, что естественный базис в R^n является его базисом; *компоненты вектора* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *– это его координаты относительно естественного базиса.*

1.7. Доказать, что *всякая максимальная линейно независимая система векторов в* R^n *содержит n векторов; всякую линейно независимую систему векторов из* R^n *можно дополнить до базиса.*

1.8. Доказать, что R^n *имеет бесконечно много базисов.*

1.9. *При сложении двух векторов их координаты относительно любого базиса складываются. При умножении вектора на число его координаты относительно любого базиса умножаются на это число.* Доказать.

1.10. Доказать, что векторы

$$
\begin{array}{lcl}
x^1 & = & (x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ \ldots,\ x_{1n}), \\
x^2 & = & (\ 0\ ,\ x_{22},\ x_{23},\ \ldots,\ x_{2n}), \\
x^3 & = & (\ 0\ ,\ 0,\ x_{33},\ \ldots,\ x_{3n}), \\
\multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
x^n & = & (\ 0\ ,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ x_{nn}),
\end{array}
$$

где $x_{11} \cdot x_{22} \cdot x_{33} \ldots \cdot x_{nn} \neq 0$ составляют базис в R^n.

1.11. Построить линейную комбинацию векторов a^1, a^2, a^3 с коэффициентами, соответственно, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

a) $a^1 = (1, 2, 0),\ a^2 = (2, -1, 3),\ a^3 = (-5, 0, 1),\ \ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1;$

b) $a^1 = (1, -1, 2, -4),\ a^2 = (3, 1, 1, -3),\ a^3 = (-1, -3, 4, 5),$
$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 4;$

c) $a^1 = (4, -5, 2, 6, 3),\ a^2 = (2, -2, 1, 3, 3),\ a^3 = (6, -3, 3, 3, -3),$
$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -6,\ \lambda_3 = -1;$

d) $a^1 = (5, -5, 4, 3, 0),\ a^2 = (1, -2, 2, 6, 3),\ a^3 = (7, -4, 2, -12, -9),$
$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = -1.$

1.12. Решить следующие уравнения:

a) $2a^1 + 3a^2 - a^3 + 4x = a^4,$
$a^1 = (4, -5, 5),\ a^2 = (2, -2, 1),\ a^3 = (1, -4, 3),\ a^4 = (1, 4, -2);$

b) $3(a^1 - 2x) + 5(a^2 + a^3 - 3x) = 2(a^3 - 4x),$
$a^1 = (3, 2, 4, -1),\ a^2 = (2, -1, 1, 6),\ a^3 = (-2, 4, 3, 4);$

c) $2(x - a^1 + a^3) - 5(x - 2a^2 - a^3) + 3(2x + a^3 + a^4) = x - a^4,$
$a^1 = (1, 1, -1, -1),\ a^2 = (3, 0, -5, 1),\ a^3 = (1, -3, 0, -4),$
$a^4 = (2, 3, 4, -5).$

1.13. Решить систему уравнений

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & y & - & z & = & a^1, \\
x & - & y & + & z & = & a^2, \\
2x & + & y & + & 3z & = & a^3,
\end{array}
$$

где $a^1 = (0, 5, 2, 1),\ a^2 = (2, -3, 0, 1),\ a^3 = (13, -10, 3, -2).$

1.14. Векторы $a^1 = (1, -1, -1)$, $a^2 = (1, 0, 1)$, $a^3 = (-1, 1, 0)$ составляют базис в R^3. Найдите вектор x, координаты которого в этом базисе равны, соответственно, $1, 1, 2$.

2. Матрицы и системы линейных уравнений

Вектор–столбцом, или просто *столбцом*, размерности n называется матрица вида

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Поскольку сложение матриц и умножение их на число определяются точно также, как соответствующие операции над векторами, векторы $x \in R^n$ можно отождествлять со столбцами (1.8). Всюду ниже вектор $x \in R^n$ будет считаться вектор–столбцом, но для экономии места, если необходимо указать его компоненты, мы будем по-прежнему записывать его в строчку как $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Запись же $[x_1\ x_2 \ldots x_n]$ означает, что это – матрица, состоящая из одной строки (*вектор–строка*, или просто *строка*), так что, если $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$, то $[x_1\ x_2 \ldots x_n] = x^T$, где символ "^{T}"означает транспонирование матрицы (вектора).

Матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

мы будем кратко записывать как $[a_{ji}]_{j,i=1}^{m,n}$, а ее столбцы обозначать через $a^1, a^2, \ldots, a^n$, так что $A = \left[a^1\ a^2\ \ldots\ a^n\right]$, где $a^i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Множество матриц размера $m \times n$ будем обозначать через $M_{m,n}$, а множество квадратных матриц порядка n – через M_n.

Подматрицей матрицы A называется матрица, составленная из элементов матрицы A, стоящих на пересечении некоторых (может быть, всех) строк и некоторых (может быть, всех) столбцов. Можно сказать иначе – подматрица матрицы A образуется путем вычеркивания из нее некоторых (может быть, никаких) строк и некоторых (может быть, никаких) столбцов.

Минором k–того порядка матрицы $A \in M_{m,n}$, $k \le \min\{m, n\}$, называется определитель ее подматрицы, стоящей на пересечении произвольных k строк и k столбцов.

Рангом матрицы A называется максимальное число ее линейно независимых столбцов. Ранг матрицы A обозначается как $\operatorname{rank} A$. Ранг нулевой матрицы полагается равным нулю.

Далее будем считать, что $A \in M_{m,n}$ и $A \neq O$.

Т е о р е м а 1.2. *Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен ее рангу.*

Таким образом, $\operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}$. Матрица A называется *матрицей полного ранга*, если $\operatorname{rank} A = \min\{m, n\}$.

П р а в и л о в ы ч и с л е н и я р а н г а м а т р и ц ы:
При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже вычислен минор k – того порядка, отличный от нуля, то требуют вычисления лишь окаймляющие его (то есть содержащие этот минор целиком внутри себя) миноры порядка $k+1$. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

П р и м е р 1.1. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & -4 \\ 3 & -6 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Минор первого порядка $\det[a_{11}] = 1 \neq 0$. Окаймляющий его минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Точно также равны нулю окаймляющие миноры

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

Однако, минор

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Окаймляющие его миноры

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$$

все равны нулю. Следовательно, $\mathrm{rank} A = 2$. Заметим, что всего матрица A имеет $C_4^3 \cdot C_5^3 = 40$ миноров третьего порядка. ■

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\,, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\,, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\,. \end{array} \tag{1.9}$$

или, в матричной записи,

$$Ax = b,$$

где $A = [a_{ji}]_{j,i=1}^{m,n}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Если система (1.9) имеет решение, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной*.

Т е о р е м а 1.3. (К р о н е к е р а – К а п е л л и). *Система* (1.9) *совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы* $[\,A\ \ b\,] = [\,a^1\ \ a^2\ \ \ldots a^n\ \ b\,]$ *равен рангу матрицы* A.

Т е о р е м а 1.4. *Совместная система* (1.9) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных*: $\mathrm{rank}\, A = n$.

Упражнения

1.15. Доказать, что *максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу линейно независимых столбцов* (*и равно рангу матрицы*).

1.16. Доказать, что *определитель n – ного порядка равен нулю тогда и только тогда, когда его строки* (*столбцы*) *линейно зависимы.*

1.17. Доказать теорему Кронекера–Капелли.

1.18. Доказать, что *однородная система* $Ax = 0$, *где* A *– квадратная матрица порядка* n, *имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда* $\det\, A = 0$.

1.19. Доказать, что *если в системе* (1.9) $\operatorname{rank} A = m$, *то система совместна.*

1.20. Вычислить ранги следующих систем векторов:

$a)\ \begin{aligned} a^1 &= (1,2,3), \\ a^2 &= (3,5,7); \end{aligned}$ $\qquad b)\ \begin{aligned} a^1 &= (4,-2,2), \\ a^2 &= (6,-3,3); \end{aligned}$

$c)\ \begin{aligned} a^1 &= (2,-2,1), \\ a^2 &= (3,-1,5), \\ a^3 &= (1,-4,3); \end{aligned}$ $\qquad d)\ \begin{aligned} a^1 &= (5,4,3), \\ a^2 &= (3,3,2), \\ a^3 &= (8,1,3); \end{aligned}$

$e)\ \begin{aligned} a^1 &= (4,-5,2,6), \\ a^2 &= (2,-2,1,3), \\ a^3 &= (6,-3,3,9), \\ a^4 &= (4,-1,5,6); \end{aligned}$ $\qquad f)\ \begin{aligned} a^1 &= (1,\ \ 0,0,\ \ 2,\ \ 5), \\ a^2 &= (0,\ \ 1,0,\ \ 3,\ \ 4), \\ a^3 &= (0,\ \ 0,1,\ \ 4,\ \ 7), \\ a^4 &= (2,-3,4,11,12). \end{aligned}$

1.21. Найти все базы системы векторов:

$a)\ \begin{aligned} a^1 &= (1,2,0,0), \\ a^2 &= (1,2,3,4), \\ a^3 &= (3,6,0,0); \end{aligned}$ $\qquad b)\ \begin{aligned} a^1 &= (1,2,3,4), \\ a^2 &= (2,3,4,5), \\ a^3 &= (3,4,5,6), \\ a^4 &= (4,5,6,7). \end{aligned}$

1.22. Найти какую–нибудь базу системы векторов и выразить через нее все остальные векторы:

$a)\ \begin{aligned} a^1 &= (\ \ 5,3,\ \ \ 1), \\ a^2 &= (\ \ 3,2,\ \ \ 4), \\ a^3 &= (13,8,\ \ \ 6), \\ a^4 &= (\ \ 2,1,-3); \end{aligned}$ $\qquad b)\ \begin{aligned} a^1 &= (3,1,2,\ \ 5), \\ a^2 &= (3,8,6,\ \ 7), \\ a^3 &= (0,4,2,\ \ 1), \\ a^4 &= (9,7,8,16). \end{aligned}$

1.23. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы a^1, a^2, a^3:

$a)\ \begin{aligned} a^1 &= (4,4,3), \\ a^2 &= (7,2,1), \\ a^3 &= (4,1,6), \\ b &= (5,9,\lambda); \end{aligned}$ $\qquad b)\ \begin{aligned} a^1 &= (3,2,5), \\ a^2 &= (2,4,7), \\ a^3 &= (5,6,\lambda), \\ b &= (1,3,5); \end{aligned}$

$c)\ \begin{aligned} a^1 &= (2,\ \ \ 3,5), \\ a^2 &= (3,\ \ \ 7,8), \\ a^3 &= (1,-6,1), \\ b &= (7,-2,\lambda); \end{aligned}$ $\qquad d)\ \begin{aligned} a^1 &= (3,2,6), \\ a^2 &= (7,3,9), \\ a^3 &= (5,1,3), \\ b &= (\lambda,2,5). \end{aligned}$

3. Скалярное произведение и норма

Число

$$\langle x, y\rangle \ = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{1.10}$$

называется *скалярным произведением* векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. n–мерное вещественное пространство со скалярным произведением (1.10) называется *n–мерным евклидовым пространством.* Всюду ниже пространство R^n мы будем считать евклидовым.

Векторы $x, y \in R^n$ называются *ортогональными*, если $\langle x, y\rangle \ = 0$.

Длиной или *нормой* (*евклидовой нормой*) вектора $x \in R^n$ называется число

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Расстояние $\rho(x, y)$ между векторами x и y из R^n определяется как длина вектора $x - y$, то есть,

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Непосредственно из определений скалярного произведения, нормы и расстояния вытекает, что

1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
2) $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$,
3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$,
4) $\|x\| \geq 0$ для всех $x \in R^n$,
5) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,
6) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
7) $\rho(x, y) \geq 0$ для всех $x, y \in R^n$,
8) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,
9) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Для любых $x, y, z \in R^n$ справедливы неравенства

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \tag{1.11}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \tag{1.12}$$

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|. \tag{1.13}$$

Неравенство (1.11) называется *неравенством Коши–Буняковского*, неравенства (1.12) и (1.13) – *неравенствами треугольника.*

Углом между векторами $x, y \in R^n$, $x, y \neq 0$, называется угол φ, косинус которого определяется соотношением

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Из неравенства Коши – Буняковского следует, что $|\cos\varphi| \leq 1$. Если хотя бы один из векторов x, y равен нулю, то угол между такими векторами считается не определенным.

Пусть $x, y \in R^n$. По правилу умножения матриц

$$x^T y = y^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

То есть, в терминах матриц скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x^T y$, $\|x\| = \sqrt{x^T x}$, а неравенство Коши–Буняковского принимает вид:

$$|x^T y| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Произведение же вектор–столбца x на вектор–строку y^T представляет собой уже матрицу

$$xy^T = [x_i y_j]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{bmatrix}.$$

Матрица xy^T называется *диадой*, или *внешним произведением векторов* x и y и обозначается $x\rangle\langle y$ (в противоположность внутреннему произведению, как иногда называют скалярное произведение векторов). В отличие от внутреннего произведения, которое имеет смысл только для векторов одинаковой размерности, внешнее произведение определено для любых векторов x, y. А именно, если $x \in R^n$, $y \in R^m$, то xy^T – матрица размерности $n \times m$, а yx^T – матрица размерности $m \times n$ и $(yx^T)^T = xy^T$.

Упражнения

1.24. Доказать, что *любая система попарно ортогональных ненулевых векторов линейно независима.*

1.25. Доказать неравенство Коши – Буняковского. Показать, что при $x, y \neq 0$ равенство $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ возможно в том и только в том случае, когда векторы x и y пропорциональны.

1.26. Доказать неравенства треугольника (1.12) и (1.13). Дать их геометрическую интерпретацию.

1.27. Доказать неравенства

$$\|x - y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|,$$
$$\|x - y\| + \|z - v\| \geq \big|\, \|x - z\| - \|y - v\| \,\big|.$$

1.28. Доказать *тождество параллелограмма*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Дать его геометрическую интерпретацию.

1.29. Доказать тождество

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big).$$

1.30. Доказать неравенства

$$\big|\|x\|^2 - \|y\|^2\big| \leq \|x + y\| \cdot \|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

В каких случаях эти неравенства превращаются в равенства?

1.31. Доказать, что *векторы* x и y *ортогональны тогда и только тогда, когда* $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (*теорема Пифагора*).

1.32. Доказать, что *если векторы* $x^1, x^2, \ldots, x^k$ *попарно ортогональны, то*

$$\|x^1 + x^2 + \ldots + x^k\|^2 = \|x^1\|^2 + \|x^2\|^2 + \ldots + \|x^k\|^2.$$

Верно ли обратное утверждение?

1.33. Доказать, что для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

1.34. Найти все значения параметра λ, при которых векторы x и y ортогональны:

$$a)\ \begin{aligned} x &= (1, \lambda, -1, 3, 0), \\ y &= (\lambda, 1, \quad 2, 4, 1); \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x &= (1, 0, \quad \lambda, 2, 5), \\ y &= (2, 3, -\lambda, 1, 0); \end{aligned}$$

$$c)\ \begin{aligned} x &= (\quad \lambda, 2, \lambda, -1, \quad \lambda), \\ y &= (-1, 3, \lambda, \quad 3, -3); \end{aligned} \qquad d)\ \begin{aligned} x &= (5, 2, \lambda, 2, 5), \\ y &= (5, 3, \lambda, 2, 7). \end{aligned}$$

1.35. Пусть A – квадратная матрица, $\det A \neq 0$. Матрицу $(A^T)^{-1}$ обозначим через A^{-T}. Показать, что $A^{-T} = (A^{-1})^T$.

1.36. Доказать, что $\operatorname{rank} xy^T = 1$ для любых $x, y \in R^n$, $x, y \neq 0$.

1.37. Пусть $E \in M_n$ – единичная матрица, $x, y \in R^n$, $x^T y \neq -1$ и $A = E + xy^T$. Проверить формулу

$$A^{-1} = E - \frac{1}{1 + x^T y} xy^T.$$

1.38. Пусть A – матрица размерности $m \times n$, B – матрица размерности $n \times r$. Обозначим через $a^1, \dots, a^n$ столбцы матрицы A, через $b^1, \dots, b^n$ столбцы матрицы B^T (то есть, $(b^1)^T, \dots, (b^n)^T$ – строки матрицы B). Доказать, что $AB = \sum\limits_{k=1}^{n} a^k (b^k)^T$.

1.39. *Евклидовой нормой* или *нормой Фробениуса* матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Очевидно, что

1) $\|A\| \geq 0$,

2) $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$,

3) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ для любого числа λ.

Доказать, что для любых $A, B \in M_n$ и $x \in R^n$

4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

5) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$,

6) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

4. Прямая и гиперплоскость

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть x, y – две различные точки в R^n. Совокупность точек вида

$$\lambda x + (1-\lambda)y = y + \lambda(x-y), \quad -\infty < \lambda < +\infty \tag{1.14}$$

называется *прямой*, проходящей через точки x и y.

О п р е д е л е н и е 1.3. *Прямой*, проходящей через точку $a \in R^n$ с *направляющим вектором* $p \in R^n$ называется совокупность точек вида

$$a + \lambda p, \quad -\infty < \lambda < +\infty \ . \tag{1.15}$$

При $a = y$ и $p = x - y$ соотношения (1.14) и (1.15) определяют одну и ту же прямую (рис. 1.1).

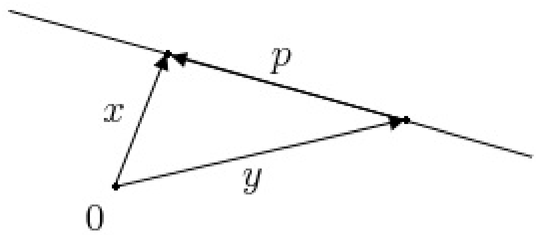

Рис. 1.1

О п р е д е л е н и е 1.4. *Лучом*, исходящим из точки $a \in R^n$ в направлении $p \in R^n$, называется множество точек вида

$$a + \lambda p, \quad \lambda \geq 0.$$

О п р е д е л е н и е 1.5. *Отрезком*, соединяющим точки $x, y \in R^n$, называется множество

$$[x, y] = \{z \in R^n : z = \lambda x + (1-\lambda)y = y + \lambda(x-y), \quad 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Точки x и y называются *концами отрезка* $[x, y]$. Понятно, что $[x, y] = [y, x]$.

О п р е д е л е н и е 1.6. Пусть a – ненулевой вектор из R^n, β – число. Множество

$$H = H(a, \beta) = \{x \in R^n : \langle a, x\rangle = \beta\}$$

называется *гиперплоскостью*. Вектор a называется *нормальным вектором* (*вектором нормали*) гиперплоскости H.

Вектор a и число β определяют гиперплоскость с точностью до общего ненулевого множителя. Вместо "гиперплоскость $H(a,\beta)$" говорят также просто "гиперплоскость $\langle a, x\rangle = \beta$". При $n = 1$ гиперплоскость – это точка $x = \beta/a$, при $n = 2$ – прямая $a_1x_1 + a_2x_2 = \beta$, при $n = 3$ – плоскость $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \beta$.

Пусть точки $x, y \in H(a,\beta)$. Тогда и вся прямая, проходящая через эти точки, принадлежит гиперплоскости H:

$$\langle a, y + \lambda(x - y)\rangle = \langle a, y\rangle + \lambda[\langle a, x\rangle - \langle a, y\rangle] = \beta + \lambda[\beta - \beta] = \beta.$$

Отсюда также следует, что вектор нормали гиперплоскости ортогонален направляющему вектору $p = x - y$ любой прямой, проходящей через любые точки $x, y \in H$ (рис. 1.2).

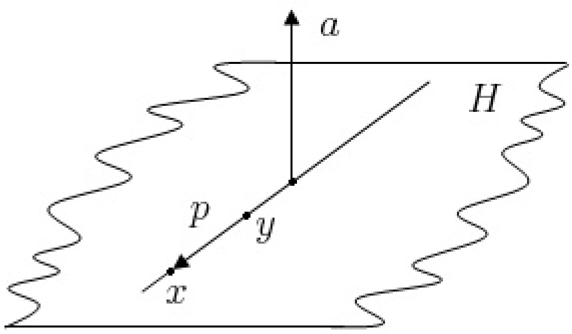

Рис. 1.2

О п р е д е л е н и е 1.7. Пересечение конечного множества гиперплоскостей называется *аффинным множеством* или *линейным многообразием.*

Таким образом, линейное многообразие – это множество решений системы линейных алгебраических уравнений

$$\langle a^j, x\rangle = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j\ , \ \ j = 1, \ldots, m,$$

или, в матричной форме,

$$Ax = b\ ,$$

где $A = [a_{ji}]_{j,i=1}^{m,n}$, $b = [b_j]_{j=1}^{m}$.

Пустое множество, множество, состоящее из одной точки и все пространство R^n также являются аффинными множествами (последее как пересечение пустого множества гиперплоскостей).

Упражнения

1.40. Проверить - принадлежит ли точка $\overline{x}$ прямой, проходящей через точки x и y? Если принадлежит, то найти расстояние от точки $\overline{x}$ до ближайшей точки отрезка $[x, y]$:

a) $x = (3, -4, 2, -1),\ y = (1, -2, 4, 0),\ \overline{x} = (-3, 2, 8, 2);$

b) $x = (0, -4, 2, 3),\ y = (-4, -7, 5, 4),\ \overline{x} = (8, 2, -4, 1);$

c) $x = (-4, 0, 4, 1, -1),\ y = (-3, 1, 3, 0, 0),\ \overline{x} = (1, 5, -1, -4, 4);$

d) $x = (2, 1, -1, 0, 1),\ y = (-1, 4, -3, 10, 1),\ \overline{x} = (-4, 7, -5, 3, 1);$

e) $x = (-3, 10, 4, 0, -8),\ y = (7, 0, -6, 10, 2),\ \overline{x} = (5, 2, -4, 8, 0).$

1.41. Найти точку пересечения прямых, проходящих через точки x^1, y^1 и x^2, y^2 :

a) $x^1 = (-3, 0, 7),\ y^1 = (-2, 3, 11),$

$x^2 = (-3, 4, 14),\ y^2 = (1, 8, 16);$

b) $x^1 = (7, 12, 4, 5),\ y^1 = (2, 4, 2, 1),$

$x^2 = (5, 4, 0, 4),\ y^2 = (8, 4, -2, 7);$

c) $x^1 = (-6, -2, 2, 6, 0),\ y^1 = (-4, 4, 6, -2, 6),$

$x^2 = (8, 6, -5, 5, 6),\ y^2 = (9, 9, -3, 1, 9);$

d) $x^1 = (3, 9, -5, 3, 1),\ y^1 = (5, 6, -5, 3, 0),$

$x^2 = (4, 0, 1, 12, 2),\ y^2 = (5, 1, -1, 9, 1).$

1.42. Треугольником с вершинами в точках $x, y, z \in R^n$, не лежащих на одной прямой, называется замкнутая ломаная, составленная из отрезков $[x, y]$, $[y, z]$ и $[z, x]$. В следующих примерах выяснить – является ли треугольник с вершинами x, y, z прямоугольным?, равнобедренным?, равносторонним?:

a) $x = (1, 2, -3, 1),\quad y = (0, 0, -4, 2),\quad z = (2, 0, -6, -5);$

b) $x = (2, 1, 0, 1),\quad y = (1, 0, -1, 2),\quad z = (3, 0, 1, 0);$

c) $x = (2, 4, 2, 4, 2),\quad y = (6, 4, 4, 4, 6),\quad z = (5, 7, 5, 7, 2);$

d) $x = (3, 0, 4, 2),\quad y = (4, 2, 5, 2),\quad z = (2, 0, 5, 4).$

1.43. Показать, что для заданных прямой и гиперплоскости возможны три ситуации:

– прямая имеет одну общую точку с гиперплоскостью (*пересекает* гиперплоскость);
– прямая целиком *принадлежит* гиперплоскости;
– прямая не имеет общих точек с гиперплоскостью (*параллельна* гиперплоскости).

5. Симметричные матрицы и квадратичные формы

Пусть $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ – симметричная матрица порядка n, $x \in R^n$. Функция n переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \langle Ax, x\rangle = x^T A x$$

называется *квадратичной формой* от переменных $x_1, \ldots, x_n$, а числа a_{ij} – ее *коэффициентами*. Матрица A называется *матрицей квадратичной формы*. Матрица A (квадратичная форма $\langle Ax, x\rangle$) называется *положительно* (*неотрицательно*) *определенной*, если для всех $x \neq 0$ выполняется условие $\langle Ax, x\rangle > 0$ (≥ 0). Если $\langle Ax, x\rangle < 0$ (≤ 0) для всех $x \neq 0$, то матрица A (квадратичная форма $\langle Ax, x\rangle$) называется *отрицательно* (*неположительно*) *определенной*. Положительно и отрицательно определенные матрицы (квадратичные формы) называются *знакоопределенными*, неотрицательно и неположительно определенные – *полуопределенными*, а квадратичные формы, принимающие как положительные, так и отрицательные значения (и соответствующие им матрицы)– *знаконеопределенными*. Ясно, что если матрица A положительно определена (полуопределена), то матрица $[-A]$ определена отрицательно (неположительно).

Справедливы следующие утверждения:

i. Матрица A положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\langle Ax, x\rangle \;\geq\; \mu \|x\|^2 \quad \forall x \in R^n ,$$

где $\mu > 0$ – наименьшее собственное число матрицы A .

ii. (*Критерий Сильвестра*) Матрица A положительно определена тогда и только тогда, когда все ее главные угловые миноры положительны.

iii. Матрица A положительно полуопределена тогда и только тогда, когда все ее главные (не только угловые) миноры неотрицательны (*главными минорами* матрицы A называются определители, соответствующие главным подматрицам матрицы A – таким ее подматрицам, которые образуются отбрасыванием строк и столбцов матрицы A с одинаковыми номерами).

П р и м е р 1.2. Квадратичная форма

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

положительно определена - главные угловые миноры матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(матрицы квадратичной формы) положительны:

$$\det_1 = 2, \quad \det_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \det_3 = \det A = 4.$$

П р и м е р 1.3. Рассмотрим квадратичную форму

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3. \tag{1.16}$$

Главные угловые миноры первого, второго и третьего порядков матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

равны, соответственно, 2, 3 и 0. Критерий Сильвестра не выполняется. Вычислим все главные миноры матрицы A. Главные миноры порядка один

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 2,$$

главные миноры порядка два

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

Главный минор порядка три, $\det A = 0$. Следовательно, квадратичная форма (1.16) – положительно полуопределенная.

Упражнения

1.44. Доказать, что если матрица A положительно определена, то положительно определены и матрицы $A^2 = AA$ и A^{-1}.

1.45. Доказать, что из положительной определенности матриц A и B следует положительная определенность матрицы $A + B$.

1.46. Пусть A и C – матрицы порядка n, матрица C – невырожденная. Доказать, что матрица $B = C^T AC$ положительно определена тогда и только тогда, когда положительно определена матрица A.

1.47. Пусть матрица $A \in M_{m,n}$. Тогда матрицы AA^T и $A^T A$ – неотрицательно определенные. Если $\mathrm{rank} A = n$, то матрица $A^T A$ положительно определена. Если $\mathrm{rank} A = m$, то положительно определена матрица AA^T. (Доказать).

1.48. Вывести критерии отрицательной определенности и полуопределенности матриц. (Замечание: если A – матрица порядка k, то $\det[-A] = (-1)^k \det A$.)

1.49. Исследовать на знакоопределенность следующие квадратичные формы:

a) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$;

c) $-3x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;

d) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;

e) $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1.50. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

a) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

d) $2x_1^2 + 4x_2^2 + \lambda x_3^2 + 6x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$.

6. Сходимость. Открытые и замкнутые множества

Открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in R^n$ называется множество

$$B(a, r) = \{x \in R^n : \|x - a\| < r\}.$$

Множество

$$B[a, r] = \{x \in R^n : \|x - a\| \leq r\}$$

называется *замкнутым шаром.* Открытый шар радиуса ε с центром в точке a называется также ε – *окрестностью* точки a и обозначается $O(a, \varepsilon)$. Когда говорят о шаре без каких-либо пояснений, то имеют в виду замкнутый шар. Наконец, множество точек $x \in R^n$, таких, что $\|x - a\| = r$ называется *сферой* радиуса r с центром в точке a.

Множество $X \subset R^n$ называется *ограниченным*, если оно содержится целиком в некотором шаре. Нетрудно показать, что множество X ограничено тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in X$ расстояние $\rho(x, y) = \|x - y\|$ ограничено некоторой фиксированной постоянной. Величина $D = \sup\limits_{x,y \in X} \|x - y\|$ называется *диаметром* (ограниченного) множества X и обозначается $\operatorname{diam} X$.

Последовательность $\{x^k\}$ из R^n называется *сходящейся* к точке $x \in R^n$ $(x^k \to x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $\|x^k - x\| < \varepsilon$ для всех $k \geq N$, то есть, если $x^k \in O(x, \varepsilon)$ для всех $k \geq N$. Другими словами, последовательность $\{x^k\}$ сходится к точке x, если $\lim\limits_{k \to \infty} \|x^k - x\| = 0$. Точка x называется *пределом последовательности* $\{x^k\}$, что обозначается как $x = \lim\limits_{k \to \infty} x^k$. Непосредственно из определения следует, что если последовательность $\{x^k\}$ сходится к точке x, то и всякая ее подпоследовательность сходится к той же самой точке.

Последовательность $\{x^k\}$ называется *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что $\|x^k - x^s\| < \varepsilon$ при $k, s \geq N$.

Теорема 1.5. (Критерий Коши). *Последовательность $\{x^k\} \in R^n$ сходится тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.*

Последовательность $\{x^k\}$ называется *ограниченной*, если существует постоянная $M > 0$, такая, что $\|x^k\| \le M$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. *Из любой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность* (теорема Больцано – Вейерштрасса).

Точка x называется *предельной точкой* последовательности $\{x^k\}$, если у этой последовательности имеется подпоследовательность, сходящаяся к x. Сходящаяся последовательность $x^k \to x$ имеет, очевидно, точку x своей предельной точкой, а других предельных точек уже не имеет. Несходящаяся последовательность может не иметь предельных точек, а может их иметь в любом количестве.

Точка $x \in R^n$ называется *предельной точкой* множества $X \subseteq R^n$ если любая ее ε – окрестность содержит точки из X, отличные от x. Для того, чтобы точка x была предельной для множества X, необходимо и достаточно чтобы в X существовала последовательность попарно различных точек, сходящаяся к x. Предельные точки множества X могут принадлежать, а могут не принадлежать множеству X. Множество X называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Пустое множество, множество, состоящее из конечного числа точек и все пространство R^n – замкнутые множества. Множество X называется *компактным*, если любая последовательность $\{x^k\} \in X$ имеет хотя бы одну предельную точку x, причем $x \in X$.

Точка x называется *внутренней точкой* множества X, если она входит в X вместе с некоторой своей ε – окрестностью. Совокупность всех внутренних точек множества X называется его *внутренностью* и обозначается $\mathrm{int} X$. Множество, все точки которого являются внутренними, называется *открытым множеством* или *областью*. Пустое множество и все пространство R^n – открытые множества.

Точка x называется *граничной точкой* множества X, если в любой ее ε – окрестности содержатся точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству X. Граничные точки сами могут принадлежать, а могут и не принадлежать множеству X. Совокупность всех граничных точек множества X называется его *границей* и обозначается через ∂X.

Всякая внутренняя точка множества, очевидно, является его предельной точкой. Однако, не всякая граничная точка множества будет его предельной точкой – исключение здесь составляют изолированные точки множества. (Точка $x \in X$ называется *изолированной точкой* этого множества, если существует ε – окрестность этой точки, не содержащая ни одной точки множества X, отличной от x.)

Упражнения

1.51. Показать, что следующие утверждения эквивалентны:

a) множество X ограничено;

b) для любой фиксированной точки $c \in R^n$ существует число $M = M(c)$ такое, что $\|x - c\| \leq M$ для всех $x \in X$;

c) существует число M такое, что $\|x\| \leq M$ для всех $x \in X$;

d) существует число D такое, что $\|x - y\| \leq D$ для всех $x, y \in X$.

1.52. Доказать, что если последовательность $\{x^k\}$ имеет предел, то этот предел – единственный.

1.53. Доказать, что если $x = \lim\limits_{k \to \infty} x^k$, $y = \lim\limits_{k \to \infty} y^k$, то

$$\lim_{k \to \infty} \|x^k - y^k\| = \|x - y\|$$

(лемма о непрерывности расстояния).

1.54. Доказать, что последовательность $\{x^k\} \in R^n$ сходится к точке $x \in R^n$ тогда и только тогда, когда $x_i^k \to x_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

1.55. Доказать, что сходящаяся последовательность ограничена.

1.56. Доказать, что открытый шар – открытое множество, замкнутый шар – замкнутое множество.

1.57. Доказать, что объединение любой совокупности открытых множеств и пересечение любой конечной совокупности открытых множеств снова являются открытыми множествами.

1.58. Доказать, что если множество X не имеет предельных точек, то оно замкнуто.

1.59. Доказать, что множество $X \in R^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено (указание: воспользоваться теоремой Больцано – Вейерштрасса).

Ответы и решения

Глава 1

1.1. a) Без ограничения общности можно принять, что линейно зависимы векторы $x^1, x^2, \ldots, x^l \ \ (l < k)$, то есть существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_l x^l = 0$. Тогда

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_l x^l + \lambda_{l+1} x^{l+1} + \ldots + \lambda_k x^k = 0$$

при $\lambda_{l+1} = \ldots = \lambda_k = 0$.

b) Противное противоречит предыдущему утверждению.

c) Пусть векторы $x^1, x^2, \ldots, x^k$ линейно зависимы, то есть, существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k = 0. \tag{I}$$

Пусть, для определенности, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда из (I) следует, что x^1 является линейной комбинацией векторов $x^2, \ldots, x^k$:

$$x^1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) x^2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) x^k.$$

Обратно, пусть один из векторов $x^1, x^2, \ldots, x^k$, скажем x^1, является линейной комбинацией остальных: $x^1 = \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k$ для некоторых $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Отсюда

$$(-1)x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k = 0.$$

d) Пусть векторы $x^1, x^2, \ldots, x^k$ линейно независимы и x – их линейная комбинация:

$$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k. \tag{I}$$

Предположим, что существует другое представление

$$x = \mu_1 x^1 + \mu_2 x^2 + \ldots + \mu_k x^k. \tag{II}$$

Вычитая почленно (I) из (II), получим, что

$$(\mu_1 - \lambda_1)x^1 + (\mu_2 - \lambda_2)x^2 + \ldots + (\mu_k - \lambda_k)x^k = 0.$$

Отсюда, так как векторы $x^1, x^2, \ldots, x^k$ линейно независимы,

$$\mu_1 - \lambda_1 = \mu_2 - \lambda_2 = \ldots = \mu_k - \lambda_k = 0.$$

e) Пусть хотя бы один из векторов $x^1, x^2, \ldots, x^k$, скажем x^1, равен нулю. Тогда $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k = 0$ при любых $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

f) Если $x \neq 0$, то $\lambda x = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$.

1.2. Так как пропорциональные векторы, очевидно, линейно зависимы, требуемое следует из 1.1.a).

1.3. Это утверждение есть частный случай 1.2.

1.4. a) Пусть система

$$z^1, z^2, \ldots, z^s \tag{I}$$

линейно выражается через систему

$$x^1, x^2, \ldots, x^k, \tag{II}$$

а система (II), в свою очередь, линейно выражается через систему

$$u^1, u^2, \ldots, u^t, \tag{III}$$

то есть

$$z^i = \lambda_{i1} x^1 + \lambda_{i2} x^2 + \ldots + \lambda_{ik} x^k,\ i = 1, 2, \ldots, s. \tag{IV}$$

$$x^j = \mu_{j1} u^1 + \mu_{j2} u^2 + \ldots + \mu_{jt} u^t,\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Отсюда

$$z^i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} x^j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \left(\sum_{r=1}^{t} \mu_{jr} u^r \right) = \sum_{r=1}^{t} \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \mu_{jr} \right) u^r,$$

$$i = 1, 2, \ldots, s.$$

Следовательно, система (I) линейно выражается через систему (III):

$$z^i = \gamma_{i1}u^1 + \gamma_{i2}u^2 + \ldots + \gamma_{it}u^t, \;\; i = 1, 2, \ldots, s,$$

где $\gamma_{ir} = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{ij}\mu_{jr}, \;\; i = 1, 2, \ldots, s, \; r = 1, 2, \ldots, t.$

b) Пусть система (I) линейно независима и, как и раньше, линейно выражается через систему (II), то есть справедливо представление (IV). Коэффициенты линейных комбинаций в представлении (IV) составляют систему векторов из R^k:

$$\lambda^i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{ik}), \;\; i = 1, 2, \ldots, s. \tag{V}$$

Предположим, что $s > k$. Тогда, в силу теоремы 1.1, система (V) линейно зависима, т.е. существуют числа μ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что

$$\sum_{i=1}^{s} \mu_i \lambda^i = 0,$$

или, в покоординатной записи,

$$\sum_{i=1}^{s} \mu_i \lambda_{ij} = 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{s} \mu_i z^i = \sum_{i=1}^{s} \mu_i \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} x^j \right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{s} \mu_i \lambda_{ij} \right) x^j = 0.$$

Но это противоречит линейной независимости системы (I). Следовательно $s \le k$.

c) Пусть, по–прежнему, система (I) линейно независима и линейно выражается через систему (II). Если система (II) – линейно зависимая, то она линейно выражается через некоторую свою максимальную линейно независимую подсистему, состоящую из $r < k$ векторов. Тогда, в силу a), и система (I) линейно выражается через эту подсистему и, в силу b), $s \le r < k$.

d) Это утверждение с очевидностью вытекает из b).

1.5. По определению, всякая подсистема одной и той же системы векторов линейно выражается через любую максимальную линейно независимую подсистему этой системы. Следовательно, любые две максимальные линейно независимые подсистемы одной и той же системы векторов эквивалентны и, в силу 1.4.d), содержат одинаковое число векторов.

Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^k$ – линейно независимая подсистема некоторой системы векторов. Если она не является максимальной, то, по определению, найдется вектор x^{k+1} такой, что подсистема $x^1, x^2, \ldots, x^k, x^{k+1}$ будет линейно независимой. Положим $k = k + 1$ и повторим все рассуждения сначала. В крайнем случае через $s - k$ шагов, где s – число векторов данной системы, получим, что вся система линейно независима.

1.6. Линейная комбинация

$$\lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \ldots + \lambda_n e^n = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

равна нулю тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Следовательно, система $e^1, e^2, \ldots, e^n$ линейно независима. Далее, для любого вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет место представление

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \ldots + x_n e^n \,. \tag{I}$$

Таким образом, любой вектор $x \in R^n$ является линейной комбинацией векторов $e^1, e^2, \ldots, e^n$ и, стало быть, эта система векторов – максимальная линейно независимая система (базис), а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ –координаты вектора x в этом базисе (очевидно, что представление (I) – единственное).

1.7. Доказательство этого утверждения практически дословно повторяет рассуждения из 1.5. Нужно лишь учитывать, что число линейно независимых векторов любой системы из R^n не превосходит n и что естественный базис содержит ровно n векторов.

1.8. Любой ненулевой вектор – это минимальная линейно независимая система. Дополняя эту систему до максимальной линейно независимой системы, получим некоторый базис. Очевидно, таких базисов – бесконечно много.

1.9. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – некоторый базис в R^n,

$$x = \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_n x^n, \quad y = \mu_1 x^1 + \ldots + \mu_n x^n.$$

Тогда

$$x + y = (\lambda_1 + \mu_1)x^1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n)x^n, \qquad \text{(I)}$$

$$\gamma x = (\gamma\lambda_1)x^1 + \ldots + (\gamma\lambda_n)x^n. \qquad \text{(II)}$$

В силу единственности разложения вектора по базису представления (I) и (II) – единственные.

1.10. Коэффициенты линейной комбинации

$$w = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots + \lambda_n x^n$$

имеют вид:

$$\begin{array}{lcllllllll}
w_1 & = & \lambda_1 x_{11}\,, & & & & & & & \\
w_2 & = & \lambda_1 x_{12} & + & \lambda_2 x_{22}\,, & & & & & \\
w_3 & = & \lambda_1 x_{13} & + & \lambda_2 x_{23} & + & \lambda_3 x_{33}\,, & & & \\
\multicolumn{10}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
w_n & = & \lambda_1 x_{1n} & + & \lambda_2 x_{2n} & + & \lambda_3 x_{3n} & + \ \ldots \ + & \lambda_n x_{nn}\,. &
\end{array}$$

Очевидно, что $w = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

1.11. a) $w = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 = (2, 4, 7)$; *b*) $w = (12, -4, 18, 10)$;
c) $w = (2, -10, 1, 9, 0)$; *d*) $w = 0$.

1.12. a) $x = (-3, 4, -3)$; *b*) $x = (1, 1, 2, 3)$; *c*) $x = (-23, 10, 16, 24)$.

1.13. $x = (1, 1, 1, 1)$, $y = (2, 0, 1, -1)$, $z = (3, -4, 0, -1)$.

1.14. $x = (0, 1, 0)$.

1.15. По определению, ранг матрицы A^T равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов и, по теореме 1.2, наивысшему порядку ее отличных от нуля миноров. Но столбцы матрицы A^T являются строками матрицы A, а определитель при транспонировании не меняется.

1.16. Это утверждение вытекает непосредственно из определения ранга матрицы и теоремы 1.2.

1.17. Пусть $\overline{x}$ – решение системы $Ax = b$, где $A \in M_{m,n}$. Тогда b – линейная комбинация столбцов матрицы A : $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x}_i a^i$. Следовательно, максимальное число линейно независимых столбцов матрицы $[\,A\ b\,]$ равно максимальному числу столбцов матрицы A : $\operatorname{rank}[\,A\ b\,] = \operatorname{rank} A$. Обратно, пусть $\operatorname{rank}[\,A\ b\,] = \operatorname{rank} A$. Тогда любая максимальная линейно независимая система столбцов матрицы A является таковой и для матрицы $[\,A\ \ b\,]$. Но это означает, что вектор b можно представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы A.

1.18. Пусть $\overline{x} \neq 0$ – решение системы $Ax = 0$. Следовательно, линейная комбинация столбцов матрицы A с коэффициентами $\overline{x}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, равна нулю – столбцы матрицы A линейно зависимы. В силу 1.16 отсюда следует, что $\det\, A = 0$. Обратно, если $\det\, A = 0$, то в силу 1.16 столбцы матрицы A линейно зависимы и, следовательно, существует вектор $\overline{x} \neq 0$ такой, что $A\overline{x} = 0$.

1.19. Если $\operatorname{rank} A = m$, то всякая максимальная линейно независимая система столбцов матрицы A является базисом в R^m. Следовательно, $\operatorname{rank}\,[\,A\ b\,] = m$.

1.20. По определению, $r = \operatorname{rank}\{a^1, a^2, \ldots, a^k\} = \operatorname{rank}\,[\,a^1\,a^2\ \ldots a^k\,]$:

$a)\ r = 2;\ \ b)\ r = 1;\ \ c)\ r = 3;\ \ d)\ r = 2;\ \ e)\ r = 3;\ \ f)\ r = 4.$

1.21. a) $\{a^1, a^2\}$, $\{a^2, a^3\}$;

b) $\{a^1, a^2\}$, $\{a^1, a^3\}$, $\{a^1, a^4\}$, $\{a^2, a^3\}$, $\{a^2, a^4\}$, $\{a^3, a^4\}$.

1.22. a) База: $\{a^1, a^2\};\ a^3 = 2a^1 + a^2,\ a^4 = a^1 - a^2$.

b) База: $\{a^1, a^2, a^3\};\ a^4 = 3a^1 + a^3$.

1.23. a) Векторы a^1, a^2, a^3 линейно независимы. Следовательно, система $Ax = b$, где $A = [\,a^1\ a^2\ a^3\,]$, имеет единственное решение при любом λ;

b) $\operatorname{rank}\,[\,a^1\ a^2\ a^3\,] = 2 \neq 3 = \operatorname{rank}\,[\,a^1\ a^2\ a^3\ \ b\,]$ при $\lambda = 12$;

$\operatorname{rank}\,[\,a^1\ a^2\ a^3\,] = \operatorname{rank}\,[\,a^1\ a^2\ a^3\ \ b\,] = 3$ при $\lambda \neq 12$;

c) $\lambda = 15$; d) ни при каком λ.

1.24. Пусть векторы $x, y, \ldots, z \neq 0$ и попарно ортогональны. Предположим, что существуют числа $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z = 0. \tag{I}$$

Пусть, для определенности, $\alpha \neq 0$. Тогда, умножая обе части равенства (I) скалярно на x, получим, что $\alpha\langle x, x\rangle = \alpha\|x\|^2 = 0$. Противоречие.

1.25. Пусть $x, y \in R^n,\ \lambda$ – число. По определению нормы

$$\|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \|x\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0.$$

То есть, при любых $x, y \in R^n$ квадратный относительно λ трехчлен, стоящий в левой части этого неравенства не отрицателен. Следовательно, его дискриминант

$$\langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2 \leq 0,$$

причем при $x, y \neq 0$ равенство нулю здесь возможно в том и только в том случае, когда $x = \lambda y$. Перенося $\|x\|^2 \, \|y\|^2$ в правую часть и извлекая квадратный корень из обеих частей полученного неравенства, приходим к неравенству Коши–Буняковского.

1.26 – 1.31. По определению нормы

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2, \tag{I}$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2. \tag{II}$$

Отсюда следуют тождества

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big), \tag{III}$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big),$$

$$\|x + y\|^2 \cdot \|x - y\|^2 = \big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)^2 - 4\langle x, y\rangle^2. \tag{IV}$$

Тождество (III) геометрически означает, что *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон*). Из (IV), с одной стороны, следует, что

$$\|x + y\|^2 \cdot \|x - y\|^2 \leq \big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)^2.$$

С другой стороны, в силу неравенства Коши–Буняковского,

$$\|x + y\|^2 \cdot \|x - y\|^2 \geq \big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = \big(\|x\|^2 - \|y\|^2\big)^2.$$

Отсюда

$$\big|\|x\|^2 - \|y\|^2\big| \leq \|x + y\| \cdot \|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Левое неравенство превращается в равенство в том и только том случае, если векторы x и y пропорциональны или хотя бы один из них равен нулю, правое – тогда и только тогда, когда векторы x и y ортогональны.

Используя в (I) и (II) неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\, \|x\| + \|y\| \,)^2\,,$$

$$\|x-y\|^2 \geq \|x\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\,\|x\| - \|y\|\,)^2\,,$$

или

$$\|x+y\| \leq \ \|x\| + \|y\|, \tag{V}$$

$$\|x-y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|. \tag{VI}$$

Геометрически неравенства (V) и (VI) означают, что *длина любой стороны всякого треугольника не больше суммы длин двух других сторон.* Из (V) и (VI) получим, что

$$\big|\|x-z\| - \|y-v\|\big| \leq \|(x-z)-(y-v)\| =$$
$$= \|(x-y)+(v-z)\| \leq \|x-y\| + \|z-v\|.$$

Наконец, из (I) следует, что $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ тогда и только тогда, когда $\langle x, y\rangle = 0$ (*квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*).

1.32. Если векторы $x^1, x^2, \ldots, x^k$ попарно ортогональны, то

$$\|x^1 + x^2 + \ldots + x^k\|^2 = \big\langle x^1 + x^2 + \ldots + x^k, x^1 + x^2 + \ldots + x^k\big\rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \|x^i\|^2 + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}\big\langle x^i, x^j\big\rangle = \|x^1\|^2 + \|x^2\|^2 + \ldots + \|x^k\|^2.$$

Обратное в общем случае не верно. Например, если $x^1 = (1,0)$, $x^2 =$ $= (0,1)$, $x^3 = (1,-1)$, то $\|x^1 + x^2 + x^3\|^2 = \|x^1\|^2 + \|x^2\|^2 + \|x^3\|^2 = 4$, но $\big\langle x^1, x^3\big\rangle = 1$, $\big\langle x^2, x^3\big\rangle = -1$.

1.33. Положим $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $e = (1, 1, \ldots, 1) \in R^n$. В силу неравенства Коши–Буняковского $\langle x, e\rangle^2 \leq \|x\|^2\|e\|^2$ откуда и следует требуемое.

1.34. a) $\lambda = -5$; b) $\lambda = \pm 2$; c) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$; d) такого λ не существует.

1.35. Так как $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, то $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E$ и $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E$. Следовательно, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$.

1.36. Для любых i, j, k, l минор 2–го порядка матрицы xy^T

$$\begin{vmatrix} (xy^T)_{ik} & (xy^T)_{il} \\ (xy^T)_{jk} & (xy^T)_{jl} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i y_k & x_i y_l \\ x_j y_k & x_j y_l \end{vmatrix} = 0.$$

1.37.

$$A^{-1}A = \left[E - \frac{1}{1+x^Ty}xy^T\right]\left[E + xy^T\right] =$$

$$= E + xy^T - \frac{1}{1+x^Ty}xy^T - \frac{1}{1+x^Ty}xy^Txy^T =$$

$$= E + xy^T\frac{x^Ty}{1+x^Ty} - \frac{1}{1+x^Ty}x(y^Tx)y^T =$$

$$= E + xy^T\frac{x^Ty}{1+x^Ty} - \frac{y^Tx}{1+x^Ty}xy^T = E.$$

Аналогично, $AA^{-1} = E$.

1.38.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(a^k(b^k)^T)_{ij} = \big(\sum_{k=1}^{n} a^k(b^k)^T\big)_{ij},$$

$$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, r.$$

1.39. Прежде всего заметим, что евклидову норму матрицы $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ можно рассматривать как евклидову норму n^2 – мерного вектора $(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn})$. Поэтому неравенство 4) следует из неравенства треугольника для векторов. Далее,

$$\|A\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|a^{k\cdot}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|a^{\cdot k}\|^2\,,$$

где через $a^{k\cdot}$ и $a^{\cdot k}$ обозначены строки и столбцы, соответственно, матрицы A. Тогда, с учетом неравенства Коши–Буняковского,

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\langle a^{k\cdot}, x\rangle^2 \le \sum_{k=1}^{n} \|a^{k\cdot}\|^2\|x\|^2 = \|x\|^2\sum_{k=1}^{n} \|a^{k\cdot}\|^2 = \|A\|^2 \cdot \|x\|^2\,.$$

Отсюда следует 6). И, наконец, так как $AB = [\ Ab^{\cdot 1}\ \ Ab^{\cdot 2} \ldots\ Ab^{\cdot n}\ ]$, то, с учетом предыдущего неравенства,

$$\|AB\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|Ab^{\cdot k}\|^2 \le \sum_{k=1}^{n} \|A\|^2\|b^{\cdot k}\|^2 = \|A\|^2\sum_{k=1}^{n} \|b^{\cdot k}\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2\,.$$

Отсюда следует 5).

1.40. a) По определению, точка $\overline{x}$ принадлежит прямой, проходящей через точки x и y, тогда и только тогда, когда справедливо представление $\overline{x} = x+\lambda[y-x]$. Подставляя сюда координаты векторов $\overline{x}, x$ и y, приходим к системе

$$\begin{array}{rcrcr} -3 & = & 3 & - & 2\lambda \\ 2 & = & -4 & + & 2\lambda \\ 8 & = & 2 & + & 2\lambda \\ 2 & = & -1 & + & \lambda. \end{array}$$

Решение этой системы $\lambda = 3$. Следовательно, точка $\overline{x}$ принадлежит прямой, проходящей через точки x и y. Направляющий вектор этой прямой $p = y - x$. Так как $\lambda = 3$, это означает, что точкой отрезка $[x, y]$, ближайшей к точке $\overline{x}$, будет точка y; $\rho(\overline{x}, y) = \|\overline{x} - y\| = 2\sqrt{13}$.

b) Принадлежит. Ближайшая к $\overline{x}$ точка – x, $\rho(\overline{x}, x) = 2\sqrt{35}$.

c) Принадлежит. Ближайшая к $\overline{x}$ точка – y, $\rho(\overline{x}, y) = 4\sqrt{5}$.

d) Не принадлежит.

e) Точка $\overline{x} \in [x, y]$.

1.41. a) Точка пересечения $\overline{x} = (-1, 6, 15)$; b) $\overline{x} = y^1$; c) прямые не пересекаются; d) $\overline{x} = (7, 3, -5, 3, -1)$.

1.42. a) Прямоугольный; b) равнобедренный; c) равносторонний; d) прямоугольный равнобедренный.

1.43. Прямая $\overline{x} + \lambda p$ и гиперплоскость $\langle a, x\rangle = \beta$ имеют общие точки тогда и только тогда, когда существует число λ такое, что

$$\langle a, \overline{x} + \lambda p\rangle = \langle a, \overline{x}\rangle + \lambda\langle a, p\rangle = \beta.$$

Возможны следующие случаи:
i. $\langle a, p\rangle = 0$ (вектор нормали гиперплоскости ортогонален направляющему вектору прямой). Тогда, если точка $\overline{x}$ принадлежит гиперплоскости ($\langle a, \overline{x}\rangle = \beta$), то и вся прямая принадлежит гиперплоскости; в противном случае прямая и гиперплоскость не имеют общих точек.
ii. $\langle a, p\rangle \neq 0$. Прямая и гиперплоскость имеют одну общую точку $\overline{x}+\overline{\lambda}p$, где $\overline{\lambda} = \big[\beta - \langle a, \overline{x}\rangle\big]/\langle a, p\rangle$.

1.44. Пусть A – положительно определенная матрица. Тогда

$$\langle A^2x, x\rangle = \langle AAx, x\rangle = \langle Ax, A^Tx\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 > 0 \ \ \forall x \neq 0$$

(так как матрица A – невырожденная, то система $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение). Далее, для любого $x \neq 0$ вектор $y = A^{-1}x \neq 0$ и, следовательно,

$$\langle A^{-1}x, x\rangle = \langle y, Ay\rangle > 0.$$

1.45. Доказательство очевидно.

1.46. Так как матрица C – невырожденная, то $Cx \neq 0$ для любого $x \neq 0$ и любой вектор $x \neq 0$ однозначно представим в виде $x = Cy$, где $y \neq 0$. Следовательно,

$$\langle Bx, x\rangle = \langle C^T ACx, x\rangle = \langle ACx, Cx\rangle > 0 \ \ \forall x \neq 0\,,$$

если A положительно определена;

$$\langle Ax, x\rangle = \langle ACy, Cy\rangle = \langle By, y\rangle > 0 \ \ \forall x \neq 0\,,$$

если B положительно определена.

1.47. Поскольку

$$\langle AA^T x, x\rangle = \|A^T x\|^2\,, \quad \langle A^T Ax, x\rangle = \|Ax\|^2\,, \tag{I}$$

то первое утверждение очевидно. Далее, если $rank\,A = n$, то $Ax \neq 0$ для любого $x \neq 0$, если же $rank\,A = m$, то $A^T x \neq 0$ для любого $x \neq 0$. Отсюда и из равенств (I) следуют второе и третье утверждения.

1.48. Матрица A отрицательно определена тогда и только тогда, когда все ее главные угловые миноры нечетного порядка отрицательны, а главные угловые миноры четного порядка положительны. Матрица A отрицательно полуопределена тогда и только тогда, когда все ее главные миноры нечетного порядка неположительны, а все главные миноры четного порядка неотрицательны.

1.49. Квадратичная форма

a) положительно определена;

b) неотрицательно определена;

c) отрицательно определена;

d) знаконеопределенная;

e) знаконеопределенная.

1.50. a) $\lambda > 2$; b) $-\sqrt{15}/3 < \lambda < \sqrt{15}/3$; c) $-4/5 < \lambda < 0$; d) такого λ не существует.

1.51. Пусть X – ограниченное множество, то есть, по определению, существуют точка $a \in R^n$ и число r такие, что $\|x - a\| \le r$ для всех $x \in X$. Тогда по неравенству треугольника для любой фиксированной точки $c \in R^n$

$$\|x - c\| \le \|x - a\| + \|a - c\| \le M = r + \|a - c\| \quad \forall\, x \in X.$$

Полагая здесь $c = 0$, получим утверждение c). Таким образом, a) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). Импликация c) $\Rightarrow$ a) очевидна – множество X содержится в шаре радиуса M с центром в начале координат. Опять же по неравенству треугольника, если $X \subset B[a, r]$, то

$$\|x - y\| \le \|x - a\| + \|y - a\| \le D = 2r \quad \forall\, x, y \in X,$$

так что a) $\Rightarrow$ d). Обратно, если $\|x - y\| \le D$ для всех $x, y \in X$, то, фиксируя здесь произвольную точку y, приходим к утверждению a).

1.52. Предположим, что $x^k \to x$ и вместе с тем $x^k \to y$. Тогда, по определению, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, начиная с которого выполняются оба неравенства

$$\|x^k - x\| < \varepsilon, \qquad \|x^k - y\| < \varepsilon\,,$$

откуда по неравенству треугольника

$$\|x - y\| \le \|x^k - x\| + \|x^k - y\| < 2\varepsilon\,.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то $\|x - y\| = 0$ и, следовательно, $x = y$.

1.53. Пусть $x^k \to x$, $y^k \to y$ и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $k = N$, начиная с которого

$$\|x^k - x\| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \|y^k - y\| < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Тогда (см. упр.1.27)

$$\big|\|x^k - y^k\| - \|x - y\|\big| \le \|x^k - x\| + \|y^k - y\| < \varepsilon$$

для всех $k \ge N$.

1.54. Для доказательства заметим, что для любых векторов $x, y \in R^n$ справедливы неравенства

$$\max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \le \|x-y\| \le \sqrt{n} \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \,. \tag{I}$$

Левое неравенство (I) следует из очевидного неравенства

$$|x_i - y_i| \le \|x - y\| \ , \ i = 1, \dots, n \,.$$

Правое – из неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \le n \cdot \max_{i=1,\dots,n} (x_i - y_i)^2 = n \cdot (\max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \,)^2 \,.$$

Дальнейшее очевидно.

1.55. Пусть $x^k \to x$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем для него номер N, начиная с которого все точки последовательности попадают в ε – окрестность точки x и, следовательно, ограничены по норме некоторым числом M_0: $\|x^k\| \le M_0$. Но тогда вся последовательность $\{x^k\}$ ограничена по норме числом $M = \max\{\|x^1\|, \dots, \|x^{N-1}\|, M_0\}$.

1.56. Пусть $x \in B(a, r) : \|x - a\| < r$. Положим $\varepsilon = r - \|x - a\|$ и рассмотрим произвольную точку $z \in O(x, \varepsilon)$. По неравенству треугольника

$$\|z - a\| \le \|z - x\| + \|x - a\| < \varepsilon + \|x - a\| = r \,.$$

Но это значит, что точка x принадлежит шару $B(a, r)$ вместе со своей ε – окрестностью.

Пусть теперь x – предельная точка множества $B[a, r]$ и $\{x^k\}$ – последовательность попарно различных точек из $B[a, r]$, сходящаяся к x : $\|x^k - a\| \le r$ для всех $k = 1, 2, \dots,$ $x^k \to x$. Переходя в неравенстве $\|x^k - a\| \le r$ к пределу при $k \to \infty$, получим, в силу леммы о непрерывности расстояния (см. упр.1.53), что

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - a\| = \|x - a\| \le r.$$

Следовательно $x \in B[a, r]$.

1.57. Первое утверждение вытекает из самого определения открытых множеств. Докажем второе. Пусть множества $X_1, \dots, X_k$ – открытые и точка $x \in X = \bigcap\limits_{i=1}^{k} X_i$. По определению, существуют положительные числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ такие, что $O(x, \varepsilon_i) \subset X_i$, $i = 1, \ldots, k$. Положим ε равным наименьшему из чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$. Тогда, очевидно, $O(x, \varepsilon) \subset X_i$ для всех $i = 1, \ldots, k$ и, следовательно, точка x входит в множество X вместе со своей ε – окрестностью.

1.58.

1.59.