Федеральное агентство по образованию

Иркутский государственный университет

А. И. Беников

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Допущено учебно-методическим советом по прикладной математике и информатике УМО по классическому университетскому образованию для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 010200 "Прикладная математика и информатика" и по направлению 510200 "Прикладная математика и информатика"

Иркутск 2005

УДК 519.852(075.8)

ББК 22.18.я73

Б46

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Срочко;

д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Дыхта

Беников А.И. Линейное программирование: Учебное пособие. – Иркутск: Иркутский университет, 2005. – 147 с.

ISBN 5-9624-0054-2

Книга написана на основе курса лекций, читавшихся автором на протяжении ряда лет на математическом факультете Иркутского государственного университета. Рассматриваются основные задачи линейного программирования, в том числе транспортная задача и целочисленные задачи линейного програмирования. Изложение теории и методов решения задач линейного программирования базируется на знаменитом симплекс-методе. Для овладения материалом книги достаточно знания основ линейной алгебры.

Книга предназначена для студентов и аспирантов математических и экономических специальностей вузов.

Библиогр. 24 назв.

ISBN 5-9624-0054-2

Оглавление

Глава 1
Введение в линейное программирование

§1. Постановка задачи линейного программирования

1.1. *Задачей линейного программирования (ЛП) называется задача нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной формы на множестве, задаваемом системой линейных равенств и неравенств.*

Таким образом, *общая задача линейного программирования* имеет следующий вид:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max\,(\min); \tag{1.1}$$

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{1.2}$$

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j, \quad j = r+1, \ldots, m, \tag{1.3}$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in I \subseteq \{1, \ldots, n\}. \tag{1.4}$$

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *целевой функцией*, символ „$\to \max$“ читается как „максимизировать“, „найти максимум“, символ „$\to \min$“ – „минимизировать“, „найти минимум“. Точку с запятой в (1.1) можно читать как „при условиях, что...“. Задача на максимум сводится к задаче на минимум, а задача на минимум – к задаче на максимум изменением знака целевой функции. Поэтому можно рассматривать либо только задачи на максимум, либо только задачи на минимум. Для определенности мы будем рассматривать задачи на максимум.

Равенства (1.2) и неравенства (1.3) называются *условиями* или *ограничениями* задачи. Если в задаче есть условия вида

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \geq b_j \ ,$$

то они сводятся к условиям (1.3) умножением обеих частей неравенства на (–1). *Условия неотрицательности переменных* (1.4) являются частным случаем условий (1.3): $-x_i \leq 0$. Однако, в линейном программировании принято рассматривать их отдельно. Если по условиям задачи некоторая переменная $x_i \leq 0$, то ее можно считать неотрицательной, изменив знаки соответствующих коэффициентов c_i и a_{ji} (осуществив замену переменных $-x_i := x_i$).

Общая задача ЛП называется также *задачей со смешанными условиями* – равенствами (1.2) и неравенствами (1.3) (условия неотрицательности переменных, как было отмечено, рассматриваются отдельно). Теоретическое исследование и построение методов решения задач ЛП удобно проводить для задач с однотипными условиями:

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max \ ; \tag{1.5}$$

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j, \ j = 1, \ldots, m \ , \tag{1.6}$$

$$x_i \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, n \ , \tag{1.7}$$

либо

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max \ ; \tag{1.8}$$

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j, \ j = 1, \ldots, m \ , \tag{1.9}$$

$$x_i \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, n \ . \tag{1.10}$$

Задача (1.5) – (1.7) называется задачей в *канонической форме (канонической задачей ЛП)*, задача (1.8) – (1.10) – задачей в *стандартной форме (стандартной задачей ЛП)*. Формально, каноническая задача следует из общей задачи ЛП при $r = m$, $I = \{1, \ldots, n\}$, а стандартная – при $r = 0$ и $I = \{1, \ldots, n\}$.

Любая задача ЛП легко приводится как к канонической, так и к стандартной форме, в том числе, каноническая – к стандартной, а стандартная – к канонической. Рассмотрим основные приемы такого сведения.

Переход от равенств к неравенствам достаточно очевиден – каждое равенство (1.6) эквивалентно двум неравенствам противоположного смысла:

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \le b_j \ ,$$
$$-a_{j1}x_1 - \ldots - a_{jn}x_n \le -b_j \ .$$

Следовательно, каноническая задача (1.5) – (1.7) эквивалентна стандартной задаче

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max \ ;$$
$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \le b_j, \ j = 1, \ldots, 2m \ ,$$
$$x_i \ge 0 \ , \ i = 1, \ldots, n \ ,$$

где $a_{ji} = -a_{j-m,i}, \ b_j = -b_{j-m}$ для $j = m+1, \ldots, 2m$.

Переход от неравенств к равенствам осуществляется введением дополнительных переменных. А именно, с каждым ограничением (1.9) связывается *дополнительная переменная*

$$x_{n+j} = b_j - (a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n).$$

Очевидно, что $x_{n+j} \ge 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.9). Следовательно, условие (1.9) можно заменить парой условий

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n + x_{n+j} = b_j,$$
$$x_{n+j} \ge 0.$$

Таким образом, стандартная задача (1.8) – (1.10) эквивалентна канонической задаче

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max \ ; \tag{1.11}$$
$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n + x_{n+j} = b_j, \ j = 1, \ldots, m \ , \tag{1.12}$$
$$x_i \ge 0 \ , \ i = 1, \ldots, n+m \ . \tag{1.13}$$

Отметим, что, в отличие от исходной задачи (1.8) – (1.10), имеющей n переменных, в задаче (1.11) – (1.13) число переменных равно $n + m$, причем последние (дополнительные) m переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами: $c_{n+1} = \ldots = c_{n+m} = 0$.

Рассмотрим случай, когда некоторая переменная x_i задачи ЛП не имеет ограничений на знак. Положим в этом случае

$$\overline{x}_i = \max\{0, x_i\}, \quad \overline{\overline{x}}_i = \max\{0, -x_i\}.$$

Тогда, очевидно, $\overline{x}_i \geq 0,\ \overline{\overline{x}}_i \geq 0,\ x_i = \overline{x}_i - \overline{\overline{x}}_i$. То есть, в рассматриваемом случае переменную x_i можно заменить разностью двух неотрицательных переменных.

П р и м е р 1.1. Приведем к канонической форме следующую задачу ЛП:

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max; \tag{1.14}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \tag{1.15}$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3, \tag{1.16}$$

$$x_1 \geq 0. \tag{1.17}$$

Полагая здесь $x_2 = \overline{x}_2 - \overline{\overline{x}}_2,\ x_3 = \overline{x}_3 - \overline{\overline{x}}_3,\ \overline{x}_2 \geq 0,\ \overline{\overline{x}}_2 \geq 0,\ \overline{x}_3 \geq 0,\ \overline{\overline{x}}_3 \geq 0$, и, добавляя к левой части неравенства (1.16) неотрицательную переменную x_4 , приходим к канонической задаче

$$-x_1 - 2\overline{x}_2 + 2\overline{\overline{x}}_2 + \overline{x}_3 - \overline{\overline{x}}_3 \to \max; \tag{1.18}$$

$$x_1 + \overline{x}_2 - \overline{\overline{x}}_2 + \overline{x}_3 - \overline{\overline{x}}_3 = 1, \tag{1.19}$$

$$x_1 - \overline{x}_2 + \overline{\overline{x}}_2 + 2\overline{x}_3 - 2\overline{\overline{x}}_3 + x_4 = 3, \tag{1.20}$$

$$x_1,\ \overline{x}_2,\ \overline{\overline{x}}_2,\ \overline{x}_3,\ \overline{\overline{x}}_3,\ x_4 \geq 0. \tag{1.21}$$

Переменные этой задачи переобозначим следующим образом: $z_1 = x_1$, $z_2 = \overline{x}_2,\ z_3 = \overline{\overline{x}}_2,\ z_4 = \overline{x}_3,\ z_5 = \overline{\overline{x}}_3,\ z_6 = x_4$. Тогда задача (1.18) – (1.21) принимает вид:

$$-z_1 - 2z_2 + 2z_3 + z_4 - z_5 \to \max; \tag{1.22}$$

$$z_1 + z_2 - z_3 + z_4 - z_5 = 1, \tag{1.23}$$

$$z_1 - z_2 + z_3 + 2z_4 - 2z_5 + z_6 = 3, \tag{1.24}$$

$$z_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6. \tag{1.25}$$

Связь между переменными исходной задачи (1.14) – (1.17) и переменными задачи (1.22) – (1.25) задается формулами $x_1 = z_1, x_2 = z_2 - z_3$, $x_3 = z_4 - z_5$.

1.2. Всюду ниже через R^n будем обозначать n – мерное евклидово пространство – совокупность n – мерных векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n), \ldots$ со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad .$$

Через $M_{m,n}$ будем обозначать множество всех матриц размерности $m \times n$, а через M_n – множество квадратных матриц порядка n.

Известно, что каждый вектор $x \in R^n$ можно отождествить с матрицей, состоящей из одного столбца (вектор-столбцом) или из одной строки (вектор-строкой). Мы будем считать векторы $x \in R^n$ вектор-столбцами:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Таким образом, запись $x = (x_1, \dots, x_n)$ означает, что это – вектор-столбец $x \in R^n$. Запись же $[x_1 \dots x_n]$ будет означать, что это – вектор-строка x^T, где символ „ ^{T} “ означает транспонирование матрицы (вектора). Если векторы $x,\ y \in R^n$, то по правилу умножения матриц,

$$x^T y = [x_1 \dots x_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\ .$$

То есть, в терминах матриц скалярное произведение $\langle x, y \rangle = x^T y$. Напомним также, что равенства и неравенства между векторами понимаются в покомпонентном смысле:

$$x = y\ \sim\ x_i = y_i\ ,\ i = 1, \dots, n,$$

$$x \geq y\ \sim\ x_i \geq y_i\ ,\ i = 1, \dots, n.$$

В частности, если $x \in R^n$, то $x \geq 0$ означает, что $x_i \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, n \quad (0 = (0, \dots, 0) \in R^n)$.

1.3. Рассмотрим, для определенности, каноническую задачу (1.5)–(1.7). Введем векторы $c = (c_1, \dots, c_n),\ x = (x_1, \dots, x_n),\ b = (b_1, \dots, b_m)$ и матрицу

$$A = [a_{ji}]_{j,i=1}^{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\ .$$

Тогда, очевидно, задачу (1.5)–(1.7) можно записать в следующем виде:

$$\langle c, x \rangle \to \max;\ \ Ax = b,\ x \geq 0\ . \tag{1.26}$$

Вектор c называется *целевым вектором*, вектор x – *планом задачи*, вектор b – *вектором ограничений*, а матрица A – *матрицей условий.* Столбцы матрицы A, векторы

$$a^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ \dots\ , \quad a^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

называются *векторами условий.* Левую часть условия $Ax = b$ иногда удобно представлять в виде линейной комбинации (с коэффициентами x_i) векторов условий:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i a^i \ .$$

Множество планов, удовлетворяющих условиям задачи, называется *допустимым множеством* или *множеством допустимых планов.* Мы будем обозначать его через X, а саму задачу (1.26) можем тогда записать в виде

$$f(x) = \langle c, x\rangle \to \max; \quad x \in X \ ,$$
$$X = \{x \in R^n : \ Ax = b, x \geq 0\} \ .$$

Векторы $x \in X$ называются, естественно, *допустимыми векторами* или *допустимыми планами.* В дальнейшем мы будем иметь дело только с допустимыми планами, поэтому, если не оговорено противное, под множеством планов и планом будем понимать допустимое множество и допустимый план, соответственно.

Решением задачи ЛП или *оптимальным планом* называется точка максимума функции $f(x) = \langle c, x\rangle$ на множестве X. Оптимальные планы будем обозначать через x^*, а *множество оптимальных планов* – через X_*. В задачах на экстремум множество точек максимума функции $f(x)$ на множестве X принято обозначать как $\operatorname*{Argmax}_X f(x)$, а произвольную точку максимума – как $\operatorname*{argmax}_X f(x)$. Таким образом,

$$X_* = \operatorname*{Argmax}_X f(x), \quad x^* = \operatorname*{argmax}_X f(x) \ .$$

Задача (1.26) представляет собой *матричную форму* канонической задачи (1.5)–(1.7). Матричная форма стандартной задачи (1.8)–(1.10) имеет вид:

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax \le b,\ x \ge 0,$$

где $c, x \in R^n,\ b \in R^m,\ A \in M_{m,n}$. Эквивалентная этой задаче каноническая задача (1.11)–(1.13) может быть представлена следующим образом:

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax + u = b,\ x \ge 0,\ u \ge 0, \tag{1.27}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m) = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ – вектор дополнительных переменных. Отметим, что в задаче (1.27) целевой вектор $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_n, 0, \ldots, 0) = (c, 0) \in R^{n+m}$, матрица условий $\overline{A} = [A \;\; E]$, где $E \in M_m$ – единичная матрица, а план задачи $z = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = (x, u)$:

$$\langle \overline{c}, z\rangle = \langle (c, 0), (x, u)\rangle = \langle c, x\rangle + \langle 0, u\rangle = \langle c, x\rangle,$$

$$\overline{A}z = [A \;\; E] \cdot \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = Ax + u\ .$$

Наконец, общую задачу ЛП (1.1)–(1.4) в матричной форме можно представить следующим образом:

$$\langle c, x\rangle \to \max; Ax = b,\ \overline{A}x \le \overline{b},\ x_i \ge 0, i \in I.$$

Здесь $c, x \in R^n,\ b = (b_1, \ldots, b_r),\ \overline{b} = (b_{r+1}, \ldots, b_m),$ а матрицы условий A и $\overline{A}$ имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rn} \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} a_{r+1,1} & \ldots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Упражнения

1.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ (не обязательно линейные) определены на некотором множестве X. Доказать, что

i. $\sup\limits_X f(x) = -\inf\limits_X[-f(x)]$,

$\inf\limits_X f(x) = -\sup\limits_X[-f(x)]$;

ii. для любой константы k

$$\sup_X [f(x)+k] = \sup_X f(x) + k \ ,$$
$$\inf_X [f(x)+k] = \inf_X f(x) + k \ ;$$

iii. для любого числа $\lambda > 0$

$$\sup_X [\lambda f(x)] = \lambda \sup_X f(x) \ ,$$
$$\inf_X [\lambda f(x)] = \lambda \inf_X f(x) \ ;$$

iv. $$\sup_X [f(x)+g(x)] \le \sup_X f(x) + \sup_X g(x) \ ,$$
$$\inf_X [f(x)+g(x)] \ge \inf_X f(x) + \inf_X g(x) \ .$$

1.2. Функция $f(x) : R^n \to R^1$ называется *сепарабельной*, если $f(x) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$. Множество X упорядоченных наборов $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i, \ i = 1, \ldots, n$, называется *прямым* или *декартовым произведением* множеств $X_1, \ldots, X_n$ и обозначается $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Пусть функция $f(x) : R^n \to R^1$ – сепарабельная, множество X – прямое произведение множеств $X_i \subset R^1, \ i = 1, \ldots, n$. Доказать что $\max\limits_X f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1, \ldots, n$ существует $\max\limits_{X_i} f_i(x_i)$. При этом

$$\max_X f(x) = \sum_{i=1}^{n} \max_{X_i} f_i(x_i) \ .$$

1.3. Решить задачу

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \mathrm{extr}; \ \ \alpha_i \le x_i \le \beta_i, \ i = 1, \ldots, n \ .$$

Здесь и в дальнейшем „$\to$ extr“ означает, что требуется исследовать задачу как на максимум, так и на минимум.

1.4. Доказать, что задача ЛП

$$\langle c, x \rangle \to \max; \ \ Ax < b$$

не имеет решения. Почему?

1.5. Рассмотрим задачу

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax = b,$$

где $A \in M_{m,n}$. Доказать, что либо эта задача не имеет решения, либо любой допустимый план является оптимальным, причем последнее имеет место в том и только том случае, если вектор c есть линейная комбинация строк матрицы A, т.е. существует вектор y такой, что $c = A^T y$.

Таким образом, задача ЛП только с ограничениями–равенствами не представляет интереса. Строго говоря, она и не является задачей линейного программирования. Это – классическая задача на условный экстремум, известная из курса математического анализа.

1.6. Рассмотрим стандартную задачу ЛП

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax \le b, \ x \ge 0 \tag{1.28}$$

и соответствующую ей каноническую задачу

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax + u = b, \ x \ge 0, \ u \ge 0 \ . \tag{1.29}$$

Доказать, что задачи (1.28) и (1.29) эквивалентны в том смысле, что

i. если допустимое множество задачи (1.28) пусто, то пусто и допустимое множество задачи (1.29), и наоборот;

ii. если целевая функция задачи (1.28) не ограничена сверху на множестве планов, то неограничена сверху и целевая функция задачи (1.29), и наоборот;

iii. если x^* – решение задачи (1.28), то существует u^* такой, что пара (x^*, u^*) является решением задачи (1.29), и наоборот, если (x^*, u^*) – решение задачи (1.29), то x^* – решение задачи (1.28).

1.7. Задача ЛП

$$\langle c, x\rangle \to \max; \ Ax = b, \ \alpha_i \le x_i \le \beta_i, \ i = 1, \ldots, n \ ,$$

где $A \in M_{m,n}$ называется *задачей с двусторонними ограничениями на переменные*. Привести ее к канонической форме. Выписать матрицу условий и вектор ограничений полученной задачи.

§2. Примеры задач линейного программирования

2.1. Задача планирования производства

Рассмотрим производственную систему, например, завод, выпускающую n видов продукции – $P_1,\ P_2,\ldots,P_n$. На производство каждого вида продукции расходуются различные ресурсы (материалы, труд, электроэнергия и т.д.). Всего в производстве используются m различных ресурсов $R_1,\ R_2,\ldots,R_m$. Количества ресурсов каждого вида, которыми располагает завод в течение планового периода, равны $b_1,\,b_2,\ldots,b_m$. Отвлекаясь от конкретного содержания производственных операций, в результате которых ресурсы превращаются в продукты, технологию производства можно описать с помощью следующей *технологической матрицы* :

$$\begin{array}{c|cccc} & P_1 & P_2 & \ldots & P_n \\ \hline R_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ R_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \tag{2.1}$$

Каждый элемент этой матрицы a_{ji}, стоящий на пересечении j – той строки и i – того столбца, представляет собой количество ресурса R_j, расходуемое на производство единицы продукции P_i. Очевидно, что все элементы $a_{ji}\geq 0$ и, если $a_{ji}=0$ для некоторых j и i, то это означает, что j – тый ресурс не используется в производстве i – той продукции. Очевидно также, что каждая строка и каждый столбец матрицы (2.1) должны содержать хотя бы один ненулевой элемент.

Пусть x_1(ед.) – план производства продукции P_1, x_2(ед.) – план производства продукции P_2, …, x_n(ед.) – план производства продукции P_n. Совокупность этих планов $x=(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$ назовем *планом производства*, а его составляющие $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$ – *компонентами плана.* При заданном плане $x=(x_1,\ldots,x_n)$ величина $a_{ji}x_i$ представляет собой количество ресурса R_j расходуемое на производство (всей) продукции P_i. Суммируя для фиксированного j величины $a_{ji}x_i$ по всем видам продукции (по $i=1,\ldots,n$), получим общий расход j – того ресурса:

$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n$. Очевидно, что он не может превосходить величины b_j. Таким образом, любой *допустимый план* производства должен удовлетворять условиям

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m. \end{array} \tag{2.2}$$

Ну и конечно, компоненты плана должны быть неотрицательны:

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \ . \tag{2.3}$$

Система неравенств (2.2) и (2.3) определяет все *множество допустимых планов*.

Предположим, что прибыль от производства единицы продукции P_i равна c_i(руб.). Тогда суммарная прибыль при плане производства $x = (x_1, \ldots, x_n)$ равна $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, а максимально возможная прибыль равна максимуму линейной формы $f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ на множестве допустимых планов.

Таким образом, понимая под оптимальным планом план, максимизирующий прибыль, задачу оптимального планирования для рассматриваемой производственной системы можно поставить следующим образом:

$$f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max \ ; \tag{2.4}$$

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j, \ j = 1, \ldots, m, \tag{2.5}$$

$$x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n \ . \tag{2.6}$$

Это – стандартная задача линейного программирования.

Другой вариант задачи производственного планирования, приводящий к той же самой модели (2.4) – (2.6) состоит в следующем.

Пусть в производстве некоторого продукта используется m видов ресурсов, запасы которых равны, соответственно, $b_1, \ldots, b_m$. Рассматриваемый продукт может производиться с помощью n технологических способов (технологий). Под *интенсивностью* использования i – той технологии будем понимать время, в течении которого используется эта технология. Предположим, что при работе по i – той технологии с интенсивностью x_i производится c_ix_i единиц продукта и потребляется $a_{ji}x_i$ единиц

j – того ресурса, так что c_i и a_{ji} представляют собой, соответственно, количество произведенного продукта и потребление j – того ресурса при работе по i – той технологии с единичной интенсивностью. Поставим задачу – найти такие интенсивности $x_1, \ldots, x_n$ использования каждого из технологических способов, при которых количество произведенного продукта будет максимально. Нетрудно видеть, что математическая модель этой задачи имеет вид (2.4) –(2.6).

2.2. Задача о рационе

Предположим, что рацион кормления животных может быть составлен из n видов кормов $K_1, \ldots, K_n$. Каждый вид корма содержит одно или несколько из m необходимых животным питательных веществ $Q_1, \ldots, Q_m$. Содержание питательных веществ в каждом из кормов известно и составляет a_{ji} единиц (например, *г*) питательного вещества Q_j в единице (скажем, *кг*) корма K_i. Известны также стоимость c_i единицы каждого из кормов K_i и минимально допустимые нормы b_j(ед.) содержания питательного вещества Q_j в рационе. Требуется составить рацион минимальной стоимости, удовлетворяющий заданным требованиям по содержанию в нем питательных веществ.

Обозначая через x_i количество единиц i – того корма в рационе, получим следующую задачу ЛП:

$$f(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \to \min \, ;$$

$$a_{j1} x_1 + \ldots + a_{jn} x_n \geq b_j, \; j = 1, \ldots, m \, ,$$

$$x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n \, .$$

2.3. Транспортная задача

Пусть имеется n пунктов производства $P_1, \ldots, P_n$ и m пунктов потребления $Q_1, \ldots, Q_m$ некоторого однородного продукта. В i – том пункте производства P_i производится p_i единиц продукта, в j – том пункте потребления Q_j потребляется q_j единиц продукта. Будем считать, что производство равно потреблению:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m} q_j \ .$$

Пусть стоимость перевозки единицы продукта из P_i в Q_j равна c_{ij}. Требуется составить такой план перевозок производимого продукта из пунктов производства в пункты потребления, чтобы весь продукт из пунктов производства был вывезен, потребности всех пунктов потребления были удовлетворены и при этом транспортные издержки были бы минимальны.

Обозначая через x_{ij} план перевозок (ед. продукта) из P_i в Q_j, приходим к следующей задаче ЛП:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min \ ; \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = p_i \ , \ i = 1, \ldots, n \ , \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = q_j \ , \ j = 1, \ldots, m \ , \tag{2.9}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, n \ , \ j = 1, \ldots, m \ . \tag{2.10}$$

2.4. Раскройные задачи

Пусть на заготовительный участок поступает некоторый материал в виде полос одинаковой длины L (балки, рельсы, доски и т.п.). Из этих полос требуется отрезать m видов заготовок, причем заготовки j – того вида имеют длину l_j и их требуется b_j штук $(j = 1, \ldots, m)$.

Предположим, что число всевозможных способов раскроя одной полосы материала на заготовки равно n и при i –том способе раскроя $(i = 1, \ldots, n)$ из каждой полосы получается a_{ji} заготовок j – того вида. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}l_j \leq L, \ i = 1, \ldots, n \ .$$

Обозначая через x_i количество полос, планируемых к раскрою i – тым способом, и считая, что целью является получение требуемого ассортимента заготовок при минимальном расходе поступающего материала, рассматриваемую задачу можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min\ ; \tag{2.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j\ , j = 1, \ldots, m\ , \tag{2.12}$$

$$x_i \geq 0\ , i = 1, \ldots, n\ . \tag{2.13}$$

Задача (2.11) – (2.13) называется задачей линейного ассортиментного раскроя. Другой вариант раскройной задачи состоит в следующем: требуются не сами заготовки в заданном ассортименте $b = (b_1, \ldots, b_m)$, а комплекты заготовок, каждый из которых должен состоять из k_1 заготовок 1–го вида, k_2 заготовок 2–го вида, . . . , k_m заготовок m–того вида. При этом число полос исходного материала ограничено и равно q. Целью задачи является максимизация числа комплектов.

Если, по-прежнему, x_i – число полос, планируемых к раскрою i – тым способом, то $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$ – количество заготовок j – того вида. Этим количеством заготовок можно обеспечить $\dfrac{1}{k_j} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$ комплектов, а число полных комплектов равно, очевидно,

$$\min \left\{ \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i, \ldots, \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i \right\}.$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче:

$$\min_{j=\overline{1,m}} \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \to \max\ ; \tag{2.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = q,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\ . \tag{2.15}$$

Задачи вида (2.14), (2.15) называются задачами на минимакс. Строго говоря, они не являются задачами линейного программирования, так как целевая функция здесь уже не линейная, а кусочно-линейная (нижняя огибающая линейных функций $f_j(x) = \dfrac{1}{k_j}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}x_i, j = 1,\dots,m$). Однако задача (2.14), (2.15) легко сводится к задаче ЛП введением дополнительной переменной

$$x_{n+1} = \min_{j=\overline{1,m}} \frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \ .$$

Тогда, по определению, $x_{n+1} \leq \dfrac{1}{k_j}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}x_i$ для всех $j = 1,\dots,m$ и мы приходим к задаче линейного программирования

$$x_{n+1} \to \max \ ; \tag{2.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = q \ , \tag{2.17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ji}x_i - x_{n+1} \geq 0 \ , \ j = 1,\dots,m \ , \tag{2.18}$$

$$x_i \geq 0 \ , \ i = 1,\dots,n \ , \tag{2.19}$$

где $\overline{a}_{ji} = a_{ji}/k_j$.

Упражнения

2.1. Рассмотрим транспортную задачу (2.7) – (2.10). Считая переменные x_{ij} компонентами вектора $x = (x_{11}, x_{12},\dots,x_{nm})$ задачу (2.7) – (2.10) можно представить в канонической форме:

$$\langle c, x\rangle \to \min \ ; \ Ax = b \ , \ x \geq 0 \ .$$

Выпишите матрицу условий этой задачи.

2.2. Приведите к стандартной форме задачу (2.16) – (2.19). Выпишите ее целевой вектор, вектор ограничений и матрицу условий.

§3. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

3.1. Нам понадобятся следующие определения.

О п р е д е л е н и е 3.1. Пусть x, y – две различные точки в R^n. Совокупность точек вида

$$\lambda x + (1-\lambda)y = y + \lambda(x-y)\ , \ \ -\infty < \lambda < +\infty \tag{3.1}$$

называется *прямой, проходящей через точки* x *и* y.

О п р е д е л е н и е 3.2. *Прямой, проходящей через точку* $a \in R^n$ *с направляющим вектором* $p \in R^n$, называется совокупность точек вида

$$a + \lambda p\ , \ \ -\infty < \lambda < +\infty\ . \tag{3.2}$$

Очевидно, что прямые (3.1) и (3.2) совпадают при $a = y$ и $p = x - y$ (см. рис. 3.1).

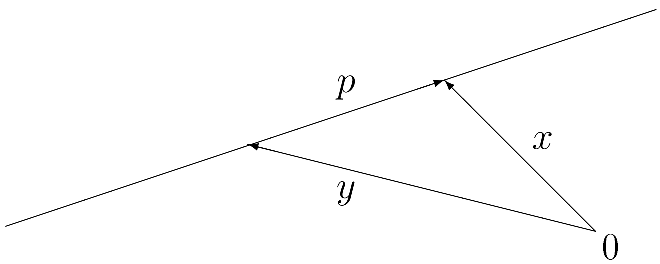

Рис. 3.1

О п р е д е л е н и е 3.3. *Лучом, исходящим из точки* $a \in R^n$ в направлении вектора $p \in R^n$, называется множество точек вида

$$a + \lambda p\ , \ \ \lambda \geq 0\ .$$

О п р е д е л е н и е 3.4. *Отрезком*, соединяющим точки $x, y \in R^n$, называется множество

$$[x, y] = \{z \in R^n\ :\ z = \lambda x + (1-\lambda)y = y + \lambda(x-y)\ , \ \ 0 \leq \lambda \leq 1\}\ .$$

О п р е д е л е н и е 3.5. Множество $X \in R^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими точками x и y оно содержит и весь отрезок, их соединяющий, то есть, если точка $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in X$ при любых $x, y \in X$ и $\lambda \in [0,1]$.

На рис. 3.2 и 3.3 изображены выпуклые множества, на рис. 3.4 – невыпуклое множество.

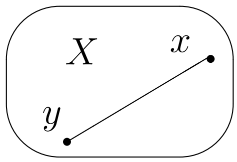

Рис. 3.2

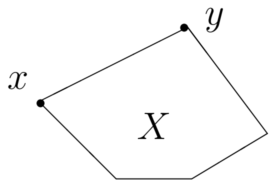

Рис. 3.3

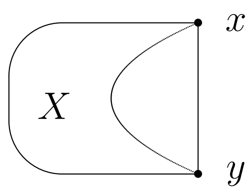

Рис. 3.4

Простейшими примерами выпуклых множеств являются прямая, луч, все пространство R^n. Пустое множество и множество, состоящее из одной точки, также считаются выпуклыми. Нетрудно видеть, что множество планов задачи ЛП – выпуклое множество. В самом деле, пусть, например,

$$X = \{x \in R^n \ : \ Ax = b, \ x \geq 0\}.$$

Тогда, если $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, где $x, y \in X$, $\lambda \in [0,1]$, то $z \geq 0$ и $Az = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay = \lambda b + (1-\lambda)b = b$. Следовательно, $z \in X$.

О п р е д е л е н и е 3.6. Пусть X и $\overline{x}$ - произвольные множество и вектор из R^n, соответственно. *Сдвигом*, или *транслянтом множества* X на вектор $\overline{x}$ (короче, $\overline{x}$ – транслянтом множества X) называется множество

$$X + \overline{x} = \{z = x + \overline{x} \ : \ x \in X\}.$$

Нетрудно видеть, что сдвиг выпуклого множества на произвольный вектор $\overline{x}$ является выпуклым множеством.

О п р е д е л е н и е 3.7. Множество

$$H = H(a, \beta) = \{x \in R^n \ : \ \langle a, x\rangle = \beta \ , \ a \neq 0\}$$

называется *гиперплоскостью.* Вектор a называется *нормальным вектором* (*вектором нормали*) гиперплоскости H.

Вектор a и число β задают гиперплоскость с точностью до общего ненулевого множителя. При $n = 2$ гиперплоскость – это прямая, при $n = 3$ – плоскость.

Возьмем произвольный вектор $\overline{x} \in H(a, \beta)$. Любой вектор $x \in H(a, \beta)$ можно представить в виде $x = y + \overline{x}$, где $y \in H(a, 0) = \{y \in R^n \ : \langle a, y\rangle = 0\} : \langle a, x\rangle = \langle a, y\rangle + \langle a, \overline{x}\rangle = \beta$. Следовательно, гиперплоскость $H(a, \beta)$ представляет собой сдвиг гиперплоскости $H(a, 0)$ на вектор $\overline{x}$ (см. рис. 3.5). Заметим, что вектор a ортогонален гиперплоскости $H(a, 0)$.

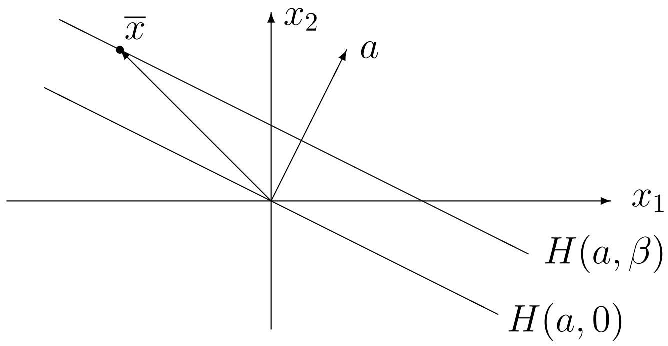

Рис. 3.5

Пусть точки $x, y \in H(a, \beta)$. Тогда и вся прямая, проходящая через эти точки, принадлежит гиперплоскости H:

$$\langle a, y + \lambda(x - y)\rangle = \langle a, y\rangle + \lambda[\langle a, x\rangle - \langle a, y\rangle] = \beta + \lambda[\beta - \beta] = \beta \ . \quad (3.3)$$

Из (3.3) также следует, что вектор нормали a ортогонален направляющему вектору $p = x - y$ любой прямой, проходящей через любые точки $x, y \in H$.

О п р е д е л е н и е 3.8. Пересечение конечного числа гиперплоскостей называется *линейным многообразием* (если это пересечение не пусто).

Пусть $H(a, \beta)$ – некоторая гиперплоскость. В пространстве R^n гиперплоскость $H(a, \beta)$ порождает два (замкнутых) *полупространства*

$$H_+ = \{x \in R^n \ : \ \langle a, x\rangle \geq \beta\} \ ,$$

$$H_- = \{x \in R^n \ : \ \langle a, x\rangle \leq \beta\}$$

(см. рис. 3.6)).

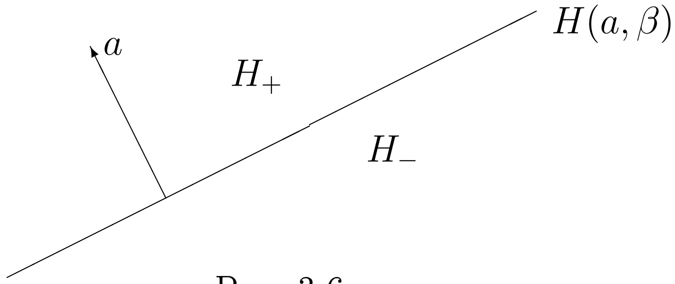

Рис. 3.6

О п р е д е л е н и е 3.9. Пересечение конечного числа гиперплоскостей и полупространств (если оно не пусто) называется *выпуклым многогранным множеством* или (выпуклым) *полиэдром.* Ограниченное выпуклое многогранное множество называется *выпуклым многогранником* или (выпуклым) *политопом.*

Таким образом, выпуклое многогранное множество – это множество решений системы линейных равенств и неравенств

$$\langle a^j, x\rangle = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \ , \ j = 1, \ldots, r \ , \tag{3.4}$$

$$\langle a^j, x\rangle = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j \ , \ j = r+1, \ldots, m \tag{3.5}$$

(случаи $r = 0$ и $r = m$ здесь не исключаются; в последнем случае выпуклое многогранное множество вырождается в линейное многообразие). Ясно, что *множество планов любой задачи ЛП является выпуклым многогранным множеством* (если оно не пусто).

О п р е д е л е н и е 3.10. Система линейных условий вида (3.4), (3.5) называется *линейно независимой*, если линейно независима соответствующая система векторов $\{a^j\}$. *Рангом* системы линейных условий называется ранг матрицы, составленной из векторов $\{a^j\}$, отвечающих данной системе.

О п р е д е л е н и е 3.11. Пусть X – выпуклое многогранное множество, определяемое системой (3.4), (3.5). Точка $x \in X$ называется *вершиной* или *угловой точкой* множества X, если среди условий (3.4), (3.5) найдутся n линейно независимых условий, которым эта точка удовлетворяет как точным равенствам.

Таким образом, угловая точка является точкой пересечения не менее, чем n из m гиперплоскостей $\langle a^j, x\rangle = b_j$. Если число гиперплоскостей, пересекающихся в угловой точке, в точности равно n, то угловая точка называется *невырожденной.* Усли же в угловой точке пересекается более n гиперплоскостей, т.е. число соотношений (3.4), (3.5), которые эта точка обращает в равенства, больше n, то угловая точка – *вырожденная.* Понятно, что *выпуклое многогранное множество может иметь лишь конечное число угловых точек* – из системы (3.4), (3.5) можно составить лишь конечное число линейно независимых подсистем по n уравнений. Понятно также, что если ранг системы условий (3.4), (3.5) меньше n, то выпуклое многогранное множество не имеет угловых точек).

3.2. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max \ ; \quad x \in X \ , \tag{3.6}$$

где $c, x \in R^n$, $X \subset R^n$ – выпуклое многогранное множество (конкретный способ задания множества X здесь не играет роли).

Напомним, что *множеством уровня* произвольной функции $f(x)$ называется множество точек, в которых эта функция принимает какое–либо постоянное значение $f(x) = \gamma$. Множествами уровня линейной функции $f(x) = \langle c, x \rangle$ являются, очевидно, параллельные гиперплоскости $H(\gamma) = \{x \in R^n \ : \ \langle c, x \rangle = \gamma\}$ с общим нормальным вектором c. Каждый допустимый план принадлежит, разумеется, некоторому множеству уровня $H(\gamma)$. Отсюда следует, что оптимальный план x^*, если он существует, принадлежит множеству уровня $H(\gamma_*)$, соответствующему числу $\gamma_* = \max\{\gamma \ : \ H(\gamma) \cap X \neq \emptyset\}$ (см. рис. 3.7).

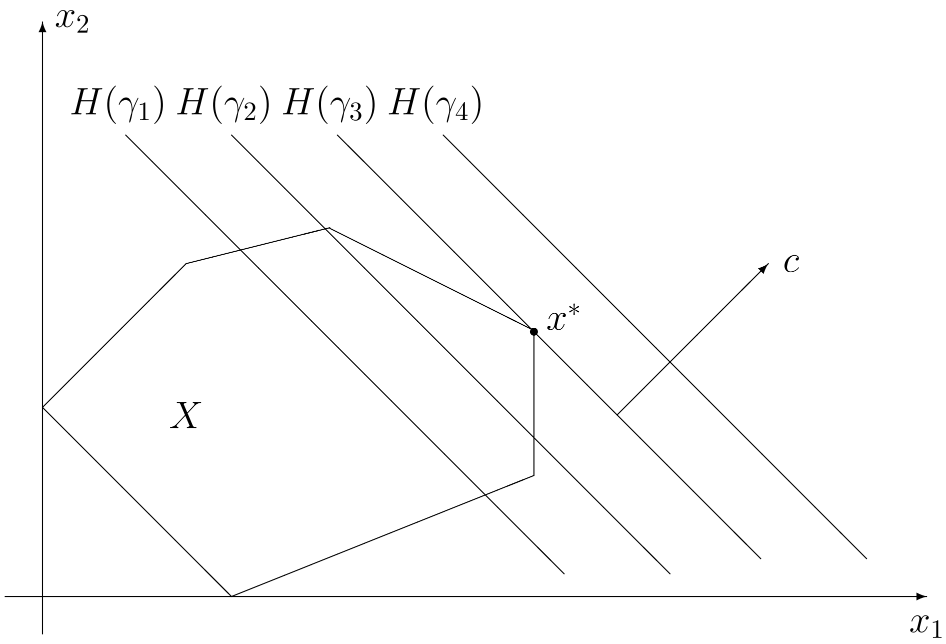

Рис. 3.7: $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 = \gamma_* < \gamma_4$

Таким образом, можно представить себе следующий способ решения задачи (3.6): выбирая некоторое множество уровня $H(\gamma)$ такое, что $H(\gamma) \cap X \neq \emptyset$ и перемещая его параллельно самому себе (переходя от множеств уровня с меньшими к множествам уровня с большими значениями целевой функции) найти такое γ_* , при котором $H(\gamma_*) \cap X \neq \emptyset$, а при всех $\gamma > \gamma_*$ множества $H(\gamma)$ и X не имеют общих точек (позволяя себе некоторую вольность, можно сказать: „ множество $H(\gamma)$ последний раз касается множества X “). Остается заметить, что направлением возрастания функции $f(x)$ является направление, совпадающее с направлением вектора c. В самом деле, любое перемещение из произвольной точки x в направлении вектора c, т.е. в точку $x + \lambda c,\ \lambda > 0$, приводит к возрастанию значений целевой функции:

$$f(x + \lambda c) = \langle c, x + \lambda c\rangle = \langle c, x\rangle + \lambda\langle c, c\rangle\ >\ \langle c, x\rangle = f(x).$$

Понятно, что направление, обратное направлению вектора c, является направлением убывания функции $f(x)$.

П р и м е р 3.1. Пусть задача ЛП имеет вид:

$$-x_1 + 2x_2 \to \max\ ; \tag{3.7}$$

$$x_1 - x_2 \geq -2\ , \tag{3.8}$$

$$x_1 + x_2 \leq 6\ , \tag{3.9}$$

$$2x_1 - x_2 \leq 6\ , \tag{3.10}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ . \tag{3.11}$$

Графическое решение задачи (3.7) – (3.11) приведено на рис. 3.8, где целевая функция представлена только вектором $c = (-1, 2)$ – линии (множества) уровня функции $f(x)$, представляющие собой параллельные прямые $-x_1 + 2x_2 = \gamma$, можно и не рисовать, проводя их „ в уме “ перпендикулярно вектору c.

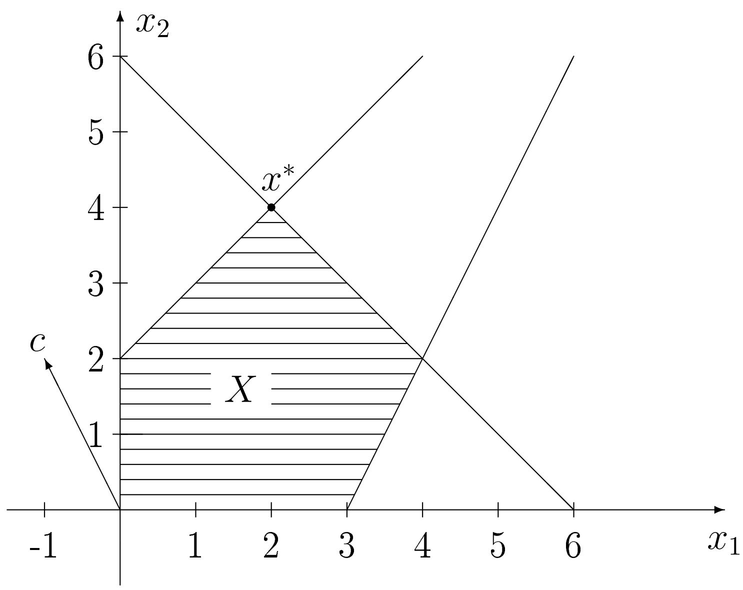

Рис. 3.8

Каждое из ограничений (3.8) – (3.11) определяет в R^2 некоторую полуплоскость, а их пересечение – допустимое множество X. Решением задачи является вершина $x^* = (2, 4)$ многоугольника X. ■

Можно также представить себе следующие ситуации: множество планов задачи ЛП не ограничено и задача не имеет решения: $\sup\limits_X f(x) = +\infty$ (рис. 3.9), множество планов задачи не ограничено, но решение существует (рис. 3.10), решение задачи ЛП не единственно (см. рис. 3.11, где множество оптимальных планов – отрезок $[\overline{x}, \overline{\overline{x}}]$). В последнем случае все оптимальные планы называются *альтернативными оптимальными планами.* Наличие альтернативных оптимальных планов, вообще говоря, может оказаться полезным при решении практических задач, т.к. дает возможность определенного маневра и использования для выбора наилучшего плана различных неформальных соображений.

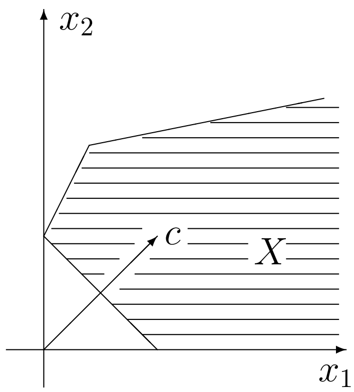

Рис. 3.9

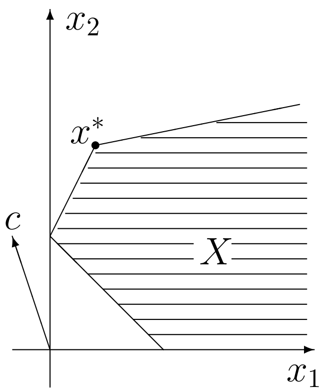

Рис. 3.10

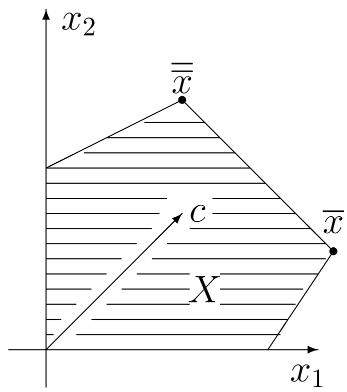

Рис. 3.11

3.3. Можно заметить, что на всех рассмотренных иллюстрациях решением задачи ЛП, если оно существует, является угловая точка допустимого множества (на рис. 3.11 решений бесконечно много, но среди них два – угловые точки). Это, конечно, не случайно, ниже мы убедимся, что если множество $X_* = \operatorname{Argmax}\limits_X f(x) \neq \emptyset$, то оно содержит по-крайней мере одну угловую точку. Но если это так, то решение задачи ЛП сводится к простому перебору угловых точек (по-крайней мере в том случае когда X – многогранник). Пусть, например,

$$X = \{x \in R^n \;:\; a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j \;,\; j = 1, \ldots, m\} \;,$$

где $m > n$. Тогда для вычисления всех угловых точек из условий, определяющих множество X, нужно выбрать всевозможные подсистемы по

n условий в каждой и решить соответствующую систему линейных алгебраических уравнений. Если решение этой системы существует, единственно и удовлетворяет остальным ограничениям, то полученная точка – угловая. Единственным, но принципиальным препятствием на пути реализации такого подхода является чудовищное количество вычислений – нужно решить C_m^n линейных алгебраических уравнений. Например, при $m = 70$ и $n = 50$ это число примерно равно 1.6×10^{17}. В прикладных задачах количество ограничений и переменных нередко исчисляется сотнями и тысячами.

Выход из этой ситуации был найден в том, чтобы просматривать не все угловые точки, а, отправляясь от произвольной вершины, последовательно перебирать только те из них, в которых значения целевой функции возрастают. Эффективность такого подхода можно проиллюстрировать следующим образным примером. Представим себе, что имеется, скажем, вагон небольших камней из которых нужно выбрать самый крупный (тяжелый). Каторжная работа при полном переборе. Допустим теперь, что имеется добрый волшебник, который делает так, что как только выбирается произвольный камень, все камни меньшего или равного размера (веса) исчезают из вагона. Если не случится невероятного, когда злой дух заставляет нас выбирать все время самый маленький камень, работа, очевидно, закончится достаточно быстро.

Метод, реализующий идею направленного перебора угловых точек, был изобретен в 1947 году американским математиком Джорджем Данцигом и назван симплекс–методом. Это название связано, вероятно, с одной из его интерпретаций (см. [10, с.162]). Вообще же симплекс (от лат. simplex – простой) это – одна из разновидностей выпуклых многогранников. Например, фундаментальным симплексом называется множество

$$S = \{x \in R^n \ : \ x_1 + \ldots + x_n = 1 \ , \ x_i \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, n\} \ .$$

При $n = 1$ фундаментальный симплекс – просто одна точка, при $n = 2$ – отрезок, при $n = 3$ – треугольник.

Упражнения

3.1. Пусть X – выпуклое множество. Точка $x \in X$ называется *крайней* или *экстремальной точкой* множества X, если представление $x = \lambda x^1 +$

$+(1-\lambda)x^2$ невозможно ни для каких $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, и $\lambda \in (0,1)$. Т.е. крайняя точка не может быть внутренней точкой никакого отрезка, имеющего своими концами точки из X. Очевидно, что крайняя точка является граничной точкой множества, но не всякая граничная точка будет крайней.

Доказать, что крайняя точка выпуклого многогранного множества является его угловой точкой, и наоборот, угловая точка является крайней.

3.2. Найти все угловые точки фундаментального симплекса

$$S = \{x \in R^n \ : \ x_1 + \ldots + x_n = 1 \ , \ x_i \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, n\} \ .$$

3.3. Найти все угловые точки множества

$$X = \{x \in R^n \ : \ x_1 + \ldots + x_n \leq 1 \ , \ x_i \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, n\} \ .$$

3.4. Найти все угловые точки множеств, задаваемых следующими системами:

i. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \ x_3 &= 5 \ , \\ -x_1 \qquad\quad - 2x_3 &\leq 3 \ , \\ x_i \geq 0 \ , \ i &= 1,2,3 \ ; \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1 \ , \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 \ , \\ x_i \geq 0 \ , \ i &= 1,2,3 \ . \end{aligned}$$

3.5. Решить графически следующие задачи ЛП (напомним, что „ $\to$ extr “ означает, что нужно решить пару задач – на максимум и на минимум):

i. $$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 \to \mathrm{extr} \ ; \\ x_1 - \ x_2 \leq 1 \ , \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \ , \\ x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0; \end{gathered}$$

ii. $$\begin{gathered} x_1 + x_2 \to \mathrm{extr} \ ; \\ 0 \leq x_1 + x_2 \leq 3 \ , \\ -1 \leq x_1 - x_2 \leq 0 \ , \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \ , \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \ ; \end{gathered}$$

iii. $$\begin{gathered} x_1 + \ x_2 \to \mathrm{extr} \ ; \\ x_1 - 4x_2 \geq \ \ 1 \ , \\ x_1 - 2x_2 \leq -2 \ , \\ 2x_1 + 3x_2 \leq \ \ 6 \ , \\ x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0 \ ; \end{gathered}$$

iv. $$\begin{gathered} 4x_1 + x_2 \to \mathrm{extr} \ ; \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \ , \\ x_2 \leq 1 \ , \\ -1 \leq x_1 \leq 10 \ . \end{gathered}$$

Глава 2
Симплекс-метод

Следуя традиции, сложившейся в учебной литературе, мы будем рассматривать симплекс-метод применительно к канонической задаче. Поэтому, имея ввиду ту роль, которую играют угловые точки, изучим их для этой задачи более подробно.

§1. Угловые точки в канонической задаче ЛП. Критерий оптимальности угловой точки

1.1. Рассмотрим множество планов канонической задачи ЛП:

$$X = \{x \in R^n \ : Ax = b\,, x \geq 0\,, A \in M_{m,n}\}\ . \qquad (1.1)$$

Напомним, что систему $Ax = b$ можно представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы A (векторов условий):

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \ldots + x_n a^n = b\,. \qquad (1.2)$$

Представление (1.2) позволяет говорить, что каждой компоненте x_i вектора x соответствует, или отвечает, свой столбец матрицы A и, разумеется, наоборот, каждому столбцу матрицы A соответствует своя компонента вектора x.

Т е о р е м а 1.1. Для того, чтобы точка $\overline{x}$ из множества $X\,, \overline{x} \neq 0$, была угловой точкой этого множества, необходимо и достаточно, чтобы векторы условий, отвечающие ее положительным компонентам, были линейно независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r = rank\ A$. Если $r = n$, то утверждение теоремы тривиально. Заметим, что в этом случае множество $X = \{\overline{x}\}$.

Пусть $r < n$.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\overline{x} \neq 0$ - угловая точка множества X и пусть ее отличные от нуля компоненты суть $\overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_s}$. Тогда

$$a_{j1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{jn}\overline{x}_n = b_j\ , j = 1, \ldots, m\ , \tag{1.3}$$

$$\overline{x}_i = 0\ , i \neq i_1, \ldots, i_s\ . \tag{1.4}$$

По определению система (1.3), (1.4) содержит $m+(n-s) \geq n$ уравнений, n из которых линейно независимы. Пусть это будут уравнения

$$a_{j1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{jn}\overline{x}_n = b_j\ , j = j_1, \ldots, j_k\ , \tag{1.5}$$

$$\overline{x}_i = 0\ , i \neq i_1, \ldots, i_k\ , \tag{1.6}$$

где, очевидно, $1 \leq s \leq k \leq r$. Так как определитель системы (1.5), (1.6) отличен от нуля, то, раскладывая его по элементам последних $n-k$ строк, приходим к условию

$$\det \begin{bmatrix} a_{j_1 i_1} & \ldots & a_{j_1 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j_k i_1} & \ldots & a_{j_k i_k} \end{bmatrix} \neq 0\ .$$

Это означает, что ранг матрицы $\left[a^{i_1} \ldots a^{i_k}\right]$, составленной из векторов условий $a^{i_1}, \ldots, a^{i_k}$, равен k и, следовательно, эти векторы линейно независимы. Так как $k \geq s$, то сюда входят и все векторы условий, соответствующие положительным компонентам угловой точки $\overline{x}$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_s}$ – отличные от нуля компоненты точки $\overline{x} \in X$ и пусть векторы условий $a^{i_1}, \ldots, a^{i_s}$, отвечающие этим компонентам, линейно независимы. Так как $rank\ A = r$, то число этих векторов $s \leq r$. Поскольку $r \leq m$, то точка $\overline{x}$ удовлетворяет $m + (n-s) \geq m + (n-r) \geq n$ условиям

$$a_{j1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{jn}\overline{x}_n = b_j\ , j = 1, \ldots, m\ , \tag{1.7}$$

$$\overline{x}_i = 0\ , i \neq i_1, \ldots, i_s\ . \tag{1.8}$$

Если $s < m$, то вычеркнем из матрицы $\left[a^{i_1} \ldots a^{i_s}\right]$ $m - s$ линейно зависимых строк и уберем из системы (1.7) соответствующие им условия. В результате получим невырожденную матрицу

$$\begin{bmatrix} a_{j_1 i_1} & \dots & a_{j_1 i_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j_s i_1} & \dots & a_{j_s i_s} \end{bmatrix}$$

и систему n равенств

$$a_{j1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{jn}\overline{x}_n = b_j \ , j = j_1, \ldots, j_s \ , \tag{1.9}$$

$$\overline{x}_i = 0 \ , i \neq i_1, \ldots, i_s \ , \tag{1.10}$$

В случае $s = m$ система (1.9), (1.10) совпадает с системой (1.7), (1.8). Нетрудно убедиться, что определитель системы (1.9), (1.10) отличен от нуля – для этого достаточно разложить его по элементам последних $n-s$ строк. Следовательно, точка $\overline{x}$ обращает в равенства n линейно независимых условий, определяющих множество X, и, по определению, является угловой. ■

С л е д с т в и е. Число положительных компонент угловой точки $\overline{x}$ не превосходит r – ранга матрицы A.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\overline{x}$ – угловая точка множества X, $r = rank\ A$. Система r линейно независимых векторов условий, включающая все те a^i, для которых $\overline{x}_i > 0$, называется *базисом* угловой точки $\overline{x}$, векторы его составляющие, называются *базисными векторами*, а соответствующие им компоненты точки $\overline{x}$ - *базисными компонентами.*

Если число положительных компонент угловой точки в точности равно r, то они однозначно определяют ее базис. В противном случае базис может быть неединственным, но всегда существует. В самом деле, пусть угловая точка $\overline{x}$ имеет $s < r$ положительных компонент, которым соответствует система линейно независимых векторов условий $a^{i_1}, \ldots, a^{i_s}$. Дополним эту систему до максимальной линейно независимой системы за счет оставшихся векторов условий $a^{i_{s+1}}, \ldots, a^{i_n}$. В результате получим систему $a^{i_1}, \ldots, a^{i_k}, k \geq s$, которая образует базис линейной оболочки векторов $a^1, \ldots, a^n$. Следовательно, $k = rank\left[a^1 \ldots a^n\right] = r$. Таким образом, построенная система r векторов является линейно независимой и включает в себя все те a^i, для которых $\overline{x}_i > 0$, то есть, представляет собой базис угловой точки $\overline{x}$. Из самого построения видно, что этот базис может быть неединственным.

П р и м е р 1.1. Пусть множество X определено условиями

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = 3 \ , \tag{1.11}$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \ , \tag{1.12}$$

$$2x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \ , \tag{1.13}$$

$$x_i \geq 0 \ , i = 1, 2, 3, 4 \ . \tag{1.14}$$

Заметим, что условие (1.13) является суммой условий (1.11) и (1.12). Условия (1.11) и (1.12) линейно независимы, так что ранг матрицы условий $r = 2$. Угловые точки $x = (2, 1, 0, 0)$ и $y = (0, 5/3, 0, 4/3)$ имеют по две положительные компоненты. Их базисы – $\left\{a^1, a^2\right\}$ и $\left\{a^2, a^4\right\}$, соответственно. Угловая точка $z = (0, 0, 1, 0)$ имеет только одну положительную компоненту. Ей соответствуют базисы $\left\{a^1, a^3\right\}$, $\left\{a^2, a^3\right\}$, $\left\{a^3, a^4\right\}$. Точка $v = (1, 1/2, 1/2, 0) \in X$, но не является угловой – число ее положительных компонент больше r.

П р и м е р 1.2. Пусть множество X определено условиями

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \ ,$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \ ,$$

$$x_i \geq 0 \ , i = 1, 2, 3 \ .$$

Ранг матрицы условий $r = 2$. Множество X имеет две угловые точки: $x = (1, 0, 0)$ и $y = (0, 0, 1/2)$. Каждая из них имеет единственный базис – $\{a^1, a^2\}$ и $\{a^2, a^3\}$, соответственно. ■

Точка $x = 0$ является угловой точкой множества X в том и только том случае, если $b = 0$. В качестве ее базиса можно взять любые r линейно независимых столбцов матрицы A.

1.2. Пусть $\sigma = \left\{a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}\right\}$ – базис угловой точки $\overline{x}$, $B_\sigma = \left[a^{i_1} \ldots a^{i_r}\right]$ – *базисная матрица*, $I_\sigma = \{i_1, \ldots, i_r\}$ – *множество базисных индексов*. Через $\overline{x}^\sigma$ обозначим вектор, составленный из базисных компонент угловой точки $\overline{x}$: $\overline{x}^\sigma = (\overline{x}^\sigma_1, \ldots, \overline{x}^\sigma_r) = (\overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_r})$. Тогда, так как $\overline{x}_i = 0$ для $i \notin I_\sigma$, то

$$b = A\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i a^i = \sum_{i \in I_\sigma} \overline{x}_i a^i + \sum_{i \notin I_\sigma} \overline{x}_i a^i = \sum_{i \in I_\sigma} \overline{x}_i a^i = B_\sigma \overline{x}^\sigma \ . \tag{1.15}$$

Поскольку ранг матрицы B_σ равен r, то из (1.15) следует, что $\overline{x}^\sigma$ – единственное решение системы линейных алгебраических уравнений (с r неизвестными)

$$B_\sigma x^\sigma = b \ , \tag{1.16}$$

где $x^\sigma = (x_1^\sigma, \ldots, x_r^\sigma) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$. Таким образом, задание базиса угловой точки однозначно определяет базисные компоненты, а значит и саму угловую точку. Обратное, как мы видели, вообще говоря, не верно. В этом смысле первичным является базис угловой точки, а не сама эта точка.

1.3. Пусть s – число отличных от нуля компонент угловой точки $\overline{x}$. Тогда число условий, определяющих множество X и выполняющихся в точке $\overline{x}$ как точные равенства, равно $m + (n - s) \geq m + (n - r)$. Отсюда следует, что если $r < m$, то любая угловая точка множества X – вырожденная. Случай $r < m$ означает, что среди условий

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \ , \ j = 1, \ldots, m \ , \tag{1.17}$$

имеется $m - r$ линейно зависимых условий. Если система (1.17) совместна, то эти линейно зависимые условия можно просто удалить из системы без ущерба для множества планов. Поэтому ниже будем считать, что множество $X \neq \emptyset$ и $r = rankA = m$. Кроме того будем считать, что $m < n$, так как в противном случае множество X может состоять только из одной точки, что, очевидно, не представляет интереса.

Итак, пусть $rankA = m < n$.

Если число отличных от нуля компонент угловой точки $\overline{x}$ равно m, то число условий, обращающихся в этой точке в равенства, равно $m + (n - m) = n$. То есть, угловая точка $\overline{x}$ – невырожденная. Обратно, если $\overline{x}$ – невырожденная угловая точка, то она обращает в равенства n из $n + m$ условий, определяющих множество X, а остальным условиям удовлетворяет как строгим неравенствам. Следовательно, невырожденная угловая точка имеет ровно m положительных компонент.

Таким образом, *угловая точка $\overline{x}$ является невырожденной в том и только том случае, если число ее положительных компонент равно m – числу условий – равенств и вырожденной, если число ее положительных компонент меньше m.* Невырожденная угловая точка обладает единственным базисом, вырожденная может иметь несколько базисов. В примере 1.1, после исключения линейно зависимого условия (1.13), угловые точки x и y – невырожденные, угловая точка z – вырожденная. В примере 1.2 обе угловые точки – вырожденные.

1.4. Для того, чтобы с полным основанием продолжить изучение угловых точек множества X, нужно прежде всего показать, что множество X имеет угловые точки. Для этого предварительно докажем следующую лемму.

Л е м м а 1.1. Если вектор x является неотрицательной линейной комбинацией ненулевых векторов $a^1, \ldots, a^k$, т.е.

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a^i \ \ , \ \ \lambda_i \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, k \ ,$$

то его можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации линейно независимой подсистемы этих векторов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $x = 0$ утверждение леммы тривиально. Пусть $x \neq 0$. Если система векторов

$$\{a^1, \ldots, a^k\} \tag{1.18}$$

линейно независима, то лемма доказана. В противном случае существуют числа $\mu_1, \ldots, \mu_k$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i a^i = 0$. Можно считать, что среди чисел μ_i есть положительные (в противном случае вместо них можно взять числа $(-\mu_i)$). Положим

$$\theta = \min_{i:\mu_i > 0} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \ \ , \tag{1.19}$$

$$\gamma_i = \lambda_i - \theta \mu_i \ \ , \ i = 1, \ldots, k \ .$$

Пусть минимум в правой части (1.19) достигается на некотором индексе s, т.е. $\theta = \lambda_s / \mu_s \geq 0$. Тогда

$$\gamma_i = \lambda_i - \theta \mu_i \geq \lambda_i \geq 0 \ \text{ для } \ i: \ \mu_i \leq 0 \ \ ,$$

$$\gamma_i = \lambda_i - \theta \mu_i \geq \lambda_i - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \mu_i = 0 \ \text{ для } \ i: \ \mu_i \geq 0 \ \ ,$$

$$\gamma_s = \lambda_s - \frac{\lambda_s}{\mu_s} \mu_s = 0 \ \ .$$

Таким образом, числа $\gamma_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$, и среди них есть по крайней мере одно, γ_s, равное нулю. Следовательно,

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a^i - \theta \sum_{i=1}^{k} \mu_i a^i = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i a^i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{k} \gamma_i a^i \ \ .$$

То есть, мы представили вектор x в виде неотрицательной линейной комбинации не более, чем $k-1$ – го вектора системы (1.18). Если среди этих векторов имеются линейно зависимые, то, повторяя описанную процедуру нужное число раз, получим требуемое представление. В худшем случае для этого потребуется $k-1$ шаг процедуры исключения, после чего искомая подсистема будет состоять из одного вектора. ■

Пусть X – множество планов канонической задачи ЛП (множество (1.1)). *Носителем* вектора $x \in X$ называется множество индексов его ненулевых компонент: $I(x) = \{i : x_i > 0\}$.

Т е о р е м а 1.2. Если множество X непусто, то оно имеет угловые точки. При этом для любого $x \in X$ существует угловая точка $\overline{x}$, такая, что $I(\overline{x}) \subset I(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $b = 0$, то $\overline{x} = 0$ – единственная угловая точка множества X , $I(\overline{x}) = \emptyset \subset I(x)$ для любого $x \in X$.

Пусть $b \neq 0$ и $x \in X$. Тогда

$$b = Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a^i = \sum_{i \in I(x)} x_i a^i \ \ , \ \ x_i > 0 \ , \ i \in I(x) \ .$$

То есть, вектор b является положительной линейной комбинацией векторов a^i, $i \in I(x)$. В силу леммы 1.1 его можно представить в виде

$$b = \sum_{i \in J} \overline{x}_i a^i \ \ , \ \ \overline{x}_i > 0 \ , \ i \in J \subset I(x) \ \ ,$$

где векторы a^i, $i \in J$, линейно независимы. Полагая $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, где $\overline{x}_i = 0$ для $i \notin J$, получим, что

$$A\overline{x} = \sum_{i \in J} \overline{x}_i a^i + \sum_{i \notin J} \overline{x}_i a^i = \sum_{i \in J} \overline{x}_i a^i = b \ \ , \ \ \overline{x} \geq 0 \ .$$

Следовательно, $\overline{x} \in X$ и является угловой точкой, т.к. векторы условий, отвечающие ее положительным компонентам, линейно независимы. По построению, $I(\overline{x}) = J \subset I(x)$. ■

1.5. Рассмотрим каноническую задачу ЛП

$$\langle c, x \rangle \to \max; \ x \in X \ \ , \tag{1.20}$$

$$X = \{x \in R^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\} \ , \tag{1.21}$$

где $A \in M_{m,n}$, $rankA = m < n$.

Пусть $\sigma = \{a^{i_1}, \ldots, a^{i_m}\}$ – базис угловой точки $\overline{x} \in X$, B_σ – базисная матрица, I_σ – множество базисных индексов, $\overline{x}^\sigma = [\overline{x}_i]_{i \in I_\sigma}$. Из (1.15) имеем

$$\overline{x}^\sigma = B_\sigma^{-1} b \ . \tag{1.22}$$

Введем вектор $c^\sigma = [c_i]_{i \in I_\sigma}$. Тогда

$$\langle c, \overline{x} \rangle = \sum_{i \in I_\sigma} c_i \overline{x}_i + \sum_{i \notin I_\sigma} c_i \overline{x}_i = \langle c^\sigma, \overline{x}^\sigma \rangle \ .$$

Подставляя сюда $\overline{x}^\sigma$ из (1.22), получим

$$\langle c, \overline{x} \rangle = \langle c^\sigma, B_\sigma^{-1} b \rangle = \langle B_\sigma^{-T} c^\sigma, b \rangle \ , \tag{1.23}$$

где $B_\sigma^{-T} \overset{\triangle}{=} (B_\sigma^{-1})^T = (B_\sigma^T)^{-1}$. Полагая

$$y = y(\sigma) = B_\sigma^{-T} c^\sigma \ , \tag{1.24}$$

равенство (1.23) можно записать в виде

$$\langle c, \overline{x} \rangle = \langle b, y \rangle \ .$$

Отсюда, в свою очередь, получим, что для любого решения системы $Ax = b$, в том числе и для любого $x \in X$

$$\langle c, \overline{x} \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle A^T y, x \rangle \ .$$

Следовательно, для любого $x \in X$

$$\langle c, x \rangle - \langle c, \overline{x} \rangle = \langle c - A^T y, x \rangle \ . \tag{1.25}$$

Введем вектор

$$\Delta = \Delta(\sigma) = A^T y - c \ . \tag{1.26}$$

Тогда формула (1.25) примет вид:

$$\langle c, x \rangle - \langle c, \overline{x} \rangle = -\langle \Delta, x \rangle \ . \tag{1.27}$$

Формула (1.27) называется *формулой приращения* целевой функции в угловой точке $\overline{x}$ (поскольку вектор Δ зависит, вообще говоря, от базиса, формулу (1.27) точнее было бы назвать формулой приращения в базисе σ).

Т е о р е м а 1.3 (*Критерий оптимальности угловой точки*). Пусть $\overline{x}$ – угловая точка в канонической задаче (1.20), (1.21). Если существует ее базис σ такой, что

$$\Delta(\sigma) \geq 0 \ , \tag{1.28}$$

то $\overline{x}$ – решение задачи (1.20), (1.21).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполняется условие (1.28), то для любого $x \in X$ скалярное произведение $\langle \Delta, x \rangle \geq 0$ и, в силу формулы приращения, $\langle c, \overline{x} \rangle \geq \langle c, x \rangle$. ■

П р и м е р 1.3. Пусть задача ЛП имеет вид

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 \to \max \ ;$$

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = 3 \ , \\ x_1 - x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = 1 \ , \\ x_i \geq 0 \ , \ i = 1, 2, 3, 4 \ . \end{gathered}$$

Точка $\overline{x} = (0, 0, 1, 0)$ – вырожденная угловая точка с базисами $\sigma_1 = \{a^1, a^3\}$, $\sigma_2 = \{a^2, a^3\}$ и $\sigma_3 = \{a^3, a^4\}$. Нетрудно убедиться, что $\Delta(\sigma_1) = (0, 1, 0, 1/2) \geq 0$ и, следовательно, точка $\overline{x}$ – решение рассматриваемой задачи. Заметим, что условие (1.28) выполняется также в базисе σ_2 и не выполняется в базисе σ_3 : $\Delta(\sigma_2) = (1/2, 0, 0, 7/4)$, $\Delta(\sigma_3) = (-1/5, 7/5, 0, 0)$. ■

Вектор Δ называется *вектором оценок* (*относительных оценок*, поскольку зависит от базиса), а его компоненты $\Delta_i, i = 1, \ldots, n,$ – *оценками* (*относительными оценками*). Из (1.26) вытекает, что

$$\Delta_i = \langle a^i, y \rangle - c_i \ , \ i = 1, \ldots, n \ . \tag{1.29}$$

Подставляя сюда y из (1.24), получим

$$\Delta_i = \langle a^i, B_\sigma^{-T} c^\sigma \rangle - c_i = \langle B_\sigma^{-1} a^i, c^\sigma \rangle - c_i \ . \tag{1.30}$$

Положим

$$\lambda^i = B_\sigma^{-1} a^i \ . \tag{1.31}$$

Тогда формула (1.30) примет вид:

$$\Delta_i = \langle c^\sigma, \lambda^i \rangle - c_i \ , \ i = 1, \ldots, n \ . \tag{1.32}$$

Теперь заметим, что, так как

$$B_\sigma^{-1} B_\sigma = [B_\sigma^{-1} a^{i_1} \ldots B_\sigma^{-1} a^{i_m}] = [\lambda^{i_1} \ldots \lambda^{i_m}] = E \ ,$$

где E – единичная матрица, то $\lambda^{i_j} = e^j$, где $e^j \in R^m$ – j – тый орт. Следовательно,

$$\Delta_{i_j} = \langle c^\sigma, e^j \rangle - c_{i_j} = c_{i_j} - c_{i_j} = 0 \ , \ j = 1, \ldots, m \ .$$

То есть,

$$\Delta_i = 0 \qquad \forall i \in I_\sigma \ . \tag{1.33}$$

Отсюда следует, что формула приращения (1.27) и критерий оптимальности (1.28) могут быть записаны в виде, соответственно,

$$\langle c, x \rangle - \langle c, \overline{x} \rangle = -\sum_{i \notin I_\sigma} \Delta_i x_i \ \ , \tag{1.34}$$

$$\Delta_i \geq 0 \qquad \forall i \notin I_\sigma \ . \tag{1.35}$$

З а м е ч а н и е. Из (1.31) следует, что

$$a^i = B_\sigma \lambda^i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ji} a^{i_j} \ , \tag{1.36}$$

где $\lambda_{ji} = \lambda^i_j$ $-j$ – тая компонента вектора λ^i. Таким образом, компоненты вектора λ^i представляют собой коэффициенты разложения вектора a^i по базисным векторам.

Упражнения

1.1. Пусть σ – базис угловой точки $\overline{x} \in X$, $\Delta = \Delta(\sigma)$. Доказать, что если

$$\Delta_i > 0 \qquad \forall i \notin I_\sigma \ , \tag{1.37}$$

то $\overline{x}$ – единственное решение задачи (1.20), (1.21).

1.2. Для множеств, заданных следующими условиями, найти все угловые точки и их базисы. Указать вырожденные и невырожденные угловые точки.

i. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \ , \\ x_1 \qquad - x_3 &= 0 \ , \\ x_i \geq 0 \ , \ i &= 1,2,3 \ ; \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ \ x_3 + x_4 &= 2 \ , \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \ , \\ x_i \geq 0 \ , \ i &= 1,2,3,4 \ . \end{aligned}$$

1.3. Исследовать на оптимальность угловую точку $\overline{x}$ в следующих задачах:

i. $$-x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max\ ;$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\ ,$$
$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 2\ ,$$
$$x_i \geq 0\ ,\ i = 1,2,3\ ,$$
$$\overline{x} = (1,1,0)\ ;$$

ii. $$x_1 + x_2 + x_3 \to \max\ ;$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 4\ ,$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\ ,$$
$$x_i \geq 0\ ,\ i = 1,2,3\ ,$$
$$\overline{x} = (0,1,3)\ ;$$

iii. $$2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max\ ;$$

$$-5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 14x_5 = -7\ ,$$
$$x_1 - 5x_2 - 10x_3 - 4x_4 + 20x_5 = -10\ ,$$
$$x_i \geq 0\ ,\ i = 1,\ldots 5\ ,$$
$$\overline{x} = (2,0,0,3,0)\ ;$$

iv. $$24x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 11x_4 - 14x_5 \to \max\ ;$$

$$-3x_1 + 4x_2 + 3x_4 + 3x_5 = -6\ ,$$
$$9x_1 - 3x_2 - 8x_4 - 8x_5 = 19\ ,$$
$$-4x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -3\ ,$$
$$x_i \geq 0\ ,\ i = 1,\ldots,5\ ,$$
$$\overline{x} = (3,0,0,1,0)\ .$$

§2. Симплекс-метод

Рассмотрим каноническую задачу ЛП

$$f(x) = \langle c, x\rangle \to \max\ ;\ x \in X\ , \tag{2.1}$$

$$X = \{x \in R^n :\ Ax = b,\ x \geq 0\}\ , \tag{2.2}$$

где $A \in M_{m,n},\ rankA = m < n$.

Сделаем следующее допущение (в дальнейшем мы от него избавимся) – все угловые точки в задаче (2.1), (2.2) являются невырожденными. Сама задача (2.1), (2.2) в этом случае называется *невырожденной задачей ЛП*.

Пусть $\overline{x}$ – угловая точка множества X, $\sigma = \{a^{i_1}, \ldots, a^{i_m}\}$ – ее базис. Предположим, что критерий оптимальности в точке $\overline{x}$ не выполняется – существуют индексы $i \notin I_\sigma$ такие, что соответствующие им оценки $\Delta_i < 0$. Тогда из формулы приращения (1.34) следует, что $\langle c, x\rangle > \langle c, \overline{x}\rangle$ для любого вектора $x \in X$ такого, что

$$\sum_{i \notin I_\sigma} \Delta_i x_i < 0 \; . \tag{2.3}$$

Очевидно, имеет смысл попытаться найти такой вектор – даже если он не окажется решением рассматриваемой задачи, то во всяком случае даст лучшее приближение к искомому оптимуму, чем вектор $\overline{x}$.

2.1. Простейший способ построения вектора $x \in X$, удовлетворяющего условию (2.3), состоит в следующем. Выберем произвольный индекс $i \notin I_\sigma : \; \Delta_i < 0$, пусть это будет индекс $i = k$, и положим

$$x_i = 0, \; i \notin I_\sigma, \; i \neq k \; , \tag{2.4}$$

$$x_k = \theta \; , \tag{2.5}$$

где θ – некоторое, пока произвольное, положительное число. Из (1.34) при этом формально получим, что

$$\langle c, x\rangle - \langle c, \overline{x}\rangle = -\theta \Delta_k \; . \tag{2.6}$$

Формулы (2.4) и (2.5) определяют компоненты x_i вектора x для $i \notin I_\sigma$. Остальные его компоненты найдем из условия $Ax = b$. Для этого обозначим $x^\sigma = (x^\sigma_1, \ldots, x^\sigma_m) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ и подставим (2.4) и (2.5) в систему $Ax = b$:

$$Ax = \sum_{i \in I_\sigma} x_i a^i + \sum_{i \notin I_\sigma} x_i a^i = B_\sigma x^\sigma + \theta a^k = b \; .$$

Отсюда, учитывая (1.22) и (1.31),

$$x^\sigma = \overline{x}^\sigma - \theta \lambda^k \; , \tag{2.7}$$

или, в покомпонентной записи,

$$x_{i_j} = \overline{x}_{i_j} - \theta\lambda_{jk} \ , \ j = 1, \ldots, m \ . \tag{2.8}$$

Остается выбрать параметр $\theta > 0$ так, чтобы все компоненты x_{i_j} вектора x^σ были неотрицательны. Возможны два случая.

Случай 1: $\lambda^k \leq 0$.

Тогда, так как $\overline{x}^\sigma > 0$, то $x^\sigma > 0$ при любом $\theta > 0$. Следовательно, при любом $\theta > 0$ вектор $x = x(\theta)$, построенный по формулам (2.4), (2.5) и (2.7), принадлежит множеству X. При $\theta \to +\infty$ из (2.6) получим, что $\langle c, x \rangle \to +\infty$. Но это означает, что рассматриваемая задача не имеет решения: $\sup\limits_X \langle c, x \rangle = +\infty$ (целевая функция не ограничена сверху на множестве планов).

Случай 2: существуют индексы $j \in \{1, \ldots, m\} : \lambda_{jk} > 0$.

Введем множество $J_k = \{j : \ \lambda_{jk} > 0\}$. Из (2.8) следует, что если $j \notin J_k$, то $x_{i_j} > 0$ для любого $\theta > 0$. Для $j \in J_k$ должно выполняться условие

$$\overline{x}_{i_j} - \theta\lambda_{jk} \geq 0 \ .$$

Отсюда получим условие на выбор параметра θ:

$$0 < \theta \leq \min_{j \in J_k} \frac{\overline{x}_{i_j}}{\lambda_{jk}} = \min_{j \in J_k} \frac{\overline{x}_j^\sigma}{\lambda_{jk}} \ .$$

Из формулы (2.6) следует, что чем больше значение параметра θ, тем больше значение целевой функции в точке $x = x(\theta)$:

$$\langle c, x \rangle = \langle c, \overline{x} \rangle + \theta |\Delta_k| \ .$$

Следовательно, лучше всего полагать

$$\theta = \theta_k = \min_{j \in J_k} \frac{\overline{x}_j^\sigma}{\lambda_{jk}} \ . \tag{2.9}$$

Т е о р е м а 2.1. Точка $x = x(\theta_k)$, построенная по формулам (2.4), (2.5), (2.7) и (2.9), является угловой точкой множества X.

Для доказательства нам понадобится следующая

Л е м м а 2.1. Пусть векторы

$$p^1, p^2, \ldots, p^r \tag{2.10}$$

образуют линейно независимую систему, вектор $q = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j p^j$. Если для некоторого s, $1 \le s \le r$, коэффициент $\lambda_s \ne 0$, то система векторов $p^1, \ldots, p^{s-1}, q, p^{s+1}, \ldots, p^r$, полученная из системы (2.10) заменой вектора p^s на вектор q, также является линейно независимой.

Доказательство. Предположим противное: существуют числа $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \beta, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_r$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что $\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne s}}^{r} \beta_j p^j + \beta q = 0$. Подставляя сюда $q = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j p^j$, получим

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne s}}^{r} (\beta_j + \beta \lambda_j) p^j + \lambda_s \beta p^s = 0 \ .$$

Так как векторы (2.10) линейно независимы и $\lambda_s \ne 0$, это может иметь место только при $\beta = \beta_1 = \ldots = \beta_{s-1} = \beta_{s+1} = \ldots = \beta_r = 0$. Противоречие. ■

Доказательство теоремы 2.1. Пусть минимум в формуле (2.9) реализуется на индексе s. То есть, $\theta_k = \overline{x}_s^{\sigma} / \lambda_{sk}$. Тогда из (2.8) следует, что $x_{i_s} = 0$. Таким образом, точка $x = x(\theta_k)$ имеет не более m отличных от нуля компонент $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{s-1}}, x_{i_{s+1}}, \ldots, x_{i_m}$ и $x_k = \theta_k$ (в принципе, если индекс s, на котором реализуется минимум в (2.9), неединственный, то число отличных от нуля компонент точки x меньше m; для невырожденных задач, как мы убедимся в ходе доказательства, этот случай не имеет места). В силу теоремы 1.1 остается показать, что векторы

$$a^{i_1}, \ldots, a^{i_{s-1}}, a^k, a^{i_{s+1}}, \ldots, a^{i_m} \tag{2.11}$$

линейно независимы. Для этого заметим, что (см. (1.36))

$$a^k = B_\sigma \lambda^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{jk} a^{i_j} \ .$$

Так как векторы a^{i_j}, $j = 1, \ldots, m$, линейно независимы и, по определению, $\lambda_{sk} > 0$, то линейная независимость векторов (2.11) следует из леммы 2.1. Стало быть, точка $x = x(\theta_k)$ – угловая и, в силу невырожденности, имеет ровно m положительных компонент. Отсюда следует, что индекс s, на котором реализуется минимум в формуле (2.9) – единственный. ■

Подведем итог. Если в угловой точке $\overline{x}$ не выполняется критерий оптимальности, то, выбирая произвольный индекс $k: \ \Delta_k < 0$, можно либо установить неограниченность целевой функции на множестве планов, либо, используя формулы (2.4), (2.5), (2.7) и (2.9), построить угловую точку x со значением целевой функции, большим, чем в точке $\overline{x}$. Точку x можно взять за исходную и повторить для нее всю процедуру: проверить критерий оптимальности и, если он не выполняется, либо установить неограниченность целевой функции, либо построить новую угловую точку, в которой значение целевой функции будет больше, чем в точке x. И т.д. Описанный итерационный процесс называется *симплекс-методом.* Поскольку на каждой его итерации значение целевой функции строго монотонно возрастает, то ни одна угловая точка не может встретиться дважды, а так как число угловых точек конечно, то через конечное число итераций будет либо найдена угловая точка, являющаяся решением задачи, либо установлено, что $\sup\limits_{X}\langle c, x\rangle = +\infty$. На практике число итераций симплекс-метода обычно не превосходит $2m - 4m$.

Приведенные рассуждения одновременно служат доказательством следующей теоремы.

Т е о р е м а 2.2. Если множество $X_* = \operatorname{Argmax}\limits_{X}\langle c, x\rangle \neq \emptyset$, то оно содержит угловые точки множества X. Угловая точка $\overline{x} \in X_*$ тогда и только тогда, когда для нее выполняется критерий оптимальности.

Также очевидна следующая

Т е о р е м а 2.3. Если целевая функция задачи (2.1), (2.2) ограничена сверху на множестве планов, то задача имеет решение ($X_* \neq \emptyset$).

2.2. Из доказательства теоремы 2.1 следует, что базис новой угловой точки x образуется из базиса старой угловой точки $\overline{x}$ заменой вектора a^{i_s} на вектор a^k. Эта замена и правила, по которым она производится, и составляют, по существу, ядро симплекс-метода, алгоритм которого может быть теперь представлен в следующей форме.

А л г о р и т м 2.1.

Шаг 0. Задать целевой вектор c, матрицу условий A, вектор ограничений b и множество базисных индексов $I_\sigma = \{i_1, \ldots, i_m\}$. Сформировать базисную матрицу $B_\sigma = [a^{i_1} \ldots a^{i_m}]$ и вектор $c^\sigma = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_m})$.

Шаг 1. Вычислить матрицу B_σ^{-1} и вектор $\overline{x}^\sigma = B_\sigma^{-1}b$.

Шаг 2. Вычислить вектор $y = B_\sigma^{-T}c^\sigma$ и оценки $\Delta_i = \langle y, a^i\rangle - c_i$ для $i \notin I_\sigma$.

Шаг 3. Если $\Delta_i \geq 0$ для всех $i \notin I_\sigma$, то положить $x_i^* = 0$ для $i \notin I_\sigma$, $x_{i_j}^* = \overline{x}_j^\sigma, j = 1, \ldots, m$, вычислить $f(x^*) = \langle c, x^*\rangle = \langle c^\sigma, \overline{x}^\sigma\rangle$ и остановиться: x^* – оптимальный план; в противном случае перейти на шаг 4.

Шаг 4. Выбрать произвольный индекс $k \notin I_\sigma :\ \Delta_k < 0$ и вычислить вектор $\lambda^k = B_\sigma^{-1}a^k$.

Шаг 5. Если $\lambda_{jk} \leq 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$, то остановиться: $\sup\limits_X \langle c, x\rangle =$ $= +\infty$; иначе перейти на шаг 6.

Шаг 6. Вычислить $s = \arg\min\limits_{j:\lambda_{jk}>0} \frac{\overline{x}_j^\sigma}{\lambda_{jk}}$.

Шаг 7. В множестве I_σ индекс i_s заменить на индекс k, в матрице B_σ – вектор a^{i_s} на вектор a^k, в векторе c^σ – компоненту c_{i_s} на c_k (т.е. положить $i_s = k$, $a^{i_s} = a^k$, $c_{i_s} = c_k$). Перейти на шаг 1.

Алгоритм 2.1 представляет собой самую общую, принципиальную, схему одного из наиболее распространенных вариантов симплекс-метода, который называется *модифицированным симплекс-методом.* Обсудим некоторые вопросы его реализации.

i. В качестве индекса k на шаге 4 обычно рекомендуется выбирать тот индекс k, для которого соответствующая оценка Δ_k минимальна (максимальна по модулю). Это, как правило, несколько сокращает число итераций симплекс-метода, но требует вычисления всех оценок Δ_i для $i \notin I_\sigma$. Можно, очевидно, не вычислять все оценки, если в качестве индекса k взять тот, для которого первая из вычисленных оценок будет меньше нуля.

ii. На всех итерациях симплекс-метода, кроме первой, базисную матрицу B_σ можно не обращать каждый раз заново, а пересчитывать обратную матрицу B_σ^{-1} по рекуррентным формулам. Для вывода этих формул базисную матрицу в старой угловой точке будем обозначать, как и прежде, через B_σ, а базисную матрицу в новой угловой точке – через B_τ. То есть,

$$B_\sigma = [a^{i_1} \ldots a^{i_{s-1}}\ a^{i_s}\ a^{i_{s+1}} \ldots a^{i_m}],$$

$$B_\tau = [a^{i_1} \dots a^{i_{s-1}}\ a^k\ \ a^{i_{s+1}} \dots a^{i_m}].$$

Тогда, так как $B_\sigma^{-1} a^{i_j} = e^j$, $j = 1, \dots, m$, а $B_\sigma^{-1} a^k = \lambda^k$, то

$$B_\sigma^{-1} B_\tau = [e^1 \dots e^{s-1}\ \lambda^k\ e^{s+1} \dots e^m] = E_s\ .$$

Отсюда

$$B_\tau^{-1} = E_s^{-1} B_\sigma^{-1}. \tag{2.12}$$

Матрица E_s^{-1}, как нетрудно убедиться, имеет вид:

$$E_s^{-1} = [e^1 \dots e^{s-1}\ \eta^k\ e^{s+1} \dots e^m], \tag{2.13}$$

где компоненты вектора η^k вычисляются по формуле

$$\eta_j^k = \begin{cases} -\lambda_{jk}/\lambda_{sk} & j = 1, \dots, m,\ j \neq s \\ \\ \ \ 1/\lambda_{sk} & j = s\ \ . \end{cases} \tag{2.14}$$

Элементы матриц B_σ^{-1} и B_τ^{-1} обозначим, соответственно, через $\overline{\beta}_{ji}$ и β_{ji}. Из (2.12) – (2.14) следует, что

$$\beta_{ji} = \overline{\beta}_{ji} - \frac{\lambda_{jk}}{\lambda_{sk}} \overline{\beta}_{si}\ ,\ \ j, i = 1 \dots, m,\ j \neq s\ , \tag{2.15}$$

$$\beta_{si} = \frac{1}{\lambda_{sk}} \overline{\beta}_{si}\ ,\ \ i = 1, \dots, m. \tag{2.16}$$

2.3. Другой подход к реализации симплекс-метода состоит в том, чтобы на всех итерациях, кроме первой, вообще не иметь дела с обратной базисной матрицей, а вместо нее рекуррентно пересчитывать компоненты вектора $\overline{x}^\sigma$, значение целевой функции, компоненты векторов λ^i и оценки Δ_i. Все эти параметры удобно объединить в одну матрицу Λ размера $(m+1) \times (n+1)$:

$$\Lambda = [\lambda_{ji}]_{j,i=0}^{m,n} = \left[\begin{array}{c|ccc} \langle c, \overline{x} \rangle & \Delta_1 & \dots & \Delta_n \\ \hline \overline{x}^\sigma & \lambda^1 & \dots & \lambda^n \end{array} \right]\ \ .$$

Матрица Λ называется *симплексной таблицей*, соответствующей угловой точке $\overline{x}$ (точнее – базису σ).

Введем, для единообразия, следующие обозначения: $\Delta_0 = \langle c, \overline{x} \rangle$, $a^0 = b$ и положим $c_0 = 0$. Тогда $\overline{x}^\sigma = B_\sigma^{-1} a^0 = \lambda^0$, $\Delta_0 = \langle c^\sigma, \overline{x}^\sigma \rangle = \langle c^\sigma, \lambda^0 \rangle - c_0$, а матрица Λ принимает вид:

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cccc} \Delta_0 & \Delta_1 & \dots & \Delta_n \\ \hline \lambda^0 & \lambda^1 & \dots & \lambda^n \end{array} \right]\ \ .$$

Таким образом, элементы матрицы Λ,

$$\lambda_{ji} = \lambda_j^i, \ \ j = 1, \ldots, m, \ i = 0, \ldots, n, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{0i} = \Delta_i = \langle c^\sigma, \lambda^i \rangle - c_i = \\ = \sum_{j=1}^{m} c_{i_j} \lambda_{ji} - c_i, \ \ i = 0, \ldots, n \ . \end{aligned} \tag{2.18}$$

(Здесь для вычисления оценок использована формула (1.32)).

Новой угловой точке x соответствует новый базис $\tau = \{a^{i_1}, \ldots, a^{i_{s-1}}, a^k, \ a^{i_{s+1}}, \ldots, a^{i_m}\}$ и новая симплексная таблица

$$\Gamma = [\gamma_{ji}]_{j,i=0}^{m,n} = \left[\begin{array}{cccc} \Delta_0(\tau) & \Delta_1(\tau) & \ldots & \Delta_n(\tau) \\ \hline \gamma^0 & \gamma^1 & \ldots & \gamma^n \end{array} \right] \ ,$$

где $\gamma^i = B_\tau^{-1} a^i$, $\ \Delta_i(\tau) = \langle c^\tau, \gamma^i \rangle - c_i$, а вектор $c^\tau = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_{s-1}}, c_k, c_{i_{s+1}}, \ldots, c_{i_m})$. Как и в таблице Λ элементы нулевого столбца таблицы Γ – это значение целевой функции и базисные компоненты угловой точки: $\Delta_0(\tau) = \langle c, x \rangle$, $\ \gamma^0 = x^\tau$.

Установим связь между элементами старой и новой симплексных таблиц. Для этого заметим, что в силу (2.12) – (2.14) для любого $i = 0, \ldots, n$

$$\gamma^i = B_\tau^{-1} a^i = E_s^{-1} B_\sigma^{-1} a^i = E_s^{-1} \lambda^i,$$

или, в покомпонентной записи,

$$\gamma_{ji} = \gamma_j^i = \lambda_{ji} - \frac{\lambda_{jk}}{\lambda_{sk}} \lambda_{si} \ , \ \ j = 1, \ldots, m \ , \ j \neq s,$$

$$\gamma_{si} = \gamma_s^i = \frac{\lambda_{si}}{\lambda_{sk}} \ \ .$$

Тогда

$$\gamma_{0i} = \Delta_i(\tau) = \langle c^\tau, \gamma^i \rangle - c_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{m} c_{i_j} \gamma_{ji} + c_k \gamma_{si} - c_i =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{m} c_{i_j} (\lambda_{ji} - \frac{\lambda_{jk}}{\lambda_{sk}} \lambda_{si}) + c_k \frac{\lambda_{si}}{\lambda_{sk}} - c_i \ .$$

Отсюда, так как $\lambda_{ji} - \frac{\lambda_{jk}}{\lambda_{sk}}\lambda_{si} = 0$ при $j = s$,

$$\gamma_{0i} = \sum_{j=1}^{m} c_{i_j}(\lambda_{ji} - \frac{\lambda_{jk}}{\lambda_{sk}}\lambda_{si}) + c_k\frac{\lambda_{si}}{\lambda_{sk}} - c_i =$$

$$= (\sum_{j=1}^{m} c_{i_j}\lambda_{ji} - c_i) - \frac{\lambda_{si}}{\lambda_{sk}}(\sum_{j=1}^{m} c_{i_j}\lambda_{jk} - c_k) =$$

$$= \Delta_i(\sigma) - \frac{\lambda_{si}}{\lambda_{sk}}\Delta_k(\sigma) = \lambda_{0i} - \frac{\lambda_{si}}{\lambda_{sk}}\lambda_{0k} \ .$$

Таким образом, формулы пересчета симплексных таблиц при переходе от угловой точки $\overline{x}$ к угловой точке x имеют вид:

$$\gamma_{ji} = \lambda_{ji} - \frac{\lambda_{jk}}{\lambda_{sk}}\lambda_{si} \ , \ \ j = 0, \ldots, m \ , \ j \neq s \ , \ i = 0, \ldots, n \ , \tag{2.19}$$

$$\gamma_{si} = \frac{\lambda_{si}}{\lambda_{sk}} \ \ , \ \ i = 0, \ldots, n \ . \tag{2.20}$$

Элемент λ_{sk} в формулах (2.19) и (2.20) называется *ведущим элементом*, s – тая строка и k – тый столбец матрицы Λ (старой симплексной таблицы), на пересечении которых находится ведущий элемент, называются *ведущей строкой* и *ведущим столбцом*.

На языке симплексных таблиц алгоритм симплекс-метода может быть представлен в следующей форме.

А л г о р и т м 2.2.

Шаг 0. Задать целевой вектор c, матрицу условий A, вектор ограничений b и множество базисных индексов $I_\sigma = \{i_1, \ldots, i_m\}$.

Шаг 1. (* Заполнение начальной симплексной таблицы Λ *)

i. Сформировать базисную матрицу B_σ, вектор c^σ и вычислить B_σ^{-1}. Положить $a^0 = b \ , \ c_0 = 0$.

ii. Для $i = 0, \ldots, n$ вычислить $\lambda^i = B_\sigma^{-1}a^i$ (столбцы симплексной таблицы без элементов нулевой строки). Положить $\lambda_{ji} = \lambda_j^i$, $j = 1, \ldots, m, \ i = 0, \ldots, n$.

iii. Для $i = 0, \ldots, n$ положить $\lambda_{0i} = \langle c^\sigma, \lambda^i \rangle - c_i$ (заполнить нулевую строку симплексной таблицы).

Шаг 2. (* Проверка условия оптимальности *)

Если $\lambda_{0i} \geq 0$ для $i = 1, \ldots, n$, то положить $x_i^* = 0$ для $i \notin I_\sigma$, $x_{i_j}^* = \lambda_{j0}$ для $j = 1, \ldots, m$, $\langle c, x^* \rangle = \lambda_{00}$ и остановиться: x^* – оптимальный план. В противном случае перейти на шаг 3.

Шаг 3. (* Выбор ведущего столбца *)

Выбрать произвольный индекс $k \in \{1, \ldots, n\}$: $\lambda_{0k} < 0$.

Шаг 4. (* Проверка условия неограниченности целевой функции *)

Если $\lambda_{jk} \leq 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$, то остановиться: $\sup\limits_X \langle c, x \rangle = +\infty$. Иначе перейти на шаг 5.

Шаг 5. (* Выбор ведущей строки *)

Вычислить $s = \operatorname{argmin}\{\frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{jk}} : \ \lambda_{jk} > 0, \ 1 \leq j \leq m\}$.

Шаг 6. (* Пересчет симплексной таблицы *)

В множестве I_σ положить $i_s = k$ (новое множество базисных индексов формируется на месте старого). Вычислить элементы симплексной таблицы Γ:

$$\gamma_{si} = \frac{\lambda_{si}}{\lambda_{sk}} \ , \ i = 0, \ldots, n,$$
$$\gamma_{ji} = \lambda_{ji} - \gamma_{si}\lambda_{jk} \ , \ j = 0, \ldots, m, \ j \neq s \ , \ i = 0, \ldots, n \ .$$

Шаг 7. (* Переход на новую итерацию *)

Положить $\Lambda = \Gamma$ и перейти на шаг 2.

При реализации (на компьютере) алгоритм 2.2, разумеется, может быть модифицирован – убраны ненужные (избыточные) массивы, пересылки, проверки и т.п. Все эти модификации очевидны и мы их не обсуждаем. Заметим только, что, так как для $i \in I_\sigma$ оценки $\lambda_{0i} = \Delta_i = 0$, а векторы $\lambda^{i_j} = e^j$, $j = 1, \ldots, m$, то базисные столбцы симплексной таблицы (на каждой итерации) можно заполнять сразу, не вычисляя, это – единичные столбцы, где 1 стоит на пересечении j – той строки и i_j – того столбца, $j = 1, \ldots, m$.

Общий вид симплексной таблицы представлен в табл. 2.1 и 2.2. Для удобства над таблицами проставлены номера столбцов, а слева помечены нулевая строка Δ и проставлены базисные индексы. Также для удобства в таблицах выделены нулевая строка (строка оценок) и нулевой столбец, содержащий базисные компоненты угловой точки. Кроме того, в табл. 2.1 выделены ведущая строка и ведущий столбец (в предположении, что $\Delta_k < 0$ и $\lambda_{sk} > 0$). Табл. 2.2 представляет собой симплексную таблицу, полученную после пересчета табл. 2.1 (для определенности мы считаем, что в табл. 2.1 индекс $i_s = r$).

Табл. 2.1

	0	1	2	$\cdots$	i_1	$\cdots$	i_s	$\cdots$	k	$\cdots$	i_m	$\cdots$	n
Δ	$\langle c, \overline{x} \rangle$	Δ_1	Δ_2	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	Δ_k	$\cdots$	0	$\cdots$	Δ_n
i_1	$\overline{x}_{i_1}$	λ_{11}	λ_{12}	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	λ_{1k}	$\cdots$	0	$\cdots$	λ_{1n}
i_2	$\overline{x}_{i_2}$	λ_{21}	λ_{22}	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	λ_{2k}	$\cdots$	0	$\cdots$	λ_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i_s	$\overline{x}_{i_s}$	λ_{s1}	λ_{s2}	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	λ_{sk}	$\cdots$	0	$\cdots$	λ_{sn}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i_m	$\overline{x}_{i_m}$	λ_{m1}	λ_{m2}	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	λ_{mk}	$\cdots$	1	$\cdots$	λ_{mn}

Табл. 2.2

	0	1	2	$\cdots$	i_1	$\cdots$	r	$\cdots$	k	$\cdots$	i_m	$\cdots$	n
Δ	$\langle c, x \rangle$	Δ_1	Δ_2	$\cdots$	0	$\cdots$	Δ_r	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	Δ_n
i_1	x_{i_1}	γ_{11}	γ_{12}	$\cdots$	1	$\cdots$	γ_{1r}	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	γ_{1n}
i_2	x_{i_2}	γ_{21}	γ_{22}	$\cdots$	0	$\cdots$	γ_{2r}	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	γ_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$i_s = k$	x_k	γ_{s1}	γ_{s2}	$\cdots$	0	$\cdots$	γ_{sr}	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	γ_{sn}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i_m	x_{i_m}	γ_{m1}	γ_{m2}	$\cdots$	0	$\cdots$	γ_{mr}	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	γ_{mn}

Формулы пересчета симплексных таблиц легко запомнить в виде следующего *правила пересчета*. Ведущая строка старой таблицы делится на ведущий элемент и заносится в соответствующую ей строку новой таблицы (формула (2.20)). Заполняются столбцы новой таблицы с номерами, принадлежащими новому множеству базисных индексов (в силу отмеченного выше, эти столбцы состоят из соответствующих единичных векторов). Остальные элементы новой таблицы вычисляются с помощью *правила прямоугольника*, вытекающего из формулы (2.19): элементы λ_{ji}, λ_{si}, λ_{jk} и λ_{sk} находятся в вершинах прямоугольника, образованного пересечением j – той и s – той (ведущей) строк и i – того и k –

того (ведущего) столбцов (см. рис. 2.1 и 2.2); (j, i) – тый элемент новой таблицы равен (j, i) – тому элементу старой таблицы минус произведение элементов противоположной диагонали, деленное на ведущий элемент.

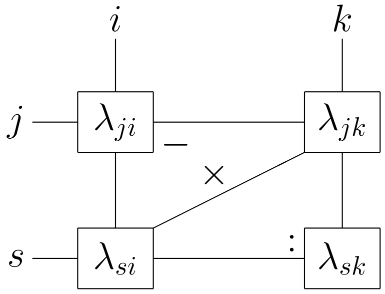

Рис. 2.1

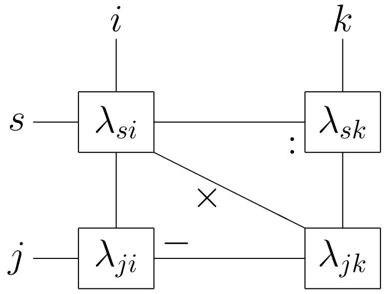

Рис. 2.2

П р и м е р 2.1. Используя табличную форму симплекс–метода, решим следующую задачу ЛП:

$$f(x) = 2x_1 + \ x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max\,;$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 + 2x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 30\ , \\ 4x_1 + 2x_2 + \ x_3 + 2x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 40\ , \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 25\ , \\ x_i \geq 0\ \ , i = 1, \ldots, 7\ . \end{aligned}$$

Исходная угловая точка в этой задаче очевидна: $\overline{x} = (0, 0, 0, 0, 30, 40, 25)$. Множество базисных индексов $I_\sigma = \{5, 6, 7\}$, базисная матрица $B_\sigma = E$, поэтому $\lambda^i = B_\sigma^{-1} a^i = a^i$. Так как $c^\sigma = (0, 0, 0)$, то $\lambda_{00} = \Delta_0 = \langle c^\sigma, \overline{x}^\sigma \rangle = 0$, $\lambda_{0i} = \Delta_i = \langle c^\sigma, \lambda^i \rangle - c_i = -c_i$. Таким образом, исходная симплексная таблица имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 & 0 & 0 & 0 \\ b & a^1 & a^2 & a^3 & a^4 & e^1 & e^2 & e^3 \end{bmatrix}.$$

В развернутой форме эта таблица представлена таблицей 2.3. Последующие итерации симплекс–метода представлены таблицами 2.4 и 2.5. Справа от таблиц 2.3 и 2.4 записаны величины $\theta_j = \lambda_{j0}/\lambda_{jk}$ для $j \in \{1, \ldots, m\} : \ \lambda_{jk} > 0$ (минимальная из них, в соответствии с шагом 5 алгоритма 2.2 определяет ведущую строку). В таблицах выделены ведущий столбец и ведущий элемент. Индексом k помечен ведущий столбец, индексом s – ведущая строка. Для иллюстрации правила прямоугольника в табл. 2.3 выделен прямоугольник, вершины которого используются для пересчета элемента λ_{32}. В соответствии с этим правилом элемент γ_{32} таблицы 2.4 равен $2 - 1 \cdot 3 : 2 = 1/2$.

Табл. 2.3

	0	1	2	3	4	5	6	7	
Δ	0	-2	-1	-3	-5	0	0	0	
5	30	2	3	1	$\boxed{2}$	1	0	0	$15 \leftarrow s$
6	40	4	2	1	2	0	1	0	20
7	25	1	2	3	1	0	0	1	25
					$\uparrow k$				

Табл. 2.4

	0	1	2	3	4	5	6	7	
Δ	75	3	13/2	$-1/2$	0	5/2	0	0	
4	15	1	3/2	1/2	1	1/2	0	0	30
6	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
7	10	0	1/2	$\boxed{5/2}$	0	$-1/2$	0	1	$4 \leftarrow s$
				$\uparrow k$					

Табл. 2.5

	0	1	2	3	4	5	6	7
Δ	77	3	33/5	0	0	12/5	0	1/5
4	13	1	7/5	0	1	3/5	0	$-1/5$
6	10	2	-1	0	0	-1	1	0
3	4	0	1/5	1	0	$-1/5$	0	2/5

В табл. 2.5 оценки $\Delta_i \geq 0$ для всех $i = 1, \ldots, 7$. Следовательно, задача решена: $x^* = (0, 0, 4, 13, 0, 10, 0)$, $f(x^*) = 77$.

П р и м е р 2.2. Рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$f(x) = 5x_1 + x_2 - x_4 \to \max ;$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 18 ,$$

$$6x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 = 14 ,$$

$$x_i \geq 0 , \; i = 1, 2, 3, 4 .$$

Пусть задано множество базисных индексов $I_\sigma = \{1, 4\}$. Тогда $c^\sigma = (5, -1)$,

$$B_\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

Последовательно умножая матрицу B_σ^{-1} на столбцы $a^0 = b, a^2$ и a^3, заполним нижнюю часть симплексной таблицы (напомним, что ее базисные столбцы равны соответствующим единичным векторам). Результат представлен в табл. 2.6.

Табл. 2.6

	0	1	2	3	4
Δ		0			0
1	4	1	$-1/4$	$-1/4$	0
4	10	0	$5/2$	$-1/2$	1

Остается вычислить оценки Δ_0, Δ_2 и Δ_3. В силу формулы $\Delta_i = \langle c^\sigma, \lambda^i \rangle - c_i$ для этого надо скалярно умножить вектор c^σ на нужный столбец таблицы 2.6 и затем отнять соответствующий коэффициент целевого вектора (напомним, что $c_0 = 0$). Получим таблицу 2.7.

Табл. 2.7

	0	1	2	3	4
Δ	10	0	$-19/4$	$-3/4$	0
1	4	1	$-1/4$	$-1/4$	0
4	10	0	$5/2$	$-1/2$	1

Все элементы третьего столбца таблицы 2.7 отрицательны. Следовательно, $\sup\limits_X f(x) = +\infty$.

О б с у ж д е н и е. Алгоритмы 2.1 и 2.2 представляют собой два способа реализации одного и того же метода. В принципиальном плане они, естественно, ничем не отличаются – начав с одного и того же базиса и используя одинаковые правила выбора ведущих столбца и строки, эти алгоритмы будут затем генерировать одинаковые последовательности базисов и соответствующих им угловых точек. Поэтому ниже мы будем считать их полностью равноправными, прибегая, в зависимости от конкретных потребностей, к той или иной форме записи (к алгоритму 2.1 или алгоритму 2.2). Более точно, базовой формой алгоритма симплекс-метода мы будем считать алгоритм 2.1, а симплексные таблицы (алгоритм 2.2), ввиду их наглядности, будем использовать, в основном, для иллюстрации полученных результатов.

С вычислительной точки зрения алгоритмы 2.1 и 2.2 отнюдь не эквивалентны – алгоритм 2.1 предпочтительнее алгоритма 2.2 хотя бы потому, что не требует пересчета на каждой итерации всей симплексной таблицы, а обходится, по сути дела, только одним ее столбцом – λ^k (и, конечно, пересчетом обратной базисной матрицы). Существующие в настоящее время коммерческие пакеты программ по линейному программированию основаны именно на алгоритме 2.1 или одной из его разновидностей. Вычислительная теория симплекс–метода подробно рассматривается в книге [17].

Упражнения

2.1. Пусть невырожденная угловая точка $\overline{x}$ – единственное решение задачи (2.1), (2.2), σ – ее базис. Доказать, что тогда

$$\Delta_i > 0 \quad \forall i \notin I_\sigma \ .$$

2.2. Решить следующие задачи ЛП, предварительно приведя их к канонической форме:

i. $$x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max \ ;$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 7x_4 + 9x_5 &\le 5 \ , \\ x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 &\le 2 \ , \\ x_i \ge 0 \ , \ i = 1, \dots, 5 \ ; \end{aligned}$$

ii. $$-x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max \ ;$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 &\le 3 \ , \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &\le 1 \ , \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\le 1 \ , \\ x_i \ge 0 \ , i = 1, \dots, 5 \ ; \end{aligned}$$

iii. $x_1 + 2x_2 - 4x_3 \qquad \to \max$;

$$
\begin{aligned}
x_1 - \ x_2 - \ x_3 + x_4 &\le 1 \ , \\
2x_1 - \ x_2 + \ x_3 \qquad &\le 3 \ , \\
-x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 &\le 2 \ , \\
x_i \ge 0 \ , \ i = 1, 2, 3, 4 \ .&
\end{aligned}
$$

2.3. Решить симплекс–методом следующие задачи ЛП, взяв в качестве исходной угловой точки точку $\overline{x}$, приведенную в условиях:

i. $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + \ x_5 \to \max$;

$$
\begin{aligned}
x_1 + \ x_2 \qquad + 2x_4 + \ x_5 &= 5 \ , \\
x_1 + \ x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 9 \ , \\
x_2 + x_3 + 2x_4 + \ x_5 &= 6 \ , \\
x_i \ge 0 \ , \ i = 1, \ldots, 5 \ ,& \\
\overline{x} = (0, 0, 1, 2, 1) \ ;&
\end{aligned}
$$

ii. $x_1 - x_2 + 2x_3 - \ x_4 + \ x_5 \to \max$;

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 3 \ , \\
x_2 - \ x_3 - \ x_4 - \ x_5 &= 0 \ , \\
x_1 \qquad\qquad + \ x_4 - \ x_5 &= 0 \ , \\
x_i \ge 0 \ , \ i = 1, \ldots, 5 \ ,& \\
\overline{x} = (0, 2, 0, 1, 1) \ .&
\end{aligned}
$$

§3. Геометрия симплекс-метода

Введем следующее

О п р е д е л е н и е 3.1. Пусть $X \subset R^n$ – выпуклое многогранное множество. Множество $Q \subset X$ называется *ребром* множества X, если среди условий, определяющих множество X, найдутся $n-1$ линейно независимые условия, которые в каждой точке множества Q выполняются как точные равенства.

Пусть X - множество планов задачи (2.1), (2.2), $\overline{x}$ – угловая точка множества X, σ – ее базис, а точка $x = x(\theta)$ построена по формулам (2.4), (2.5) и (2.7):

$$x_i = 0 \ , \ i \notin I_\sigma \ , \ i \neq k \ ,$$

$$x_k = \theta \ ,$$

$$x^\sigma = \overline{x}^\sigma - \theta\lambda^k \ ,$$

где $k \notin I_\sigma : \ \Delta_k(\sigma) < 0$. Точку x можно представить в виде:

$$x = \overline{x} + \theta d^k \ , \tag{3.1}$$

где вектор d^k определяется следующим образом:

$$d_i^k = 0 \ , \ i \notin I_\sigma \ , \ i \neq k \ , \tag{3.2}$$

$$d_k^k = 1 \ , \tag{3.3}$$

$$(d^k)^\sigma = -\lambda^k \ . \tag{3.4}$$

Множество точек $x \in X$, представимых в виде (3.1), обозначим через Q_k, т.е.

$$Q_k = \{x \in X \ : \ x = \overline{x} + \theta d^k\} \ . \tag{3.5}$$

В §2 было показано, что если $\lambda^k \leq 0$, то $x = x(\theta) \in X$ для любого $\theta \geq 0$. Следовательно, в этом случае множество Q_k представляет собой луч, исходящий из угловой точки $\overline{x}$ в направлении вектора d^k, причем при движении точки $x(\theta)$ вдоль этого луча значение целевой функции $\langle c, x(\theta)\rangle$ неограниченно возрастает.

Если $\lambda_j^k > 0$ хотя бы для одного индекса $j \in \{1, \ldots, m\}$, то $x(\theta) \in X$ для всех $\theta \in [0, \theta_k]$, где θ_k определяется формулой (2.9). Точка $x(\theta_k)$ является угловой точкой множества X. Так как любое число $\theta \in [0, \theta_k]$ представимо в виде $\theta = \alpha\theta_k$, где $\alpha \in [0, 1]$, то любая точка $x \in Q_k$ представима в виде

$$x = \overline{x} + \alpha\theta_k d^k = [\alpha + (1-\alpha)]\overline{x} + \alpha\theta_k d^k = \alpha x(\theta_k) + (1-\alpha)\overline{x} \ .$$

Это означает, что множество Q_k представляет собой отрезок, соединяющий угловые точки $\overline{x}$ и $x(\theta_k) : \ Q_k = [\overline{x}, \ x(\theta_k)]$.

Пусть $\theta > 0$ (и $\theta < \theta_k$, если $Q_k = [\overline{x}, \ x(\theta_k)]$). Тогда, по построению,

$$Ax(\theta) = b \ ,$$

$$x^{\sigma}(\theta) > 0 \ ,$$
$$x_i(\theta) = 0 \ , \ i \notin I_{\sigma} \ , \ i \neq k \ ,$$
$$x_k(\theta) = \theta > 0 \ .$$

Отсюда следует, что точка $x(\theta)$ удовлетворяет как точным равенствам $(n-1)$ – му условию из $n+m$ условий, определяющих множество X:

$$Ax = b \quad (m \ \text{условий}) \ , \tag{3.6}$$

$$x_i = 0 \ , \ i \notin I_{\sigma} \ , \ i \neq k \quad (n-m-1 \ \text{условие}) \ . \tag{3.7}$$

Это – те же условия, которые определяют угловую точку $\overline{x}$ за вычетом условия $x_k = 0$. Следовательно, условия (3.6) и (3.7) линейно независимы. Угловая точка $x(\theta_k)$ также удовлетворяет этим условиям (если Q_k – отрезок). Таким образом, множество Q_k является ребром допустимого множества X. Вектор d^k назовем *направляющим вектором ребра* Q_k. Если Q_k – луч, то назовем его *неограниченным ребром*, а если Q_k – отрезок, то концы этого отрезка, угловые точки $\overline{x}$ и $x(\theta_k)$ назовем *соседними* или *смежными угловыми точками*. Симплекс–метод осуществляет перебор смежных угловых точек до тех пор, пока не будет найден оптимальный план, или не будет обнаружено неограниченное ребро.

Отметим некоторые свойства направляющего вектора d^k, которые нам понадобятся в дальнейшем:

i. $$Ad^k = \sum_{i \in I_{\sigma}} d_i^k a^i + \sum_{i \notin I_{\sigma}} d_i^k a^i = B_{\sigma}(d^k)^{\sigma} + d_k^k a^k = -B_{\sigma}\lambda^k + a^k =$$
$$= -B_{\sigma}B_{\sigma}^{-1}a^k + a^k = 0 \ ; \tag{3.8}$$

ii. $$\langle c, d^k \rangle = \langle A^T y - \Delta, d^k \rangle = \langle A^T y, d^k \rangle - \langle \Delta, d^k \rangle =$$
$$= \langle y, Ad^k \rangle - \langle \Delta, d^k \rangle = -\langle \Delta, d^k \rangle =$$
$$= -\sum_{i \in I_{\sigma}} \Delta_i d_i^k - \sum_{\substack{i \notin I_{\sigma} \\ i \neq k}} \Delta_i d_i^k - \Delta_k d_k^k = -\Delta_k \ . \tag{3.9}$$

§4. Вырожденность и зацикливание. Правило Блэнда

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4 \to \max \ ;$$

$$\begin{aligned} -2x_1 - 9x_2 + x_3 + \ 9x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 0 \ , \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - \ 6x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 0 \ , \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 2 \ , \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, 7 \ .$$

Очевидно, что точка $\overline{x} = (0,0,0,0,0,0,2)$ является угловой в рассматриваемой задаче. Несмотря на то, что точка $\overline{x}$ – вырожденная угловая точка, попытаемся решить эту задачу симплекс– методом, выбрав $\overline{x}$ в качестве начальной угловой точки. В качестве начального базиса возьмем очевидный базис $\sigma = \{a^5, a^6, a^7\}$. Базисная матрица $B_\sigma = E$, вектор $c^\sigma = (0,0,0)$. Начальная симплексная таблица представлена в табл. 4.1.

Табл. 4.1

	0	1	2	3	4	5	6	7	
Δ	0	-2	-3	1	12	0	0	0	
5	0	-2	-9	1	9	1	0	0	
6	0	1	$\boxed{3}$	-1	-6	0	1	0	$0 \leftarrow s$
7	2	2	3	-1	-12	0	0	1	$2/3$
			$\uparrow k$						

Выберем в качестве ведущего второй столбец табл. 4.1 и проделаем одну итерацию симплекс–метода. В результате получим табл. 4.2.

Табл. 4.2

	0	1	2	3	4	5	6	7	
Δ	0	-1	0	0	6	0	1	0	
5	0	$\boxed{1}$	0	-2	-9	1	3	0	$0 \leftarrow s$
2	0	$1/3$	1	$-1/3$	-2	0	$1/3$	0	0
7	2	1	0	0	-6	0	-1	1	2
		$\uparrow k$							

Нетрудно видеть, что в результате проделанной итерации симплекс–метод остался в той же самой угловой точке $\overline{x}$, но нашел новый ее базис – $\{a^5, a^2, a^7\}$. Объяснение этому факту достаточно очевидно – из формулы (2.8) следует, что компонента x_6 „новой" угловой точки имеет вид:

$$x_6 = 0 - \theta \cdot 3$$

и, стало быть, при любом $\theta > 0$ точка $x = x(\theta)$ становится недопустимой. Поэтому симплекс–метод блокирует попытку движения в недопустимом направлениии, выбирая параметр $\theta_k = 0$. Одновременно он находит новый базис угловой точки $\overline{x}$, позволяя тем самым повторить попытку решить задачу, начав с нового базиса – может быть этот базис окажется более удачным и в нем либо выполнится один из критериев остановки, либо удастся перейти в новую угловую точку.

Прежде, чем выполнить новую итерацию, заметим, что табл. 4.2 иллюстрирует еще одну ситуацию, которая не встречается в невырожденных задачах – ведущая строка может быть выбрана не однозначно. В табл. 4.2 это может быть либо первая, либо вторая строка. Поскольку эта ситуация может встретиться и в дальнейшем, условимся для рассматриваемого примера придерживаться следующих правил выбора ведущих столбца и строки:

$$k = \max\{i : \ \Delta_i < 0\} \ ,$$
$$s = \min\{j : \ \theta_k = \overline{x}^{\sigma}_j / \lambda_{jk}\}$$

(другими словами, ведущая строка – это первая сверху среди строк, претендующих на эту роль). Таким образом, в табл. 4.2 в качестве ведущей выберем первую строку. Пересчитывая симплексную таблицу, мы придем к той же самой угловой точке, но уже с новым базисом $\{a^1, a^2, a^7\}$. Продолжая итерации симплекс–метода дальше, мы будем по–прежнему оставаться в той же точке $\overline{x}$, меняя только ее базис. В результате последовательные изменения множества базисных индексов, начиная с исходного, будут выглядеть следующим образом: $\{5, 6, 7\} \to \{5, 2, 7\} \to$ $\to \{1, 2, 7\} \to \{1, 4, 7\} \to \{3, 4, 7\} \to \{3, 6, 7\} \to \{5, 6, 7\}$. Последнее уже серьезно – мы вернулись к исходному множеству базисных индексов – симплекс–метод зациклился.

Существует несколько модификаций симплекс–метода, позволяющих избегать зацикливания и доводить решение задачи до конца. Простейшая из них, *модификация*, или *правило Блэнда*, формулируется следующим образом:

$$k = \min\{i : \ \Delta_i < 0\} \ , \tag{4.6}$$

$$i_s = \min\{i_j : \ \theta_k = \overline{x}_{i_j}/\lambda_{jk}\} \ . \tag{4.7}$$

То есть, в базис вводится вектор a^k, соответствующий первой по порядку отрицательной оценке, а выводится вектор a^{i_s}, соответствующий минимальному из базисных индексов, на которых реализуется минимум в формуле (2.9) (ведущим столбцом в симплексной таблице назначается первый из столбцов, имеющих отрицательную оценку, а ведущей строкой – та из строк, претендующих на эту роль, которой соответствует наименьший базисный индекс). Заметим, что в рассмотренном выше примере ведущий столбец мы выбирали с точностью „до наоборот". Нетрудно убедиться, что при использовании в этом примере правила Блэнда зацикливания не будет (оптимальный план $x^* = (2, 0, 2, 0, 2, 0, 0)$).

Т е о р е м а 4.1. При использовании в симплекс–методе правила Блэнда цикл невозможен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное – после конечного числа итераций с нулевым шагом ($\theta_k = 0$) повторился некоторый базис угловой точки $\overline{x}$. Заметим, что этот цикл определяется однозначно в том смысле, что правило Блэнда однозначно определяет номера k и i_s на каждой итерации цикла. Через T обозначим множество индексов, которые в ходе цикла вводятся в множество базисных индексов (так что $i \notin T$ означает, что либо i является базисным индексом на каждой итерации цикла, либо i не является базисным индексом ни на одной итерации цикла). Пусть $q = \max\{i : \ \ i \in T\}$ и пусть τ – тот базис в цикле, в который вводится вектор a^q. То есть, в силу (4.6),

$$\Delta_q(\tau) < 0, \ \Delta_i(\tau) \geq 0 \quad \forall i < q. \tag{4.8}$$

Так как $q \in T$, то вектор a^q на некоторой итерации цикла покидает базис. Пусть $\sigma = \{a^{i_1}, \ldots, a^{i_m}\}$ – тот базис в цикле, из которого выводится вектор a^q и, следовательно,

$$q = i_s = \min\{i_j : \ \theta_k = \overline{x}_{i_j}/\lambda_{jk}\}, \tag{4.9}$$

где k – номер вектора (a^k), вводимого в базис вместо вектора a^q (так что $\Delta_k = \Delta_k(\sigma) < 0$).

Рассмотрим скалярное произведение $\langle \Delta(\tau), d^k \rangle$, где $\Delta(\tau)$ – вектор оценок в базисе τ, $\Delta(\tau) = A^T y(\tau) - c$, а вектор d^k определяется условиями (3.2) – (3.4) (в направлении этого вектора пытается сделать шаг симплекс–метод). В силу (3.8) и (3.9)

$$\langle \Delta(\tau), d^k \rangle = \langle A^T y(\tau) - c, d^k \rangle = -\langle c, d^k \rangle + \langle y(\tau), Ad^k \rangle =$$

$$= -\langle c, d^k \rangle = \Delta_k < 0 \ .$$

Отсюда следует, что существует индекс t такой, что

$$\Delta_t(\tau) d_t^k < 0 \ . \tag{4.10}$$

Из (4.10) вытекает, что $\Delta_t(\tau) \neq 0$ и $d_t^k \neq 0$. Первое означает, что $t \notin I_\tau$, второе - что либо $t = k$, либо $t \in I_\sigma$. То есть, $t \notin I_\tau$ – одному из множеств базисных индексов цикла и принадлежит (либо вводится в него) другому – I_σ. Стало быть, $t \in T$. Тогда, по определению q, $t \leq q$. Более того,

$$t < q \ . \tag{4.11}$$

В самом деле, в силу (4.8), $\Delta_q(\tau) < 0$ и, в силу (3.4) и (4.9), $d_q^k = d_{i_s}^k = -\lambda_{sk} < 0$. Следовательно, при $t = q$ получим, что $\Delta_t(\tau) d_t^k > 0$, что противоречит (4.10). Из (4.11) и (4.8) следует, что $\Delta_t(\tau) \geq 0$, а из (4.10) – что $\Delta_t(\tau) > 0$ и $d_t^k < 0$. Так как $d_k^k = 1$, последнее означает, что $t \neq k$ и, стало быть, $t \in I_\sigma$. То есть, $t = i_r$ для некоторого $r \in \{1, \ldots, m\}$. В силу (3.4), $d_t^k = d_{i_r}^k = -\lambda_{rk}$. Так как $d_t^k < 0$ отсюда следует, что $\lambda_{rk} > 0$.

Поскольку в течение цикла вектор $\overline{x}$ не меняется, $\overline{x}_i = 0$ для всех небазисных компонент $\overline{x}_i$. В частности, так как $t \in T$, то $\overline{x}_t = \overline{x}_{i_r} = 0$. Тогда, поскольку $\lambda_{rk} > 0$, то $\overline{x}_{i_r}/\lambda_{rk} = 0$, откуда, в силу (4.9) следует, что

$$q = i_s \leq i_r = t \ .$$

Но это противоречит (4.11). ■

Поскольку при использовании в симплекс–методе правила Блэнда цикл невозможен, то метод, перебрав несколько базисов вырожденной угловой точки, в конце концов найдет такой базис, в котором либо выполнится критерий оптимальности, либо будет установлена неограниченность целевой функции, либо, наконец, симплекс–метод сможет перейти к новой угловой точке, в которой значение целевой функции будет больше, чем в текущей.

Таким образом, симплекс–метод с правилом Блэнда конечен и для вырожденных задач ЛП.

Т е о р е м а 4.2. Условие (1.28) является необходимым и достаточным условием оптимальности угловой точки $\overline{x}$ в канонической задаче ЛП.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность доказана в теореме 1.3. Докажем необходимость.

Пусть угловая точка $\overline{x}$ – решение канонической задачи ЛП. Предположим, что в этой точке не выполняется условие (1.28). Тогда, считая точку $\overline{x}$ начальной угловой точкой и используя симплекс–метод с правилом Блэнда, можно либо найти угловую точку x, в которой значение целевой функции будет больше, чем в точке $\overline{x}$, либо установить неограниченность сверху целевой функции на множестве планов задачи. Противоречие.

§5. Метод искусственного базиса и двухфазный симплекс–метод

До сих пор мы считали известной некоторую угловую точку $\overline{x}$, с которой начинает работу симплекс–метод. В некоторых случаях такая угловая точка может быть найдена без труда. Рассмотрим, например, стандартную задачу ЛП

$$\langle c, x\rangle \to \max\,; \quad Ax \le b,\ x \ge 0\ .$$

Соответствующая этой задаче каноническая задача ЛП имеет вид:

$$\langle c, x\rangle \to \max\,; \quad Ax + u = b,\ x \ge 0,\ u \ge 0\ ,$$

где u – вектор дополнительных переменных. Если вектор $b \ge 0$, то точка $(\overline{x}, \overline{u}) = (0, b)$, очевидно, является угловой точкой, базис которой составляют единичные вектора.

В общем случае, однако, поиск начальной угловой точки представляет собой задачу, не менее сложную, чем исходная задача ЛП.

5.1. Рассмотрим каноническую задачу ЛП

$$\langle c, x\rangle \to \max\,;\ \ x \in X\ , \tag{5.1}$$

$$X = \{x \in R^n:\ Ax = b,\ x \geq 0\}, \tag{5.2}$$

где $A \in M_{m,n}$. Вектор b можно считать неотрицательным: $b \geq 0$ (этого всегда можно добиться, умножая в случае необходимости обе части соответствующего равенства на (-1)). Отметим, что в задаче (5.1), (5.2) уже нет тех ограничительных предположений, которые делались ранее: $rankA = m < n$ и задача – невырожденная. То есть, задача (5.1), (5.2) может быть вырожденной и среди условий – равенств, определяющих множество X, могут быть линейно зависимые условия.

Используя условия, определяющие множество X, составим следующую задачу ЛП:

$$\begin{array}{c}
-x_{n+1} - x_{n+2} - \ldots - x_{n+m} \to \max\,; \\
\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_1 & , \\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = b_2 & , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = b_m & ,
\end{array} \\
x_i \geq 0,\ \ i = 1, \ldots, n+m\ ,
\end{array}$$

или, в матричной записи,

$$-\sum_{j=1}^{m} x_{n+j} \to \max;\ \ Ax + v = b,\ x \geq 0,\ v \geq 0\ , \tag{5.3}$$

где $v = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$. Переменные x_{n+j} называются *искусственными переменными*, а задача (5.3) – *искусственной задачей.*

В задаче (5.3) ранг матрицы условий равен $m < n+m$ и, кроме того, имеется очевидная угловая точка $(x^0, v^0) = (0, b)$, базис которой составляют единичные векторы $e^1, \ldots, e^m$. В силу условия неотрицательности переменных целевая функция задачи (5.3) ограничена сверху: $-\sum\limits_{j=1}^{m} x_{n+j} \leq 0$. Следовательно, задача (5.3) имеет решение. Найдем это решение симплекс–методом, выбирая в качестве начальной угловой точки точку (x^0, v^0). Пусть $(\overline{x}, \overline{v})$ – оптимальная угловая точка в задаче

(5.3), найденная симплекс–методом, μ – оптимальное значение целевой функции, т.е. $\mu = -\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{x}_{n+j} \leq 0$.

Т е о р е м а 5.1. Если $\mu < 0$, то множество планов задачи (5.1), (5.2) пусто. Если $\mu = 0$, то $\overline{x}$ – угловая точка множества X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu < 0$. Предположим, что существует вектор $x \in X$. Тогда точка $(x, v) = (x, 0)$ удовлетворяет условиям задачи (5.3) и в этой точке значение целевой функции больше максимального: $-\sum\limits_{j=1}^{m} x_{n+j} = 0 > \mu$. Противоречие.

Если $\mu = 0$, то, т.к. $\overline{v} = 0$, точка $\overline{x} \in X$. Кроме того, т.к. $(\overline{x}, \overline{v})$ – угловая точка в задаче (5.3), то система векторов условий задачи (5.3), соответствующая положительным компонентам этой точки, линейно независима. Но все положительные компоненты точки $(\overline{x}, \overline{v})$ – это компоненты точки $\overline{x}$. Следовательно, соответствующая система линейно независимых векторов условий состоит из векторов условий задачи (5.1), (5.2), отвечающих положительным компонентам точки $\overline{x}$. Это означает, что $\overline{x}$ – угловая точка в задаче (5.1), (5.2). ■

Таким образом, решение искусственной задачи симплекс–методом позволяет проверять совместность условий исходной задачи и, если множество $X \neq \emptyset$, находить его угловую точку. Метод нахождения угловой точки в задаче (5.1), (5.2), основанный на решении задачи (5.3) симплекс–методом, называется *методом искусственного базиса*, а процесс, состоящий из построения начальной угловой точки методом искусственного базиса и последующего решения симплекс–методом задачи (5.1), (5.2) – *двухфазным симплекс–методом* (первая фаза – применение симплекс–метода к искусственной задаче, вторая – к исходной).

5.2. Если угловая точка $\overline{x} \in X$, полученная методом искусственного базиса, является невырожденной, то ее базис, построенный на последней итерации первой фазы, очевидно, состоит только из векторов условий задачи (5.1), (5.2) и можно сразу переходить ко второй фазе симплекс–метода. При этом, если искусственная задача решалась с помощью симплексных таблиц, то на первой итерации симплекс–метода для исходной задачи можно не вычислять векторы $\lambda^i = B_\sigma^{-1} a^i,\ i = 0, \ldots, n$. Эти векторы были вычислены на последней итерации метода искусственного базиса и содержатся в столбцах с 0 – го по n – ный (без элементов нулевой строки) последней симплексной таблицы для искусственной задачи. Поэтому при заполнении начальной таблицы в исходной задаче они попросту переносятся из последней таблицы искусственной задачи и, таким образом, в начальной таблице исходной задачи остается лишь вычислить и заполнить ее нулевую строку. Заметим, что и для искусственной задачи заполнение начальной таблицы тривиально и сводится, по сути дела, к переписыванию условий задачи. А именно, поскольку на первой итерации искусственной задачи $B_\sigma = E$ и $c^\sigma = (-1, \ldots, -1)$, то $\lambda^i = B_\sigma^{-1} a^i = a^i$, а $\Delta_i = \langle c^\sigma, \lambda^i \rangle - c_i = \langle c^\sigma, \lambda^i \rangle = -\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}$ для $i = 0, \ldots, n$. Таким образом, начальная симплексная таблица для искусственной задачи имеет вид:

$$\left[\begin{array}{ccccccc} -\sum\limits_{j=1}^{m} b_j & -\sum\limits_{j=1}^{m} a_{j1} & \ldots & -\sum\limits_{j=1}^{m} a_{jn} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline b & a^1 & \ldots & a^n & e^1 & \ldots & e^m \end{array}\right].$$

П р и м е р 5.1. Рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max\ ; \tag{5.4}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2\ , \tag{5.5}$$

$$x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24\ , \tag{5.6}$$

$$x_i \geq 0\ ,\ i = 1, 2, 3, 4\ . \tag{5.7}$$

Искусственная задача для задачи (5.4)–(5.7) имеет вид:

$$-x_5 - x_6 \to \max\ ; \tag{5.8}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2\ , \tag{5.9}$$

$$x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 + x_6 = 24\ , \tag{5.10}$$

$$x_i \geq 0\ ,\ i = 1, \ldots, 6\ . \tag{5.11}$$

Впрочем, зная как выглядит начальная симплексная таблица для исксственной задачи, саму эту задачу здесь можно было бы и не выписывать. Итерации симплекс–метода для задачи (5.8)–(5.11) представлены в таблицах 5.1 – 5.3.

Табл. 5.1

	0	1	2	3	4	5	6	
Δ	-26	-2	-15	-9	9	0	0	
5	2	$\boxed{1}$	1	-1	1	1	0	$2 \leftarrow s$
6	24	1	14	10	-10	0	1	24
		$\uparrow k$						

Табл. 5.2

	0	1	2	3	4	5	6	
Δ	-22	0	-13	-11	11	2	0	
1	2	1	1	-1	1	1	0	
6	22	0	13	$\boxed{11}$	-11	-1	1	$\leftarrow s$
				$\uparrow k$				

Табл. 5.3

	0	1	2	3	4	5	6
Δ	0	0	0	0	0	1	1
1	4	1	$24/11$	0	0	$10/11$	$1/11$
3	2	0	$13/11$	1	-1	$-1/11$	$1/11$

В табл.5.3 оценки $\Delta_i \geq 0$ для всех $i = 1, \ldots, 6$. Следовательно, искусственная задача решена. Так как $\Delta_0 = 0$, то точка $\overline{x} = (4, 0, 2, 0)$ – угловая в задаче (5.4)–(5.7). Нижняя часть симплексной таблицы для исходной задачи в этой точке целиком переносится из табл.5.3. Начальная симплексная таблица для задачи (5.4)–(5.7) представлена таблицей 5.4.

Табл. 5.4

	0	1	2	3	4
Δ	10	0	$41/11$	0	1
1	4	1	$24/11$	0	0
3	2	0	$13/11$	1	-1

Из таблицы 5.4 следует, что начальная угловая точка $\overline{x} = (4, 0, 2, 0)$ оказалась решением задачи (5.4)–(5.7). Максимальное значение целевой функции $f(\overline{x}) = 10$.

5.3. Пусть $m \leq n$ и $\overline{x}$ – угловая точка задачи (5.1), (5.2), полученная методом искусственного базиса, $\overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_r}$ – отличные от нуля компоненты вектора $\overline{x}$, $a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}$ – соответствующие им векторы условий

$(1 \le i_1, \dots, i_r \le n)$. Если исходная задача невырожденная, то $r = m$ и векторы $a^{i_1}, \dots, a^{i_r}$ составляют базис угловой точки $\overline{x}$. Если исходная задача вырожденная, то может оказаться, что $r < m$ и в „базис“ угловой точки $\overline{x}$ вместе с векторами $a^{i_1}, \dots, a^{i_r}$ войдут еще $m - r$ векторов условий. Причем, среди этих $m - r$ векторов могут оказаться как векторы условий исходной задачи, так и векторы условий, соответствующие искусственным переменным. Последнее означает, что необходимый для алгоритма симплекс–метода базис угловой точки $\overline{x}$ еще не найден. Для его построения нужно исключить из „базиса“ угловой точки $\overline{x}$ все векторы условий, соответствующие искусственным переменным, заменив их линейно независимыми векторами условий исходной задачи.

Матрицу условий искусственной задачи обозначим через $\overline{A}$:

$$\overline{A} = [a^1 \dots a^n \; a^{n+1} \dots a^{n+m}], \; a^{n+j} = e^j, \; j = 1, \dots, m.$$

Пусть $\sigma = \{a^{i_1} \dots a^{i_m}\}$ – базис угловой точки $(\overline{x}, \overline{v}) = (\overline{x}, 0)$, полученной на последней итерации метода искусственного базиса, $I_\sigma = \{i_1, \dots, i_m\}$. Будем считать, что базис σ содержит векторы условий, соответствующие как исходным, так и искусственным переменным, то есть, среди базисных индексов есть как индексы $i_j \le n$, так и индексы $i_j > n$. Введем множества

$$J_1 = \{j : \; i_j \in I_\sigma, \; 1 \le i_j \le n\} \; ,$$
$$J_2 = \{j : \; i_j \in I_\sigma, \; n+1 \le i_j \le n+m\} \; ,$$
$$I_1 = \{i \in I_\sigma : \; 1 \le i \le n\} = \{i_j : \; j \in J_1\} \; ,$$
$$I_2 = \{i \notin I_\sigma : \; 1 \le i \le n\} \; .$$

На языке симплексных таблиц, множество J_1 состоит из номеров строк симплексной таблицы, соответствующих базисным переменным с номерами $i_j \le n$ (исходным переменным), а множество J_2 – из номеров строк, соответствующих базисным переменным с номерами $i_j > n$ (искусственным переменным). Множества I_1 и I_2 состоят из номеров базисных и небазисных, соответственно, векторов условий исходной задачи. Очевидно, что

$$J_1 \ne \emptyset, \; J_2 \ne \emptyset, \; J_1 \cap J_2 = \emptyset, \; J_1 \cup J_2 = \{1, \dots, m\} \; ,$$

$$I_1 \ne \emptyset, \; I_2 \ne \emptyset, \; I_1 \cap I_2 = \emptyset, \; I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, n\} \; .$$

Пусть $|I_1| = p$, где $r \le p < m$ (число векторов условий исходной задачи, входящих в базис σ, не меньше числа положительных компонент угловой точки $\overline{x}$). Тогда

$$|J_1| = p,\ |J_2| = m - p,\ |I_2| = n - p.$$

Таким образом, требуется заменить в базисе σ $m-p$ векторов условий a^{i_j}, $j \in J_2$, соответствующих искусственным переменным, линейно независимыми векторами из множества $\{a^i,\ i \in I_2\}$. Для этого рассмотрим разложения векторов условий исходной задачи по базисным векторам:

$$a^i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ji} a^{i_j}\ ,\ i = 1, \ldots, n\ , \tag{5.12}$$

где $(\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{mi}) = \lambda^i = B_\sigma^{-1} a^i$. Возможны два случая.

Случай 1. Существуют индексы $k \in I_2$ и $s \in J_2$ такие, что $\lambda_{sk} \neq 0$. Тогда при $i = k$ из (5.12) следует, что

$$a^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{m} \lambda_{jk} a^{i_j} + \lambda_{sk} a^{i_s}. \tag{5.13}$$

Так как коэффициент λ_{sk} в разложении (5.13) не равен нулю, то, в силу леммы 2.1, вектор a^{i_s} в базисе σ можно заменить на вектор a^k (в множестве базисных индексов индекс i_s положить равным k, в множество J_1 ввести индекс s, из множества J_2 вывести индекс s, в множество I_1 ввести индекс k, из множества I_2 вывести индекс k). Если в результате окажется, что $J_2 = \emptyset$ $(|J_1| = |I_1| = m)$, то искомый базис найден. В противном случае всю процедуру, если это возможно, следует повторить в новом базисе, причем, при использовании симплексных таблиц каждое изменение базиса должно сопровождаться пересчетом векторов $\lambda^i = B_\sigma^{-1} a^i$ для $i = 1, \ldots, n$ (вектор $\lambda^0 = \overline{x}^\sigma$, очевидно, не изменяется, а коэффициенты разложения векторов условий, соответствующих искусственным переменным, в данном случае не имеют значения). В результате не более, чем за $m-p$ шагов описанного процесса либо будет найден базис угловой точки $\overline{x}$, либо мы прийдем к случаю 2.

Случай 2. Коэффициенты $\lambda_{ji} = 0$ для всех $i \in I_2,\ j \in J_2$.

Прежде всего, заметим, что на самом деле в рассматриваемом случае

$$\lambda_{ji} = 0 \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n,\ \ j \in J_2 \tag{5.14}$$

(то есть, строки симплексной таблицы, соответствующие искусственным переменным, содержат нули в столбцах $0, 1, \dots, n$). Действительно, если $i \in I_1$, то, по определению, $i = i_t$ для некоторого $t \in J_1$ и, следовательно, $\lambda^i = \lambda^{i_t} = e^t$. Отсюда $\lambda_{ji} = e^t_j = 0$ при $i \in I_1,\ j \in J_2$. Кроме того, так как $\lambda_{j0} = \overline{x}_{i_j}$, то при $j \in J_2$ индекс $i_j = n + q$ для некоторого $q \in \{1, \dots, m\}$ и, стало быть, $\lambda_{j0} = \overline{x}_{n+q} = 0$.

При выполнении (5.14) из (5.12) следует, что для любого $i = 1, \dots, n$

$$a^i = \sum_{j \in J_1} \lambda_{ji} a^{i_j} + \sum_{j \in J_2} \lambda_{ji} a^{i_j} = \sum_{j \in J_1} \lambda_{ji} a^{i_j} \ .$$

Это означает, что любой из векторов условий исходной задачи является линейной комбинацией p базисных векторов $a^{i_j},\ j \in J_1$. Следовательно, ранг матрицы A равен p и среди условий задачи имеется $m - p$ линейно зависимых. Покажем, что такими линейно зависимыми условиями являются условия $[Ax]_q = b_q$ с номерами $q = i_j - n,\ j \in J_2$.

Рассмотрим сначала случай, когда $p = m - 1$, то есть, множество J_2 содержит лишь один элемент и, следовательно, лишь одно из условий задачи линейно зависит от остальных. Пусть $J_2 = \{s\}$. Тогда $i_s = n + q$ (так что $q = i_s - n$), $a^{i_s} = a^{n+q} = e^q$. Следовательно, базисная матрица B_σ имеет вид: $B_\sigma = [a^{i_1} \dots a^{i_{s-1}}\ e^q\ a^{i_{s+1}} \dots a^{i_m}]$, или, в более подробной записи,

$$B_\sigma = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
a_{1,i_1} & \dots & a_{1,i_{s-1}} & 0 & a_{1,i_{s+1}} & \dots & a_{1,i_m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{q-1,i_1} & \dots & a_{q-1,i_{s-1}} & 0 & a_{q-1,i_{s+1}} & \dots & a_{q-1,i_m} \\
\hline
a_{q,i_1} & \dots & a_{q,i_{s-1}} & 1 & a_{q,i_{s+1}} & \dots & a_{q,i_m} \\
\hline
a_{q+1,i_1} & \dots & a_{q+1,i_{s-1}} & 0 & a_{q+1,i_{s+1}} & \dots & a_{q+1,i_m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m,i_1} & \dots & a_{m,i_{s-1}} & 0 & a_{m,i_{s+1}} & \dots & a_{m,i_m}
\end{array}\right].$$

Вычеркнем из матрицы B_σ q– тую строку и s– тый столбец. Полученную матрицу обозначим $\widehat{B}_\sigma$. Ее столбцами являются векторы

$$\widehat{a}^{i_1}, \dots, \widehat{a}^{i_s - 1}, \widehat{a}^{i_s + 1}, \dots, \widehat{a}^{i_m} \ , \tag{5.15}$$

которые одновременно принадлежат матрице

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q-1,1} & a_{q-1,2} & \dots & a_{q-1,n} \\ a_{q+1,1} & a_{q+1,2} & \dots & a_{q+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} .$$

Матрица $\widehat{A}$ получена из матрицы A вычеркиванием ее q – той строки. Матрицу $\widehat{A}$ назовем усеченной матрицей условий.

Так как $det B_\sigma \neq 0$, то, раскладывая его по элементам s – того столбца, получим, что $det\widehat{B}_\sigma \neq 0$. Это означает, что столбцы (5.15) матрицы $\widehat{A}$ линейно независимы и, следовательно, $rank\widehat{A} = m - 1$. Отсюда, в свою очередь, следует, что строки матрицы A, составляющие усеченную матрицу $\widehat{A}$, линейно независимы, а q – тая строка матрицы A является их линейной комбинацией. Удаляя из условий задачи q – тое условие $[Ax]_q = b_q$ и обозначая $\widehat{b} = (b_1, \dots, b_{q-1}, b_{q+1}, \dots, b_m)$, получим задачу

$$\langle c, x\rangle \to \max \; ; \; \widehat{A}x = \widehat{b} \; , \; x \geq 0 \; , \tag{5.16}$$

эквивалентную задаче (5.1), (5.2). Очевидно, что точка $\overline{x}$ является угловой точкой в задаче (5.16) а ее базис $\widehat{\sigma}$ составляют векторы (5.15).

Столбцы $\widehat{\lambda}^0, \widehat{\lambda}^1, \dots, \widehat{\lambda}^n$ симплексной таблицы в точке $\overline{x}$ для задачи (5.16) получаются из столбцов $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^n$ последней таблицы метода искусственного базиса вычеркиванием s– той компоненты, что эквивалентно вычеркиванию s-той строки этой таблицы (содержащей нули в столбцах с 0– го по n– ный). В самом деле, так как в рассматриваемом случае $J_1 = \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$, то разложение (5.12) имеет вид:

$$a^i = \sum_{j \in J_1} \lambda_{ji} a^{i_j} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{m} \lambda_{ji} a^{i_j} \; .$$

Вычеркивая в каждом из векторов a^i и a^{i_j}, $j \in J_1$, q – тую компоненту, отсюда получим

$$\widehat{a}^i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{m} \lambda_{ji} \widehat{a}^{i_j} = \widehat{B}_\sigma \widehat{\lambda}^i \; ,$$

где $\widehat{\lambda}^i = (\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{s-1,i}, \lambda_{s+1,i}, \ldots, \lambda_{mi}) = \widehat{B}_\sigma^{-1} \widehat{a}^i$.

В общем случае матрица B_σ содержит $m-p$ единичных векторов – векторов условий, соответствующих искусственным переменным с номерами $q = i_j - n,\ j \in J_2$. Раскладывая определитель матрицы B_σ по элементам этих единичных столбцов и рассуждая далее как в предыдущем случае, нетрудно получить, что строки матрицы A с номерами $q = i_j - n,\ j \in J_2$, линейно зависят от остальных p строк. Вычеркивая из матрицы A линейно зависимые строки и убирая из условий задачи соответствующие условия, получим задачу

$$\langle c, x \rangle \to \max \ ; \ \widehat{A}x = \widehat{b} \ , \ x \geq 0 \ , \tag{5.17}$$

где $\widehat{A}$ и $\widehat{b}$ – усеченные матрица условий и вектор ограничений, $\widehat{A} \in M_{p,n},\ \widehat{b} \in R^p$. Задача (5.17) эквивалентна задаче (5.1), (5.2), а точка $\overline{x}$, полученная методом искусственного базиса, является угловой точкой в задаче (5.17). Базис этой угловой точки составляют столбцы $\widehat{a}^{i_j},\ j \in J_1$, матрицы $\widehat{A}$. Нетрудно видеть, что столбцы $\widehat{\lambda}^0, \widehat{\lambda}^1, \ldots, \widehat{\lambda}^n$ симплексной таблицы в точке $\overline{x}$ для задачи (5.17) получаются из столбцов $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^n$ последней таблицы метода искусственного базиса вычеркиванием компонент с номерами $j \in J_2$, что эквивалентно вычеркиванию строк этой таблицы, содержащих нули в столбцах с 0 – го по n – ный.

З а м е ч а н и е. Выше мы предполагали, что $m \leq n$. Если $m > n$, то может оказаться, что множество $I_1 = \{1, \ldots, n\}$, а множество $I_2 = \emptyset$ $(|J_1| = n, |J_2| = m - n)$. Тогда, рассуждая также, как и в случае 2, нетрудно убедиться, что имеют место соотношения (5.14) и, следовательно, условия $[Ax]_q = b_q$ с номерами $q = i_j - n,\ j \in J_2$ линейно зависят от остальных n условий. Таким образом, в рассматриваемом случае множество планов исходной задачи состоит из одной точки.

П р и м е р 5.2. Рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
&5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \max \ ; \\
&2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \ , \\
&x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 1 \ , \\
&-2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \ , \\
&-x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \ , \\
&x_i \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, 5 \ .
\end{aligned}$$

Первые три итерации для искусственной задачи приведены в таблицах 5.5 – 5.7.

Табл. 5.5

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δ	-7	0	3	1	-5	-1	0	0	0	0
6	3	2	1	1	1	-1	1	0	0	0
7	1	1	-1	0	$\boxed{1}$	1	0	1	0	0
8	1	-2	-1	-1	1	0	0	0	1	0
9	2	-1	-2	-1	2	1	0	0	0	1

Табл. 5.6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δ	-2	5	-2	1	0	4	0	5	0	0
6	2	1	$\boxed{2}$	1	0	-2	1	-1	0	0
4	1	1	-1	0	1	1	0	1	0	0
8	0	-3	0	-1	0	-1	0	-1	1	0
9	0	-3	0	-1	0	-1	0	-2	0	1

Табл. 5.7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δ	0	6	0	2	0	2	1	4	0	0
2	1	1/2	1	1/2	0	-1	1/2	$-1/2$	0	0
4	2	3/2	0	1/2	1	0	1/2	1/2	0	0
8	0	-3	0	-1	0	$\boxed{-1}$	0	-1	1	0
9	0	-3	0	-1	0	-1	0	-2	0	1

В таблице 5.7 все оценки $\Delta_i \geq 0$ для $i = 1, \ldots, 9,\ \ \Delta_0 = 0$. Следовательно, точка $\overline{x} = (0, 1, 0, 2, 0)$ – угловая в рассматриваемой задаче. Для нахождения ее базиса из системы векторов $\{a^2, a^4, a^8, a^9\}$ нужно вывести векторы a^8 и a^9, заменив их векторами условий исходной задачи. В рассматриваемом примере

$$J_1 = \{1, 2\},\ \ J_2 = \{3, 4\},\ \ I_1 = \{2, 4\},\ \ I_2 = \{1, 3, 5\},$$

причем $\lambda_{sk} \neq 0$ для всех $k \in I_2,\ \ s \in J_2$. Последнее означает, что любой из векторов a^8 и a^9 может быть заменен любым из векторов a^1, a^3, a^5 – любой из элементов $\lambda_{sk}, k \in I_2,\ \ s \in J_2$ может быть выбран в качестве ведущего. Пусть это будет элемент λ_{35}. Пересчитывая таблицу 5.7, приходим к следующей таблице 5.8, в которой опущены столбцы, соответствующие искусственным переменным – после нахождения угловой точки искусственные переменные более не нужны.

Табл. 5.8

	0	1	2	3	4	5
Δ	0	0	0	0	0	0
2	1	7/2	1	3/2	0	0
4	2	3/2	0	1/2	1	0
5	0	3	0	1	0	1
9	0	0	0	0	0	0

Последняя строка таблицы 5.8 состоит из одних нулей. Следовательно, ее можно вычеркнуть из таблицы, а из условий задачи убрать условие с номером $9 - 5 = 4$ (последнее из условий–равенств). В усеченной задаче базис угловой точки $\overline{x}$ состоит из векторов a^2, a^4 и a^5, а начальная симплексная таблица для нее отличается от таблицы 5.8 лишь нулевой строкой, и, разумеется, отсутствием последней строки (см. таблицу 5.9).

Табл. 5.9

	0	1	2	3	4	5
Δ	8	3	0	1	0	0
2	1	7/2	1	3/2	0	0
4	2	3/2	0	1/2	1	0
5	0	3	0	1	0	1

В таблице 5.9 все оценки $\Delta_i \geq 0$ для $i = 1, \ldots, 5$. Следовательно, $\overline{x} = (0, 1, 0, 2, 0)$ – оптимальный план.

Упражнения

5.1. В следующих задачах, используя метод искусственного базиса, выяснить, является ли множество планов, определяемое условиями задачи, непустым множеством. Если да, то найти его угловую точку $\overline{x}$, ее базис и исключить линейно зависимые условия (если такие имеются).

i. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 5 , \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 9 , \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 &= 12 , \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5 ; \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 , \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 5 , \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 2 , \\ x_i \geq 0 , i = 1, 2, 3, 4 ; \end{aligned}$$

iii. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 &= 6 , \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3 , \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1 , \\ x_i \geq 0 , i = 1, 2, 3, 4 . \end{aligned}$$

5.2. Решить следующие задачи:

i. $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 &\to \max ; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 , \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 &= 4 , \\ x_i \geq 0 , i = 1, 2, 3, 4 ; \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 &\to \max ; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 7 , \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= -12 , \\ x_i \geq 0 , i = 1, 2, 3, 4 ; \end{aligned}$$

iii. $$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4 &\to \max ; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 , \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 , \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 &= 5 , \\ x_i \geq 0 , i = 1, 2, 3, 4 ; \end{aligned}$$

iv. $$\begin{aligned}
&-2x_1+2x_2+x_3+2x_4-3x_5 \to \max\ ;\\
&-2x_1+x_2-x_3-x_4 = 1\ ,\\
&x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5 = 4\ ,\\
&-x_1+x_2-x_5 = 4\ ,\\
&x_i \geq 0\ , i=1,\ldots,5\ ;
\end{aligned}$$

v. $$\begin{aligned}
&2x_1+x_2-x_3+3x_4-2x_5 \to \min\ ;\\
&8x_1+2x_2+3x_3+9x_4+9x_5 = 30\ ,\\
&5x_1+x_2+2x_3+5x_4+6x_5 = 19\ ,\\
&x_1+x_2+3x_4 = 3\ ,\\
&x_i \geq 0\ , i=1,\ldots,5\ ;
\end{aligned}$$

Глава 3
Двойственные задачи ЛП и постоптимальный анализ

§1. Двойственные задачи ЛП

1.1. Рассмотрим задачу ЛП в стандартной форме:

$$\langle c, x\rangle \to \max\ ;\ Ax \le b,\ x \ge 0\ , \tag{1.1}$$

где $c, x \in R^n,\ b \in R^m,\ A \in M_{m,n}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Задача

$$\langle b, y\rangle \to \min\ ;\ A^T y \ge c,\ y \ge 0 \tag{1.2}$$

называется *двойственной* к задаче (1.1).

К задаче (1.2), в свою очередь, также можно выписать двойственную задачу. Для этого задачу (1.2) перепишем в виде:

$$-\langle b, y\rangle \to \max\ ;\ -A^T y \le -c,\ y \ge 0.$$

Двойственная к ней задача, по определению, имеет вид:

$$-\langle c, x\rangle \to \min\ ;\ -Ax \ge -b,\ x \ge 0,$$

или

$$\langle c, x\rangle \to \max\ ;\ Ax \le b,\ x \ge 0.$$

Таким образом, задачей, двойственной к двойственной задаче (1.2), является исходная задача (1.1). Следовательно, задачи (1.1) и (1.2) представляют собой пару взаимно двойственных задач линейного программирования и можно просто говорить о паре двойственных задач, не уточняя, какая из них является прямой, а какая – двойственной.

Рассмотрим каноническую задачу

$$\langle c, x\rangle \to \max\ ;\ Ax = b,\ x \geq 0\ , \tag{1.3}$$

где $c, x \in R^n,\ b \in R^m,\ A \in M_{m,n}$. Эквивалентная ей стандартная задача имеет вид:

$$\langle c, x\rangle \to \max\ ;\ \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}\ ,\ x \geq 0. \tag{1.4}$$

Задачей, двойственной к задаче (1.4), будет задача

$$\langle (b, -b), z\rangle \to \min\ ;\ [A^T\ \ -A^T]z \geq c,\ z \geq 0, \tag{1.5}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{2m})$. Введем векторы $u = (z_1, \ldots, z_m)$ и $v = (z_{m+1}, \ldots, z_{2m})$. Тогда $z = (u, v)$, а задача (1.5) принимает вид:

$$\langle b, u\rangle - \langle b, v\rangle = \langle b, u - v\rangle \to \min\ ;$$

$$A^T u - A^T v = A^T(u - v) \geq c\ ,$$

$$u \geq 0,\ v \geq 0.$$

Полагая здесь $y = u - v$, получим

$$\langle b, y\rangle \to \min\ ;\ A^T y \geq c, \tag{1.6}$$

где компоненты вектора y могут быть любого знака. Таким образом, задачей, двойственной к канонической задаче (1.3), является задача (1.6), в которой отсутствуют условия неотрицательности переменных. Ну и, разумеется, задачей, двойственной к задаче (1.6), будет каноническая задача (1.3).

1.2. Рассматриваемые ниже свойства двойственных задач справедливы для любой пары взаимно двойственных задач ЛП, здесь же, для определенности, мы рассмотрим пару двойственных задач (1.1) и (1.2). Множество планов в задаче (1.1) обозначим через X, множество планов в задаче (1.2) – через Y.

Л е м м а 1.1. Для любых $x \in X,\ y \in Y$ справедливо неравенство

$$\langle c, x\rangle \le \langle b, y\rangle. \tag{1.7}$$

Если для некоторых $x^* \in X,\ y^* \in Y$ имеет место равенство

$$\langle c, x^*\rangle = \langle b, y^*\rangle, \tag{1.8}$$

то x^* – решение задачи (1.1), y^* – решение задачи (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in X,\ y \in Y$. Умножая обе части неравенства $Ax \le b$ скалярно на y, получим

$$\langle Ax, y\rangle \le \langle b, y\rangle. \tag{1.9}$$

Аналогично, умножая обе части неравенства $A^T y \ge c$ скалярно на x, получим

$$\langle c, x\rangle \le \langle A^T y, x\rangle = \langle Ax, y\rangle. \tag{1.10}$$

Сравнивая (1.9) и (1.10), получим (1.7).

Если выполняется равенство (1.8), то отсюда и из (1.7) при $x = x^*$ имеем

$$\langle b, y^*\rangle = \langle c, x^*\rangle \le \langle b, y\rangle \quad \forall y \in Y.$$

Следовательно, y^* – решение задачи (1.2). Аналогично, из (1.8) и (1.7) при $y = y^*$ следует, что

$$\langle c, x^*\rangle = \langle b, y^*\rangle \ge \langle c, x\rangle \quad \forall x \in X.$$

То есть, x^* – решение задачи (1.1). ■

Т е о р е м а 1.1. Пара взаимно двойственных задач ЛП либо вместе имеет решение, либо вместе его не имеет. Векторы $x^* \in X$ и $y^* \in Y$ являются решениями задач (1.1) и (1.2), соответственно, тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что если задача (1.1) имеет решение, то имеет решение и задача (1.2).

Пусть задача (1.1) имеет решение. Это решение может быть получено симплекс–методом. Для применения симплекс–метода к задаче (1.1) приведем ее к каноническому виду:

$$\langle c, x\rangle \to \max\ ;\ Ax + u = b, x \ge 0,\ u \ge 0. \tag{1.11}$$

Пусть (x^*, u^*) – решение задачи (1.11), полученное симплекс–методом. Тогда x^* – решение задачи (1.1). Так как (x^*, u^*) – угловая точка, то, по условию оптимальности, существует ее базис σ такой, что

$$\Delta = \Delta(\sigma) = \overline{A}^T y^* - \overline{c} \geq 0, \tag{1.12}$$

где $\overline{A} = [A \;\; E]$, $\overline{c} = (c, 0)$ – матрица условий и целевой вектор задачи (1.11), $y^* = \overline{B}_\sigma^{-T} \overline{c}^\sigma$. Переписывая условие (1.12) в виде

$$\begin{bmatrix} A^T \\ E \end{bmatrix} y^* - \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0,$$

получим, что

$$\begin{aligned} A^T y^* &\geq c\ , \\ y^* &\geq 0\ . \end{aligned}$$

Следовательно, вектор y^* является планом двойственной задачи (1.2). Кроме того, так как вектор $(x^*, u^*)^\sigma$, составленный из базисных компонент угловой точки (x^*, u^*), имеет вид

$$(x^*, u^*)^\sigma = \overline{B}_\sigma^{-1} b,$$

то

$$\begin{aligned} \langle c, x^* \rangle = \langle (c, 0), (x^*, u^*) \rangle = \langle \overline{c}^\sigma, (x^*, u^*)^\sigma \rangle = \langle \overline{c}^\sigma, \overline{B}_\sigma^{-1} b \rangle = \\ = \langle \overline{B}_\sigma^{-T} \overline{c}^\sigma, b \rangle = \langle b, y^* \rangle. \end{aligned}$$

В силу леммы 1.1 это означает, что y^* – решение задачи (1.2).

Таким образом, если задача (1.1) имеет решение, то имеет решение и задача (1.2) и при этом, очевидно, для любых оптимальных планов задач (1.1) и (1.2) выполняется условие (1.8). Аналогично доказывается, что если имеет решение задача (1.2), то имеет решение задача (1.1) и необходимо выполняется условие (1.8). Достаточность этого условия доказана в лемме 1.1. Понятно также, что ситуация, когда одна из двойственных задач имеет решение, а другая его не имеет, не может иметь места. ■

Отметим, что, как следует из доказательства теоремы, если решение одной из двойственных задач получено симплекс–методом, то одновременно с ним будет получено решение и другой двойственной задачи. Если решение задачи (1.1) осуществляется с помощью симплексных таблиц, то компоненты вектора двойственных переменных содержатся в заключительной симплексной таблице – они равны оценкам дополнительных переменных. В самом деле, так как

$$\Delta = \left[\begin{array}{c} A^T \\ E \end{array} \right] y^* - \left[\begin{array}{c} c \\ 0 \end{array} \right],$$

то отсюда $\Delta_{n+j} = y_j^*,\ j = 1, \ldots, m$.

Т е о р е м а 1.2. Для существования решения пары взаимно двойственных задач ЛП необходимо и достаточно, чтобы множества их планов были не пусты:

$$X \neq \emptyset,\ \ Y \neq \emptyset\ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\overline{y} \in Y$. Тогда, по лемме 1.1, $\langle c, x\rangle \leq \langle b, \overline{y}\rangle$ для любых $x \in X$. То есть, целевая функция в задаче (1.1) ограничена сверху и, следовательно, задача (1.1) имеет решение. В силу теоремы 1.1 имеет решение и задача (1.2). ■

С л е д с т в и е:

i. если $X = \emptyset,\ Y \neq \emptyset$, то $\inf\limits_{Y}\langle b, y\rangle = -\infty$;

ii. если $\inf\limits_{Y}\langle b, y\rangle = -\infty$, то $X = \emptyset$;

iii. если $X \neq \emptyset,\ Y = \emptyset$, то $\sup\limits_{X}\langle c, x\rangle = +\infty$;

iv. если $\sup\limits_{X}\langle c, x\rangle = +\infty$, то $Y = \emptyset$. ■

Для формулировки следующей теоремы заметим, что условия $Ax \leq b$ и $A^T y \geq c$ в задачах (1.1) и (1.2), соответственно, можно записать в виде:

$$[Ax - b]_j \leq 0,\ j = 1, \ldots, m\ ,$$

$$\left[A^T y - c\right]_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\ .$$

Т е о р е м а 1.3. Для оптимальности планов $x^* \in X$ и $y^* \in Y$ в задачах (1.1) и (1.2), соответственно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$[Ax^* - b]_j\, y_j^* = 0\ ,\ \ j = 1, \ldots, m\ , \qquad (1.13)$$

$$\left[A^T y^* - c\right]_i x_i^* = 0\ ,\quad i = 1, \ldots, n\ . \tag{1.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $x^* \in X$, $y^* \in Y$ – решения задач (1.1) и (1.2), соответственно. Тогда (см. доказательство леммы 1.1)

$$\langle c, x^* \rangle \le \langle A^T y^*, x^* \rangle = \langle Ax^*, y^* \rangle \le \langle b, y^* \rangle.$$

С другой стороны, по теореме 1.1, $\langle c, x^* \rangle = \langle b, y^* \rangle$. Следовательно,

$$\langle c, x^* \rangle = \langle A^T y^*, x^* \rangle = \langle Ax^*, y^* \rangle = \langle b, y^* \rangle. \tag{1.15}$$

Из левой части этого равенства получим

$$\langle A^T y^* - c, x^* \rangle = 0\ , \tag{1.16}$$

откуда, так как $A^T y^* - c \ge 0$ и $x^* \ge 0$, следует (1.14). Аналогично, из правой части (1.15) имеем

$$\langle Ax^* - b, y^* \rangle = 0\ , \tag{1.17}$$

откуда, так как $Ax^* - b \le 0$ и $y^* \ge 0$, следует (1.13).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Из (1.13) следует (1.17), из (1.14) – (1.16). Из (1.16) и (1.17) следует (1.15), откуда, в силу леммы 1.1, следует, что x^* – решение задачи (1.1), y^* – решение задачи (1.2). ■

Условие $[Ax - b]_j \le 0$ или, что – то же самое, условие $[Ax]_j \le b_j$ называется *двойственным* по отношению к условию $y_j \ge 0$ и, наоборот, условие $y_j \ge 0$ называется двойственным по отношению к условию $[Ax]_j \le b_j$. Другую пару двойственных условий образуют условия $\left[A^T y\right]_i \ge c_i$ и $x_i \ge 0$. Из теоремы 1.3 следует, что если на оптимальных планах прямой и двойственной задач одно из пары двойственных условий выполняется как строгое неравенство (нежестко), то другое выполняется как точное равенство (жестко). То есть,

i. если $y_j^* > 0$ для некоторого индекса j, то $[Ax^*]_j = b_j$;

ii. если $[Ax^*]_j < b_j$ для некоторого индекса j, то $y_j^* = 0$;

iii. если $x_i^* > 0$ для некоторого индекса i, то $\left[A^T y^*\right]_i = c_i$;

iv. если $\left[A^T y^*\right]_i > c_i$ для некоторого индекса i, то $x_i^* = 0$.

Условия (1.13) и (1.14) называются *условиями дополняющей нежесткости.*

Упражнения

1.1. Запишите двойственную задачу к общей задаче ЛП:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \; ;$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j, \; j = 1, \ldots, r \; ,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, \; j = r+1, \ldots, m \; ,$$
$$x_i \ge 0, \; i = 1, \ldots, s \; .$$

1.2. Решить графически пару взаимодвойственных задач ЛП, одна из которых имеет вид:

i. $$\begin{aligned} 7x_1 \qquad\quad + x_3 - 4x_4 &\to \max \; ; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - \;\; x_4 &\le \;\; 6 \; , \\ 2x_1 + x_2 - \;\; x_3 \qquad\quad &\le -1 \; , \\ x_i \ge 0, \; i = 1, 2, 3, 4 \; ; \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 21x_4 + 9x_5 &\to \min \; ; \\ -3x_1 - 3x_2 + \;\; x_3 + \;\; 4x_4 + \;\; x_5 &= 3 \; , \\ -2x_1 + 4x_2 + \;\; 3x_3 - \;\; x_4 - 4x_5 &= 2 \; , \\ x_i \ge 0, \; i = 1, \ldots, 5 \; ; \end{aligned}$$

iii. $$\begin{aligned} 6x_1 + 76x_2 - 133x_3 - 25x_4 &\to \min \; ; \\ 2x_1 + \;\; 4x_2 - \;\; 12x_3 \qquad\quad &= \;\; 4 \; , \\ x_1 + 12x_2 + \;\; 16x_3 - \;\; 5x_4 &= -8 \; , \\ x_i \ge 0, \; i = 1, 2, 3, 4 \; . \end{aligned}$$

1.3. Решить пару взаимодвойственных задач ЛП, одна из которых имеет вид:

i. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + \;\; x_3 &\to \max \; ; \\ 2x_1 - \;\; x_2 + \;\; x_3 &\le 1 \; , \\ -x_1 + \;\; x_2 - \;\; x_3 &\le 1 \; , \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\le -6 \; , \\ x_1 + 3x_2 + \;\; x_3 &\le 2 \; , \\ 2x_1 + \;\; x_2 - 3x_3 &\le 12 \; ; \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} 19x_1 + \;\; x_2 + 16x_3 &\to \max \; ; \\ 2x_1 - \;\; x_2 + \;\; 3x_3 &\le -2 \; , \\ 3x_1 - 5x_2 + \;\; 7x_3 &\le -10 \; , \\ 4x_1 + 3x_2 + \;\; x_3 &\le 3 \; , \\ x_1 + 2x_2 - \;\; x_3 &\le 3 \; , \\ 3x_1 \qquad\quad + \;\; 2x_3 &\le -1 \; . \end{aligned}$$

§2. Экономическая интерпретация двойственных переменных

Рассмотрим стандартную задачу ЛП

$$\langle c, x\rangle \to \max \ ; \ Ax \le b, \ x \ge 0, \tag{2.1}$$

где $c, x \in R^n, \ b \in R^m, \ A \in M_{m,n}$. Множество планов задачи (2.1) обозначим через X.

Пусть задача (2.1) представляет собой математическую модель задачи планирования производства (см. §1.2). Напомним экономический смысл фигурирующих в ней величин:

- x_i – план производства i – того изделия (шт.), $i = 1, \ldots, n$;
- c_i – прибыль от производства единицы i – того изделия (удельная прибыль; руб./шт.) ;
- b_j – запас j – того ресурса (ед.), $j = 1, \ldots, m$;
- a_{ji} – расход j - того ресурса на производство единицы i – того изделия (ед.ресурса/шт.).

Таким образом, экономическое содержание задачи (2.1) – нахождение производственного плана, максимизирующего суммарную прибыль от производства всех изделий при заданных ограничениях на ресурсы.

Рассмотрим задачу, двойственную к задаче (2.1):

$$\langle b, y\rangle \to \min \ ; \ A^T y \ge c, \ y \ge 0. \tag{2.2}$$

Множество планов задачи (2.2) обозначим через Y. Ограничения $A^T y \ge c$ этой задачи в развернутой форме имеют вид:

$$a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \ldots + a_{mi}y_m \ge c_i, \ i = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Будем рассуждать как в физике – правая часть каждого из неравенств (2.3) измеряется в руб./шт. Следовательно, и левая часть должна измеряться в тех же единицах. Так как элементы a_{ji} имеют размерность ед.ресурса/шт., то отсюда следует, что компоненты вектора y должны иметь размерность руб./ед.ресурса. То есть, y_j представляет собой цену единицы j – того ресурса. Но, так как в постановке исходной задачи цены ресурсов не фигурируют, то эти цены – фиктивные. Их называют *условными*, или *теневыми (скрытыми)* ценами. Левая часть каждого из неравенств (2.3) представляет собой *условную стоимость ресурсов*, затраченных на производство единицы i – того изделия.

Таким образом, формально двойственной задаче можно дать следующую интерпретацию: найти цены ресурсов, минимизирующие их общую стоимость при условии, что удельная прибыль от производства каждого изделия не превосходит стоимости ресурсов, затраченных на его изготовление. На первый взгляд, такая интерпретация двойственной задачи кажется, мягко говоря, странной – прибыль не превосходит стоимости расходуемых на производство ресурсов – в лучшем случае работа предприятия может быть лишь не убыточной. Однако, представим себе следующую ситуацию. Есть покупатель, готовый приобрести у предприятия имеющиеся ресурсы. Естественно, что предприятие должно назначать цены за ресурсы таким образом, чтобы их стоимость была не меньше той прибыли, которую оно может получить, пустив эти ресурсы в производство. Покупатель, со своей стороны, хочет купить эти ресурсыповозможности дешевле. Возникает задача выбора цен, устраивающих обе стороны (компромиссных цен). Математической моделью этой задачи и является двойственная задача (2.2), в которой продавец (предприятие) задает ограничения, а покупатель стремится при этих ограничениях минимизировать целевую функцию. Из теоремы 1.1 следует, что если $x^* \in X$ и $y^* \in Y$ – оптимальные планы прямой и двойственной задач, то $\langle c, x^* \rangle = \langle b, y^* \rangle$, то есть, максимальная прибыль, которую предприятие может получить, пустив ресурсы в производство, равна той минимальной цене за ресурсы, которой может добиться покупатель (при заданных ограничениях). Таким образом, если в качестве цен y_j выбирать компоненты y_j^* оптимального плана двойственной задачи, то эти цены устроят обе стороны и сделка состоится. При этом нулевые цены y_j^*, если таковые есть в оптимальном плане двойственной задачи, можно интерпретировать как „благодарность“ продавца покупателю, уступку за выгодные цены на другие ресурсы. Вообще, в этой игре „продавец – покупатель“ стратегия продавца предельно проста – поскольку, в силу леммы 1.1,

$$\langle c, x^* \rangle < \langle b, y \rangle \quad \forall y \in Y,\ y \neq y^*,$$

его устроят любые цены, удовлетворяющие ограничениям двойственной задачи. Если покупатель не знаком с линейным программированием, то он может выбрать неоптимальный план $y \in Y$, „подарив", тем самым, продавцу дополнительную прибыль, равную величине $\langle b, y\rangle - \langle c, x^*\rangle$.

Вывод, который мы можем сделать из рассмотренной гипотетической ситуации, очевиден – ресурсы стоят по крайней мере столько, сколько стоят товары, произведенные из них, при оптимальном плане производства. Отметим, что эта оценка стоимости ресурсов является *внутренней* для данного производства и зависит от его технологических особенностей (элементов матрицы A).

В пользу интерпретации двойственных переменных как условных цен ресурсов говорит и теорема 1.3. А именно, по теореме 1.3 $x_i^* = 0$, если $\left[A^T y^*\right]_i > c_i$. То есть, если удельная прибыль от производства изделия i – того вида меньше условной стоимости ресурсов, затраченных на его изготовление, то этот вид изделия производить не выгодно и оно не входит в оптимальный план. Также из теоремы 1.3 следует, что, если $[Ax^*]_j < b_j$, то $y_j^* = 0$. Это означает, что если при оптимальном плане производства j – тый ресурс используется не полностью, то его условная цена равна нулю (это – просто крайняя форма классического закона спроса и предложения, согласно которому цена на товар падает, если запасы товара превышают спрос на него). Последнее позволяет интерпретировать условные цены y_j^* как *оценки дефицитности ресурсов* – если ресурс используется не полностью, то он не является дефицитным – его оценка дефицитности равна нулю, увеличение запаса этого ресурса никак не повлияет на оптимальный план.

Таким образом, все недефицитные ресурсы имеют одну и ту же условную цену – ноль. Дефицитные ресурсы в общем случае, разумеется, имеют разные условные цены и, стало быть, получается, что, скажем, k – тый ресурс „дефицитнее" j - того ресурса, если $y_k^* > y_j^*$. Возникает вопрос – почему условная цена одного дефицитного ресурса больше условной цены другого дефицитного ресурса? Для того, чтобы понять – в чем тут дело, прежде всего рассмотрим следующий пример.

П р и м е р 2.1. Пусть задача ЛП имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) = 2x_1 + 3x_2 &\to \max\ ; \\ x_1 + \ \ x_2 &\le 4\ , \\ x_1 + 3x_2 &\le 6\ , \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Двойственной к ней задачей является задача

$$\varphi(y) = 4y_1 + 6y_2 \to \min\ ;$$
$$y_1 + \ \ y_2 \geq 2\ ,$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 3\ ,$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

Решениями прямой и двойственной задач являются векторы $x^* = (3, 1)$ и $y^* = (3/2, 1/2)$, соответственно, с общим значением целевых функций $f(x^*) = \varphi(y^*) = 9$. Таким образом, в прямой задаче оба ресурса являются дефицитными, причем „дефицитность“ первого в три раза выше „дефицитности“ второго.

Предположим, что запас первого ресурса увеличился на единицу, то есть вектор ограничений прямой задачи $b = (4, 6)$ получил приращение $\Delta b = (1, 0)$. Тогда, решая прямую задачу с вектором ограничений $\overline{b} = b + \Delta b = (5, 6)$, получим, что ее решение $x^*(b + \Delta b) = (9/2, 1/2)$, $f(x^*(b + \Delta b)) = 21/2$ и

$$\Delta f(x^*(b)) = f(x^*(b + \Delta b)) - f(x^*(b)) = 3/2 = y_1^*.$$

(Здесь $x^*(b) = x^*$ – решение прямой задачи, соответствующее вектору ограничений b).

Пусть теперь $\Delta b = (0, 1)$, то есть, увеличился на единицу запас второго ресурса. Тогда $x^*(b + \Delta b) = (5/2, 3/2), f(x^*(b + \Delta b)) = 19/2$, $\Delta f(x^*(b)) = 1/2 = y_2^*$.

Таким образом, увеличение на единицу запаса первого ресурса приводит к увеличению прибыли на величину y_1^*, а аналогичное увеличение запаса второго ресурса – к увеличению прибыли на величину y_2^*. Отсюда следует, что чем выше условная стоимость ресурса, тем больше приращение значения целевой функции при единичном увеличении запаса этого ресурса – более дефицитные ресурсы вносят больший вклад в приращение $\Delta f(x^*)$. Отметим, что при рассмотренных выше вариациях вектора b решение двойственной задачи, как нетрудно убедиться, не менялось: $y^*(b + \Delta b) = y^*(b) = y^*$.

Рассмотрим общий случай:

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max\ ;\ Ax \leq b,\ x \geq 0. \tag{2.4}$$

Предположим, что решение задачи (2.4) существует для заданного вектора b, а также, при некотором приращении Δb, для вектора $b+\Delta b$. Эти решения обозначим через $x^*(b)$ и $x^*(b+\Delta b)$. Решения соответствующих двойственных задач обозначим через $y^*(b)$ и $y^*(b+\Delta b)$. Предположим, что $y^*(b+\Delta b) = y^*(b) = y^*$. Тогда, в силу теоремы 1.1,

$$\begin{aligned} &f(x^*(b)) = \langle b, y^* \rangle \ , \\ &f(x^*(b+\Delta b)) = \langle b+\Delta b, y^* \rangle = \langle b, y^* \rangle + \langle \Delta b, y^* \rangle = \\ &\qquad\qquad = f(x^*(b)) + \langle \Delta b, y^* \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta f(x^*(b)) = f(x^*(b+\Delta b)) - f(x^*(b)) = \langle \Delta b, y^* \rangle. \tag{2.5}$$

В частности, при $\Delta b = e^j$, где e^j – j – тый орт, из (2.5) следует, что

$$\Delta f(x^*(b)) = y^*_j.$$

Это означает, что приращение значения целевой функции, приходящееся на единицу приращения j – того ресурса, равно условной стоимости этого ресурса.

Отметим, что формула (2.5) получена в предположении, что при изменении вектора ограничений прямой задачи решение двойственной задачи не меняется, то есть, остается устойчивым. Вопрос, таким образом, сводится к тому, чтобы определить диапазон устойчивости решения двойственной задачи к вариациям ограничений исходной. В пределах этого диапазона мы можем, используя формулу (2.5), прогнозировать изменения значения целевой функции при любых изменениях ограничений.

§3. Диапазоны устойчивости и постоптимальный анализ

Содержательный анализ задачи ЛП отнюдь не ограничивается лишь нахождением ее оптимального плана. Напротив, с нахождения оптимального плана этот анализ как раз и начинается. Дело в том, что на практике значительная часть параметров задачи ЛП редко известна абсолютно точно и в качестве этих параметров берутся некоторые приближенные, оценочные, значения. Тогда естественно возникает задача определения диапазонов изменения параметров, в пределах которых оптимальное решение не меняется. С другой стороны, представляет интерес указать такие изменения параметров задачи, при которых оптимальное решение может быть улучшено. Эти и другие вопросы как раз и относятся к постоптимальному анализу – анализу задачи после получения оптимального решения.

3.1. Определение диапазонов устойчивости проиллюстрируем на следующем примере.

П р и м е р 3.1. Пусть задача ЛП имеет вид:

$$x_1 + \ \ x_2 \to \max \ ;$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10 \ ,$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 12 \ ,$$
$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0 \ .$$

Графическое решение этой задачи приведено на рис. 3.1. Нетрудно видеть, что при „колебаниях“ целевого вектора $c = (1,1)$ в конусе, определяемом векторами $\overline{c} = (5,2)$ и $\overline{\overline{c}} = (3,4)$ (нормальными векторами прямых $5x_1+2x_2 = 10$ и $3x_1+4x_2 = 12$), оптимальный план $x^* = (8/7, 15/7)$ остается неизменным. Очевидно также, что любые изменения вектора ограничений приводят к изменению оптимального плана.

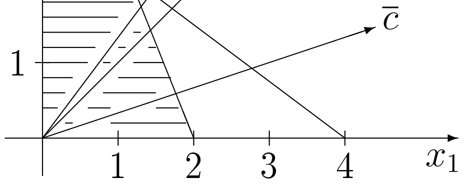

Рис. 3.1

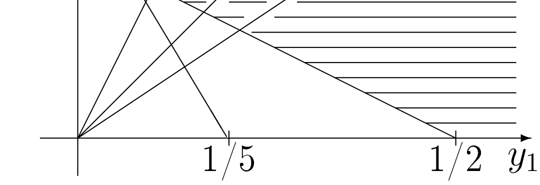

Рис. 3.2

Рассмотрим двойственную задачу:

$$
\begin{aligned}
&10y_1 + 12y_2 \to \min \ ; \\
&5y_1 + \ \ 3y_2 \geq 1 \ , \\
&2y_1 + \ \ 4y_2 \geq 1 \ , \\
&\ y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0 \ .
\end{aligned}
$$

Ее графическое решение приведено на рис. 3.2. Допустимые изменения целевого вектора $b = (10, 12)$ (вектора ограничений прямой задачи), при которых оптимальный план двойственной задачи $y^* = (1/14, 3/14)$ не меняется, заключены в конусе, ограниченном векторами (направлениями) $\overline{b} = (5, 3)$ и $\overline{\overline{b}} = (1, 2)$. Любые изменения вектора ограничений $c = (1, 1)$ (целевого вектора исходной задачи) приводят к изменению оптимального плана двойственной задачи.

3.2. Рассмотрим общий случай:

$$\langle c, x \rangle \to \max \ ; \ Ax \leq b \ , \ x \geq 0 \ , \tag{3.1}$$

где $c, x \in R^n, \ b \in R^m, \ A \in M_{m,n}$.

Предположим, что задача (3.1) приведена к канонической форме

$$\langle c, x \rangle \to \max \ ; \ Ax + u = b \ , \ x \geq 0 \ , \ u \geq 0 \tag{3.2}$$

и решена симплекс–методом. Пусть $w^* = (x^*, u^*)$ – решение задачи (3.2) (угловая точка). Тогда x^* – решение задачи (3.1). Пусть $\sigma = \{a^{i_1}, \ldots, a^{i_m}\}$ – базис угловой точки w^*, $I_\sigma = \{i_1, \ldots, i_m\}$ – множество базисных индексов, B_σ – базисная матрица. Решение двойственной задачи $y^* = B_\sigma^{-T} c^\sigma$, где c^σ – вектор, составленный из базисных компонент целевого вектора задачи (3.2).

i. Изменение компонент целевого вектора

Допустим, что целевой вектор задачи (3.1) изменился и стал равен $\overline{c} = c + \delta$, где $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ – приращение вектора c. Тогда оценки Δ_i в угловой точке w^* (точнее – в базисе σ) также изменятся и станут равны $\overline{\Delta}_i$. Если при этом

$$\overline{\Delta}_i \geq 0 \qquad \forall i \notin I_\sigma, \tag{3.3}$$

то угловая точка w^* продолжает оставаться решением задачи (3.2). Таким образом, условие (3.3) представляет собой самое общее условие устойчивости оптимального плана. Задача состоит в том, чтобы найти такие диапазоны изменения приращения δ, в пределах которых выполняется условие (3.3). Здесь мы рассмотрим простейший случай – когда изменяется лишь одна компонента целевого вектора, скажем, k – тая, а остальные компоненты вектора c не меняются.

Итак, пусть $\bar{c}_k = c_k + \delta_k$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, n\}$ и $\bar{c}_i = c_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$. Возможны два случая.

Случай i.1. Если $k \notin I_\sigma$, то вектор c^σ не меняется. Тогда

$$\overline{\Delta}_i = \Delta_i = \langle c^\sigma, \lambda^i \rangle - c_i \geq 0, \ \ i \notin I_\sigma, \ \ i \neq k,$$

$$\overline{\Delta}_k = \langle c^\sigma, \lambda^k \rangle - \bar{c}_k = \langle c^\sigma, \lambda^k \rangle - (c_k + \delta_k) = \Delta_k - \delta_k \geq 0$$

при

$$-\infty < \delta_k \leq \Delta_k. \tag{3.4}$$

Таким образом, при изменениях приращения небазисной компоненты c_k в диапазоне (3.4) выполняется условие (3.3) и оптимальный план не меняется.

Случай i.2. Если $k \in I_\sigma$, то $k = i_j$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда $\bar{c}_k = \bar{c}_{i_j} = c_{i_j} + \delta_k$ и вектор c^σ меняется: $\bar{c}^\sigma = c^\sigma + \delta_k e^j$. Соответственно изменятся и все оценки для $i \notin I_\sigma$:

$$\overline{\Delta}_i = \langle \bar{c}^\sigma, \lambda^i \rangle - c_i = \langle c^\sigma + \delta_k e^j, \lambda^i \rangle - c_i =$$

$$= \langle c^\sigma, \lambda^i \rangle - c_i + \delta_k \langle e^j, \lambda^i \rangle = \Delta_i + \delta_k \lambda_{ji}, \tag{3.5}$$

где $\lambda_{ji} = \lambda^i_j$ –j – тая компонента вектора λ^i. Из (3.3) и (3.5) следует, что условием устойчивости оптимального плана является условие

$$\Delta_i + \delta_k \lambda_{ji} \geq 0 \qquad \forall i \notin I_\sigma \tag{3.6}$$

(напомним, что индекс j фиксирован). Здесь возможны следующие случаи:

a. если $\lambda_{ji} = 0$, то условие (3.6) выполняется для любого

$$-\infty < \delta_k < +\infty \ \ ;$$

b. если $\lambda_{ji} < 0$, то условие (3.6) выполняется при

$$\delta_k \leq -\frac{\Delta_i}{\lambda_{ji}} \ \ ;$$

c. если $\lambda_{ji} > 0$, то условие (3.6) выполняется при

$$\delta_k \geq -\frac{\Delta_i}{\lambda_{ji}} \quad .$$

Таким образом, в общем случае условие (3.6) выполняется при

$$\max_{\substack{i \notin I_\sigma: \\ \lambda_{ji} > 0}} \left(-\frac{\Delta_i}{\lambda_{ji}} \right) \leq \delta_k \leq \min_{\substack{i \notin I_\sigma: \\ \lambda_{ji} < 0}} \left(-\frac{\Delta_i}{\lambda_{ji}} \right) \quad . \tag{3.7}$$

Если отсутствуют коэффициенты $\lambda_{ji} < 0$ для $i \notin I_\sigma$, то правая граница для δ_k равна $+\infty$, а если отсутствуют коэффициенты $\lambda_{ji} > 0$ для $i \notin I_\sigma$, то левая граница равна $-\infty$.

ii. Изменение ограничений

При изменении компонент вектора ограничений ($\bar{b} = b + \Delta b$) изменяется и оптимальный план, базисные компоненты которого вычисляются по формуле $(w^*)^\sigma = B_\sigma^{-1} b$. Однако, до тех пор, пока $B_\sigma^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$ вектор $\overline{w}^*$ с базисными компонентами $(\overline{w}^*)^\sigma = B_\sigma^{-1}(b + \Delta b)$ является оптимальной угловой точкой, а σ – его базисом, поскольку оценки Δ_i зависят только от базиса, но не зависят от вектора ограничений и, следовательно, остаются неотрицательными. Таким образом, при изменении вектора ограничений не имеет смысла говорить об устойчивости оптимального плана, но можно говорить об устойчивости его базиса (и, как следствие, об устойчивости решения двойственной задачи). Условие сохранения (устойчивости) базиса имеет вид:

$$B_\sigma^{-1}(b + \Delta b) \geq 0 \ . \tag{3.8}$$

Предположим сначала, что изменяется лишь одна компонента вектора ограничений, скажем, k – тая. В этом случае $\Delta b = \delta_k e^k$, где δ_k – приращение k – той компоненты вектора b, $k \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда условие (3.8) принимает вид:

$$B_\sigma^{-1}(b + \Delta b) = B_\sigma^{-1} b + \delta_k B_\sigma^{-1} e^k = \lambda^0 + \delta_k \lambda^{n+k} \geq 0 \ , \tag{3.9}$$

где $\lambda^0 = B_\sigma^{-1} b$ – вектор базисных компонент оптимального плана, $\lambda^{n+k} = B_\sigma^{-1} a^{n+k}$ $(a^{n+k} = e^k)$. Далее возможны два случая.

Случай ii.1: $n + k \in I_\sigma$, то есть k – тая дополнительная переменная u_k^* – базисная. Тогда $n+k = i_j$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\lambda_j^0 = u_k^*$, а

$\lambda^{n+k} = B_\sigma^{-1} a^{i_j} = e^j$ – j – тый базисный столбец. Таким образом, условие (3.9) принимает вид: $\lambda^0 + \delta_k e^j \geq 0$ и выполняется при

$$-u_k^* \leq \delta_k < +\infty \quad . \tag{3.10}$$

Условие (3.10), вообще говоря, достаточно очевидно: если $u_k^* > 0$, то $(Ax^*)_k < b_k$ и, следовательно, любое увеличение компоненты b_k не меняет оптимального плана (k – тый ресурс не дефицитен); так как $(Ax^*)_k = b_k - u_k^*$, то k -тый ресурс можно уменьшить на величину u_k^*, не меняя оптимального плана задачи.

Случай ii.2: $n + k \notin I_\sigma$. Тогда, переписывая условие (3.9) в виде

$$\lambda_{j0} + \delta_k \lambda_{j,n+k} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

получим:

a. если $\lambda_{j,n+k} = 0$, то $-\infty < \delta_k < +\infty$,

b. если $\lambda_{j,n+k} < 0$, то $\delta_k \leq -\lambda_{j0}/\lambda_{j,n+k}$,

c. если $\lambda_{j,n+k} > 0$, то $\delta_k \geq -\lambda_{j0}/\lambda_{j,n+k}$.

Таким образом, в общем случае

$$\max_{\substack{1 \leq j \leq m: \\ \lambda_{j,n+k} > 0}} \left(-\frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{j,n+k}} \right) \leq \delta_k \leq \min_{\substack{1 \leq j \leq m: \\ \lambda_{j,n+k} < 0}} \left(-\frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{j,n+k}} \right) . \tag{3.11}$$

Если нет ни одного $\lambda_{j,n+k} > 0$, то $\delta_k > -\infty$, а если нет ни одного $\lambda_{j,n+k} < 0$, то $\delta_k < +\infty$.

Рассмотрим случай, когда изменяются несколько, или даже все компоненты вектора ограничений. Пусть $(\overline{w}^*)^\sigma = B_\sigma^{-1}(b + \Delta b)$. Поскольку $(w^*)^\sigma = B_\sigma^{-1} b$, то

$$\|(w^*)^\sigma - (\overline{w}^*)^\sigma\| = \|B_\sigma^{-1} \Delta b\| \leq \|B_\sigma^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$$

Отсюда

$$w_{i_j}^* - \overline{w}_{i_j}^* \leq \|B_\sigma^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|. \tag{3.12}$$

Из (3.12), в свою очередь, имеем

$$\overline{w}_{i_j}^* \geq w_{i_j}^* - \|B_\sigma^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \geq 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, m$$

при

$$\|\Delta b\| \leq \frac{w_{i_j}^*}{\|B_\sigma^{-1}\|} \qquad \forall j = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, при

$$\|\Delta b\| \le r(b) = \min_{j=\overline{1,m}} \frac{w^*_{i_j}}{\|B^{-1}_\sigma\|} \tag{3.13}$$

базис σ остается базисом оптимального плана. Если угловая точка w^* – невырожденная, то $r(b) > 0$. Для вырожденного оптимального плана оценка (3.13), очевидно, не имеет смысла.

iii. Изменение коэффициентов матрицы условий

Рассмотрим простейший случай: меняется только один элемент матрицы A : $\overline{a}_{ks} = a_{ks} + \delta_{ks}$ для некоторых $k \in \{1, \dots, m\}$ и $s \notin I_\sigma$. В этом случае $\overline{a}^s = a^s + \delta_{ks} e^k$ и, так как $s \notin I_\sigma$, все оценки Δ_i не меняются за исключением оценки Δ_s :

$$\overline{\Delta}_s = \langle y^*, a^s + \delta_{ks} e^k \rangle - c_s = \langle y^*, a^s \rangle - c_s + \delta_{ks} \langle y^*, e^k \rangle = \Delta_s + \delta_{ks} y^*_k \ .$$

Отсюда $\overline{\Delta}_s \ge 0$

a. при $-\infty < \delta_{ks} < +\infty$, если $y^*_k = 0$,

b. при $-\Delta_s / y^*_k \le \delta_{ks} < +\infty$, если $y^*_k > 0$.

Экономическая интерпретация этих соотношений очевидна – если k – тый ресурс не дефицитен, то изменения технологии (увеличение или уменьшение расхода a_{ks} этого ресурса на производство единицы s – того изделия) никак не влияют на оптимальный план, так как $s \notin I_\sigma$, то s – тое изделие не производится. Напротив, если k – тый ресурс дефицитен, то уменьшением его расхода a_{ks} более, чем на Δ_s / y^*_k (если это возможно), можно добиться включения этого изделия в оптимальный план.

П р и м е р 3.2. Рассмотрим следующую задачу.

Предприятие выпускает три вида изделий. В процессе их производства последовательно используются три технологические операции: операция 1, операция 2 и операция 3. В табл. 3.1 приведены длительность технологических операций при изготовлении одного изделия каждого вида, а также прибыль от продажи изделий. Прочерки в таблице означают, что при изготовлении изделия 2 технологическая операция 2 не выполняется, а при производстве изделия 3 используются только операции 1 и 2.

Табл. 3.1

Изделие	Длительность операций (мин./изд.)			Прибыль (руб./изд.)
	операция 1	операция 2	операция 3	
1	1	3	1	3
2	2	–	4	2
3	1	2	–	5

Фонд рабочего времени, в течение которого операции 1, 2 и 3 могут быть использованы для производства рассматриваемых изделий, ограничен следующими предельными значениями:

для первой операции – 430 мин./сутки,
для второй операции – 460 мин./сутки,
для третьей операции – 420 мин./сутки.

Каков наиболее выгодный суточный объем производства каждого вида изделий ?

Обозначим через x_i, $i = 1, 2, 3$, суточный план производства изделий 1, 2 и 3, соответственно. Тогда математическая модель рассматриваемой задачи примет вид:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \to & \max\,; \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 430\,, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 460\,, \\ x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 420\,, \\ x_i & \geq & 0,\ i = 1, 2, 3\,. \end{array}$$

Решение этой задачи симплекс– методом (симплексная таблица, соответствующая оптимальному плану) приведено в табл. 3.2, в которой столбцы 1, 2 и 3 соответствуют исходным переменным x_1, x_2 и x_3, а столбцы 4, 5, 6 – дополнительным переменным x_4, x_5, x_6.

Табл. 3.2

	0	1	2	3	4	5	6
Δ	1350	4	0	0	1	2	0
2	100	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0
3	230	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0
6	20	2	0	0	-2	1	1

Из табл. 3.2 следует, что максимальная суточная прибыль $f_* = 1350$, оптимальный план исходной задачи $x^* = (0, 100, 230)$, а оптимальный план двойственной задачи $y^* = (1, 2, 0)$ (напомним, что компоненты y_1^*, y_2^*, y_3^* оптимального плана двойственной задачи равны оценкам Δ_4, Δ_5, Δ_6 дополнительных переменных). Так как $y_3^* = 0$, то третий ресурс (фонд рабочего времени на третьей операции) не дефицитен. В самом деле, так как третья дополнительная переменная $x_6^* = 20$, то неиспользованными на третьей операции (при оптимальном плане работы) остаются 20 мин./сутки. Условная стоимость ресурсов 1 и 2 равна, соответственно, 1 и 2 руб./мин. Это значит, что увеличение (уменьшение) фонда рабочего времени на операции 1 на 1 мин./сутки приводит к увеличению (уменьшению) прибыли на 1 руб., а аналогичное изменение фонда рабочего времени на операции 2 – к изменению прибыли на 2 руб. Все это справедливо, разумеется, только в пределах соответствующих диапазонов устойчивости. Найдем эти диапазоны.

1. Для b_1 (изменения первой компоненты вектора ограничений).

Так как $n + k = 3 + 1 = 4 \notin I_\sigma = \{2, 3, 6\}$, то здесь имеет место случай ii.2:

$$\max_{\substack{j=1,2,3:\\ \lambda_{j4}>0}} \left\{-\frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{j4}}\right\} \le \delta_1 \le \min_{\substack{j=1,2,3:\\ \lambda_{j4}<0}} \left\{-\frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{j4}}\right\}.$$

Левая граница этого диапазона

$$\max_{\substack{j=1,2,3:\\ \lambda_{j4}>0}} \left\{-\frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{j4}}\right\} = \max\left\{-\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{14}}\right\} = -\frac{100}{1/2} = -200.$$

Правая граница

$$\min_{\substack{j=1,2,3:\\ \lambda_{j4}<0}} \left\{-\frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{j4}}\right\} = \min\left\{-\frac{\lambda_{30}}{\lambda_{34}}\right\} = -\frac{20}{(-2)} = 10.$$

Таким образом,

$$-200 \le \delta_1 \le 10.$$

2. Для b_2.

Здесь $n + k = 3 + 2 = 5 \notin I_\sigma$ и мы снова имеем случай ii.2:

$$\max_{\substack{j=1,2,3:\\ \lambda_{j5}>0}} \left\{-\frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{j5}}\right\} \le \delta_2 \le \min_{\substack{j=1,2,3:\\ \lambda_{j5}<0}} \left\{-\frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{j5}}\right\},$$

где

$$\max_{\substack{j=1,2,3:\\ \lambda_{j5}>0}} \left\{-\frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{j5}}\right\} = \max\left\{-\frac{\lambda_{20}}{\lambda_{25}}, -\frac{\lambda_{30}}{\lambda_{35}}\right\} = \max\left\{-\frac{230}{1/2}, -\frac{20}{1}\right\} = -20,$$

$$\min_{\substack{j=1,2,3:\\ \lambda_{j5}<0}} \left\{-\frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{j5}}\right\} = \min\left\{-\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{15}}\right\} = -\frac{100}{(-1/4)} = 400.$$

То есть,

$$-20 \le \delta_2 \le 400.$$

3. Для b_3.

Здесь $n + k = 3 + 3 = 6 \in I_\sigma$ и, следовательно, имеет место случай ii.1:

$$-u_3^* \le \delta_3 < +\infty\ ,$$

где $u_3^* = x_6^* = 20$ (третья дополнительная переменная). Таким образом,

$$-20 \le \delta_3 < +\infty\ .$$

Теперь определим диапазоны устойчивости оптимального плана к изменению компонент целевого вектора.

1. Для c_1 (изменения первой компоненты целевого вектора).

Так как $1 \notin I_\sigma$, то здесь имеет место случай i.1: оптимальный план устойчив, если приращение δ_1 коэффициента c_1 лежит в пределах

$$-\infty < \delta_1 \le \Delta_1 = 4.$$

2. Для $_2$.

Так как $2 \in I_\sigma$, то здесь имеет место случай i.2. Поскольку $2 = i_1$ (первый базисный индекс), то в (3.7) $j = 1$ и

$$\max_{\substack{i\notin I_\sigma:\\ \lambda_{1i}>0}} \left\{-\frac{\Delta_i}{\lambda_{1i}}\right\} \le \delta_2 \le \min_{\substack{i\notin I_\sigma:\\ \lambda_{1i}<0}} \left\{-\frac{\Delta_i}{\lambda_{1i}}\right\}.$$

Здесь

$$\max_{\substack{i\notin I_\sigma:\\ \lambda_{1i}>0}} \left\{-\frac{\Delta_i}{\lambda_{1i}}\right\} = \max\left\{-\frac{\Delta_4}{\lambda_{14}}\right\} = -\frac{1}{1/2} = -2,$$

$$\min_{\substack{i\notin I_\sigma:\\ \lambda_{1i}<0}} \left\{-\frac{\Delta_i}{\lambda_{1i}}\right\} = \min\left\{-\frac{\Delta_1}{\lambda_{11}}, -\frac{\Delta_5}{\lambda_{15}}\right\} = \min\left\{-\frac{4}{(-1/4)}, -\frac{2}{(-1/4)}\right\} = 8.$$

Таким образом,

$$-2 \le \delta_2 \le 8.$$

3. Для c_3.

Так как $3 \in I_\sigma$, то мы снова имеем случай i.2. Поскольку $3 = i_2$, то в (3.7) $j = 2$, причем, так как $\lambda_{2i} \ge 0$ для всех $i \notin I_\sigma$, то правая граница этого диапазона равна $+\infty$:

$$\max_{\substack{i\notin I_\sigma:\\ \lambda_{2i}>0}} \left\{-\frac{\Delta_i}{\lambda_{2i}}\right\} \le \delta_3 < +\infty.$$

Здесь

$$\max_{\substack{i\notin I_\sigma:\\ \lambda_{2i}>0}} \left\{-\frac{\Delta_i}{\lambda_{2i}}\right\} = \max\left\{-\frac{4}{3/2}, -\frac{2}{1/2}\right\} = -\frac{8}{3}.$$

Таким образом,

$$-\frac{8}{3} \le \delta_3 < +\infty.$$

Результат, на первый взгляд, странный – сколько не увеличивай прибыль за единицу третьего изделия, оптимальный план не меняется и содержит сто единиц менее выгодного второго изделия. Для объяснения этой ситуации рассмотрим условия задачи:

$$\begin{array}{lcccccccc}
[Ax^*]_1 & = & 0 & + & 200 & + & 230 & = & 430, \\
[Ax^*]_2 & = & 0 & & & + & 460 & = & 460, \\
[Ax^*]_3 & = & 0 & + & 400 & & & < & 420.
\end{array}$$

Теперь ясно, что „узкое место“ задачи – второе ограничение: весь запас второго ресурса расходуется на производство только изделия 3; изделие 2 производится на неизрасходованные остатки 1–го и 3–го ресурсов.

Наконец, найдем диапазоны устойчивости оптимального плана к изменениям небазисных технологий. В нашем примере небазисным является столбец $a^1 = (1, 3, 1)$. Диапазоны устойчивости к изменениям его компонент $a_{11} = 1$, $a_{21} = 3$ и $a_{31} = 1$ таковы:

$$-4 = -\Delta_1/y_1^* \le \delta_{11} < +\infty,$$

$$-2 = -\Delta_1/y_2^* \le \delta_{21} < +\infty,$$

$$-\infty < \delta_{31} < +\infty \quad (y_3^* = 0).$$

Таким образом, оптимальный план „абсолютно устойчив“ к изменениям технологий a_{11} и a_{31} (времени выполнения операций 1 и 3 при изготовлении 1–го изделия) и может быть изменен (улучшен), если сократить время выполнения операции 2 при изготовлении 1–го изделия более, чем на две минуты (если это возможно).

Упражнения

3.1. Фирма специализируется на производстве буфетов. Она может производить три типа буфетов – A, B и C, что требует различных затрат труда на каждой стадии производства (см. табл. 3.3). В течение недели можно планировать работу на лесопилке на 360 чел.–ч., в сборочном цехе на 520 чел.–ч., в отделочном цехе – на 220 чел.–ч. Прибыль от продажи каждого буфета типов A, B и C составляет, соответственно, 360, 440 и 600 рублей.

Табл. 3.3

Производственный участок	Затраты труда на одно изделие (чел.–ч.)		
	Буфет типа A	Буфет типа B	Буфет типа C
Лесопилка	1	2	4
Сборочный цех	2	4	2
Отделочный цех	1	1	2

Составить оптимальный план производства. Определить теневые цены ресурсов. Найти диапазоны устойчивости оптимального плана к изменению компонент целевого вектора и базиса оптимального плана к изменению компонент вектора ограничений.

3.2. На звероферме могут выращиваться песцы, черно–бурые лисы, нутрии и норки. Для их питания используются три вида кормов. В табл. 3.4 приведены нормы расхода кормов, их ресурс в расчете на день, а также прибыль от реализации одной шкурки каждого зверя.

Табл. 3.4

Вид корма	Нормы расхода кормов (кг/день)				Ресурс кормов (кг)
	Песец	Лиса	Нутрия	Норка	
I	1	2	1	2	300
II	1	4	2	0	400
III	1	1	3	2	600
Прибыль (руб/шкурка)	60	120	80	100	

Определить, сколько и каких зверьков следует выращивать на ферме, чтобы прибыль от реализации шкурок была наибольшей. Найти теневые цены ресурсов. Вычислить диапазоны устойчивости оптимального плана и его базиса к изменениям компонент целевого вектора и вектора ограничений, соответственно.

Глава 4
Специальные задачи линейного программирования

§1. Транспортная задача

1.1. Постановка задачи

Транспортной задачей линейного программирования (*классической транспортной задачей*) называется следующая задача ЛП (см. стр.16):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min \; ; \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = p_i \; , \; i = 1, \ldots, n \; , \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = q_j \; , \; j = 1, \ldots, m \; , \tag{1.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \; , \; i = 1, \ldots, n \; , \; j = 1, \ldots, m \; . \tag{1.4}$$

Напомним,что здесь

n	–	количество пунктов $P_1, \ldots, P_n$ производства некоторого однородного продукта,
m	–	количество пунктов $Q_1, \ldots, Q_n$ потребления данного продукта,
$p_i > 0$	–	количество единиц продукта, производимого в пункте P_i,
$q_j > 0$	–	количество единиц продукта, потребляемого в пункте Q_j,

$c_{ij} \geq 0$ – стоимость перевозки единицы продукта из P_i в Q_j,
x_{ij} – количество единиц продукта, перевозимого из P_i в Q_j (план перевозок).

Таким образом, требуется составить такой план перевозок, при котором весь производимый продукт был бы вывезен из пунктов производства, потребности всех пунктов потребления были бы удовлетворены и при этом суммарная стоимость всех перевозок была бы минимальна.

Т е о р е м а 1.1. Для того, чтобы задача (1.1)–(1.4) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m} q_j \quad . \tag{1.5}$$

То есть, транспортная задача имеет решение тогда и только тогда, когда производство равно потреблению.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Для любого допустимого плана, в том числе и для оптимального, из (1.2) и (1.3) следует, соответственно,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p_i \quad , \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} q_j \quad , \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.7) вытекает (1.5).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняется условие (1.5). Положим

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m} q_j \quad ,$$

$$\overline{x}_{ij} = \frac{p_i q_j}{S} \ , \ i = 1, \ldots, n, \ , j = 1, \ldots, m \quad . \tag{1.8}$$

Нетрудно видеть, что план (1.8) является допустимым в задаче (1.1)–(1.4). Очевидно также, что для любого допустимого плана

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \geq 0 \quad .$$

То есть, целевая функция в задаче (1.1)–(1.4) ограничена снизу и, следовательно, задача имеет решение. ■

1.2. Каноническая форма записи

Введем векторы $c, x \in R^{n \cdot m}$, $b \in R^{n+m}$ и матрицу $A \in M_{n+m,nm}$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
c &= (c_{11}, \ \ldots, \ c_{1m}, \\
& c_{21}, \ \ldots, \ c_{2m}, \\
& \ldots \ \ \ldots \ \ \ldots \\
& c_{n1}, \ \ldots, \ c_{nm}), \\
x &= (x_{11}, \ \ldots, \ x_{1m}, \\
& x_{21}, \ \ldots, \ x_{2m}, \\
& \ldots \ \ \ldots \ \ \ldots \\
& x_{n1}, \ \ldots, \ x_{nm}), \\
b &= (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m),
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc}
1\,1 \cdots 1 & 0\,0 \cdots 0 & \cdots\cdots & 0\,0 \cdots 0 \\
0\,0 \cdots 0 & 1\,1 \cdots 1 & \cdots\cdots & 0\,0 \cdots 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
0\,0 \cdots 0 & 0\,0 \cdots 0 & \cdots\cdots & 1\,1 \cdots 1 \\
1\,0 \cdots 0 & 1\,0 \cdots 0 & \cdots\cdots & 1\,0 \cdots 0 \\
0\,1 \cdots 0 & 0\,1 \cdots 0 & \cdots\cdots & 0\,1 \cdots 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
0\,0 \cdots 1 & 0\,0 \cdots 1 & \cdots\cdots & 0\,0 \cdots 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right] \mathrm{n} \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right] \mathrm{m}
\end{array} \\
\begin{array}{cccc}
\underbrace{\qquad\quad}_{\mathrm{m}} & \underbrace{\qquad\quad}_{\mathrm{m}} & \qquad\quad & \underbrace{\qquad\quad}_{\mathrm{m}}
\end{array}
\end{array}
$$

С помощью этих обозначений задачу (1.1)–(1.4) можно представить в привычной канонической форме:

$$
\langle c, x \rangle \to \min; \quad Ax = b, \ x \geq 0 \ . \tag{1.9}
$$

Условие $Ax = b$ можно также записывать в следующем виде:

$$
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} a^{ij} = b \ ,
$$

где через a^{ij} обозначены столбцы матрицы A, соответствующие переменным x_{ij}. Очевидно, что ненулевые компоненты вектора a^{ij} вычисляются по правилу:

$$a_i^{ij} = a_{n+j}^{ij} = 1 \quad .$$

Л е м м а 1.1. Ранг матрицы A равен $n + m - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Составим линейную комбинацию строк матрицы A следующим образом: из суммы первых n строк вычтем сумму последующих m строк. Очевидно, полученная линейная комбинация равна нулю. Следовательно, $rank\, A < n + m$. В то же время нетрудно убедиться, что любые $n+m-1$ строка матрицы A линейно независимы. Например, линейная комбинация первых $n + m - 1$ строки с коэффициентами $\alpha_k,\ k = 1, \ldots, n + m - 1$, имеет вид:

$$\begin{array}{lllll}(\alpha_1 + \alpha_{n+1}, & \alpha_1 + \alpha_{n+2}, & \ldots, & \alpha_1 + \alpha_{n+m-1}, & \alpha_1, \\ \ \alpha_2 + \alpha_{n+1}, & \alpha_2 + \alpha_{n+2}, & \ldots, & \alpha_2 + \alpha_{n+m-1}, & \alpha_2, \\ \ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ \alpha_n + \alpha_{n+1}, & \alpha_n + \alpha_{n+2}, & \ldots, & \alpha_n + \alpha_{n+m-1}, & \alpha_n) \ .\end{array}$$

Очевидно, что этот вектор равен нулю тогда и только тогда, когда $\alpha_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n + m - 1$. $\blacksquare$

Поскольку любые $n + m - 1$ строка матрицы A линейно независимы, то любое из условий (1.2) и (1.3) является линейной комбинацией остальных $n + m - 1$ условий. Таким образом, одно из ограничений задачи – „лишнее“ и его можно убрать без ущерба для множества планов. Однако, из соображений симметрии мы сохраним все условия задачи без изменений.

В качестве следствия к лемме 1.1 отметим, что угловые точки задачи (1.9) (задачи (1.1)–(1.4)) имеют не более, чем $n+m-1$ отличную от нуля компоненту. Базис угловой точки состоит из $n + m - 1$ столбца матрицы A.

В линейном программировании угловые точки часто называют *опорными планами*. Именно это определение мы и будем в дальнейшем использовать для угловых точек транспортной задачи. Кроме того, для транспортной задачи принято свое определение невырожденного опорного плана. А именно, опорный план транспортной задачи называется *невырожденным*, если он имеет ровно $n+m-1$ отличную от нуля компоненту. Если число отличных от нуля компонент опорного плана меньше, чем $n+m-1$, то опорный план – *вырожденный*. (В связи с этим заметим, что так как ранг матрицы A меньше, чем $n+m$, то в соответствии с определением, которым мы пользовались ранее, любая угловая точка транспортной задачи была бы вырожденной).

1.3. Двойственная задача

Задачей, двойственной к задаче (1.9), является следующая задача ЛП:

$$\langle b, y\rangle \to \max;\ A^T y \le c\ . \tag{1.10}$$

Введем обозначения:

$$u = (u_1, \ldots, u_n) = (-y_1, \ldots, -y_n)\ ,$$

$$v = (v_1, \ldots, v_m) = (y_{n+1}, \ldots, y_{n+m})\ .$$

Тогда, с учетом структуры матрицы A, задачу (1.10) можно представить в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{m} q_j v_j - \sum_{i=1}^{n} p_i u_i \to \max\ ; \tag{1.11}$$

$$v_j - u_i \le c_{ij},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m. \tag{1.12}$$

Таким образом, задачей, двойственной к задаче (1.1)–(1.4), является задача (1.11)–(1.12). Переменные u_i и v_j этой задачи называются *потенциалами*, соответственно, пунктов производства и потребления. Поясним смысл этого термина.

Пусть x^* – решение задачи (1.9), (u^*, v^*) – решение двойственной задачи (1.11)–(1.12). По теореме 3.1.3

$$v_j^* - u_i^* = c_{ij} \quad \text{для всех} \quad (i,j):\ x_{ij}^* > 0\ \ .$$

По форме это напоминает известное свойство силового поля: работа, необходимая для переноса пробного тела (заряда, или массы, равной единице, и т.д.) из одной точки поля в другую численно равна разности потенциалов этих точек.

1.4. Критерий оптимальности опорного плана

Пусть $\overline{x}$ – опорный план транспортной задачи. Введем обозначения:

σ – базис опорного плана,

I_σ – множество базисных индексов,

B_σ – базисная матрица,

$\overline{x}^\sigma$ – вектор, составленный из базисных компонент опорного плана,

c^σ – вектор, составленный из базисных компонент целевого вектора.

Таким образом,

$$\sigma = \{a^{ij} : \ (i,j) \in I_\sigma\} \ ,$$

$$B_\sigma = [\, a^{ij} \,]_{(i,j)\in I_\sigma} \ ,$$

$$\overline{x}^\sigma = [\, \overline{x}_{ij} \,]_{(i,j)\in I_\sigma} \ ,$$

$$c^\sigma = [\, c_{ij} \,]_{(i,j)\in I_\sigma} \ .$$

Отметим, что матрица B_σ имеет размерность $(n+m)\times(n+m-1)$. Нетрудно также убедиться, что

$$B_\sigma \overline{x}^\sigma = b \ , \tag{1.13}$$

$$\langle c, \overline{x} \rangle = \langle c^\sigma, \overline{x}^\sigma \rangle \ . \tag{1.14}$$

Т е о р е м а 1.2. Пусть $y = y(\sigma)$ – решение системы

$$B_\sigma^T y = c^\sigma \ , \tag{1.15}$$

вектор

$$\Delta = \Delta(\sigma) = A^T y - c \ . \tag{1.16}$$

Тогда, если

$$\Delta \le 0 \ , \tag{1.17}$$

то $\overline{x}$ – решение транспортной задачи.

Другими словами, если существует базис опорного плана $\overline{x}$, в котором выполняется условие (1.17), то опорный план $\overline{x}$ – оптимальный.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного допустимого плана x, с учетом (1.13), (1.15) и (1.16)

$$\langle c, x\rangle = \langle A^T y - \Delta, x\rangle = \langle y, Ax\rangle - \langle \Delta, x\rangle = \langle y, b\rangle - \langle \Delta, x\rangle =$$
$$= \langle y, B_\sigma \overline{x}^\sigma\rangle - \langle \Delta, x\rangle = \langle B_\sigma^T y, \overline{x}^\sigma\rangle - \langle \Delta, x\rangle =$$
$$= \langle c^\sigma, \overline{x}^\sigma\rangle - \langle \Delta, x\rangle \ .$$

Отсюда, в силу (1.14),

$$\langle c, x\rangle = \langle c, \overline{x}\rangle - \langle \Delta, x\rangle \ . \qquad (1.18)$$

Если выполняется условие (1.17), то из (1.18) следует, что

$$\langle c, \overline{x}\rangle \le \langle c, x\rangle \ . \quad \blacksquare$$

Компоненты вектора Δ имеют вид:

$$\Delta_{ij} = \langle a^{ij}, y\rangle - c_{ij} = y_i + y_{n+j} - c_{ij} \ . \qquad (1.19)$$

Вводя, как и выше, обозначения

$$u = (u_1, \ldots, u_n) = (-y_1, \ldots, -y_n) \ ,$$
$$v = (v_1, \ldots, v_m) = (y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}) \ ,$$

формулу (1.19) можно переписать в виде

$$\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} \ . \qquad (1.20)$$

Пусть $\Delta^\sigma = [\, \Delta_{ij} \,]_{(i,j)\in I_\sigma}$. Тогда, очевидно,

$$\Delta^\sigma = B_\sigma^T y - c^\sigma = 0 \ . \qquad (1.21)$$

То есть, базисные компоненты вектора оценок равны нулю. Критерий оптимальности (1.17), следовательно, может быть представлен в виде:

$$\Delta_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in I_\sigma \ ,$$
$$\Delta_{ij} \le 0 \quad \forall (i,j) \notin I_\sigma \ ,$$

или, с учетом (1.20),

$$v_j - u_i = c_{ij} \ , \quad (i,j) \in I_\sigma \ , \qquad (1.22)$$

$$v_j - u_i \le c_{ij} \ , \quad (i,j) \notin I_\sigma \ . \tag{1.23}$$

Условие (1.22) представляет собой, очевидно, переписанную в других обозначениях систему (1.15) и служит, таким образом, для нахождения потенциалов u_i и v_j. Эта система содержит, по определению, потенциалы всех пунктов производства и потребления и является системой $n+m-1$ уравнения с $n+m$ неизвестными. Выбирая любую из неизвестных в качестве свободной и придавая ей произвольное значение (обычно полагают $u_1 = 0$), нетрудно найти затем значения остальных $n+m-1$ неизвестных. Эти значения зависят, конечно, от значения свободной переменной, но, как легко заметить, при любом значении свободной переменной разность потенциалов $v_j - u_i$ определяется однозначно. Здесь опять прослеживается четкая аналогия с физикой – физический смысл во всех физических задачах имеет разность потенциалов между двумя точками, а не значения потенциалов в этих точках.

Таким образом, проверка критерия оптимальности опорного плана состоит в нахождении потенциалов u_i и v_j из системы (1.22) и проверке для них условий (1.23).

1.5. Метод потенциалов (симплекс – метод)

Пусть $\overline{x}$ – опорный план транспортной задачи, для которого не выполняется критерий оптимальности. Тогда найдется пара $(i_0, j_0) \notin I_\sigma$ такая, что $\Delta_{i_0 j_0} > 0$ (если таких пар несколько, то, в соответствии с правилами симплекс – метода, предпочтительнее выбирать ту из них, для которой оценка Δ_{ij} максимальна). Положим

$$x_{i_0 j_0} = \theta \ , \tag{1.24}$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{для всех} \quad (i,j) \notin I_\sigma \ , (i,j) \ne (i_0, j_0) \ . \tag{1.25}$$

Остальные компоненты нового плана x найдем из условий $Ax = b$:

$$Ax = \sum_{(i,j) \in I_\sigma} x_{ij} a^{ij} + \theta a^{i_0 j_0} = B_\sigma x^\sigma + \theta a^{i_0 j_0} = b \ ,$$

где $x^\sigma = [\, x_{ij} \,]_{(i,j) \in I_\sigma}$. Отсюда, так как $b = B_\sigma \overline{x}^\sigma$,

$$B_\sigma x^\sigma = B_\sigma \overline{x}^\sigma - \theta a^{i_0 j_0} \ .$$

Далее, поскольку любой столбец матрицы A представим в виде линейной комбинации базисных векторов, то

$$a^{i_0 j_0} = \sum_{(i,j)\in I_\sigma} \lambda^0_{ij} a^{ij} = B_\sigma \lambda^0 \quad , \tag{1.26}$$

где $\lambda^0 = [\,\lambda^0_{ij}\,]_{(i,j)\in I_\sigma}$. Таким образом,

$$B_\sigma x^\sigma = B_\sigma \overline{x}^\sigma - \theta B_\sigma \lambda^0 \quad .$$

Отсюда

$$B_\sigma[x^\sigma - (\overline{x}^\sigma - \theta\lambda^0)] = 0 \ . \tag{1.27}$$

Ранг матрицы B_σ равен $n+m-1$ – числу неизвестных системы (1.27) и, следовательно, нулевое решение является ее единственным решением:

$$x^\sigma = \overline{x}^\sigma - \theta\lambda^0 \quad . \tag{1.28}$$

Остается вычислить компоненты вектора λ^0. Для этого введем следующее

О п р е д е л е н и е 1.1. Последовательность столбцов матрицы A вида

$$\{a^{i_0 j_0}, a^{i_0 j_1}, a^{i_1 j_1}, a^{i_1 j_2}, \ldots, a^{i_{k-1} j_k}, a^{i_k j_k}, a^{i_k j_0}\}$$

называется *циклом.*

Л е м м а 1.2. Произвольная совокупность столбцов матрицы A линейно зависима тогда и только тогда, когда из нее можно выделить цикл.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Составим линейную комбинацию столбцов, образующих цикл:

$$a^{i_0 j_0} - a^{i_0 j_1} + a^{i_1 j_1} - \ldots - a^{i_{k-1} j_k} + a^{i_k j_k} - a^{i_k j_0} \quad . \tag{1.29}$$

Так как $a^{ij}_i = a^{ij}_{n+j} = 1$, а остальные компоненты вектора a^{ij} равны нулю, то нетрудно видеть, что линейная комбинация (1.29) равна нулю.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть некоторая совокупность столбцов матрицы A – линейно зависимая. Это значит, что существует нетривиальная линейная комбинация этих столбцов, обращающаяся в нуль. Выберем из рассматриваемой совокупности произвольный вектор $a^{i_0 j_0}$ такой, что соответствующий ему коэффициент линейной комбинации не равен нулю. Для того, чтобы в линейной комбинации обратилась в ноль

i_0 – я компонента, в рассматриваемой совокупности должен найтись вектор $a^{i_0 j_1}$ с ненулевым коэффициентом. Это, в свою очередь, влечет существование вектра $a^{i_1 j_1}$ с ненулевым коэффициентом. И т.д. Для того, чтобы обратилась в ноль $n+j_0$ – я компонента линейной комбинации, в ней должен найтись вектор $a^{i_k j_0}$ с ненулевым коэффициентом. Векторы $a^{i_0 j_0}, a^{i_0 j_1}, a^{i_1 j_1}, \ldots, a^{i_k j_0}$, очевидно, образуют цикл. ■

Перейдем к вычислению компонент вектора λ^0. Для этого заметим, что так как векторы $a^{i_0 j_0}$ и a^{ij}, $(i,j) \in I_\sigma$, линейно зависимы, то из них можно выделить цикл, содержащий вектор $a^{i_0 j_0}$:

$$\{a^{i_0 j_0}, a^{i_0 j_1}, a^{i_1 j_1}, a^{i_1 j_2}, \ldots, a^{i_{k-1} j_k}, a^{i_k j_k}, a^{i_k j_0}\} \ . \tag{1.30}$$

Очевидно, что линейная комбинация векторов цикла

$$a^{i_0 j_0} - a^{i_0 j_1} + a^{i_1 j_1} - \ldots - a^{i_{k-1} j_k} + a^{i_k j_k} - a^{i_k j_0} = 0 \ ,$$

или

$$\sum_{(i,j)\in I_+} a^{ij} - \sum_{(i,j)\in I_-} a^{ij} = 0 \ , \tag{1.31}$$

где

$$I_+ = \{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)\} \ ,$$
$$I_- = \{(i_0, j_1), (i_1, j_2), \ldots, (i_k, j_0)\} \ .$$

Из (1.31) имеем

$$a^{i_0 j_0} = - \sum_{\substack{(i,j)\in I_+ \\ (i,j)\neq(i_0,j_0)}} a^{ij} + \sum_{(i,j)\in I_-} a^{ij} \ . \tag{1.32}$$

Равенство (1.32) представляет собой разложение вектора $a^{i_0 j_0}$ по векторам базиса. Так как это разложение единственно, то, следовательно, цикл (1.30) – единственный. Сравнивая (1.32) и (1.26), получим, что

$$\lambda^0_{ij} = -1 \ , \ (i,j) \in I_+ \ , \ (i,j) \neq (i_0, j_0) \ , \tag{1.33}$$

$$\lambda^0_{ij} = +1 \ , \ (i,j) \in I_- \ , \tag{1.34}$$

$$\lambda^0_{ij} = \quad 0 \ , \ (i,j) \in I_\sigma \setminus I_+ \setminus I_- \ . \tag{1.35}$$

Отсюда и из (1.24), (1.28) следует, что

$$x_{ij} = \overline{x}_{ij} + \theta \ , \ (i,j) \in I_+ \ , \tag{1.36}$$

$$x_{ij} = \overline{x}_{ij} - \theta \ , \ (i,j) \in I_- \ , \tag{1.37}$$

$$x_{ij} = \overline{x}_{ij} \qquad , \ (i,j) \in I_\sigma \setminus I_+ \setminus I_- \ . \tag{1.38}$$

Остается выбрать параметр θ так, чтобы выполнялось условие $x \geq 0$. Очевидно, это условие будет выполнено, если

$$\theta = \min_{(i,j) \in I_-} \overline{x}_{ij} \ . \tag{1.39}$$

Нетрудно видеть, что мы, в сущности, повторили в терминах транспортной задачи все те рассуждения, которыми раньше пользовались при построении симплекс – метода. Точнее говоря, мы заново построили симплекс – метод применительно к транспортной задаче. Здесь он носит название *метода потенциалов*. Поскольку метод потенциалов представляет собой реализацию симплекс – метода для транспортной задачи, то, очевидно, новый план x, построенный по формулам (1.25), (1.36) – (1.39), является опорным. (Формально, для доказательства опорности плана x достаточно повторить в терминах транспортной задачи доказательство теоремы 2.2.1). В силу (1.18), (1.21), (1.24) и (1.25) значение целевой функции

$$\langle c, x \rangle = \langle c, \overline{x} \rangle - \theta \Delta_{i_0 j_0} \ .$$

Базис нового опорного плана $I_\tau = I_\sigma \setminus \{(i_*, j_*)\} \bigcup \{(i_0, j_0)\}$, где

$$(i_*, j_*) = \arg\min_{(i,j) \in I_-} \overline{x}_{ij} \ .$$

Формулы (1.25), (1.36) – (1.39) имеют достаточно простую интерпретацию – поскольку в план перевозок включается новая перевозка $x_{i_0 j_0} = \theta$, то для того, чтобы не нарушать ограничений задачи, соседняя в цикле перевозка $\overline{x}_{i_0 j_1}$ уменьшается на θ единиц, но тогда на θ единиц следует увеличить перевозку $\overline{x}_{i_1 j_1}$, что, в свою очередь, влечет уменьшение на θ единиц перевозки $\overline{x}_{i_1 j_2}$ и т.д. Перевозки, не вошедшие в цикл, остаются без изменений.

1.6. Транспортные таблицы

При организации вычислений по методу потенциалов планы транспортной задачи удобно представлять в виде матрицы $X = [\, x_{ij} \,]_{i,j=1}^{n,m}$.

При ручном счете эта матрица заносится в таблицу, которую мы будем называть *транспортной таблицей* (см. табл. 1.1).

c_{11} x_{11}	c_{12}	$\cdots\cdots$	c_{1m}
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots\cdots$	c_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots\cdots$	$\vdots$
c_{n1}	c_{n2}	$\cdots\cdots$	c_{nm} x_{nm}

Табл. 1.1

Строки транспортной таблицы соответствуют пунктам производства, столбцы – пунктам потребления. В правом верхнем углу каждой клетки таблицы записана стоимость перевозки единицы продукта из соответствующего пункта производства в соответствующий пункт потребления. Обратим внимание, что часть клеток в табл. 1.1 осталась не заполненной – в них не проставлены планы перевозок x_{ij}. Такие клетки будем называть *незанятыми*, или *свободными*. Они соответствуют нулевым перевозкам. Коль скоро мы будем искать решение задачи только среди ее опорных планов, то, по определению, транспортная таблица будет содержать только $n+m-1$ занятую клетку, если опорный план невырожденный и, вообще говоря, должна содержать меньше, чем $n+m-1$ занятую клетку, если опорный план – вырожденный. Однако, если для вырожденного опорного плана будут заполнены только клетки, соответствующие ненулевым перевозкам x_{ij}, то будет невозможно различать нулевые базисные и небазисные компоненты опорного плана. Поэтому нулевые базисные компоненты вырожденного опорного плана также записываются в таблицу в явном виде и такая клетка считается занятой (в отличие от незанятой – небазисной клетки).

Итерация метода потенциалов на языке транспортных таблиц состоит, очевидно, в пересчете транспортной таблицы при переходе от одного опорного плана к другому. Рассмотрим правила такого пересчета.

Пусть $\overline{X} = [\,\overline{x}_{ij}\,]_{i,j=1}^{n,m}$ – неоптимальный опорный план, I_σ – множество базисных индексов (координат занятых клеток). Будем считать, что мы вычислили оценки Δ_{ij} для всех $(i,j) \notin I_\sigma$ (для всех незанятых клеток). Так как $\overline{X}$ – неоптимальный опорный план, то найдется клетка $(i_0, j_0) \notin I_\sigma$ такая, что $\Delta_{i_0 j_0} > 0$. Построим последовательность клеток транспортной таблицы

$$\{(i_0,j_0),\ (i_0,j_1),\ (i_1,j_1),\ (i_1,j_2),\ \ldots,\ (i_{k-1},j_k),\ (i_k,j_k),(i_k,j_0)\}\ , \quad (1.40)$$

в которой все клетки, кроме первой – занятые, каждые две соседние клетки лежат в одной строке или в одном столбце, но ни в одной строке и ни в одном столбце нет трех последовательных клеток. Последовательности (1.40), очевидно, соответствует цикл

$$\{a^{i_0 j_0},\ a^{i_0 j_1},\ a^{i_1 j_1},\ a^{i_1 j_2},\ \ldots,\ a^{i_{k-1} j_k},\ a^{i_k j_k},\ a^{i_k j_0}\}\ ,$$

поэтому последовательность (1.40) мы будем также называть *циклом.* Если клетки цикла соединить прямыми линиями (*звеньями цикла*), то соседние звенья всегда будут перпендикулярны, а сам цикл будет представлять собой замкнутую ломаную линию. Примеры циклов приведены на рис. 1.1 – 1.3. Звенья цикла могут пересекаться, как на рис. 1.3, но клетки, лежащие на пересечении звеньев, в цикл не входят. Звенья цикла могут также проходить через другие занятые клетки, не принадлежащие циклу.

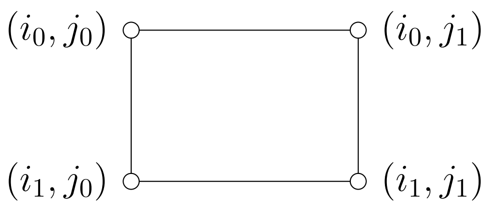

Рис. 1.1

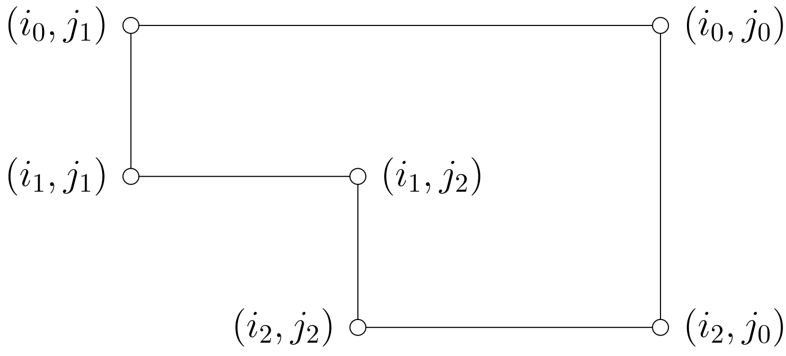

Рис. 1.2

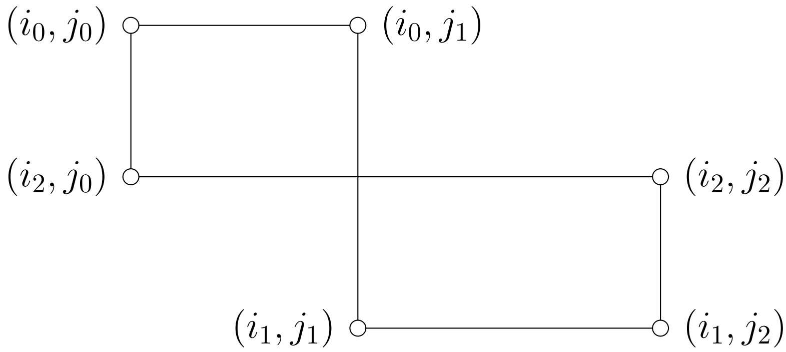

Рис. 1.3

После построения цикла остается лишь выделить клетки, соответствующие множествам I_+ и I_- и вычислить компоненты нового опорного плана по формулам (1.36) – (1.39). Для этого, обходя клетки цикла, начиная с клетки (i_0, j_0), пометим их поочередно знаками „$+$“ и „$-$“ (направление обхода здесь не играет роли). В клетках, помеченных знаком „$-$“, выберем минимальное значение, θ, и перейдем к заполнению новой таблицы: число θ вычтем из значений, содержащихся в клетках, помеченных знаком „$-$“, и прибавим к значениям, содержащимся в клетках, помеченных знаком „$+$”. Полученные результаты занесем в соответствующие клетки новой таблицы. Занятые клетки старой таблицы, не вошедшие в цикл, переносятся в новую таблицу без изменений. В новой таблице клетка (i_*, j_*), содержавшая в старой таблице число θ, становится свободной, клетка (i_0, j_0) – занятой (даже если $\theta = 0$). Отметим также, что если минимальное значение θ содержится более, чем в одной клетке, то, в силу сказанного выше о базисе вырожденного опорного плана, свободной становится только одна из них, остальные будут заняты значением 0 (речь идет, разумеется, о клетках, помеченных знаком „$-$“).

П р и м е р. Рассмотрим транспортную таблицу, представленную таблицей 1.2.

1 15	3 +	2 − 35	4	5
3	1 − 25	5	3	2 + 15
4	2	1	5	1 60
2	3	1 + 1	2 10	4 − 10

Табл. 1.2

1 15	3 10	2 25	4	5
3	1 15	5	3	2 25
4	2	1	5	1 60
2	3	1 11	2 10	4

Табл. 1.3

Значения x_{ij} в занятых клетках таблицы 1.2 обведены кружками. В таблице выделен цикл $\{(1,2),\ (1,3),\ (4,3),\ (4,5),\ (2,5),(2,2)\}$ с началом в клетке $(i_0, j_0) = (1,2)$ (оценка $\Delta_{12} = 1 > 0$). Минимальное значение

x_{ij} в клетках, помеченных знаком „–“, $\theta = 10$. Прибавим это число к значениям в клетках, помеченным знаком „+“, вычтем его из значений в клетках, помеченных знаком „–“, и оставим без изменений клетки, не вошедшие в цикл. В результате получим таблицу 1.3. Заметим, что значение целевой функции на старом опорном плане таблицы 1.2 равно 261, а на опорном плане таблицы 1.3 – $251 = 261 - \theta\Delta_{12}$.

1.7. Построение начального опорного плана (метод северо–западного угла)

Существует несколько методов построения начального опорного плана. Мы рассмотрим один из них – *метод северо–западного угла.*

Метод состоит из $n+m-1$ последовательных однотипных шагов. На каждом шаге заполняется ровно одна клетка транспортной таблицы. Заполнение начинается с клетки (1,1) (северо–западного угла транспортной таблицы).

Положим $x_{11} = \min\{p_1, q_1\}$.

Если $p_1 < q_1$, то $x_{11} = p_1$. Таким образом, весь продукт из пункта P_1 будет вывезен и, следовательно, этот пункт и соответствующая ему первая строка таблицы могут быть исключены из рассмотрения (вычеркнуты). Потребность пункта Q_1 будет удовлетворена на p_1 единиц продукта и станет равна $q_1' = q_1 - p_1$.

Если $p_1 > q_1$, то $x_{11} = q_1$. Таким образом, потребность пункта Q_1 будет удовлетворена полностью и, следовательно, первый столбец транспортной таблицы может быть вычеркнут. Запас продукта в пункте P_1 уменьшится на q_1 единиц и, следовательно, остаток продукта в пункте P_1 будет равен $p_1' = p_1 - q_1$.

Если $p_1 = q_1$, то, очевидно, можно вычеркнуть сразу и первую строку и первый столбец. Мы, однако, будем вычеркивать либо только строку, либо только столбец (что именно – безразлично). Причина этого, на первый взгляд, нерационального шага, будет ясна чуть позже. Если вычеркивается строка, то $q_1' = q_1 - p_1 = 0$, если столбец, то $p_1' = p_1 - q_1 = 0$.

На этом первый шаг заканчивается. В результате будет заполнена одна клетка таблицы, а сама таблица уменьшится на одну строку или на один столбец. Для оставшейся части таблицы, очевидно, суммарная потребность пунктов потребления равна суммарным запасам пунктов производства.

К уменьшенной таблице применим ту же самую процедуру заполнения северо– западного угла (это будет либо клетка (2,1), либо клетка (1,2)). В результате таблица уменьшится еще на одну строку, либо на один столбец. И т.д. Через $n+m-2$ шага в таблице останутся только одна строка и один столбец (один пункт производства и один пункт потребления), так что $n+m-1$ – й шаг состоит просто в приписывании клетке (n,m) соответствующего значения, равного остатку неперевезенного продукта.

В заключение вернемся к ситуации, когда $p_1 = q_1$. Пусть, для определенности, мы вычеркнули первую строку. Тогда $q_1' = q_1 - p_1 = 0$ и $x_{21} = \min\{\, p_2, q_1'\} = 0$. Это означает, что постоенный методом северо–западного угла опорный план будет вырожденным. Отсюда, одновременно, становится ясно, что если бы в данном случае были вычеркнуты одновременно и строка и столбец, то в построенном опорном плане оказались бы незанятыми клетки, соответствующие нулевым базисным компонентам.

Строго говоря, мы несколько опередили события, называя план, построенный методом северо–западного угла, опорным. Доказательство этого содержится в следующей лемме.

Л е м м а 1.2. План $X = [\,x_{ij}\,]_{i,j=1}^{n,m}$, построенный методом северо–западного угла, является опорным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда, в силу леммы 1.2, среди столбцов матрицы A, соответствующих занятым клеткам, найдется цикл

$$\{a^{i_1j_1}, a^{i_1j_2}, \dots, a^{i_kj_k}, a^{i_kj_1}\}\ .$$

Можно считать, что индекс $j_1 < j_r$ для всех $r = 2, \dots, k$. В противном случае мы бы рассмотрели цикл

$$\{a^{i_2j_2}, a^{i_2j_3}, \dots, a^{i_kj_k}, a^{i_kj_1}, a^{i_1j_1}, a^{i_1j_2}\}$$

и т.д. Пусть, для определенности, $i_1 < i_k$. Тогда наличие одновременно трех занятых клеток $(i_1, j_1), (i_1, j_2)$ и (i_k, j_1) невозможно, так как после определения $x_{i_1j_1}$ была бы вычеркнута либо строка i_1, либо столбец j_1.

Аналогично, если $i_k < i_1$, то было бы невозможно наличие одновременно трех занятых клеток $(i_k, j_1), (i_k, j_k), (i_1, j_1)$. ■

1.8. Пример

Рассмотрим транспортную задачу, заданную таблицей 1.4.

2	1	3	1	10
1	4	3	5	5
7	6	1	2	15
5	10	8	7	

Табл. 1.4

Строки таблицы соответствуют пунктам производства, столбцы – пунктам потребления. Центральная часть таблицы это – стоимость перевозки единицы продукта из пунктов производства в пункты потребления. Правый столбец – запасы продукта в пунктах производства, нижняя строка – потребности пунктов потребления. Начальный опорный план, построенный методом северо–западного угла, представлен в табл. 1.5.

$\boxed{2}$ 5	$\boxed{1}$ 5	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	10
$\boxed{1}$	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$	5
$\boxed{7}$	$\boxed{6}$	$\boxed{1}$ 8	$\boxed{2}$ 7	15
5	10	8	7	

Табл. 1.5

Заметим, что опорный план в таблице 1.5 является вырожденным. Ему соответствует множество базисных индексов

$$I_\sigma = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4)\}. \tag{1.41}$$

Нетрудно видеть, что если бы на шаге 3 метода северо–западного угла вместо второго столбца была бы вычеркнута вторая строка, то в множестве базисных индексов вместо пары (2,3) появилась бы пара (3,2).

Для полученного опорного плана проверим выполнение критерия оптимальности. Система (1.22) для рассматриваемого случая имеет вид (см. множество базисных индексов (1.41)):

$$\begin{aligned} v_1 - u_1 &= 2\ , \\ v_2 - u_1 &= 1\ , \\ v_2 - u_2 &= 4\ , \\ v_3 - u_2 &= 3\ , \\ v_3 - u_3 &= 1\ , \\ v_4 - u_3 &= 2\ . \end{aligned}$$

Полагая здесь $u_1 = 0$, последовательно находим $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $u_2 = -3$, $v_3 = 0$, $u_3 = -1$, $v_4 = 1$. Проверяем условия (1.23) (здесь их удобнее записывать в виде $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} \le 0$):

$$\begin{aligned} \Delta_{13} &= v_3 - u_1 - c_{13} = -3\ , \\ \Delta_{14} &= v_4 - u_1 - c_{14} = 0\ , \\ \Delta_{21} &= v_1 - u_2 - c_{21} = 4\ , \\ \Delta_{24} &= v_4 - u_2 - c_{24} = -1\ , \\ \Delta_{31} &= v_1 - u_3 - c_{31} = -4\ , \\ \Delta_{32} &= v_2 - u_3 - c_{32} = -4\ . \end{aligned}$$

Поскольку оценка $\Delta_{21} = 4 > 0$, то опорный план, содержащийся в табл. 1.5, не является оптимальным.

Вообще говоря, уравнения (1.22) настолько просты, что их не обязательно выписывать в явном виде. Потенциалы u_i и v_j можно определять непосредственно из транспортной таблицы, записывая u_i слева от таблицы, а v_j – над таблицей. Еще лучше вычислять не u_i, а $(-u_i)$. Величины

$(-u_i)$ будем также называть потенциалами. Тогда для вычисления потенциалов можно использовать простое правило: неизвестный потенциал (строки или столбца) равен разности соответствующего коэффициента c_{ij} и известного потенциала. Небазисные оценки вычисляются по правилу: из суммы потенциалов $(-u_i)$ и v_j вычитается коэффициент c_{ij}. Полученное число можно занести в соответствующую свободную клетку таблицы.

В рассматриваемом нами примере таблица 1.5 после вычисления потенциалов и небазисных оценок будет иметь вид, представленный таблицей 1.6.

	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 1$
$-u_1 = 0$	$\boxed{2}$ $-$ 5	$\boxed{1}$ $+$ 5	$\boxed{3}$ -3	$\boxed{1}$ 0
$-u_2 = 3$	$\boxed{1}$ $+$ 4	$\boxed{4}$ $-$ 5	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ -1
$-u_3 = 1$	$\boxed{7}$ -4	$\boxed{6}$ -4	$\boxed{1}$ 8	$\boxed{2}$ 7

$(i_*, j_*) = (2, 2)$

$\theta = 5$

$f(x) = 57$

Табл. 1.6

В таблице 1.6 базисные компоненты x_{ij} выделены кружками, небазисные оценки записаны в левых нижних углах клеток. Кроме того, в таблице построен цикл с началом в клетке $(i_0, j_0) = (2, 1)$, соответствующей положительной оценке $\Delta_{21} = 4$. После пересчета табл. 1.6 получим табл. 1.7. Следующая за ней итерация метода потенциалов – в табл. 1.8. В табл. 1.8 все небазисные оценки неположительны. Следовательно, содержащийся в ней опорный план – оптимальный. Таким образом, оптимальными перевозками являются:

$$P_1 \to Q_2 \ : \ 10$$

$$P_2 \to Q_1 \ : \ 5$$

$$P_3 \to Q_3 \ : \ 8$$

$$P_3 \to Q_4 \ : \ 7$$

Минимальная стоимость перевозок $f_* = 37$.

	2	1	4	5
0	2; − (0)	1; (10)	3; 1	1; + 4
−1	1; + (5)	4; −4	3; − (0)	5; −1
−3	7; −8	6; −8	1; + (8)	2; − (7)

$(i_0, j_0) = (1, 4)$

$(i_*, j_*) = (1, 1)$

$\theta = 0$

$f(x) = 37$

Табл. 1.7

	−2	1	0	1
0	2; −4	1; (10)	3; −3	1; (0)
3	1; (5)	4; 0	3; (0)	5; −1
1	7; −8	6; −4	1; (8)	2; (7)

Табл. 1.8

1.9. Открытая транспортная задача

Задача (1.1) – (1.4), для которой выполняется *условие баланса* (1.5), называется *закрытой транспортной задачей* (*задачей закрытого типа*). При решении практических задач это условие, однако, чаще всего не выполняется. Транспортные задачи, для которых нарушено условие баланса, называются *открытыми транспортными задачами.* Эти задачи легко сводятся к задачам закрытого типа введением дополнительных, фиктивных, пункта производства или пункта потребления.

Пусть, например, производство превышает потребление:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i > \sum_{j=1}^{m} q_j \quad .$$

В этом случае, очевидно, при любом плане перевозок часть продукта останется невывезенной из пунктов производства. Поэтому вместо ограничений (1.2) в задачу должны быть введены ограничения

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le p_i \;\; , \;\; i = 1, \ldots, n \; . \tag{1.42}$$

Ограничения (1.42) приводятся к ограничениям типа равенств введением дополнительных неотрицательных переменных $x_{i,m+1}$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} + x_{i,m+1} = p_i \; , \; i = 1, \ldots, n.$$

Переменные $x_{i,m+1}$ естественно интерпретировать как перевозки в некоторый дополнительный, фиктивный, пункт потребления Q_{m+1}. Стоимость перевозок в этот пункт, $c_{i,m+1}$, естественно, равна нулю. Потребности пункта Q_{m+1} положим равными избытку перевозимого продукта:

$$q_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} q_j \quad .$$

Таким образом, в рассматриваемом случае транспортная задача принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m+1} c_{ij} x_{ij} \to \min \; ; \\
&\sum_{j=1}^{m+1} x_{ij} = p_i \; , \; i = 1, \ldots, n \; , \\
&\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = q_j \; , \; j = 1, \ldots, m+1 \; , \\
&x_{ij} \ge 0 \; , \; i = 1, \ldots, n \; , \; j = 1, \ldots, m+1 \; .
\end{aligned}$$

Это – закрытая транспортная задача:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m+1} q_j \quad .$$

Если

$$\sum_{i=1}^{n} p_i < \sum_{j=1}^{m} q_j \quad ,$$

то есть, потребление превышает производство, то, естественно, потребности не всех пунктов потребления могут быть удовлетворены полностью и ограничения (1.3) должны быть заменены на ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le q_j \quad , \quad j = 1, \ldots, m \ .$$

В этом случае задача сводится к задаче закрытого типа введением фиктивного пункта производства P_{n+1} с производительностью

$$p_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} q_j - \sum_{i=1}^{n} p_i$$

и ценами перевозок $c_{n+1,j} = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Полученная задача имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min \ ; \tag{1.43}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = p_i \ , \ i = 1, \ldots, n+1 \ , \tag{1.44}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij} = q_j \ , \ j = 1, \ldots, m \ , \tag{1.45}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ , \ i = 1, \ldots, n+1 \ , \ j = 1, \ldots, m \ . \tag{1.46}$$

Нетрудно видеть, что если x_{ij}^* , $i = 1, \ldots, n+1$, $j = 1, \ldots, m$, – решение задачи (1.43) – (1.46), то x_{ij}^* , $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, – решение исходной открытой задачи. При этом перевозки $x_{n+1,j}^*$ представляют собой фактическую недопоставку продукта в соответствующий пункт потребления.

Иная интерпретация и, вообще говоря, другое решение задачи открытого типа могут быть получены, если цены за фиктивные перевозки назначать отличными от нуля. В этом случае цены $c_{i,m+1} > 0$ (в случае превышения производства над потреблением) можно интерпретировать как затраты на хранение невывезенного продукта, а цены $c_{n+1,j} > 0$ (в случае превышения потребления над производством) – как штрафы за соответствующие недопоставки.

Упражнения

1.1. Рассмотрим следующую задачу, которую назовем *производственно–транспортной задачей*.

Пусть задано n пунктов производства и m пунктов потребления некоторого однородного продукта. Известны стоимость d_i производства единицы данного продукта в i – том пункте производства, потребности q_j (ед.) в продукте в j – том пункте потребления и транспортные расходы c_{ij} по перевозке единицы продукта из i – того пункта производства в j – тый пункт потребления. Требуется найти такие мощности производства p_i , $i = 1, \ldots, n$, и такой план перевозок $X = [\, x_{ij} \,]_{i,j=1}^{n,m}$, при которых $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = \sum\limits_{j=1}^{m} q_j$ и суммарные затраты на производство и перевозку продукта минимальны.

Рассмотрим два варианта задачи:

i. мощности пунктов производства ограничены сверху:

$$p_i \le r_i < \sum_{j=1}^{m} q_j \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \ge \sum_{j=1}^{m} q_j \ ;$$

ii. мощности пунктов производства не ограничены сверху.

Во втором случае решение задачи может быть получено в явном виде. Найти это решение.

1.2. Решить следующие транспортные задачи:

i.

46	36	40	24	26
20	22	20	16	14
14	40	36	12	30
16	28	6	20	

ii.

34	35	31	18	61
54	59	35	29	19
43	26	41	24	15
16	35	26	18	

iii.

56	32	22	42	24
26	20	26	44	36
50	30	24	34	18
16	52	6	4	

iv.

16	7	6	24	21
20	11	6	25	3
13	16	6	23	2
6	4	4	12	

v.

5	4	3	4	160
3	2	5	5	140
1	6	3	2	60
80	80	60	80	

vi.

4	2	3	1	80
6	3	5	6	140
3	2	6	3	70
80	50	50	70	

vii.

9	7	5	3	175
1	2	4	6	125
8	10	12	1	140
180	110	60	40	

viii.

2	3	4	3	180
5	3	1	2	60
2	1	4	2	80
120	40	60	80	

ix.

17	20	29	26	25	15
3	4	5	15	24	15
19	2	22	4	13	15
20	27	1	17	19	15
11	11	11	11	16	

x.

15	1	22	19	1	20
21	18	11	4	3	20
26	29	23	26	24	20
21	10	3	19	27	20
19	19	19	19	4	

§2. Целочисленные задачи ЛП. Метод ветвей и границ

2.1. Во многих практических задачах содержательный смысл имеют лишь те решения, компоненты которых являются целыми числами. Такие задачи называются *целочисленными*. Приведем несколько примеров целочисленных задач ЛП.

Задача о рюкзаке. Пусть имеется n предметов, a_i – вес, c_i – ценность i – того предмета, $a_i > 0, c_i > 0$. Требуется загрузить рюкзак, выдерживающий вес b, набором предметов, суммарная ценность которых максимальна.

Введем переменные x_i, которые могут принимать лишь два значе– ния – 0 и 1 (такие переменные называются *булевыми переменными*). Если x_i принимает значение 1, то i – тый предмет загружается в рюкзак, если 0 – не загружается. Тогда поставленная задача принимает вид:

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max\ ;$$

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \le b\ ,$$
$$x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, n\ .$$

Если отказаться от предположения о том, что каждый предмет имеется в наличии в единственном экземпляре, и если, кроме того, имеются другие ограничения, например, на объем рюкзака, то мы приходим к *обобщенной задаче о рюкзаке*:

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max\ ;$$

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \le b_j,\ j = 1, \ldots, m\ ,$$
$$x_i \in \{0, 1, 2, \ldots\},\ \ i = 1, \ldots, n\ .$$

Заметим, что слово „рюкзак“ в постановке задачи можно заменить на „самолет“, „корабль“ и т.п. и мы получим задачу о загрузке транспортного средства.

Задача планирования инвестиций. Пусть некоторая фирма располагает свободным капиталом в размере D рублей. Имеется n различных инвестиционных проектов, претендующих на эти фонды. Капиталовложения, необходимые для проекта i, составляют d_i рублей. Каждый проект может либо выбираться как объект для инвестиций, либо отвергаться; если проект i выбран, то капиталовложения в него не могут быть меньше d_i (т.е. частичное финансирование недопустимо). Пусть p_i – приведенная к настоящему моменту времени оценка всего будущего дохода от реализации i – того проекта. Необходимо определить, в какие проекты нужно вкладывать средства, чтобы максимизировать приведенный общий доход.

Математическая модель поставленной задачи имеет следующий вид:

$$p_1x_1 + \ldots + p_nx_n \to \max\ ; \tag{2.1}$$

$$d_1x_1 + \ldots + d_nx_n \le D\ , \tag{2.2}$$

$$x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, n\ . \tag{2.3}$$

Здесь $x_i = 1$ означает, что i – тый проект выбирается, $x_i = 0$ – что отвергается.

Рассмотрим некоторые обобщения задачи (2.1)–(2.3). Пусть из некоторой группы проектов, например, для $i \in I$, можно выбирать лишь один проект. Чтобы учесть это условие, необходимо добавить лишь одно ограничение

$$\sum_{i \in I} x_i \leq 1.$$

В качестве другой возможности предположим, что если выбран проект i, то должен быть выбран и проект j; однако выбор проекта j может быть осуществлен и без выбора проекта i. Для описания такой ситуации достаточно ввести ограничение

$$x_j - x_i \geq 0 \ .$$

Наконец, заметим, что модель (2.1)–(2.3) совершенно не учитывает динамики фондов при реализации имеющихся проектов. Вполне возможно, что при реализации проектов помимо начальных инвестиций позднее могут потребоваться дополнительные средства. Предположим, что имеются ограничения D_j на капиталовложения в каждом из m периодов $(j = 1, \ldots, m)$ и пусть d_{ji} – капитал, необходимый для проекта i в периоде j. Тогда задача выбора проектов, максимизирующих приведенную оценку будущего дохода, и не нарушающих ограничений на капиталовложения для каждого периода, принимает вид:

$$p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \to \max \ ;$$

$$d_{j1} x_1 + \ldots + d_{jn} x_n \leq D_j, \ j = 1, \ldots, m \ ,$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \ \ i = 1, \ldots, n \ .$$

2.2. Рассмотрим целочисленную задачу ЛП

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max \ ; \ x \in X \ , \tag{2.4}$$

$$X = \{x \in R^n : \ Ax \leq b, \ x_i \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \ i = 1, \ldots, n\}. \tag{2.5}$$

Естественно попытаться решить задачу (2.4), (2.5), не обращая внимания на условия целочисленности переменных, т.е. заменив эти условия просто на условия неотрицательности. Такая задача называется *непрерывной задачей* (в отличие от *дискретной задачи* (2.4), (2.5)). Если решение непрерывной задачи – целочисленное, то оно, очевидно, является решением и исходной дискретной задачи. В противном случае нецелочисленные компоненты решения можно округлить до ближайших целых чисел, удовлетворяющих ограничениям задачи. На практике часто именно так и поступают и такой подход является оправданным, когда значения переменных достаточно велики, так что влиянием округления можно пренебречь. Однако, нередко встречаются задачи, в которых этот способ приближенного решения приводит к результатам, значительно отличающимся от оптимального целочисленного решения. Рассмотрим несколько примеров.

П р и м е р 2.1

$$f(x) = 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max\ ; \tag{2.6}$$

$$8x_1 + 8x_2 + 9x_3 \leq 16\ , \tag{2.7}$$

$$x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, 3\ . \tag{2.8}$$

Непрерывная задача получается из задачи (2.6)–(2.8) заменой ограничений (2.8) на ограничения $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$. Решение непрерывной задачи $\overline{x} = (0, 7/8, 1)$, $f(\overline{x}) = 17$. Округление $\overline{x}_2$ до 1 невозможно, так как при этом будет нарушено условие (2.7). Округляя $\overline{x}_2$ до 0, получим точку $\overline{\overline{x}} = (0, 0, 1)$, $f(\overline{\overline{x}}) = 10$. В то же время, простым перебором нетрудно установить, что решение задачи (2.6)–(2.8) точка $x^* = (1, 1, 0)$, $f(x^*) = 15$. ■

П р и м е р 2.2

$$f(x) = 21x_1 + 11x_2 \to \max\ ;$$

$$7x_1 + 4x_2 \leq 13\ ,$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, \ldots\}\ .$$

Графическое решение соответствующей непрерывной задачи приведено на рис. 2.1. Здесь же кружками обозначены допустимые целочисленные точки.

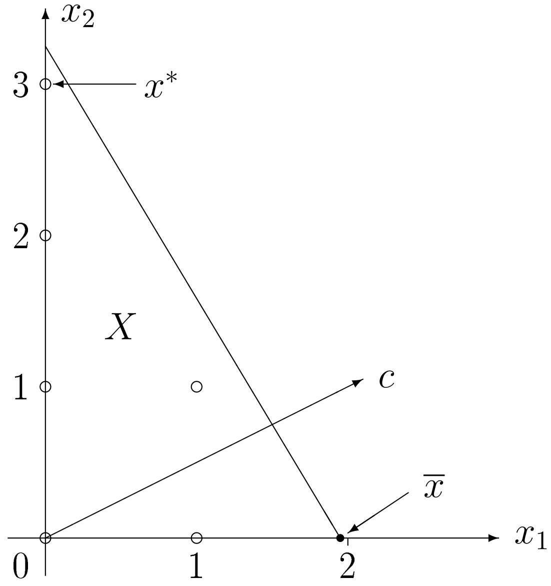

Рис. 2.1

Округление непрерывного решения $\overline{x} = (13/7, 0)$ до ближайшей целочисленной допустимой точки дает решение $\overline{\overline{x}} = (1, 0)$, $f(\overline{\overline{x}}) = 21$. Точное решение исходной задачи $x^* = (0, 3)$, $f(x^*) = 33$. ■

П р и м е р 2.3

$$f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max\ ;$$
$$7x_1 - 3x_2 \geq 7\ ,$$
$$14x_1 + 4x_2 \leq 49\ ,$$
$$x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, \ldots\}\ .$$

Графическое решение соответствующей непрерывной задачи представлено на рис. 2.2.

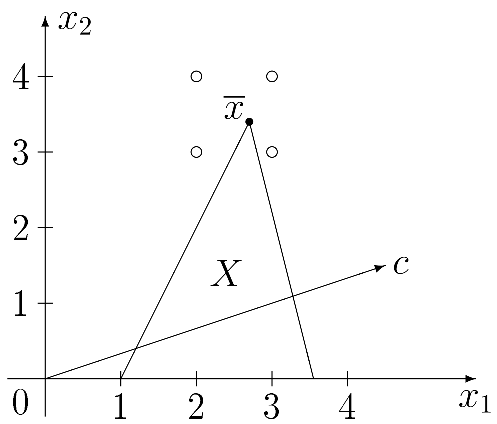

Рис. 2.2

В этой задаче вообще не понятно, что делать с непрерывным решением $\overline{x} = (5/2, 7/2)$: ни один из четырех возможных вариантов округления его компонент не является допустимым – точки (2,3), (2,4), (3,3), (3,4) не принадлежат множеству X (эти точки на рис. 2.2 отмечены кружками). Решение исходной целочисленной задачи – точка $x^* = (3, 1)$. ■

2.3. Простейший способ решения целочисленных задач – это перебор всех допустимых целочисленных точек. Такой подход вполне оправдан в тех случаях, когда число перебираемых вариантов относительно невелико. Например, если в задаче планирования инвестиций имеется, скажем, 10 инвестиционных проектов, то число переборов равно $2^{10} = 1024$ – тривиальная задача при использовании компьютера. Однако, если в аналогичной задаче с булевыми переменными число переменных равно, например, 64, то число переборов становится астрономическим: $2^{64} \simeq 1.8 \cdot 10^{19}$. С задачей перебора такого количества вариантов уже не справится ни один компьютер.

2.4. Наиболее широкое распространение в практике решения целочисленных задач ЛП получил метод, называемый *методом ветвей и границ*. Этот метод основан на последовательном разбиении множества допустимых целочисленных точек на более узкие подмножества и отбрасывании тех подмножеств, которые содержат заведомо неоптимальные точки. Опишем его применительно к следующей целочисленной задаче ЛП:

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max \; ; \; x \in X \; , \tag{2.9}$$

$$X = \{x \in R^n \; : Ax \le b, \; \alpha \le x \le \beta, \; x_i - \text{целые}, \; i = 1, \ldots, n\}. \tag{2.10}$$

Введение двусторонних ограничений на переменные здесь обьясняется тем, что в целочисленных задачах желательно иметь возможно более жесткие ограничения на переменные, так как это уменьшает размеры множества, подлежащего исследованию. В практических задачах задание таких границ для переменных, как правило, не представляет затруднений.

Положим

$$D = \{x \in R^n : \; Ax \le b, \; \alpha \le x \le \beta\}$$

(т.е. откажемся от условий целочисленности переменных) и решим непрерывную задачу

$$f(x) \to \max; \; x \in D. \tag{2.11}$$

Пусть $\overline{x}$ – решение задачи (2.11). Если вектор $\overline{x}$ – целочисленный, то он является и решением задачи (2.9), (2.10). В противном случае выберем произвольную нецелочисленную компоненту $\overline{x}_k$ вектора $\overline{x}$ и сформируем два новых множества:

$$X_1 = \{x \in X : \ x_k \leq [\overline{x}_k]\},$$

$$X_2 = \{x \in X : \ x_k \geq [\overline{x}_k] + 1\},$$

где $[\overline{x}_k]$ – целая часть числа $\overline{x}_k$. Очевидно, что $X_1 \bigcap X_2 = \emptyset$ и $X = X_1 \bigcup X_2$. Предположим, что множества X_1 и X_2 не пусты. Тогда

$$\max_X f(x) = \max\{\max_{X_1} f(x), \ \max_{X_2} f(x)\}.$$

Таким образом, задача (2.9), (2.10) распадается на две подзадачи:

$$f(x) \to \max; \ x \in X_1 \ ,$$

$$f(x) \to \max; \ x \in X_2 \ .$$

К каждой из этих подзадач применим тот же подход, что и к исходной задаче (2.9), (2.10), т.е. решим ее как непрерывную задачу. Если полученное решение – целочисленное, то оно является решением соответствующей дискретной задачи. В противном случае рассматриваемую дискретную задачу можно разбить на две новые подзадачи также, как это было сделано для задачи (2.9), (2.10). Каждую из новых подзадач решим как непрерывную задачу и, в случае необходимости, разобьем на две очередные подзадачи, и т. д. Описанную процедуру дробления множества X схематически можно изобразить с помощью дерева вариантов, представленного на рис. 2.3.

Нетрудно видеть, что ветвление каждой родительской задачи заканчивается, если имеет место один из трех случаев:

i. Задача не имеет решения (множество планов пусто);

ii. Решение задачи – целочисленное. Так как в каждой новой задаче добавляется все больше и больше верхних и нижних целочисленных ограничений на переменные, то непрерывные переменные в конце концов примут целочисленные значения (если только вообще существует целочисленное решение задачи). В крайнем случае это произойдет тогда, когда соответствующее подмножество будет состоять из одной точки.

iii. Решение задачи – нецелочисленное, но значение целевой функции на этом решении меньше, чем ее значение на наилучшем из предыдущих целочисленных решений (это последнее называется *рекордом*): очевидно, что дальнейшее дробление множества планов (т.е. добавление новых ограничений) может привести лишь к уменьшению значения целевой функции.

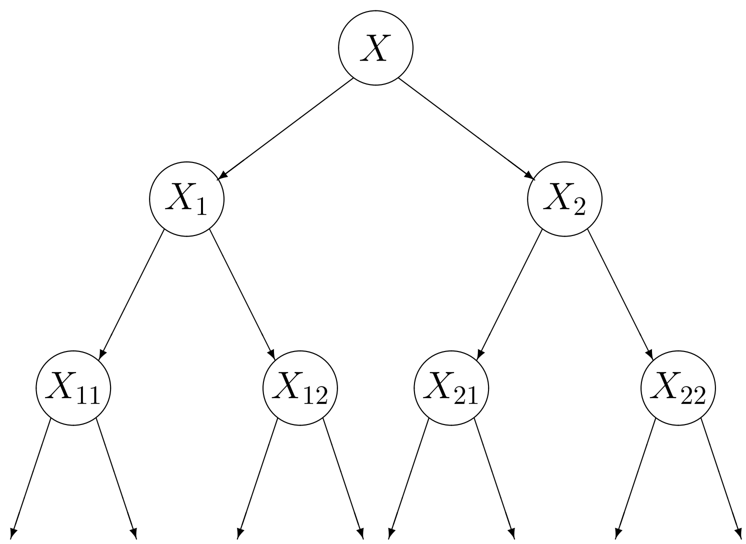

Рис. 2.3

Алгоритм метода ветвей и границ может быть представлен следующим образом.

А л г о р и т м 2.1 [17, стр.124]

Пусть на итерации t имеется следующая информация:

(а) рекорд r;

(б) главный список задач, подлежащих решению;

(в) текущая задача, отобранная для решения и не входящая в главный список.

Шаг 1. Решить текущую задачу как непрерывную задачу. Если эта задача не имеет решения, или значение целевой функции, отвечающее ее оптимальному решению, меньше r, то перейти на шаг 4.

Шаг 2. Если решение текущей задачи целочисленно–допустимое, то положить r равным значению целевой функции текущей задачи и перейти на шаг 4.

Шаг 3. Выбрать одну переменную x_k, значение которой $\overline{x}_k$ нецелочисленное, и сформировать две новые задачи:

(i) одну, с дополнительным ограничением $x_k \leq [\overline{x}_k]$;

(ii) другую, с дополнительным ограничением $x_k \geq [\overline{x}_k] + 1$.

Отобрать одну из задач в качестве текущей, а вторую добавить к главному списку. Положить $t = t + 1$ и перейти на шаг 1.

Шаг 4. Выбрать задачу из главного списка. Положить $t = t + 1$ и перейти на шаг 1.

З а м е ч а н и я

1. Решение задачи будет получено тогда, когда будет исчерпан главный список задач.

2. Конечность алгоритма следует из конечности множества X.

3. Очевидно, что алгоритм несколько изменился бы, если бы на шаге 3 обе задачи были добавлены к главному списку с последующим переходом на шаг 4.

4. Эффективность алгоритма существенно зависит как от способа выбора переменной x_k при каждом ветвлении, так и от метода отбора задачи для включения ее в главный список. Подробно эти вопросы рассмотрены в книге [17].

5. Если каким–либо образом можно получить приближенное целочисленное решение задачи (2.9), (2.10), то в качестве рекорда на первой итерации можно взять значение целевой функции на этом приближенном решении. В общем же случае на первой итерации значение рекорда r равно, очевидно, $-\infty$.

6. Алгоритм 2.1 с очевидными модификациями может применяться и для решения *частично–целочисленных задач*, т. е. таких задач, в которых условия целочисленности наложены лишь на часть переменных.

§3. Задача линейного ассортиментного раскроя: алгоритм порождения столбцов

Напомним постановку задачи (см. стр.20).

На заготовительный участок поступает некоторый материал в виде полос постоянной длины L. Из этих полос нужно отрезать m видов заготовок. Заготовки j – того вида имеют длину l_j и их требуется b_j штук $(j = 1, \ldots, m)$. Необходимо составить такой план раскроя полос на заготовки, при котором был бы получен требуемый ассортимент заготовок $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и при этом расход поступающего материала был бы минимальным.

Пусть число всевозможных способов раскроя одной полосы материала равно n и при i – том способе раскроя $(i = 1, \ldots, n)$ из каждой полосы получается a_{ji} заготовок j – того вида. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} l_j \leq L,\ i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Обозначая через x_i количество полос, планируемых к раскрою i – тым способом, приходим к следующей задаче ЛП:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min\,;\ Ax = b,\ x \geq 0. \tag{3.2}$$

Здесь $A = [a^1\ a^2\ \ldots\ a^n],\ a^i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi}), b = (b_1, \ldots, b_m)$, все векторы a^i и b – целочисленные, $a_{ji} \geq 0$ для всех $j = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n,\ b_j > 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Так как каждый столбец матрицы A характеризует свой способ раскроя, то эти столбцы мы будем называть просто *раскроями*.

Вообще говоря, решение любой раскройной задачи, в том числе и задачи, рассматриваемой в этом параграфе, должно начинаться с составления всевозможных способов раскроя исходного материала на заготовки. Автоматическое (без участия человека) генерирование раскроев является исключительно сложной задачей. Существуют эвристические алгоритмы генерирования раскроев для сравнительно простых, например, прямоугольных, видов заготовок, в общем же случае составление раскроев остается за человеком и существенно зависит от его опыта и интуиции. Обычно все теоретически возможные способы раскроя перечислить практически невозможно – их число может измеряться многими сотнями и тысячами. Поэтому соответствующую задачу решают, исходя из некоторого (неполного) набора допустимых раскроев. Полученное таким образом решение будет, естественно, оптимальным только на рассматриваемом наборе.

Задача линейного ассортиментного раскроя замечательна тем, что с помощью симплекс–метода она может быть решена до конца без какого–либо предварительного составления множества раскроев – все необходимые симплекс–методу раскрои (столбцы матрицы A) находятся по мере надобности из решения специальной вспомогательной задачи целочисленного линейного программирования. Более точно, на каждой итерации симплекс–метода вычисляется ровно один раскрой – тот, который на данной итерации будет введен в базис. Таким образом, сама матрица A присутствует в задаче как бы неявно – ее задание для решения задачи не является обязательным.

Перейдем к описанию симплекс–метода для решения задачи (3.2).

Прежде всего заметим, что при выполнении естественного условия

$$l_j \leq L,\ j = 1, \ldots, m,$$

очевидными являются следующие m способов раскроя:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix},$$

где $a_{jj} = [L/l_j]$. Эти *элементарные раскрои* очевидным образом задают базис угловой точки $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, 0, \ldots, 0)$, где $\overline{x}_j = b_j/a_{jj},\ j = 1, \ldots, m$. Заметим также, что поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geq 0$, то целевая функция в задаче (3.2) ограничена снизу и, следовательно, задача имеет решение. Поскольку среди решений задачи имеется хотя бы одна угловая точка, то существует оптимальный план, включающий в себя не более m способов раскроя – именно такой план и будет найден симплекс–методом.

Итак, начальная угловая точка $\overline{x}$ и ее базис известны. Рассмотрим t – тую итерацию симплекс–метода, $t \geq 1$.

Пусть σ – базис угловой точки x^t. Не умаляя общности, можно считать, что $I_\sigma = \{1, 2, \ldots, m\}$. Так как целевой вектор задачи (3.2), $c = (1, \ldots, 1)$, то $c^\sigma = (1, \ldots, 1)$. Отсюда следует, что оценки

$$\Delta_i = \langle y, a^i \rangle - c_i = \langle y, a^i \rangle - 1,\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

где компоненты вектора y,

$$y_j = [B_\sigma^{-T} c^\sigma]_j = \sum_{k=1}^{m} [B_\sigma^{-T}]_{jk} = \sum_{k=1}^{m} [B_\sigma^{-1}]_{kj},\ j = 1, \ldots, m.$$

Так как задача (3.2) – задача на минимум, то условие оптимальности в ней имеет вид: $\Delta_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$, или, поскольку $\Delta_i = 0$ для всех $i \in I_\sigma$, $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta_i = 0$. С учетом (3.3) это условие можно переписать следующим образом:

$$\max_{i=\overline{1,n}} \langle y, a^i \rangle = 1. \tag{3.4}$$

Так как максимум в (3.4) берется по всем допустимым раскроям, а условие допустимости раскроя имеет вид (3.1), то проверка условия (3.4) сводится к решению задачи

$$\langle y, z \rangle \to \max\ ; \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{m} l_j z_j \leq L,\ z_j \in \{0, 1, 2, \ldots\}, j = 1, \ldots, m. \tag{3.6}$$

Здесь возможны два случая:

Случай 1: $y \geq 0$.

В этом случае задача (3.5), (3.6) – это рассмотренная в §2 задача о рюкзаке (здесь мы можем интерпретировать ее как задачу генерирования раскроя, обладающего максимальной условной стоимостью). Пусть z^* – решение задачи (3.5), (3.6). Так как $z^i = a^i$, $i \in I_\sigma$, – допустимые раскрои и $\langle y, a^i \rangle = 1 \ \ \forall i \in I_\sigma$, то $\langle y, z^* \rangle \geq 1$. Если $\langle y, z^* \rangle = 1$, то x^t – оптимальный план, а σ – множество оптимальных раскроев. Если $\langle y, z^* \rangle > 1$, то соответствующая раскрою $a^k = z^*$ оценка $\Delta_k > 0$. Следовательно, раскрой a^k может быть введен в базис.

Случай 2: существует индекс $r : \ y_r < 0$.

Так как матрица B_σ не может содержать нулевой стороки, то существует индекс $s \in I_\sigma$ такой, что $a_{rs} \geq 1$ (напомним, что все a_{ji} – целые). Так как $\Delta_s = 0$, то, в силу (3.3),

$$\langle y, a^s \rangle = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{m} y_j a_{js} + y_r a_{rs} = 1.$$

Отсюда

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{m} y_j a_{js} - 1 = -y_r a_{rs}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим раскрой $a^k = (a_{1s}, \ldots, a_{r-1,s}, 0, a_{r+1,s}, \ldots, a_{ms})$, полученный из раскроя a^s исключением заготовок r – того вида. Очевидно, что это – допустимый раскрой. В силу (3.7)

$$\Delta_k = \langle y, a^k \rangle - 1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{m} y_j a_{js} - 1 = -y_r a_{rs} > 0.$$

Следовательно, план x^t – не оптимальный и раскрой a^k может быть введен в базис.

З а м е ч а н и е. Как в случае 1, так и в случае 2, раскрой, выводимый из базиса, определяется с помощью стандартных правил симплекс–метода.

Ответы и решения

Глава 1

Упр. 1.2. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) = \operatorname*{argmax}_X f(x)$. Предположим, что для некоторого номера j существует $\overline{x}_j \in X_j : f_j(\overline{x}_j) > f_j(x_j^*)$. Положим $\overline{x} = (x_1^*, \ldots, \overline{x}_j, \ldots, x_n^*)$. Тогда $\overline{x} \in X$ и

$$f(\overline{x}) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} f_i(x_i^*) + f_j(\overline{x}_j) > \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*) = f(x^*).$$

Противоречие. Следовательно, $x_i^* = \operatorname*{argmax}_{X_i} f_i(x_i)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $x_i^* = \operatorname*{argmax}_{X_i} f_i(x_i),\ i = 1, \ldots, n,\ x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$. Тогда $x^* \in X$ и

$$\sup_X f(x) \geq f(x^*) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*) = \sum_{i=1}^{n} \max_{X_i} f_i(x_i). \tag{i}$$

С другой стороны, для любого $x \in X$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \max_{X_i} f_i(x_i).$$

Следовательно,

$$\sup_X f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \max_{X_i} f_i(x_i). \tag{ii}$$

Из (i) и (ii) следует, что

$$f(x^*) = \max_X f(x) = \sum_{i=1}^{n} \max_{X_i} f_i(x_i). \qquad \blacksquare$$

Упр. 1.5. Для доказательства воспользуемся основной теоремой линейной алгебры, которая часто формулируется в виде альтернативы Фредгольма: для любых матрицы $A \in M_{m,n}$ и вектора $b \in R^m$ имеет решение одна и только одна из следующих систем:

$$Ax = b$$

либо
$$A^T y = 0, \quad \langle b, y\rangle \neq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $x^* = \operatorname*{argmax}_{Ax=b} \langle c, x\rangle$. Предположим, что $c \neq A^T y$ для любого $y \in R^m$. Тогда, по альтернативе Фредгольма, существует $\overline{x}$ такой, что $A\overline{x} = 0,\ \langle c, \overline{x}\rangle > 0$. Положим $\overline{\overline{x}} = x^* + \overline{x}$. Тогда
$$A\overline{\overline{x}} = Ax^* + A\overline{x} = b,$$
$$\langle c, \overline{\overline{x}}\rangle = \langle c, x^*\rangle + \langle c, \overline{x}\rangle > \langle c, x^*\rangle.$$
Противоречие.

2. Пусть $c = A^T y$ для некоторого $y \in R^m$. Тогда для любого x, такого, что $Ax = b$ имеем
$$\langle c, x\rangle = \langle A^T y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = \langle y, b\rangle = \text{const}. \quad \blacksquare$$

Упр. 3.1. Пусть
$$X = \{x \in R^n : \ \langle a^j, x\rangle = b_j,\ j = 1, \ldots, r,$$
$$\langle a^j, x\rangle \leq b_j,\ j = r+1, \ldots, m\}.$$

1. Если $\overline{x}$ – крайняя точка множества X, то, очевидно,
$$\overline{J} = \{j : \ \langle a^j, \overline{x}\rangle = b_j\} \neq \emptyset.$$
Предположим, что число линейно независимых векторов системы $\{a^j,\ j \in \overline{J}\}$ меньше n. Тогда однородная система
$$\langle a^j, x\rangle = 0,\ j \in \overline{J}$$
имеет решение $x^0 \neq 0$. Положим
$$x^1 = \overline{x} + \varepsilon x^0, \quad x^2 = \overline{x} - \varepsilon x^0.$$
Нетрудно убедиться, что $x^1, x^2 \in X$ по крайней мере для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и, кроме того, $\overline{x} = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$. Противоречие.

2. Пусть $\overline{x}$ – угловая точка множества X. По определению, $\overline{x}$ – единственное решение некоторой системы
$$\langle a^j, x\rangle = b_j,\ j \in \overline{J}, \tag{i}$$

где $\overline{J} \subset \{1, \ldots, m\}$, $|\overline{J}| = n$. Допустим, что $\overline{x} = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$, где $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, $\lambda \in (0, 1)$. Тогда

$$b_j = \langle a^j, \overline{x} \rangle = \lambda \langle a^j, x^1 \rangle + (1 - \lambda) \langle a^j, x^2 \rangle, \; j \in \overline{J}.$$

Но это равенство может иметь место в том и только том случае, когда

$$\langle a^j, x^1 \rangle = \langle a^j, x^2 \rangle = \langle a^j, \overline{x} \rangle = b_j, \; j \in \overline{J}.$$

Последнее означает, что $\overline{x}$ – неединственное решение системы (i). Противоречие. ■

Упр. 3.2. Орты e^i, $i = 1, \ldots, n$.

Упр. 3.3. Орты e^i, $i = 1, \ldots, n$, и точка $0 \in R^n$.

Упр. 3.4.

i. $x^1 = (5, 0, 0)$, $x^2 = (0, 0, 5)$, $x^3 = (0, 5/2, 0)$.

ii. $x^1 = (0, 0, 0)$, $x^2 = (0, 3/2, 5/2)$, $x^3 = (5/2, 3/2, 0)$,

$x^4 = (0, 4, 0)$, $x^5 = (1, 0, 0)$, $x^6 = (0, 0, 1)$.

Упр. 3.5.

i. Точка минимума $x^* = (0, 0)$, максимум не существует: $\sup\limits_X f(x) = +\infty$.

ii. Точка минимума $x^* = (0, 0)$, точка максимума $x^{**} = (1, 2)$.

iii. Множество планов пусто.

iv. Точка максимума $x^{**} = (10, 1)$, минимум не существует: $\inf\limits_X f(x) = -\infty$.

Глава 2

Упр. 1.1. Предположим противное – существует точка $x \in X$, $x \neq \overline{x}$, такая, что $\langle c, x \rangle = \langle c, \overline{x} \rangle$. Тогда из формулы приращения (1.34) следует, что

$$\sum_{i \notin I_\sigma} \Delta_i x_i = 0.$$

Отсюда, в силу (1.37),

$$x_i = 0 \quad \forall i \notin I_\sigma. \tag{i}$$

Это, в свою очередь, означает, что

$$Ax = B_\sigma x^\sigma = b,$$

откуда $x^\sigma = B_\sigma^{-1} b = \overline{x}^\sigma$. Вместе с (i) это значит, что $x = \overline{x}$. Противоречие. $\blacksquare$

Упр. 1.2.

i. $x^1 = (0,1,0)$, $\{a^1, a^2\}$ и $\{a^2, a^3\}$,

$x^2 = (1/2, 0, 1/2)$, $\{a^1, a^3\}$.

ii. $x^1 = (0,2,0,0)$, $\{a^1, a^2\}$, $\{a^2, a^3\}$ и $\{a^2, a^4\}$,

$x^2 = (4/3, 0, 0, 2/3)$, $\{a^1, a^4\}$,

$x^3 = (0, 0, 4/3, 2/3)$, $\{a^3, a^4\}$.

Упр. 1.3.

i, iv – план $\overline{x}$ – оптимальный,

ii, iii – план $\overline{x}$ – не оптимальный.

Упр. 2.1. Предположим противное – существует индекс $k \notin I_\sigma$ такой, что $\Delta_k = 0$. Построим точку x по правилам (2.4), (2.5) и (2.7). Поскольку $\overline{x}^\sigma > 0$, то при достаточно малом $\theta > 0$ точка $x \geq 0$ и, следовательно, является допустимой. В силу (2.6) имеем $\langle c, x \rangle = \langle c, \overline{x} \rangle$. Так как $x \neq \overline{x}$ это противоречит единственности точки $\overline{x}$. $\blacksquare$

Упр. 2.2.

i. $\sup\limits_X f(x) = +\infty$.

ii. $x^* = (0,3,0,2,0)$.

iii. $x^* = (9/4, 3/2, 0, 1/4)$.

Упр. 2.3.

i. $x^* = (3,2,4,0,0)$.

ii. $\sup\limits_X f(x) = +\infty$.

Упр. 5.1.

i. Множество планов непусто.

ii. Множество планов пусто.

iii. Множество планов непусто, одно из условий является линейно зависимым.

Упр. 5.2.

i. $x^* = (7/3, 0, 0, 2/3)$.

ii. $x^* = (3, 0, 0, 5)$.

iii. Множество планов пусто.

iv. $x^* = (0, 9, 0, 8, 5)$.

v. $x^* = (0, 3, 8, 0, 0)$.

Глава 3

Упр. 1.1. Двойственная задача:

$$\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j \geq c_i, \quad i = 1, \ldots, s,$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j = c_i, \quad i = s+1, \ldots, n,$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Упр. 1.2.

i. $x^* = (4/5, 0, 13/5, 0), \quad y^* = (9/5, 13/5)$.

ii. $x^* = (0, 0, 11/13, 7/13, 0), \quad y^* = (6, 3)$.

iii. $\inf\limits_X \langle c, x \rangle = -\infty, \quad Y = \emptyset$.

Упр. 1.3.

i. $x^* = (2, 3/4, -9/4), \quad y^* = (2, 7/4, 0, 3/4, 0)$.

ii. $x^* = (1/5, 1, -4/5), \quad y^* = (0, 2, 3, 1, 0)$.

Упр. 3.1.

Оптимальный план – 180 буфетов типа A и 40 буфетов типа B в неделю. Буфеты типа C не производятся.

Условная стоимость ресурсов – 40 руб./чел.–ч. в сборочном цехе и 280 руб./чел.–ч. в отделочном цехе. Ресурсы рабочего времени на лесопилке не являются дефицитными.

Диапазоны устойчивости к изменениям компонент целевого вектора:

$$\begin{array}{rcccl} -40/3 & \leq & \delta_1 & \leq & 80, \\ -80 & \leq & \delta_2 & \leq & 40, \\ -\infty & < & \delta_3 & \leq & 40. \end{array}$$

Диапазоны устойчивости к изменениям компонент вектора ограничений:

$$\begin{array}{rcccl} -100 & \leq & \delta_1 & < & +\infty, \\ -80 & \leq & \delta_2 & \leq & 200, \\ -90 & \leq & \delta_3 & \leq & 40. \end{array}$$

Упр. 3.2.

Оптимальный план $x^* = (100, 0, 150, 25)$.

Теневые цены ресурсов $y^* = (45, 10, 5)$.

Диапазоны устойчивости к изменениям компонент целевого вектора:

$$\begin{array}{rcccl} -3 & \leq & \delta_1 & \leq & 5, \\ -\infty & < & \delta_2 & \leq & 15, \\ -10 & \leq & \delta_3 & \leq & 30, \\ -20 & \leq & \delta_4 & \leq & 12. \end{array}$$

Диапазоны устойчивости к изменениям компонент вектора ограничений:

$$\begin{array}{rcccl} -100 & \leq & \delta_1 & \leq & 300, \\ -100 & \leq & \delta_2 & \leq & 50, \\ -100 & \leq & \delta_3 & \leq & 100. \end{array}$$

Глава 4

Упр. 1.1.

i. Формально, математическая модель задачи имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} d_i p_i \to \min \ ; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = p_i \ , \ i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = q_j \ , \ j = 1, \dots, m, \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ , \ i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m, \tag{4}$$

$$0 \leq p_i \leq r_i \ , \ i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

(Здесь переменными являются x_{ij} и p_i). Подставляя p_i из (2) в (1) и учитывая условия (5), задачу (1) – (5) можно представить в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (c_{ij} + d_i)x_{ij} \to \min \ ; \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq r_i \ , \ i = 1, \dots, n \ , \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = q_j \ , \ j = 1, \dots, m \ , \tag{8}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ , \ i = 1, \dots, n \ , \ j = 1, \dots, m \ . \tag{9}$$

Если x^*_{ij} , $i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m,$ – решение задачи (6) – (9), то $p^*_i = \sum\limits_{j=1}^{m} x^*_{ij}$, $i = 1, \dots, n,$ – оптимальные мощности пунктов производства.

ii. Если мощности p_i не ограничены сверху, то в задаче отсутствуют ограничения (7). Обозначая $c'_{ij} = c_{ij} + d_i$, получим задачу

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c'_{ij}x_{ij} \to \min; \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = q_j \ , \ j = 1, \ldots, m, \tag{11}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, n \ , \ j = 1, \ldots, m \ . \tag{12}$$

Теперь заметим, что задача (10) – (12) – сепарабельная: каждое из ограничений (11) никак не связано с остальными ограничениями из этой группы. Следовательно, задача (10) – (12) распадается на m задач (для $j = 1, \ldots, m$)

$$\sum_{i=1}^{n} c'_{ij} x_{ij} \to \min \ ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = q_j \ , \ x_{ij} \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, n.$$

Решение каждой из этих задач очевидно:

$$x^*_{ij} = \begin{cases} q_j & , \ i = i_*(j) \\ 0 & , \ i = 1, \ldots, n, \ i \neq i_*(j) \ , \end{cases}$$

где

$$i_*(j) = \arg\min_{i=\overline{1,n}} c'_{ij} \ .$$

Упр. 1.2. Всюду ниже X_* – оптимальный план, f_* – минимальные транспортные издержки.

i. $$X_* = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 6 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \ , \ f_* = 1552 \ ;$$

ii. $$X_* = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ f_* = 2840 \ ;$$

iii. $$X_* = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 6 & 0 \\ 16 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 4 \end{bmatrix} \ , \ f_* = 2080 \ ;$$

iv. $$X_* = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ f_* = 430 \ ;$$

v. $X_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 60 & 80 \\ 20 & 80 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_* = 780$;

vi. $X_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 70 \\ 10 & 50 & 40 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_* = 720$;

vii. $X_* = \begin{bmatrix} 0 & 110 & 60 & 0 \\ 125 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$, $f_* = 1675$;

viii. $X_* = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 40 \end{bmatrix}$, $f_* = 540$;

ix. $X_* = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 8 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $f_* = 542$;

x. $X_* = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 1 \\ 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 19 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_* = 684$.

Литература

1. А б р а м о в Л. М., К а п у с т и н В. Ф. Математическое программирование.–Л.: Изд–во Ленингр. ун–та, 1981.

2. А ш м а н о в С. А. Линейное программирование.–М.: Наука, 1981.

3. А ш м а н о в С. А., Т и м о х о в А. В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях.–М.: Наука, 1991.

4. Б а з а р а М., Ш е т т и К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы.–М.: Мир, 1982.

5. Б р а в е р м а н Э. М. Математические модели планирования и управления в экономических системах.–М.: Наука, 1976.

6. В а с и л ь е в Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.– М.: Наука, 1988.

7. В а с и л ь е в Ф. П., И в а н и ц к и й А. Ю. Линейное программирование.–М.: Изд–во "Факториал 1998.

8. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М. Методы оптимизации.–Минск: Изд–во Белорусск. ун–та, 1981.

9. Г е й л Д. Теория линейных экономических моделей.–М.: Иностр. литер., 1963.

10. Д а н ц и г Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения.–М.: Прогресс, 1966.

11. З а с л а в с к и й Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию.–М.: Наука, 1969.

12. З у х о в и ц к и й С. И., А в д е е в а Л. И. Линейное и выпуклое программирование.–М.: Наука, 1967.

13. И ц к о в и ч И. А. Анализ линейных экономико–математических моделей.–Новосибирск: Наука, 1976.

14. К а л и х м а н И. Л. Сборник задач по математическому программированию.–М.: Высшая школа, 1975.

15. К а п у с т и н В. Ф. Практические занятия по курсу математического программирования.–Л.: Изд–во Ленингр. ун–та, 1976.

16. К а р м а н о в В. Г. Математическое программирование.–М.: Наука, 1986.

17. М у р т а ф Б. Современное линейное программирование.–М.: Мир, 1984.

18. М у х а ч е в а Э. А., Р у б и н ш т е й н Г. Ш. Математическое программирование.–Новосибирск: Наука, 1977.

19. Р о м а н о в с к и й И. В. Алгоритмы решения экстремальных задач. –М.: Наука, 1977.

20. С у х а р е в А. Г., Т и м о х о в А. В., Ф е д о р о в В. В. Курс методов оптимизации.–М.: Наука, 1986.

21. С х р е й в е р А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1, 2.–М.: Мир, 1991.

22. Ю д и н Д. Б., Г о л ь ш т е й н Е. Г. Задачи и методы линейного программирования.–М.: Советское радио, 1961.

23. Ю д и н Д. Б., Г о л ь ш т е й н Е. Г. Линейное программирование. Теория и конечные методы.–М.: Физматгиз, 1963.

24. Ю д и н Д. Б., Г о л ь ш т е й н Е. Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения.–М.: Наука, 1969.