институт математики экономики и информатики
ИМЭИ

ОПТИМИЗАЦИЯ, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И УПРАВЛЕНИЕ

ВЫПУСК 4

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

А. В. Аргучинцев, А. И. Беников

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»

Университетский учебник

А. В. Аргучинцев, А. И. Беников

Линейное программирование

Практикум

УДК 519.852 (076.5)
ББК 22.18я73
А79

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Дыхта;
д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Срочко

Научные редакторы серии:
д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Дыхта;
д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Срочко

Аргучинцев А.В.

А79 Линейное программирование: практикум / А.В. Аргучинцев, А.И. Беников. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2011. – Вып. 4. – 74 с. (Университетский учебник)

ISBN 978-5-9624-0536-0

Практикум содержит задачи, упражнения и контрольные задания для изучения математических моделей оптимизационных задач, сводящихся к задачам линейного программирования. Основной целью является не изучение приемов решения задач линейного программирования, а обучение навыкам составления и анализа простейших математических моделей. Практикум предназначен для студентов математических и экономических направлений и специальностей. Может быть полезным аспирантам и преподавателям вузов.

Пособие предназначено для студентов математических, экономических и технических направлений и специальностей.

Библиогр. 16 назв. Ил. 4. Табл. 39

УДК 519.852 (076.5)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-9624-0536-0

Оглавление

Предисловие

Линейное программирование – один из основных разделов современной теории оптимизации. В обязательном порядке этот раздел входит в курсы «Методы оптимизации», «Исследование операций», «Теория игр и исследование операций» математических и математико-экономических направлений и специальностей подготовки. Кроме того, задачи линейного программирования рассматриваются в курсах высшей математики по всем экономическим направлениям.

В настоящее время нет недостатка в учебниках и учебных пособиях по этой дисциплине. Структура их, как правило, одинаковая: приводятся модели типовых задач (производственная, транспортная, задача о диете); рассматривается графоаналитический метод решения задач в стандартной форме с двумя независимыми переменными или задач, приводимых к этой форме; изучается симплекс-метод решения задач произвольной размерности; даются основы теории двойственности; отдельно исследуются специфичные задачи линейного программирования, в частности транспортная задача. В более «продвинутых» пособиях уделяется внимание также другим методам решения задач линейного программирования, постоптимальному анализу, связи двойственности в линейном программировании с общей теорий двойственности в задачах математического программирования, использованию распространенных пакетов прикладных программ для решения задач линейного программирования.

Предлагаемый практикум несколько нестандартен. Предполагается, что читатель уже знаком с методами решения задач линейного программирования или, по крайней мере, может решать эти задачи с помощью типовых программных средств (Microsoft Excel, MATLAB, Maple и т.п.). Основной целью пособия является не изучение приемов решения задач линейного программирования, а обучение навыкам составления простейших математических моделей. Именно линейное программирование в значительной мере подходит в качестве вводного курса для математического моделирования в силу значительной простоты (линейность, стационарность) и возможности применения стандартных методов для поиска точных оптимальных решений и последующего постоптимального анализа.

Практикум разбит на три раздела. В первой части даны подробные содержательные постановки задач, для которых соответствующие математические модели являются задачами линейного программирования. Каждая из задач сопровождается достаточно полным решением в конце книги. Под решением здесь мы понимаем собственно построение математических моделей и их анализ, а не применение математических методов к уже формализованным задачам линейного программирования.

Второй раздел содержит упражнения для самостоятельного решения. К ним прилагаются только ответы.

Наконец, третий раздел состоит из контрольных заданий, которые могут быть использованы при проверке знаний студентов. Каждое задание содержит количество вариантов, достаточное для проведения контрольных или самостоятельных работ у одной группы студентов.

Авторы не претендуют на оригинальность представленных в работе задач и упражнений. Более того, попытки найти источники задач увели от современной литературы к более старым изданиям. В тексте стоят ссылки на те самые источники, в которых удалось впервые обнаружить соответствующие задачи.

1. Задачи с решениями

Задача 1 [12]. Небольшая фабрика изготавливает два вида красок: для внутренних (I) и наружных (II) работ. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 т, соответственно. На одну тонну краски I расходуется 2 т продукта A и 1 т продукта B. На одну тонну краски II расходуется 1 т продукта A и 2 т продукта B.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску II более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны краски равны: 2 тыс. долл. для краски I и 3 тыс. долл. для краски II.

Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Задача 2 [5]. Фирма, специализирующаяся на производстве замороженных пищевых полуфабрикатов, выпускает три различных продукта: I – картофельные дольки, II – картофельные кубики и III – картофельные хлопья. Фирма может закупать картофель у двух различных поставщиков A и B. При этом объемы продуктов I, II и III, которые можно получить из одной тонны картофеля поставщика A отличаются от объемов продуктов I, II и III, получаемых из того же количества картофеля поставщика B. А именно, из 1 т картофеля поставщика A можно изготовить 0,2 т продукта I, 0,2 т продукта II и 0,3 т продукта III; остальные 0,3 т составляют отходы. Из 1 т картофеля поставщика B можно изготовить 0,3 т продукта I, 0,1 т продукта II и 0,3 т продукта III.

Прибыль фирмы при покупке картофеля у поставщика А составляет 0,5 долл./кг, а при покупке картофеля у поставщика В – 0,6 долл./кг. Фирма может реализовать не более 1,8 т продукта I, 1,2 т продукта II и 2,4 т продукта III.

Составить план закупки картофеля у обоих поставщиков, при котором прибыль фирмы была бы максимальной.

Задача 3 [12]. Процесс изготовления двух видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице 1.1. Требуется найти оптимальные объемы производства изделий каждого вида.

Таблица 1.1

Изделие	Время обработки одного изделия (мин.)			Удельная прибыль
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	2 долл.
2	5	20	15	3 долл.

Задача 4 [1]. Небольшое предприятие выпускает два типа автомобильных деталей. Оно закупает литье, подвергаемое токарной обработке, сверловке и шлифовке. Данные, характеризующие производительность станочного парка предприятия, приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Станки	Деталь А (шт./ч)	Деталь В (шт./ч)
Токарные	25	40
Сверлильные	28	35
Шлифовальные	35	25

Каждая отливка, из которой изготовляют деталь А, стоит 2 долл. Стоимость отливки для детали В – 3 долл. Продажная цена деталей равна, соответственно, 5 и 6 долл. Стоимость часа станочного времени составляет по трем типам используемых станков 20, 14 и 17,5 долл.

Предполагая, что можно выпускать для продажи любую комбинацию деталей A и B, найти план выпуска продукции, максимизирующий прибыль.

Задача 5 [3]. Нефтеперерабатывающий завод производит за месяц 1 500 000 л алкилата, 1 200 000 л крекинг-бензина и 1 300 000 л изопентона. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1:1:1 и 3:1:2 получается бензин сорта A и B, соответственно. Стоимость 1000 л бензина сорта A равна 90 руб., бензина сорта B – 120 руб.

Определить месячный план производства бензина сорта A и B, максимизирующий стоимость выпущенной продукции.

Задача 6. Мебельная фирма выпускает два набора мебели – «Матильда» и «Амалия», для изготовления которых использует два вида древесины – дуб и орех, а также цветное стекло. Нормы затрат ресурсов на один набор, удельная прибыль и общее количество имеющихся ресурсов приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

Ресурсы	Затраты ресурсов		Запасы ресурсов
	«Матильда»	«Амалия»	
Дуб ($м^3$)	0,1	0,2	50
Орех ($м^3$)	0,2	0,1	60
Стекло ($м^2$)	0,9	1,2	360
Прибыль (руб.)	4000	8000	

Определить, сколько наборов каждого вида следует производить, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Оба набора пользуются одинаково устойчивым спросом и любое количество наборов может быть без труда реализовано.

Задача 7 [3]. В металлургический цех в качестве сырья поступает латунь (сплав меди с цинком) четырех типов с содержанием цинка 10, 20, 25 и 40 % по цене 10, 30, 40 и 60 коп. за 1 кг, соответственно. В каких пропорциях следует переплавлять это сырье в цехе, чтобы получить сплав (латунь), содержащий 30 % цинка и при этом самый дешевый?

Задача 8 [3]. Объединение «Комфорт» производит холодильники, газовые плиты, морозильные шкафы и электропечи по цене 200, 180, 250 и 100 руб., соответственно. Постоянным фактором, ограничивающим объемы производства, является фиксированная величина трудовых ресурсов - 12 000 чел.-час. в месяц. Выяснилось, однако, что в ближайший месяц дефицитной будет и листовая сталь для корпусов указанных изделий, поскольку поставщики смогут обеспечить лишь 7000 м^2 этого материала.

Требуется составить план производства на данный месяц с тем, чтобы максимизировать стоимость выпущенной продукции. Известно, что для изготовления холодильника требуется 2 м^2 листовой стали и 3 чел.-час. рабочего времени, для газовой плиты - соответственно, $1,5$ м^2 и 3 чел.-час., для морозильного шкафа - 3 м^2 и 4 чел.-час., для электропечи - 1 м^2 и 2 чел.-час.

Задача 9 [10]. Для производства двух продуктов A и B необходимы два химических процесса. На производство единицы продукта A требуется процесс 1 в течение 2 ч и процесс 2 в течение 4 ч. На производство единицы продукта B требуется процесс 1 в течение 4 ч и процесс 2 в течение 3 ч. Процесс 1 можно использовать в течение 16 ч в сутки, процесс 2 – круглосуточно (24 ч). При производстве продукта B в качестве побочного получается также продукт C. Некоторую часть этого побочного продукта можно продать, а остаток уничтожается. Удельная прибыль по продукту A равна 4 долл., по продукту B – 10 долл. Удельная прибыль по продукту C составляет 3 долл., а затраты на его ликвидацию – 2 долл. (на единицу продукта). По прогнозу возможность сбыта продукта C составляет 6 единиц. При выпуске единицы продукта B выход продукта C равен двум единицам.

Определите суточное производство продуктов A и B (с учетом C), обеспечивающее максимальную прибыль от их реализации.

Задача 10 [11]. В начале рабочего дня автобусного парка на линию выходит x_1 автобусов, через час к ним добавляется еще x_2 автобусов, еще через час - дополнительно x_3 машин. Каждый автобус работает на маршруте непрерывно в течение 8 ч. Минимально необходимое число машин на линии в i-ый час рабочего дня ($i = 1, \dots, 10$) равно b_i. Превышение этого числа приводит к дополнительным издержкам в течение i-го часа в размере c_i руб. на каждый дополнительный автобус. Величины c_i и b_i приведены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_i	10	20	22	23	25	22	20	15	10	5
c_i	5	5	6	6	6	8	10	15	15	20

Определить количество машин x_1, x_2, x_3, выходящих на маршрут в первые часы рабочего дня, с таким расчетом, чтобы дополнительные издержки в течение всего рабочего дня были минимальными.

Задача 11 [15]. Фирма планирует выпускать два вида продукции в течение следующего месяца. Она может оплачивать материалы и труд из двух источников – используя собственные либо заемные средства. Перед руководством фирмы стоят два вопроса:

1. Сколько следует произвести продукции каждого вида?

2. Какое количество собственных и заемных средств нужно будет использовать для обеспечения производства?

Для ответа на эти вопросы руководство фирмы решило рассмотреть задачу максимизации прибыли при следующих условиях:

1. Фирма может реализовать любое количество произведенной продукции, причем количество произведенной продукции никак не отражается на ее продажной цене. Таким образом, фирме следует производить максимальное количество продукции, допустимое ее финансовыми и производственными возможностями. Производственные мощности фирмы, цены и себестоимость продукции содержатся в таблице 1.5.

2. Собственные средства фирмы, которыми она располагает в течение месяца, равны 10 000 долл.

Таблица 1.5

Вид продукции	Продажная цена $\left(\frac{\text{долл.}}{\text{ед. прод.}}\right)$	Себестоимость продукции $\left(\frac{\text{долл.}}{\text{ед. прод.}}\right)$	Трудозатраты (час./ед. прод.)		
			Технологические операции		
			A	B	C
1	14	10	0,5	0,3	0,2
2	11	8	0,3	0,4	0,1
Ресурсы фирмы (часов в месяц)			500	400	200

3. Банк может ссудить фирме до 20 000 долл. под 2 % в месяц при условии, что коэффициент ликвидности фирмы на весь период займа должен быть не меньше 3. Простейший коэффициент ликвидности определяется как отношение

$$\frac{\text{наличные денежные средства} \ + \ \text{счета дебиторов}}{\text{счета кредиторов}} \ .$$

4. Расчеты с персоналом и оплата материалов производятся в конце месяца. Следовательно, в этот период необходимости в кредитах нет. Отправка товаров (в кредит) также производится в конце месяца. Наконец, в конце следующего месяца поступают доходы от реализации продукции и наступает срок погашения кредита (см. рис. 1.1).

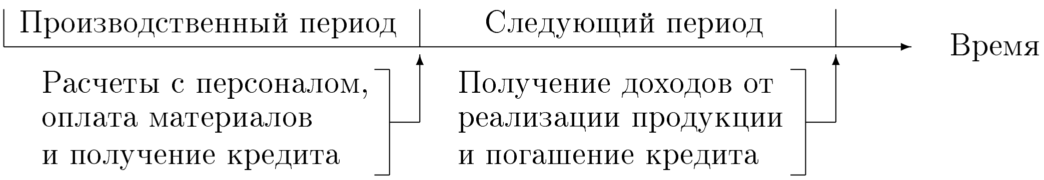

Рис. 1.1

Задача 12 [15]. В начале года фирма заключила контракт на поставку в конце второго квартала 500 единиц продукта A и 700 единиц продукта B. Оба продукта производятся из одного и того же сырья. Нормы расхода сырья и трудозатраты на единицу каждого продукта, а также ресурсы, которыми располагает фирма в каждом квартале, приведены в таблице 1.6.

Таблица 1.6

	Продукт		Объем ресурса	
	A	B	Квартал I	Квартал II
Трудозатраты (ч)	0,5	0,8	350	500
Сырье (кг)	10	7	6000	4000

Неиспользованные в первом квартале запасы сырья могут быть использованы во втором квартале. Однако хранение неиспользованного в первом квартале сырья обходится фирме в 0,01 долл. за килограмм, увеличивая, тем самым, издержки производства. Напротив, труд, неиспользованный в первом квартале, не может быть использован во втором и не влечет для фирмы дополнительных расходов (например, он может быть использован на другом производстве).

Переменные издержки фирмы состоят из затрат на заработную плату и сырье и для разных кварталов различны. На единицу продукта A в первом квартале они равны 3 долл., во втором – 4 долл. Для продукта B, соответственно, 6 долл и 5 долл.

Поскольку поставка продуктов предполагается лишь в конце второго квартала, то продукты, произведенные в первом квартале, хранятся до момента поставки, принося фирме дополнительные издержки в размере 0,1 долл. за единицу продукта A и 0,2 долл. за единицу продукта B. Продукты, произведенные во втором квартале, не требуют затрат на хранение.

Требуется составить такой план производства продуктов в каждом квартале, чтобы условия контракта были выполнены при минимальных совокупных издержках фирмы. Совокупные издержки состоят из переменных издержек, издержек хранения сырья и издержек хранения продуктов.

Задача 13 [15]. Для расширения производства компания планирует закупить дополнительное оборудование - станки трех типов: A, B и C. Станок A стоит 25 000 долл. и требует для своей эксплуатации 200 квадратных футов производственной площади. Станок B стоит 30 000 долл. и требует 250 квадратных футов производственной площади. Станок C стоит 22 000 долл. и требует 175 квадратных футов производственной площади. Объем средств, которые компания может затратить на эти цели, равен 350 000 долл. Максимальное количество свободных производственных площадей, на которых может быть размещено дополнительное оборудование, равно 4000 квадратных футов. Кроме того, компания хочет купить не менее одного станка каждого типа.

Ежедневная производительность станка A составляет 250 единиц продукции. Для станков B и C эти величины равны, соответственно, 260 и 225 единиц. Требуется определить, какое количество станков каждого типа нужно купить компании, для того чтобы максимизировать дневной выпуск продукции, вырабатываемой на новом оборудовании.

Задача 14. Для серийного производства некоторого изделия требуются комплекты заготовок профильного проката. Каждый комплект состоит из 2х заготовок длиной 200 см и трех заготовок длиной 90 см. Как следует раскроить 800 полос проката длиной 650 см, чтобы получить наибольшее количество комплектов?

Задача 15 [3]. Сельскохозяйственное предприятие может засеять свои поля пшеницей четырех сортов, урожайность которых зависит от того, будет ли лето дождливым или сухим. Соответствующие данные приведены в таблице 1.7.

Таблица 1.7

Погода	Урожайность (ц/га)			
	Сорт 1	Сорт 2	Сорт 3	Сорт 4
Дождливая	25	20	30	15
Сухая	15	20	10	40

Какие сорта пшеницы и в какой пропорции следует сеять, чтобы максимизировать гарантированный (не зависящий от погоды) урожай?

Задача 16 [15]. Фирма располагает свободным капиталом, который она хочет вложить в один или несколько инвестиционных проектов. Сообразуясь со своими финансовыми возможностями, руководство фирмы отобрало для рассмотрения пять проектов, каждый из которых требует для своей реализации определенных капиталовложений в течение от одного до четырех периодов (скажем, для определенности, месяцев). Каждый из проектов может либо выбираться как объект для инвестиций, либо отвергаться, причем, если некоторый проект выбран, то он должен быть профинансирован полностью - частичное финансирование недопустимо. Доходы от проектов начинают поступать по окончании четвертого периода. Объем капиталовложений, необходимых для реализации проектов, прогнозируемый объем свободных средств, которыми фирма будет располагать в каждом из периодов, и приведенная оценка прибыли по каждому проекту содержатся в таблице 1.8.

Таблица 1.8

Проект	Объем инвестиций за период ($100 000)				Приведенная прибыль ($100 000)
	1	2	3	4	
1	3	0	0	0	2
2	0	5	1	0	3
3	1	2	1	2	1
4	10	4	2	0	5
5	2	0	5	1	4
Свободный капитал ($100 00)	12	8	8	4	

Поскольку свободных средств фирмы не хватает для реализации сразу всех проектов, требуется отобрать из них такую допустимую группу проектов, которая сулит фирме наибольшую совокупную прибыль.

Рассмотрите также следующую ситуацию: проекты 2 и 3 не могут быть выбраны одновременно, т. е. либо оба проекта не выбираются, либо выбирается один и только один из них.

Задача 17 [9]. Предприятие по переработке руды производит два сорта очищенной продукции, которая продается предприятиям металлургической промышленности. Технология работы предприятия представлена на рис. 1.2.

Перерабатываются два вида руды: A и B. Заводу может быть поставлено до 100 тыс. т в день руды вида A по цене 3,25 долл./т и до 30 тыс. т в день руды вида B более высокого качества по цене 3,40 долл./т. Общая мощность основного процесса переработки равна 100 тыс. т руды в день при затратах на переработку

0,35 долл./т. Основной процесс переработки позволяет получить из каждой тонны руды вида А 0,15 т продукта I и 0,85 т продукта II, а из каждой тонны руды вида В – 0,25 т продукта I и 0,75 т продукта II. Продукт I более ценный и агрегат, называемый конвертором, способен из каждой тонны продукта II получить 0,5 т продукта I и 0,5 т продукта, который может быть продан как продукт II, но который нельзя повторно перерабатывать конвертором. Мощность конвертора – 50 тыс. т сырья в день при затратах на конверторную обработку 0,25 долл./т сырья. Затраты на очистку продукта I, производимую после основного процесса переработки, равны 0,10 долл./т сырья.

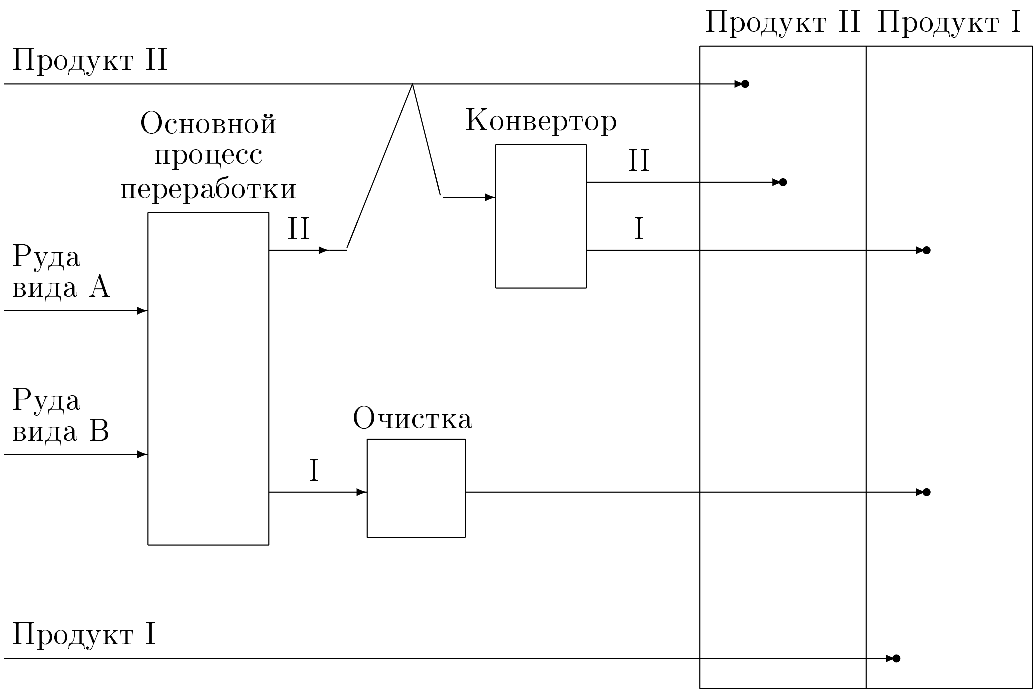

Рис. 1.2. Схема работы предприятия по переработке руды

Условия реализации продукции следующие. Продукт II может быть продан в неограниченном количестве по цене 3,80 долл./т, продукт I продается по цене 5,50 долл./т и его можно продать по этой цене до 45 тыс. т в день; существующий контракт требует, чтобы производилось не менее 40 тыс. т в день продукта I. Запасы продукта I могут увеличиваться со скоростью 4 тыс. т в день и эти запасы оцениваются из расчета 5,20 долл./т. Излишек продукта I может быть продан в неограниченном количестве по пониженой цене, равной 5,00 долл./т. Оба продукта можно при необходимости докупить: закупочная цена продукта I равна 5,75 долл./т, закупочная цена продукта II - 4,00 долл./т.

Найти план работы предприятия, максимизирующий прибыль.

Задача 18 [14]. Фирма грузовых перевозок ассигновала 600 000 долл. на приобретение грузовиков трех типов. Грузовик типа A стоит 10 000 долл., грузовик B – 20 000 долл. и грузовик C – 23 000 долл. Сколько грузовиков каждого типа нужно заказать, чтобы получить наибольшую производительность в тонно-милях на одни сутки с учетом приведенных ниже условий?

Грузовик A требует для обслуживания одного водителя на каждую смену, максимальное число смен в сутки – 3, производительность – 2100 тонно-миль за каждую смену.

Грузовик B требует для обслуживания двух водителей на каждую смену, максимальное число смен в сутки – 3, производительность – 3600 тонно-миль за каждую смену.

Грузовик C требует для обслуживания двух водителей на каждую смену, максимальное число смен в сутки – 3, производительность – 3780 тонно-миль за каждую смену.

Кроме того, число водителей должно быть не больше 145, а число грузовиков - не больше 30.

Задача 19 [3]. На мебельной фабрике требуется раскроить 5000 прямоугольных листов фанеры размером 4×5 м каждый, с тем чтобы получить два вида прямоугольных деталей: деталь A должна иметь размер 2×2 м, деталь B - размер 1×3 м. Необходимо, чтобы деталей A оказалось не меньше, чем деталей B. Каким образом следует производить раскрой, чтобы получить минимальное (по площади) количество отходов?

Задача 20 [6]. В цехе три токарных станка и один автомат. Необходимо организовать производство трех деталей в комплекте: на каждую деталь № 1 три детали № 2 и две № 3. Токарный станок за день производит 50 деталей № 1, 40 деталей № 2 и 80 деталей № 3. Дневная производительность автомата - 120 деталей № 1, 90 деталей № 2 и 60 деталей № 3. Требуется составить такую программу работы станков, при которой будет произведено максимальное число комплектов.

Задача 21. Процесс изготовления изделий двух видов (обозначим их через I и II) состоит в последовательной обработке соответствующих заготовок на двух различных станках. Производительность станка 1 – 5 изделий вида I, или 6 изделий вида II в час. Производительность станка 2 – 4 изделия I, или 8 изделий II в час. Каждое изделие вида I приносит прибыль в размере 180 руб., изделие вида II – 120 руб. Станки могут использоваться для производства изделий по 8 ч в сутки, однако фонд рабочего времени для каждого из них может быть увеличен на четыре часа за счет сверхурочных работ. Час сверхурочной работы требует дополнительных расходов в размере 450 руб. для станка 1 и 330 руб. для станка 2. Требуется определить объемы производства изделий каждого вида, обеспечивающие получение максимальной прибыли.

Задача 22 [16]. Современные автомобильные и авиационные бензины представляют собой смесь бензинов, получаемых в результате различных технологических процессов: бензина прямой перегонки нефти, бензина каталитического крекинга, бензина каталитического риформинга, газового бензина и некоторых других. Цель такого смешивания - получение бензинов с заданными показателями качества, к которым относятся, например, октановое число, характеризующее детонационные свойства бензина, давление насыщенных паров, содержание смол, массовая доля серы.

Рассмотрим следующий простейший пример: нефтеперерабатывающее предприятие производит два различных бензина, назовем их полупродуктами 1 и 2, из которых в результате смешивания в различных пропорциях вырабатываются два конечных продукта - авиационный и автомобильный бензины. Характеристики исходных бензинов и их объемы, которые могут быть произведены за некоторый (плановый) период, приведены в таблице 1.9. Требования к конечным продуктам, их продажная цена и прогнозируемый спрос на плановый период содержатся в таблице 1.10. (Давление в обеих таблицах измеряется в фунтах/кв. дюйм.)

Напомним, что в соответствии с правилом смешения, известным из химии, октановое число смеси равно сумме октановых чисел составных частей, умноженных на их концентрацию в смеси. То есть, если, например, смесь состоит из 3 баррелей полупродукта 1 и 2 баррелей полупродукта 2, то октановое число смеси равно

$$104 \cdot \frac{3}{5} + 94 \cdot \frac{2}{5} = 100\,.$$

Аналогично, давление насыщенных паров в этом случае будет равно

$$5 \cdot \frac{3}{5} + 9 \cdot \frac{2}{5} = 6,6 \ \text{(фунтов/кв. дюйм)}.$$

Требуется найти такой план производства, при котором суммарный доход от продажи авиационного и автомобильного бензинов будет максимальным.

Таблица 1.9

Компоненты смеси	Октановое число	Давление насыщенных паров	Максимальный объем производства (баррелей)
Полупродукт 1	104	5	30 000
Полупродукт 2	94	9	70 000

Таблица 1.10

Конечный продукт	Октановое число (не менее)	Давление насыщенных паров (не более)	Максимальный спрос (баррелей)	Продажная цена ($/баррель)
Бензин авиационный	102	6	20 000	45,1
Бензин автомобильный	96	8	не ограничен	32,4

Задача 23. Предприятие производит три вида продукции A, B и C. Производство каждого вида продукции связано с постоянными затратами, не зависящими от объема произведенной продукции. Постоянные затраты равны 9 тыс. руб. при производстве продукции вида A, 16 тыс. руб. при производстве продукции вида B и 12 тыс. руб. при производстве продукции вида C. Кроме постоянных затрат имеются переменные затраты на производство, пропорциональные объему выпуска продукции: 1,2 тыс. руб. на единицу продукции A, 2,4 тыс. руб. на единицу продукции B и 1,4 тыс. руб. на единицу продукции C.

В производстве каждого вида продукции используется три вида ресурсов I, II и III. Нормы расхода ресурсов на производство единицы каждого вида продукции и их запас, имеющийся у предприятия, приведены в таблице 1.11. Кроме того, в таблице 1.11 приведены цены, по которым реализуется выпускаемая продукция, и прогнозируемый спрос на нее.

Таблица 1.11

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов (ед. ресурса / ед. продукции)			Запас ресурсов (ед.)
	A	B	C	
I	2	2	4	180
II	3	1	3	200
III	1	2	5	160
Цена продукции (руб./ед. продукции)	2500	4000	3000	
Прогнозируемый спрос (ед. продукции)	50	100	20	

Требуется найти такой план выпуска каждого вида продукции, при котором прибыль предприятия будет максимальна.

Задача 24 [13]. Предприниматель заключил контракт на поставку продукции в течение семи месяцев в следующих объемах (по месяцам): 90, 125, 140, 100, 45, 60, 130. Отметим, что количество продукции от месяца к месяцу меняется. Предприниматель должен поставлять каждый месяц заданное количество продукции. Однако он не обязан производить ее именно в течение этого месяца. Он может, если желает, несколько месяцев производить продукцию про запас и хранить ее до тех пор, пока она не потребуется. Стоимость хранения единицы продукции – 2 долл. в месяц (для простоты будем считать, что это стоимость хранения до конца данного месяца, даже если продукция хранится не полный месяц). Стоимость наладки оборудования для производства продукции на один производственный цикл, равный месяцу, составляет 300 долл. Наладка осуществляется только в начале каждого месяца (если в этот месяц производится хоть какое-нибудь количество продукции).

Требуется определить, в какие месяцы следует производить наладку оборудования и какое количество продукции выпускать в эти месяцы, чтобы суммарные затраты на наладку оборудования и хранение продукции были бы минимальными. Решить задачу при условии, что на начало первого месяца никаких запасов продукции нет и к концу седьмого месяца вся произведенная продукция должна быть реализована.

2. Упражнения с ответами

Упражнение 1 [5]. Деревоперерабатывающий цех располагает 80 м^3 еловых и 180 м^3 пихтовых лесоматериалов, из которых может изготовить либо фанеру, либо пиломатериалы. Для изготовления $2,5$ м^3 коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов требуется $2,5$ м^3 еловых и $7,5$ м^3 пихтовых лесоматериалов. Для изготовления 100 м^2 фанеры требуется 5 м^3 еловых и 10 м^3 пихтовых лесоматериалов. Согласно условиям поставок, необходимо произвести, по крайней мере, 10 м^3 пиломатериалов и 1200 м^2 фанеры. Доход с 1 м^3 пиломатериалов составляет 16 долл., а со 100 м^2 фанеры - 60 долл. Найдите план выпуска продукции, максимизирующий доход.

Упражнение 2 [5]. На заводе предстоит решить, какое количество x_1 чистой стали и какое количество x_2 металлолома следует использовать для приготовления (из соответствующего сплава) литья для одного из своих заказчиков. Производственные затраты в расчете на 1 т чистой стали равны 3 усл. ед., а затраты в расчете на 1 т металлолома равны 5 усл. ед. (последняя цифра больше предыдущей, так как использование металлолома сопряжено с его предварительной очисткой). Заказ предусматривает поставку не менее 5 т литья; при этом заказчик готов купить и большее количество литья, если завод поставит перед ним такие условия.

Запасы чистой стали ограничены и не превышают 4 т, а запасы металлолома не превышают 6 т. Отношение веса металлолома к весу чистой стали в процессе получения сплава не должно превышать 7:8. Производственно-технологические условия таковы, что на процессы плавки и литья не может быть отведено более 18 ч; при этом на 1 т стали уходит 3 ч, а на 1 т металлолома – 2 ч производственного времени.

Определите количество чистой стали и металлолома, при котором завод может выполнить заказ с минимальными производственными затратами.

Упражнение 3 [12]. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии – 60 изделий, второй линии - 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели – 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой модели равна 30 долл., второго радиоприемника – 20 долл. Определите оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей.

Упражнение 4 [12]. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 долл. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 долл., а каждая минута телерекламы – в 100 долл. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в два раза чаще, чем сеть телевидения. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу, между радио- и телерекламой.

Упражнение 5 [15]. Туристическая фирма организует чартерный тур на один из известных курортов. В стоимость путевки входят стоимость авиаперелета «туда и обратно», плата за проживание в отеле, питание и экскурсии. Цена зависит от предоставляемого сервиса – места в самолете, номера в отеле, питания и других услуг. Соответственно с этим туры подразделяются на три категории: A – люкс, B – стандартный и C – экономический. Цены путевок и издержки фирмы на одного клиента приведены в таблице 2.1.

Фирме требуется решить, какое количество путевок каждой из категорий предложить клиентам с тем, чтобы максимизировать свою прибыль. При этом нужно учитывать следующее:

- фрахт самолета обходится фирме в 20 000 долл.;
- общее количество путевок - не более 200; проблем с их реализацией не предвидится;
- путевок категории А должно быть не менее 10 %;
- путевок категории В должно быть не менее 35 %, но не более 70 %;
- путевок категории С должно быть не менее 35 %;
- класс люкс самолета вмещает не более 60 пассажиров;
- администрация отеля, в котором предполагается разместить туристов, поставила условие – не менее 120 путевок должны быть категории А или В.

Таблица 2.1

Категория тура	Цена путевки (долл.)	Стоимость номера в отеле (долл.)	Питание и др. услуги (долл.)
A	1000	300	475
B	700	220	250
C	650	190	220

Упражнение 6 [3]. Рацион кормления коров на молочной ферме может состоять из трех видов кормов – сена, силоса и концентратов. Эти корма содержат питательные вещества – белок, кальций и витамины. Численные данные представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Корма	Питательные вещества (г/кг)		
	Белок	Кальций	Витамины
Сено	50	10	0.002
Силос	70	6	0.003
Концентраты	180	3	0.001

В расчете на одну корову суточные нормы потребления белка и кальция составляют не менее 2 кг и 210 г, соответственно. Потребление витаминов строго дозировано и должно быть равно 87 мг в сутки. Составить самый дешевый рацион, если стоимость 1 кг сена, силоса и концентратов равна, соответственно, 1,5, 2 и 6 коп.

Упражнение 7 [3]. Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сорта A и B, смешивая три ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай. В таблице 2.3 приведены нормы расхода ингредиентов, объем запасов каждого ингредиента и прибыль от реализации 1 т чая сорта A и B.

Таблица 2.3

Ингредиенты	Нормы расхода (т/т)		Объем запасов (т)
	A	B	
Индийский чай	0,5	0,2	600
Грузинский чай	0,2	0,6	870
Краснодарский чай	0,3	0,2	430
Прибыль (руб./т)	320	290	

Требуется составить план производства чая сорта A и B с целью максимизации суммарной прибыли.

Упражнение 8 [10]. Фирма производит растворитель особого состава в двух вариантах, отличающихся по чистоте. Растворитель в обоих вариантах продается в упаковке вместимостью 1 галлон. Чистота растворителя A выше, чем B, прибыль по A составляет 0,4 долл./галлон, по менее чистому продукту B – 0,3 долл./галлон.

Время производства продукта A в два раза превышает время производства продукта B. При условии выпуска одного продукта B фирма может производить его в количестве 1000 галлонов в день. По техническим условиям при выпуске обоих продуктов общее производство не превышает 800 галлонов в день. Контракт предусматривает, что каждый день должно производиться не менее 200 галлонов продукта B.

Найдите оптимальные объемы выпуска продуктов A и B при условии, что всю производимую продукцию можно реализовать.

Упражнение 9 [3]. Перед проектировщиками автомобиля поставлена задача сконструировать самый дешевый кузов, используя листовой металл, стекло и пластмассу. Основные характеристики материалов представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.4

Характеристики	Материалы		
	Металл	Стекло	Пластмасса
Стоимость (руб./м^2)	25	20	40
Масса (кг/м^2)	10	15	3

Общая поверхность кузова (вместе с дверьми и окнами) должна составить 14 м^2; из них не менее 4 м^2 и не более 5 м^2 следует отвести под стекло. Масса кузова не должна превышать 150 кг.

Сколько металла, стекла и пластмассы должен использовать наилучший проект?

Упражнение 10 [11]. В цехе площадью 74 м^2 необходимо установить станки двух типов, на приобретение которых отпущено 42 тыс. руб. Станок первого типа стоит 6 тыс. руб., требует 12 м^2 производственных площадей и обеспечивает изготовление 70 изделий в смену. Аналогичные характеристики станка второго типа составляют соответственно 4 тыс. руб., 6 м^2, 40 изделий в смену.

Найдите оптимальный вариант приобретения станков, обеспечивающий максимальное производство изделий в цехе.

Упражнение 11 [11]. В цехе размещены 100 станков 1-го типа и 200 станков 2-го типа, на каждом из которых можно производить детали A_1 и A_2. Производительность станков в сутки, стоимость одной детали каждого вида и минимальный суточный план их выпуска представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.5

Детали	Производительность станков (дет./сут.)		Стоимость 1 детали (руб.)	Минимальный суточный план
	Тип 1	Тип 2		
A_1	20	15	6	1510
A_2	35	30	4	4500

Найдите количество x_{ij} станков i-го типа, $i = 1, 2$, которое необходимо выделить для производства деталей A_j, $j = 1, 2$, с таким расчетом, чтобы стоимость продукции, произведенной в сутки, была максимальной.

Упражнение 12 [6]. Из одного города в другой ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице 2.6 указаны: состав поезда каждого типа, количество имеющихся в парке вагонов различных видов для формирования поездов и максимальное число пассажиров, на которое рассчитан вагон каждого вида.

Таблица 2.6

Поезда	Вагоны				
	багажный	почтовый	плацкартный	купейный	мягкий
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	–	8	4	1
Число пассажиров	–	–	58	40	32
Парк вагонов	12	8	81	70	26

Определите число скорых и пассажирских поездов, которые необходимо формировать ежедневно из имеющегося парка вагонов, чтобы число перевозимых пассажиров было максимально.

Упражнение 13 [6]. Автомобильный завод выпускает машины типов А и В. Производственные мощности отдельных цехов и отделов приведены в таблице 2.7.

Определите наиболее рентабельную производственную программу при условии, что прибыль от выпуска одной машины типа А равна 2000 руб., а от одной машины типа В – 2400 руб.

Таблица 2.7

№	Наименование цехов или участков	Количество машин за год	
		типа A	типа B
1	Подготовка производства автомобилей	125	110
2	Кузовной	80	320
3	Производство шасси	110	110
4	Производство двигателей	240	120
5	Сборочный	160	80
6	Участок испытаний	280	70

Упражнение 14. Имеется три сорта топлива с различными зольностью, теплотворной способностью и стоимостью. Соответствующие данные в расчете на 1 кг топлива приведены в таблице 2.8.

Требуется определить, сколько и какого топлива следует приобрести, так чтобы общая стоимость закупки была минимальной и при этом выполнялись бы заранее заданные условия: общая теплотворная способность топлива должна быть 4000 ккал, а общее количество золы не должно превышать 56 кг.

Таблица 2.8

Сорт топлива	Зольность (кг)	Теплотворная способность (ккал)	Стоимость (центы)
I	0,02	10	10
II	0,04	8	6
III	0,08	4	2

Упражнение 15. Трикотажное ателье изготавливает два вида изделий из шерстяной пряжи – A_1 и A_2. Трудоемкость изготовления изделия вида A_1 в 2,5 раза выше трудоемкости изготовления изделия вида A_2. Если бы ателье выпускало только изделия вида A_1, суточный объем производства мог бы составить 26 изделий. Суточный объем сбыта изделий вида A_1 ограничен семнадцатью изделиями в сутки, изделий вида A_2 - тридцатью пятью. Удельная прибыль от продажи изделий вида A_1 равна 20 долл.,

изделий вида A_2 – 11 долл.

Определить, какое количество изделий каждого вида следует изготовлять ателье, чтобы получить максимальную совокупную прибыль.

Упражнение 16 [6]. Для изготовления двух видов изделий А и В фабрика использует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. На изготовлении указанных изделий заняты токарные и фрезерные станки. В таблице 2.9 приведены исходные данные задачи.

Таблица 2.9

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расхода на 1 изделие	
		Изделие А	Изделие В
Сталь (кг)	570	10	70
Цветные металлы (кг)	420	20	50
Токарные станки (станко-час.)	5600	300	400
Фрезерные станки (станко-час.)	3400	200	100
Прибыль (тыс. руб.)	–	3	8

Определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль.

Упражнение 17 [11]. Для изготовления сплава из меди, олова и цинка в качестве сырья используют два сплава тех же металлов, отличающихся составом и стоимостью. Данные об этих сплавах приведены в таблице 2.10. Получаемый сплав должен содержать не более 2 кг меди, не менее 3 кг олова, а содержание цинка может составлять от 7,2 кг до 12,8 кг.

Определить количество сплавов 1 и 2, обеспечивающее получение нового сплава с минимальными затратами на сырье.

Таблица 2.10

Компоненты сплава	Содержание компонентов (%)	
	Сплав 1	Сплав 2
Медь	10	10
Олово	10	30
Цинк	80	60
Стоимость 1 кг (руб.)	4	6

Упражнение 18 [2]. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в таблице 2.11.

Таблица 2.11

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 изделие		Общее количество ресурсов
	Стол	Шкаф	
Древесина (м^3)			
I вида	0,2	0,1	40
II вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (чел.-час.)	1,2	1,5	371,4
Прибыль (руб./изд.)	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовлять, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Упражнение 19 [11]. Завод производит продукцию двух видов: A_1 и A_2, используя сырье, запас которого составляет 390 т. Согласно плану, выпуск продукции A_1 должен составлять не менее 60% общего объема выпуска. Расход сырья на изготовление 1 т продукции A_1 и A_2 составляет, соответственно, 2 и 1 т. Стоимость 1 т продукции A_1 равна 2000 руб., продукции A_2 – 3000 руб.

Определить план выпуска продукции, при котором стоимость выпущенной продукции будет максимальной.

Упражнение 20 [11]. Процесс изготовления изделий двух видов состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время обработки каждого изделия j-го вида, $j = 1, 2$, на i-м станке равно a_{ij} часам. Время использования i-го станка составляет b_i часов в сутки, $i = 1, 2, 3$. Прибыль от реализации одного изделия j-го вида составляет c_j руб. Составить план суточного выпуска изделий так, чтобы прибыль от их производства была максимальной. Решить задачу со следующими исходными данными:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \end{bmatrix} ,$$

$a)$ $c_1 = 65$, $c_2 = 80$; $b)$ $c_1 = 85$, $c_2 = 60$.

Упражнение 21 [3]. Для серийного производства некоторого изделия требуются комплекты заготовок профильного проката. Каждый комплект состоит из двух заготовок длиной 1800 мм и пяти заготовок длиной 700 мм. Как следует раскроить 770 полос проката стандартной длины 6000 мм, чтобы получить наибольшее количество указанных комплектов?

Упражнение 22 [12]. Предприятие выпускает три вида изделий. В процессе их производства используются три технологические операции. На рис. 2.1 представлена технологическая схема производства изделий 1, 2 и 3. При изготовлении изделия 2 технологическая операция 2 не выполняется, а при производстве изделия 3 используются только технологические операции 1 и 2. В прямоугольниках на рис. 2.1 указана длительность технологических операций при изготовлении одного изделия каждого вида. Так как эти технологические операции используются фирмой и для других производственных целей, фонд рабочего времени, в течение которого операции 1, 2 и 3 могут быть применены для производства рассматриваемых изделий, ограничен следующими предельными значениями (в сутки): для первой операции – 430 мин, для второй операции – 460 мин, для третьей операции – 420 мин.

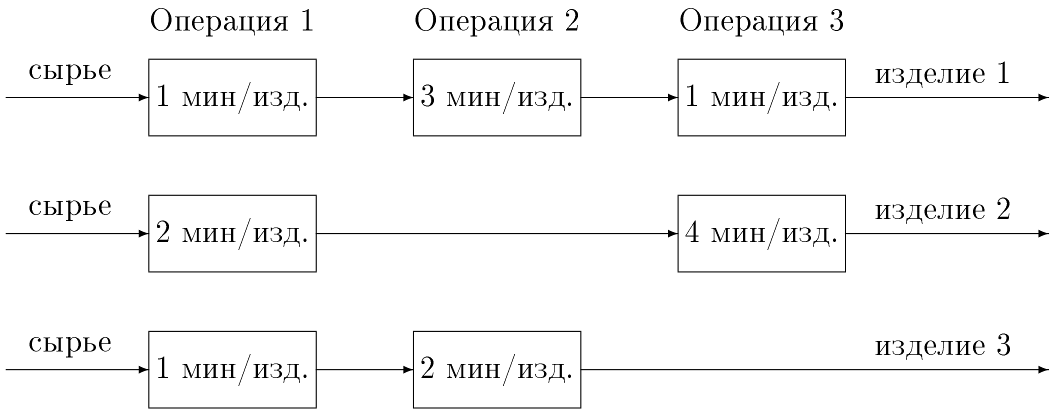

Рис. 2.1

Изучение рынка сбыта показало, что ожидаемая прибыль от продажи одного изделия видов 1, 2 и 3 составляет 3, 2 и 5 долл. соответственно.

Каков наиболее выгодный суточный объем производства каждого вида продукции?

Упражнение 23 [3]. На звероферме могут выращиваться песцы, черно-бурые лисы, нутрии и норки. Для их питания используется три вида кормов. В таблице 2.12 приведены нормы расхода кормов, их ресурс в расчете на день, а также прибыль от реализации одной шкурки каждого зверя.

Таблица 2.12

Вид корма	Нормы расхода кормов (кг/день)				Ресурс кормов (кг)
	Песец	Лиса	Нутрия	Норка	
1	1	2	1	2	300
2	1	4	2	0	400
3	1	1	3	2	600
Прибыль (руб./шкурка)	6	12	8	10	

Определить, сколько и каких зверьков следует выращивать на ферме, чтобы прибыль от реализации шкурок была наибольшей.

Упражнение 24 [10]. На нефтеперерабатывающий завод поступают четыре сорта сырой нефти: S1, S2, S3, S4, из которых производятся четыре вида нефтепродуктов: бензин, керосин, соляровое масло и смазочное масло. Запасы сырья, а также спрос на продукты ограничены. Нефть первых трех сортов используется только для производства топлива. Нефть сорта S4 может использоваться как для производства только топлива (технология T1), так и для одновременного производства топлива и смазочного масла (технология T2). Цены на готовую продукцию и сырье ($/баррель), эксплуатационные расходы ($/баррель), размеры выхода продукции (баррель продукции/баррель сырья) и недельные запасы сырья (баррелей) приведены в таблице 2.13.

Таблица 2.13

	Сырье					Цена продукции
	S1	S2	S3	S4		
				T1	T2	
Выход продукции						
бензин	0,6	0,5	0,3	0,4	0,4	45
соляровое масло	0,2	0,2	0,3	0,3	0,1	30
керосин	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2	15
смазочное масло	0	0	0	0	0,2	60
Технологические потери	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	
Цены на сырье	15	15	15	25	25	
Эксплуатационные расходы	5	8,5	7,5	3	2,5	
Запасы сырья	100 000	100 000	100 000	200 000		

1. Исходя из того, что максимальный недельный спрос на бензин, керосин, соляровое масло и смазочное масло равен, соответственно, 170 000, 85 000, 85 000 и 20 000 баррелей, найти план работы завода, максимизирующий прибыль.

2. Предполагая, что указанные выше максимальные недельные потребности в продукции являются минимальными, найти план нефтепереработки, минимизирующий издержки при удовлетворении спроса.

Упражнение 25 [8]. Суточный кормовой рацион на стойловый период для дойных коров живой массой 400–420 кг должен содержать 4 вида питательных веществ: I – кормовых единиц – не менее 9,5 кг, II – переваримого протеина – не менее 1005 г, III – каротина – не менее 400 мг, IV – сухого вещества – не менее 12 кг, но не более 18 кг. При таком рационе суточный удой от каждой коровы составляет 11 кг молока жирностью 3,8%.

Требуемые питательные вещества содержатся в четырех группах кормов – концентратах, грубых кормах, силосе и корнеклубнеплодах. Концентраты включают в себя комбикорм и отруби ячменные; грубые корма – сено клеверо-тимофеечное, сено луговое, сенаж вико-овсяный и солому ячменную; силос – силос кукурузный и силос подсолнечниковый; корнеклубнеплоды – кормовую свеклу и картофель. Масса отдельных групп кормов в рационе может колебаться: концентраты – от 2 до 3 кг, грубые – от 10 до 15 кг, силос – от 12 до 20 кг, корнеклубнеплоды – от 5 до 8 кг. Удельный вес отрубей в группе концентрированных кормов должен быть не более 25%, сена в грубых кормах – не менее 30%, соломы - не более 20%, картофеля в корнеклубнеплодах – не более 10%.

Необходимые данные по видам имеющихся в хозяйстве кормов и содержанию в них питательных веществ приведены в таблице 2.14.

Таблица 2.14

Корма	Содержание питательных веществ в 1 кг корма			
	I (кг)	II (г)	III (мг)	IV (кг)
Комбикорм	0,90	112,00	0,00	0,87
Отруби ячменные	0,70	109,00	1,00	0,87
Сено:				
клеверо-тимофеечное	0,50	52,00	30,00	0,83
луговое	0,42	48,00	15,00	0,85
Сенаж вико-овсяный	0,32	38,00	40,00	0,45
Солома ячменная	0,36	12,00	4,00	0,85
Силос:				
кукурузный	0,18	13,00	15,00	0,26
подсолнечниковый	0,16	15,00	15,00	0,24
Кормовая свекла	0,12	9,00	0,00	0,13
Картофель	0,30	16,00	0,00	0,23

Стоимость 1 кг кормов следующая: комбикорм – 10 коп., отруби ячменные – 8,8 коп., сено клеверо-тимофеечное – 2,8 коп., сено луговое – 3 коп., сенаж вико-овсяный – 1,5 коп., солома ячменная – 1,4 коп., силос кукурузный – 2,2 коп., силос подсолнечниковый – 1,7 коп., кормовая свекла – 3,4 коп., картофель – 10 коп.

Рацион должен полностью удовлетворять потребность коровы во всех перечисленных питательных веществах при заданном соотношении отдельных видов и групп кормов и иметь при этом минимальную стоимость.

Упражнение 26 [4]. Фирме требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03% и с долей зольных примесей не более 3,25%. Доступны три сорта угля: A, B и C. Содержание примесей и цены (за 1 т) для каждого сорта угля приведены в таблице 2.15. Найти оптимальную смесь углей.

Таблица 2.15

Сорт угля	Содержание фосфора (%)	Содержание золы (%)	Цена (долл.)
A	0.06	2.0	30
B	0.04	4.0	30
C	0.02	3.0	45

Упражнение 27 [5]. Радиозавод выпускает радиоприемники трех моделей - A, B и C. Каждый приемник указанных моделей приносит доход в размере 8, 15 и 25 долл., соответственно. Необходимо, чтобы завод выпускал за неделю не менее 100 приемников модели A, 150 приемников модели B и 75 приемников модели C.

Каждая модель характеризуется определенным временем, необходимым для изготовления соответствующих деталей, сборки изделия и его упаковки. Так, в частности, в расчете на 10 приемников модели A требуется 3 ч для изготовления соответствющих деталей, 4 ч на сборку и 1 ч на упаковку. Соответствующие показатели в расчете на 10 приемников модели B равняются 3,5, 5 и 1,5, а на 10 приемников модели C – 5, 8 и 3. В течение ближайшей недели завод может израсходовать на производство радиодеталей 150 ч, на сборку 200 ч и на упаковку 61 ч.

Построить и решить соответствующую модель производственного планирования.

Упражнение 28 [3]. Завод изготовляет корпуса для холодильников и комплектует их оборудованием, поставляемым без ограничений другими предприятиями. В таблице 2.16 указаны нормы трудозатрат, затрат материалов для изготовления корпусов, ограничения по этим ресурсам в расчете на месяц и прибыль от реализации холодильника каждой из пяти марок.

Найти месячный план выпуска холодильников, максимизирующий прибыль.

Таблица 2.16

Наименование ресурса	Марка холодильника					Объем ресурса
	1	2	3	4	5	
Трудозатраты (чел.-час.)	2	3	5	4	4	9000
Металл (м^2)	2	2	4	5	0	8500
Пластик (м^2)	1	3	2	0	4	4000
Краска (кг)	1	2	3	3	2	5000
Прибыль (руб.)	40	70	120	120	50	

Упражнение 29 [15]. Пенсионный фонд рассматривает возможность инвестирования капитала в один или более из шести различных проектов. Финансовые аналитики фонда оценили годовую эффективность вложений в каждый из проектов на предстоящие три года. Их оценки представлены в таблице 2.17.

Данные, представленные в таблице, означают, что ожидаемые проценты при инвестировании, например, \$ 10 000 в проект 1 равны \$ 1200 $(0,12 \times 10\,000)$ в первый год, \$ 1000 $(0,10 \times 10\,000)$ во второй год и \$ 800 $(0,08 \times 10\,000)$ в третий год, так что всего за три года процентных денег должно быть получено \$ 3000.

Правление фонда решило инвестировать в рассматриваемые проекты \$ 300 000. При этом решено направить не менее \$ 50 000 в проект 2, не более \$ 40 000 в проект 5 и не более \$ 75 000 в проекты 4 и 6 вместе ввиду высокого риска этих инвестиций.

Требуется определить такой план вложения капитала, при котором сумма процентных денег за трехлетний период будет максимальна.

Таблица 2.17

Проект	Год 1	Год 2	Год 3
1	0,12	0,10	0,08
2	0,14	0,10	0,10
3	0,15	0,12	0,08
4	0,10	0,12	0,15
5	0,08	0,12	0,18
6	0,25	0,15	0,05

Упражнение 30 [15]. Менеджер страхового фонда пытается определить оптимальный объем инвестиций, рассматривая шесть различных проектов. В таблице 2.18 представлены данные по каждому из проектов (прочерк в таблице означает, что соответствующие данные отсутствуют).

Таблица 2.18

Показатели	Проекты					
	1	2	3	4	5	6
Текущая стоимость акции ($)	80	100	160	120	150	200
Предполагаемая годовая скорость роста	0,08	0,07	0,10	0,12	0,09	0,15
Предполагаемый годовой дивиденд на акцию ($)	4,00	6,50	1,00	0,50	2,75	–
Предполагаемый риск	0,05	0,03	0,10	0,20	0,06	0,08

Предполагаемый риск определяется как стандартная девиация (отклонение от нормальных) процентов. Проценты на каждую акцию определяются как стоимость акции в конце года минус ее текущая стоимость плюс дивиденд. Фонд может инвестировать во все акции до 2 500 000 долл. при соблюдении следующих условий:

(a) инвестиции в проект 6 не могут превышать 250 000 долл.;

(b) не менее 500 000 долл. должны быть инвестированы в проекты 1 и 2 (вместе);

(c) средневзвешенный риск не может превышать 0,1, где

$$\text{Средневзвешенный риск} = \\ = \frac{\sum\limits_j (\text{Инвестиции в j-й проект}) \times (\text{Риск j-го проекта})}{\text{Сумма всех инвестиций}};$$

(d) в целях диверсификации требуется иметь не менее 100 акций каждого вида;

(e) по меньшей мере 10 % всех инвестиций должны быть распределены между проектами 1 и 2;

(f) годовой дивиденд должен быть не менее 10 000 долл.

Предполагая, что срок планирования – один год, определить такую структуру портфеля ценных бумаг, при которой проценты по всем акциям были бы максимальны.

Упражнение 31 [3]. Для серийного изготовления детали механический цех может использовать пять различных технологий ее обработки на четырех станках. В таблице 2.19 указано время (в минутах) обработки детали на каждом станке в зависимости от технологического способа, а также общий ресурс рабочего времени станков каждого вида за одну смену.

Требуется указать, как следует использовать имеющиеся технологии, с тем чтобы добиться максимального выпуска продукции.

Таблица 2.19

Станки	Технологические способы					Ресурс времени станков (мин.)
	1	2	3	4	5	
Токарный	2	1	3	0	1	4 100
Фрезерный	1	0	2	2	1	2 000
Строгальный	1	2	0	3	2	5 800
Шлифовальный	3	4	2	1	1	10 800

Упражнение 32 [7]. Цех мебельного комбината выпускает трельяжи, трюмо и тумбочки под телевизоры. Нормы расхода материалов в расчете на одно изделие, плановая себестоимость изделий, оптовые цены предприятия, плановый (месячный) ассортимент и трудоемкость единицы продукции приведены в таблице 2.20. Запас древесностружечных плит, досок еловых и березовых составляет 90, 30 и 14 м^3, соответственно. Плановый фонд рабочего времени равен 16 800 чел.-час.

Таблица 2.20

Показатели	Трельяжи	Трюмо	Тумбочки
Нормы расхода материалов (м^3)			
древесностружечные плиты	0,032	0,031	0,038
доски еловые	0,020	0,020	0,008
доски березовые	0,005	0,005	0,006
Трудоемкость (чел.-ч.)	10,2	7,5	5,8
Плановая себестоимость (руб.)	88,81	63,98	29,60
Оптовая цена предприятия (руб.)	93,00	67,00	30,00
Плановый ассортимент (шт.)	350	290	1200

Исходя из необходимости выполнения плана по ассортименту и возможности его перевыполнения по отдельным (или даже по всем) показателям поставить и решить следующие задачи: а) задачу максимизации объема реализации (за плановый период); б) задачу максимизации прибыли (за тот же период).

Упражнение 33 [10]. В процессе переработки сырой нефти производится определенное количество бензиновых полупродуктов, которые затем смешиваются с целью получения двух видов бензинов – обычного бензина и бензина высшего качества (см. задачу 22). Для каждого полупродукта известны октановое число и максимально возможный объем производства. Для конечных продуктов заданы минимально допустимые значения октановых чисел и минимальный уровень производства, определяемый договорными обязательствами. Соответствующие данные приведены в таблицах 2.21 и 2.22. Там же приведены затраты и цены на продукты (в долл./баррель).

Затраты на производство конечных продуктов складываются из затрат на производство полупродуктов и затрат на их смешивание (технологических затрат). Последние в таблице 2.21 приведены в расчете на единицу соответствующего полупродукта. Весь бензин, произведенный сверх договорных обязательств, а также неиспользованные в производстве конечных продуктов полупродукты, могут быть проданы в любом объеме по рыночным ценам. Найти план производства, максимизирующий прибыль.

Таблица 2.21

Полупродукт	Максимальный объем производства (баррелей)	Октановое число	Рыночная цена	Затраты на производство	Технологические затраты
I	200 000	70	30,00	24,00	1,00
II	400 000	80	35,00	27,00	1,00
III	400 000	85	36,00	28,50	1,00
IV	500 000	90	42,00	34,50	1,00
V	500 000	99	60,00	40,00	1,50

Таблица 2.22

Вид бензина	Минимальный объем производства (баррелей)	Октановое число (не менее)	Продажная цена	
			по договорам	рыночная
Обычный	500 000	85	40,00	46,00
Высшего качества	400 000	95	55,00	60,00

3. Контрольные задания

Задание 1 [3]. Прядильная фабрика для производства двух видов пряжи использует три типа сырья – чистую шерсть, капрон и акрил. В таблице 3.1 указаны нормы расхода сырья, его общее количество, которое может быть использовано фабрикой в течение года, и прибыль от реализации тонны пряжи каждого вида.

Таблица 3.1

Тип сырья	Нормы расхода сырья (т/т пряжи)		Количество сырья (т)
	Вид 1	Вид 2	
Шерсть	0,5	0,2	600
Капрон	a	0,6	b
Акрил	0,5 - a	0,2	c
Прибыль (руб./т пряжи)	1100	900	

Требуется составить годовой план производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли.

Варианты:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	0,1	620	500	9	0,2	850	400	17	0,3	720	300
2	0,1	730	500	10	0,2	780	400	18	0,3	750	300
3	0,1	840	500	11	0,2	710	400	19	0,3	780	300
4	0,1	650	510	12	0,2	880	410	20	0,3	800	300
5	0,1	760	510	13	0,2	810	410	21	0,25	800	300
6	0,1	870	510	14	0,2	740	410	22	0,25	750	300
7	0,1	790	520	15	0,3	660	300	23	0,25	700	300
8	0,2	920	400	16	0,3	690	300	24	0,25	900	400

Задание 2 [3]. Для производства трех видов изделий (A, B и C) используется сырье типа I, II и III, причем закупки сырья типа I и III ограничены возможностями поставщиков. В таблице 3.2 приведены нормы затрат сырья, цены на сырье и на изделия, а также ограничения по закупке сырья.

Таблица 3.2

Тип сырья	Цена 1 кг сырья (руб.)	Нормы затрат сырья на одно изделие (кг)			Ограничения по закупке сырья (кг)
		A	B	C	
I	2	1	3	a	3000
II	1	4	1	3	–
III	b	6	5	2	3320
	Цена одного изделия (руб.)	$6b + 12$	$5b + 22$	c	

Требуется определить план производства продукции с целью максимизации прибыли.

Варианты:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	1	17	9	3	2	25	17	4	3	28
2	2	2	19	10	3	3	25	18	4	3	30
3	2	3	21	11	3	3	26	19	4	4	30
4	2	4	23	12	3	4	26	20	4	4	32
5	3	1	21	13	4	1	25	21	5	1	20
6	3	1	22	14	4	1	27	22	5	2	22
7	3	2	23	15	4	2	26	23	5	3	22
8	3	2	24	16	4	2	27	24	5	3	25

Задание 3 [3]. Нефтеперерабатывающий завод может использовать две различные технологии перегонки нефти для производства бензина, керосина и солярового масла. В таблице 3.3 приведены данные, показывающие выход продукции и отходы в расчете на 1 т переработанной нефти. Кроме того, указаны стоимость 1 т готовой продукции и суточный объем государственного заказа, который необходимо удовлетворить. Издержки производства (стоимость нефти, заработная плата, амортизация и т. п.) составляют a руб. на 1 т переработанной нефти при использовании технологии 1 и b руб./т при использовании технологии 2. Загрузка оборудования при использовании технологий 1 и 2 равна, соответственно, 0,2 и 0,05 маш.-час. на 1 т переработанной нефти. Общий ресурс оборудования составляет 75 маш.-час. в сутки. Все отходы должны пройти через очистные сооружения, производительность которых составляет c т/сут. Поставки нефти и спрос на всю продукцию завода неограничены.

Таблица 3.3

Вид продукции	Выход продукции (т)		Стоимость 1 т готового продукта (руб.)	Суточный объем госзаказа (т)
	Технология 1	Технология 2		
Бензин	0,6	0,3	100	117
Керосин	0,1	0,3	50	54
Соляровое масло	–	0,3	20	–
Отходы	0,3	0,1	–	–

Требуется составить суточный план производства с целью максимизации прибыли.

Варианты:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	13	37	130	9	29	41	130	17	31	45	130
2	15	37	135	10	31	41	135	18	37	45	135
3	17	37	140	11	37	43	140	19	35	45	140
4	19	37	145	12	39	45	145	20	33	45	145
5	21	37	130	13	37	45	130	21	30	30	140
6	21	39	135	14	35	45	135	22	30	35	140
7	23	39	140	15	33	45	140	23	25	35	135
8	25	39	145	16	39	45	145	24	25	45	130

Задание 4 [3]. Цех выпускает три вида деталей, которые изготовляются на двух станках. На рис. 3.1 показана технологическая схема изготовления детали каждого вида с указанием времени ее обработки на станках.

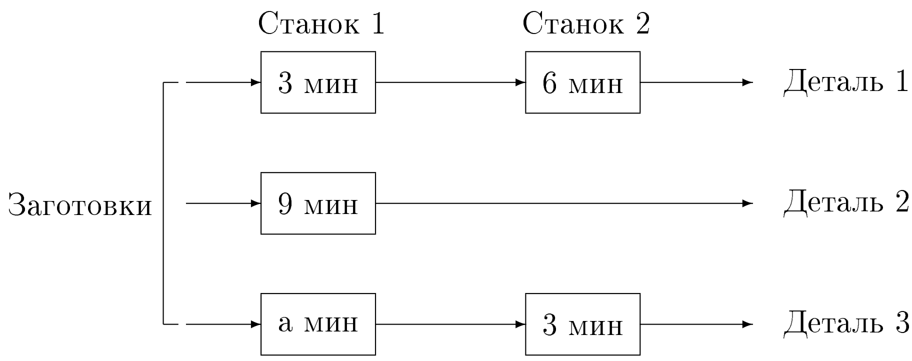

Рис. 3.1

Задан суточный ресурс рабочего времени каждого станка: b мин для станка 1 и c мин для станка 2. Стоимость одной детали вида 1, 2 и 3 составляет 3, 1 и 2 руб. соответственно. Требуется составить суточный план производства деталей с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

Варианты:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	3	600	900	9	4	600	900	17	5	630	270
2	3	960	600	10	4	780	450	18	3	600	750
3	3	510	750	11	5	870	900	19	4	720	900
4	4	690	450	12	5	930	450	20	4	750	360
5	5	660	900	13	3	720	900	21	4	600	720
6	5	840	450	14	3	960	420	22	4	600	750
7	3	660	900	15	4	660	900	23	3	480	600
8	3	960	510	16	4	870	450	24	3	540	660

Задание 5 [3]. На фабрике производится ткань двух артикулов. Любая из этих двух тканей может изготавливаться на станках одного из двух типов.

В таблице 3.4 указаны: производительность станка каждого типа при изготовлении ткани артикулов 1 и 2; суммарные мощности станочного парка фабрики в расчете на одну рабочую неделю; трудовые затраты по обслуживанию станков в минутах рабочего времени на один час работы станка; цена метра ткани каждого артикула. Известно также, что недельный ресурс трудозатрат на обслуживание станков равен 6000 ч.

Таблица 3.4

Тип станков	Мощности (тыс. ч)	Трудозатраты (мин/ч)	Производительность (м/ч)	
			Артикул 1	Артикул 2
1	30	a	20	15
2	b	6	12	6
		Цена 1 м ткани (руб.)	18	c

Требуется составить недельный план выпуска тканей с целью максимизации стоимости изготовленной продукции.

Варианты:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	10	30	26	9	9	30	26	17	8	30	30
2	10	30	28	10	9	30	28	18	8	30	32
3	10	30	30	11	9	30	30	19	8	40	28
4	10	30	32	12	9	30	32	20	8	40	30
5	10	40	26	13	9	40	28	21	11	40	28
6	10	40	28	14	9	40	30	22	11	40	30
7	10	40	30	15	9	40	32	23	11	50	28
8	10	40	32	16	8	30	28	24	11	50	30

Задание 6 [4]. Фирма специализируется на производстве буфетов. Она может производить три типа буфетов – A, B и C, что требует различных затрат труда на каждой стадии производства. Соответствующие данные приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5

Производственный участок	Затраты труда на одно изделие (чел-час.)		
	A	B	C
Лесопилка	1	2	4
Сборочный цех	2	4	2
Отделочный цех	1	1	2

В течение недели можно планировать работу на лесопилке на a чел.-час., в сборочном цехе – на b чел.-час. и в отделочном цехе – на c чел.-час. Прибыль от продажи каждого буфета типов A, B и C составляет, соответственно, 360, 440 и 600 руб.

Составить оптимальный план производства.

Варианты:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	360	520	220	9	370	640	270	17	350	530	175
2	300	500	200	10	380	660	280	18	340	520	170
3	310	520	210	11	390	670	290	19	330	510	165
4	320	540	220	12	400	680	300	20	320	500	160
5	330	560	230	13	390	540	180	21	310	490	155
6	340	580	240	14	380	570	190	22	300	410	190
7	350	600	250	15	370	550	185	23	300	420	180
8	360	620	260	16	360	540	180	24	300	430	170

Задание 7 [3]. Строителям требуются комплекты досок, каждый из которых состоит из a досок длиной 1,5 м и b досок длиной 0,6 м. Как следует распилить c четырехметровых досок, чтобы получить наибольшее количество указанных комплектов?

Варианты:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	3	660	9	3	7	640	17	4	9	660
2	1	3	720	10	3	7	800	18	4	9	690
3	1	3	780	11	3	7	960	19	4	9	720
4	1	3	840	12	3	8	510	20	4	9	750
5	2	5	660	13	3	8	680	21	5	5	600
6	2	5	770	14	3	8	850	22	5	5	700
7	2	5	880	15	4	9	600	23	5	6	600
8	2	5	990	16	4	9	630	24	5	6	900

Задание 8 [3]. Металлургический цех в качестве сырья закупает латунь типов I, II и III – различные по процентному составу сплавы меди и цинка (с некоторыми добавками) – и переплавляет это сырье в отношении 1:1:3, с тем чтобы получить сплав, содержащий 57 % меди и 34 % цинка.

Появилась возможность покупать сырье новых типов – IV, V и VI. Характеристика сырья каждого типа приведена в таблице 3.6.

Таблица 3.6

Тип сырья	Содержание меди (%)	Содержание цинка (%)	Стоимость (руб./кг)
I	75	20	5
II	60	30	3
III	50	40	2
IV	a	$95 - a$	c
V	b	$90 - b$	2
VI	45	40	1

Какое сырье следует покупать теперь цеху и в каких пропорциях его переплавлять, с тем чтобы выпускать тот же сплав, расходуя на сырье как можно меньше денег?

Варианты:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	72	58	4,2	9	68	62	3,4	17	74	62	4,6
2	72	60	4	10	68	64	3,2	18	74	64	4,4
3	72	62	4,2	11	68	65	3,4	19	74	65	4,6
4	72	64	4	12	68	70	3,4	20	74	70	4,6
5	72	65	4,2	13	72	60	4,2	21	70	60	4
6	72	70	4,2	14	68	58	3,2	22	70	65	4,2
7	68	58	3,4	15	74	58	4,6	23	70	70	4,2
8	68	60	3,2	16	74	60	4,4	24	70	75	4,5

Задание 9 [3]. Для рытья котлована объемом a м^3 строители получили три экскаватора. Мощный экскаватор производительностью 22,5 м^3/ч расходует в час 10 л бензина. Аналогичные характеристики среднего экскаватора – 10 м^3/ч и b л/ч, малого – 5 м^3/ч и 2 л/ч. Экскаваторы могут работать все одновременно, не мешая друг другу. Запас бензина у строителей ограничен и равен c л. Если рыть котлован только малым экскаватором, то бензина заведомо хватит, но это будет очень долго. Каким образом следует использовать имеющуюся технику, чтобы выполнить работу как можно скорее?

Варианты:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1350	10/3	548	9	1200	4	500	17	1980	10/3	800
2	1080	4	460	10	1320	4	550	18	1890	11/3	780
3	1080	11/3	444	11	1890	11/3	777	19	1860	4	780
4	1440	10/3	580	12	1200	4	510	20	1140	4	470
5	1140	4	480	13	1800	10/3	728	21	1170	4	480
6	1350	11/3	552	14	1380	4	580	22	1350	11/3	546
7	1620	10/3	656	15	1620	11/3	666	23	1620	4	654
8	2160	11/3	888	16	1500	4	630	24	1890	10/3	760

Задание 10 [3]. В пекарне для выпечки четырех видов хлеба используются мука двух сортов, маргарин и яйца. Имеющееся оборудование, производственные площади и поставки продуктов таковы, что в сутки можно переработать не более a кг муки сорта I, b кг муки сорта II, c кг маргарина и d штук яиц. В таблице 3.7 приведены нормы расхода продуктов, а также прибыль от продажи 1 кг хлеба каждого вида.

Таблица 3.7

Наименование продукта	Нормы расхода на 1 кг хлеба (по видам)			
	1	2	3	4
Мука I (кг)	0,5	0,5	0	0
Мука II (кг)	0	0	0,5	0,5
Маргарин (кг)	0,125	0	0	0,125
Яйцо (шт.)	2	1	1	1
Прибыль (коп./кг)	14	12	5	6

Требуется определить суточный план выпечки хлеба, максимизирующий прибыль.

Варианты:

	a	b	c	d		a	b	c	d
1	250	200	60	1380	13	300	200	70	1560
2	290	200	70	1540	14	330	210	80	1720
3	350	200	80	1740	15	370	220	90	1900
4	380	200	90	1880	16	220	160	50	1160
5	290	150	50	1280	17	270	210	60	1440
6	300	150	60	1380	18	310	190	70	1560
7	310	150	70	1480	19	340	200	80	1720
8	330	150	80	1600	20	390	180	90	1860
9	400	150	90	1820	21	400	200	90	1920
10	240	100	50	1080	22	410	210	100	2040
11	210	180	50	1180	23	360	200	80	1760
12	260	190	60	1380	24	360	180	70	1640

Ответы и решения

Задачи

Задача 1. Обзначим через x_1 (т/сут) план производства краски I, через x_2 (т/сут) - план производства краски II. Тогда получим следующую задачу:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & \to & \max\,; \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6, \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8, \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 1, \end{array}$$
$$0 \leq x_1 \leq 2,\ x_2 \geq 0.$$

Ответ: $x_1^* = 1\frac{1}{3},\ x_2^* = 3\frac{1}{3},\ f_* = 12\frac{2}{3}$ (тыс. долл.).

Задача 2. Обозначая через x_1 (т) количество картофеля, закупаемое у поставщика A, x_2 (т) - количество картофеля, закупаемое у поставщика B, приходим к задаче

$$\begin{array}{rcrcr} 500x_1 & + & 600x_2 & \to & \max; \\ 0,2x_1 & + & 0,3x_2 & \leq & 1,8, \\ 0,2x_1 & + & 0,1x_2 & \leq & 1,2, \\ 0,3x_1 & + & 0,3x_2 & \leq & 2,4, \end{array}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Ответ: $x_1^* = 4,5,\ x_2^* = 3,\ f_* = 4050$ (долл.).

Задача 3. Математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & \to & \max; \\ 10x_1 & + & 5x_2 & \leq & 600, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} 6x_1 & + & 20x_2 & \leq & 600, \\ 8x_1 & + & 15x_2 & \leq & 600, \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0,$$

где x_1 - суточный план производства изделий 1, x_2 - план производства изделий 2.

Ответ: $x_1^* = \frac{600}{11} \simeq 54,5$, $x_2^* = \frac{120}{11} \simeq 10,9$,

$$f_* = \frac{1560}{11} \simeq 141,8 \text{ (долл.)}.$$

З а м е ч а н и е. Строго говоря, по смыслу задачи величины x_1^* и x_2^* должны быть целыми, так что полученное решение, казалось бы, не имеет «физического смысла». Однако мы легко преодолеем это затруднение, если увеличим период планирования до 11 суток. Тогда, очевидно, оптимальный план производства состоит в том, чтобы каждые 11 суток производить 600 изделий 1 и 120 изделий 2. Если же все-таки мы хотим получить оптимальный целочисленый план на одни сутки, то, вообще говоря, нам не остается ничего другого, как перебрать все допустимые целочисленные точки. В данном случае целочисленное решение задачи $\overline{x} = (54, 11)$. Значение целевой функции в этой точке равно 141. Легко видеть, что точка $\overline{x}$ может быть получена округлением координат точки $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, однако округление непрерывного решения (т. е. решения, не учитывающего условий целочисленности) далеко не всегда приводит к точному целочисленному решению задачи. Иллюстрацией этому служит следующая задача – задача 4.

Задача 4. Прежде всего, найдем прибыль от производства каждой из деталей:

прибыль = продажная цена - затраты;

затраты = стоимость отливки + стоимость обработки;

стоимость обработки = стоимость токарной обработки +

+ стоимость сверловки +

+ стоимость шлифовки.

Следовательно, удельная прибыль для деталей А и В равна, соответственно,

$$c_A = 5 - (2 + \tfrac{20}{25} + \tfrac{14}{28} + \tfrac{17.5}{35}) = \tfrac{6}{5} \quad (\text{долл./дет.}),$$
$$c_B = 6 - (3 + \tfrac{20}{40} + \tfrac{14}{35} + \tfrac{17.5}{25}) = \tfrac{7}{5} \quad (\text{долл./дет.}).$$

Обозначая через x_A (дет./ч) план производства деталей А, через x_B (дет./ч) – план производства деталей В, приходим к следующей задаче:

$$\begin{array}{rcrcr} \frac{6}{5}x_A & + & \frac{7}{5}x_B & \to & \max; \\ \frac{1}{25}x_A & + & \frac{1}{40}x_B & \le & 1, \\ \frac{1}{28}x_A & + & \frac{1}{35}x_B & \le & 1, \\ \frac{1}{35}x_A & + & \frac{1}{25}x_B & \le & 1, \\ \multicolumn{5}{c}{x_A \ge 0, \ x_B \ge 0.} \end{array}$$

После очевидных преобразований эту задачу можно представить в более удобном виде:

$$\begin{array}{rcrcr} \frac{1}{5}(6x_A & + & 7x_B) & \to & \max; \\ 8x_A & + & 5x_B & \le & 200, \\ 5x_A & + & 4x_B & \le & 140, \\ 5x_A & + & 7x_B & \le & 175, \\ \multicolumn{5}{c}{x_A \ge 0, \ x_B \ge 0.} \end{array}$$

Ответ: $x_A^* = \frac{525}{31} \simeq 16,93$, $x_B^* = \frac{400}{31} \simeq 12,90$,

$f_* = \frac{1190}{31} \simeq 38,39$ (долл./ч).

З а м е ч а н и е. Ближайшие к оптимальному плану допустимые целочисленные точки: $x^1 = (16, 12)$, $x^2 = (16, 13)$ и $x^3 = (17, 12)$. Наилучшая среди них – точка x^2, в которой значение целевой функции равно $\frac{187}{5} = 37,4$. В действительности же, целочисленное решение $\overline{x} = (14, 15)$. В этой точке значение целевой функции равно $\frac{189}{5} = 37,8$. Таким образом, точка x^2, полученная округлением непрерывного решения x^*, дает лишь приближенное решение задачи. Качество этого приближенного решения можно оценить величиной относительного отклонения от максимально возможного значения целевой функции:

$$\delta = \frac{38,39 - 37,4}{38,39} \simeq 2,6\,\%\,.$$

Задача 5. Пусть x_A - план производства бензина А (1000 л/мес.), x_B - план производства бензина В (1000 л/мес.). Тогда математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{array}{rcrcl} 90x_A & + & 120x_B & \to & \max; \\ \frac{1}{3}x_A & + & \frac{1}{2}x_B & \leq & 1500, \\ \frac{1}{3}x_A & + & \frac{1}{6}x_B & \leq & 1200, \\ \frac{1}{3}x_A & + & \frac{1}{3}x_B & \leq & 1300, \\ \multicolumn{5}{c}{x_A \geq 0,\ x_B \geq 0.} \end{array}$$

Ответ: $x_A^* = 2700,\ x_B^* = 1200,\ f_* = 387\,000$ (руб.).

Задача 6. Обозначая через x_M и x_A количество наборов «Матильда» и «Амалия», соответственно, приходим к задаче:

$$\begin{array}{rcrcr} 4000x_M & + & 8000x_A & \to & \max\,; \\ 0,1x_M & + & 0,2x_A & \leq & 50\,, \\ 0,2x_M & + & 0,1x_A & \leq & 60\,, \\ 0,9x_M & + & 1,2x_A & \leq & 360\,, \\ \multicolumn{5}{c}{x_M \geq 0,\ x_A \geq 0.} \end{array}$$

Решение этой задачи неединственно - в любой точке отрезка $X_* = [x^*,\, x^{**}]$, где $x^* = (0,\ 250)$, $x^{**} = (200,\ 150)$, целевая функция достигает своего максимального значения, равного 2 000 000 (руб.). Неединственные решения задачи ЛП называются *альтернативными оптимальными решениями.* Наличие альтернативных оптимальных решений, вообще говоря, может оказаться полезным, так как позволяет при выборе оптимального плана не ограничиваться единственным вариантом, а, используя различные неформальные соображения, выбирать план из некоторой (известной) совокупности оптимальных планов. В рассматриваемой задаче, например, вряд ли имеет смысл выбирать план x^*, при котором набор «Матильда» не производится. Лучше, страхуясь от непредвиденных колебаний спроса, выбрать план x^{**}, или, скажем, план $\overline{x} = (100, 200)$, лежащий на середине отрезка X_*. С другой стороны, альтернативные оптимальные планы весьма неустойчивы к малейшим изменениям условий задачи. Например, если по какой-то причине удельная прибыль от производства набора «Матильда» изменится и станет равна 3999 руб., то решением задачи станет одна точка – x^*.

Задача 7. Обозначим через x_i, $i = 1,2,3,4$, план использования сырья i-го типа (кг). Тогда рассматриваемая задача примет вид:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 10x_1 & + & 30x_2 & + & 40x_3 & + & 60x_4 & \to & \min; \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ 10x_1 & + & 20x_2 & + & 25x_3 & + & 40x_4 & = & 30, \end{array}$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4.$$

Ответ: $x^* = (1/3,\ 0,\ 0,\ 2/3)$, $f_* = 130/3$ (коп./кг).

Таким образом, оптимальным является использование первого и четвертого типов сырья в отношениии 1:2.

З а м е ч а н и е. Хотя данная задача – задача с четырьмя переменными, ее можно решить графически. А именно, можно выразить любые две переменные через две оставшиеся и прийти, таким образом, к задаче с двумя переменными. Или можно перейти к двойственной задаче, которая является задачей с двумя переменными, решить эту задачу графически, а затем, используя теорию двойственности, найти решение исходной задачи. Рассмотрим каждый из этих способов.

С п о с о б 1. Выразим переменные x_3 и x_4 через x_1 и x_2:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & \frac{2}{3} & - & 2x_1 & - & \frac{4}{3}x_2\,, \\ x_4 & = & \frac{1}{3} & + & x_1 & + & \frac{1}{3}x_2\,. \end{array}$$

Подставляя эти выражения в целевую функцию и учитывая условия неотрицательности переменных, приходим к задаче

$$-\tfrac{1}{3}(30x_1 + 10x_2) + \tfrac{140}{3} \to \min\,;$$
$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & \frac{4}{3}x_2 & \leq & \frac{2}{3}\,, \\ x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & \geq & -\frac{1}{3}\,, \end{array}$$
$$x_1 \geq 0\ , x_2 \geq 0\,.$$

Ее решение: $x_1^* = 1/3$, $x_2^* = 0$. Подставляя эти значения в выражения для x_3 и x_4, получим, что $x_3^* = 0\,, x_4^* = 2/3$.

С п о с о б 2. Двойственная задача имеет вид:

$$\begin{array}{rcrcr} y_1 & + & 30y_2 & \to & \max\,; \\ y_1 & + & 10y_2 & \leq & 10\,, \\ y_1 & + & 20y_2 & \leq & 30\,, \\ y_1 & + & 25y_2 & \leq & 40\,, \\ y_1 & + & 40y_2 & \leq & 60\,. \end{array}$$

Ее решение: $y_1^* = -20/3$, $y_2^* = 5/3$. В точке $y^* = (y_1^*,\, y_2^*)$ второе и третье условия двойственной задачи выполняются как строгие неравенства, поэтому $x_2^* = x_3^* = 0$. Подставляя эти значения в условия исходной задачи, получим, что

$$\begin{array}{rcrcr} x_1^* & + & x_4^* & = & 1\,, \\ 10x_1^* & + & 40x_4^* & = & 30\,. \end{array}$$

Решив эту систему, найдем x_1^* и x_4^*.

Задача 8. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 планируемое к выпуску количество холодильников, газовых плит, морозильных шкафов и электропечей, соответственно. Тогда получаем следующую задачу:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 10(20x_1 & + & 18x_2 & + & 25x_3 & + & 10x_4) & \to & \max\,; \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \le & 12000\,, \\ 2x_1 & + & 1.5x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \le & 7000\,, \end{array}$$

$$x_i \ge 0,\ \ i = 1, 2, 3, 4.$$

Двойственная задача имеет вид:

$$\begin{array}{rcrcr} 1000(12y_1 & + & 7y_2) & \to & \min\,; \\ 3y_1 & + & 2y_2 & \ge & 200\,, \\ 3y_1 & + & 1.5y_2 & \ge & 180\,, \\ 4y_1 & + & 3y_2 & \ge & 250\,, \\ 2y_1 & + & y_2 & \ge & 100\,, \\ & & y_1 \ge 0,\ \ y_2 \ge 0\,. & & \end{array}$$

Ее решение: $y_1^* = y_2^* = 40$. На оптимальном плане $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ первые два ограничения двойственной задачи выполняются как точные равенства, третье и четвертое - как строгие неравенства. Следовательно, $x_3^* = x_4^* = 0$. Далее, так как $y_1^* > 0$ и $y_2^* > 0$, то оба ограничения исходной задачи на оптимальном плане выполняются как точные равенства. Таким образом, мы имеем, что

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1^* & + & 3x_2^* & = & 12000\,, \\ 2x_1^* & + & 1,5x_2^* & = & 7000\,. \end{array}$$

Отсюда $x_1^* = x_2^* = 2000$, $f_* = 760\,000$ (руб.).

Задача 9. Пусть x_A и x_B - планы производства продуктов А и В, соответственно (ед./сут.). Тогда математическую модель задачи можно записать следующим образом:

$$f(x) = 4x_A + 10x_B + 3\min\{2x_B,\, 6\} - 2\max\{0,\, 2x_B - 6\} \to \max\,;$$

$$x \in X = \{x = (x_A,\, x_B) : 2x_A + 4x_B \le 16\,,$$

$$4x_A + 3x_B \le 24\,,\ x_A \ge 0\,,\ x_B \ge 0\,\}.$$

Множество X разобьем на два подмножества – $X_1 = \{x \in X : x_B \le 3\}$ и $X_2 = \{x \in X : x_B \ge 3\}$, а рассматриваемую задачу – на две подзадачи:

$$f(x) \to \max\,;\ x \in X_1\,,$$

$$f(x) \to \max\,;\ x \in X_2\,.$$

Нетрудно видеть, что на множестве X_1 функция $f(x) = 4x_A + 16x_B$, на множестве X_2 функция $f(x) = 4x_A + 6x_B + 30$. Решение обеих подзадач (его можно получить графически) – одно и то же – точка $x^* = (2,\, 3)$ $(f(x^*) = 56)$. Понятно, что эта точка будет решением и исходной задачи.

Задача 10. Математическая модель задачи имеет вид:

$$c_1(x_1 - b_1) + c_2(x_1 + x_2 - b_2) + \sum_{i=3}^{8} c_i(x_1 + x_2 + x_3 - b_i) +$$

$$+ c_9(x_2 + x_3 - b_9) + c_{10}(x_3 - b_{10}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{8} c_i \cdot x_1 + \sum_{i=2}^{9} c_i \cdot x_2 + \sum_{i=3}^{10} c_i \cdot x_3 - \sum_{i=1}^{10} c_i b_i \to \min\,;$$

$$\begin{array}{ccccccl}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \ge & \max\limits_{i=3,\ldots,8} b_i\,, \\
x_1 & + & x_2 & & & \ge & b_2\,, \\
 & & x_2 & + & x_3 & \ge & b_9\,, \\
x_1 & & & & & \ge & b_1\,, \\
 & & x_2 & & & \ge & 0\,, \\
 & & & & x_3 & \ge & b_{10}\,.
\end{array}$$

После подстановки сюда значений c_i и b_i получим следующую задачу:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
61x_1 & + & 71x_2 & + & 86x_3 & - & 1421 \to \min\,; \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 25\,, \\
x_1 & + & x_2 & & & \geq & 20\,, \\
 & & x_2 & + & x_3 & \geq & 10\,, \\
x_1 & & & & & \geq & 10\,, \\
 & & x_2 & & & \geq & 0\,, \\
 & & & & x_3 & \geq & 5\,.
\end{array}$$

Целевую функцию этой задачи можно представить в виде:

$$61(x_1 + x_2 + x_3) + 10(x_2 + x_3) + 15x_3 - 1421.$$

Тогда из условий задачи следует, что ее минимальное значение равно

$$61 \cdot 25 + 10 \cdot 10 + 15 \cdot 5 - 1421 = 279.$$

Оно достигается при

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 25\,, \\
 & & x_2 & + & x_3 & = & 10\,, \\
 & & & & x_3 & = & 5\,.
\end{array}$$

Отсюда $x_1^* = 15$, $x_2^* = 5$, $x_3^* = 5$.

Задача 11. Пусть x_1 (ед.) – планируемый выпуск продукции первого вида, x_2 (ед.) – планируемый выпуск продукции второго вида, x_3 (долл.) – планируемая сумма банковской ссуды. Тогда прибыль фирмы будет равна

$$(14 - 10)x_1 + (11 - 8)x_2 - 0,02x_3 = 4x_1 + 3x_2 - 0,02x_3\ .$$

Производственные ограничения имеют вид:

$$\begin{array}{rcrcl}
0,5x_1 & + & 0,3x_2 & \leq & 500\,, \\
0,3x_1 & + & 0,4x_2 & \leq & 400\,, \\
0,2x_1 & + & 0,1x_2 & \leq & 200\,.
\end{array}$$

Следующее ограничение – это ограничение на себестоимость произведенной продукции:

$$10x_1 + 8x_2 \leq 10000 + x_3\,,$$

или

$$10x_1 + 8x_2 - x_3 \leq 10\,000\,.$$

Наконец, последнее ограничение – это ограничение, накладываемое условием ликвидности:

$$\frac{[10\,000 + x_3 - 10x_1 - 8x_2] + 14x_1 + 11x_2}{x_3 + 0,02x_3} \geq 3\,,$$

или, после преобразований,

$$-4x_1 - 3x_2 + 2,06x_3 \leq 10\,000\,.$$

Таким образом, математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
4x_1 & + & 3x_2 & - & 0,02x_3 & \to & \max\,; \\
0,5x_1 & + & 0,3x_2 & & & \leq & 500\,, \\
0,3x_1 & + & 0,4x_2 & & & \leq & 400\,, \\
0,2x_1 & + & 0,1x_2 & & & \leq & 200\,, \\
10x_1 & + & 8x_2 & - & x_3 & \leq & 10\,000\,, \\
-4x_1 & - & 3x_2 & + & 2,06x_3 & \leq & 10\,000\,,
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0\,, 0 \leq x_3 \leq 20\,000\,.$$

Очевидно, что возможно лишь два варианта оптимального плана:

а) для обеспечения производства фирме хватает собственных средств и, следовательно, $x_3^* = 0$;

б) для обеспечения производства фирме не хватает собственных средств и, следовательно, $x_3^* > 0$, причем, понятно, заемных средств должно быть взято ровно столько, сколько требуется (вместе с собственными средствами) для оплаты труда и материалов:

$$10x_1 + 8x_2 = 10\,000 + x_3;$$

исключая отсюда x_3, приходим, как и в варианте а), к задаче ЛП с двумя переменными.

Таким образом, решение исходной задачи можно свести к решению двух задач ЛП с двумя переменными:

Задача а):

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & \to & \max\,; \\ 0,5x_1 & + & 0,3x_2 & \leq & 500\,, \\ 0,3x_1 & + & 0,4x_2 & \leq & 400\,, \\ 0,2x_1 & + & 0,1x_2 & \leq & 200\,, \\ 10x_1 & + & 8x_2 & \leq & 10\,000\,, \\ \multicolumn{5}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\,.} \end{array}$$

Задача б):

$$\begin{array}{rcrcl} 3,8x_1 & + & 2,84x_2 & + & 200 \to \max\,; \\ 0,5x_1 & + & 0,3x_2 & \leq & 500\,, \\ 0,3x_1 & + & 0,4x_2 & \leq & 400\,, \\ 0,2x_1 & + & 0,1x_2 & \leq & 200\,, \\ 16,6x_1 & + & 13,48x_2 & \leq & 30\,600\,, \\ 10x_1 & + & 8x_2 & \geq & 10\,000\,, \\ \multicolumn{5}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\,.} \end{array}$$

Решение задачи а): $x^1 = (1000,\ 0),\ f(x^1) = 4000.$

Решение задачи б): $x^2 = (\frac{8000}{11},\ \frac{5000}{11}),\ f(x^2) = \frac{46\,800}{11} \simeq 4254,54.$

Отсюда следует, что решение исходной задачи

$$x^* = \left(\frac{8000}{11}, \frac{5000}{11}, \frac{10000}{11}\right) \simeq (727,27\,;\ 454,54\,;\ 909,09).$$

Задача 12. Введем следующие переменные:

x_1 — —количество продукта A, произведенное в квартале I,

x_2 — —количество продукта A, произведенное в квартале II,

x_3 — —количество продукта B, произведенное в квартале I,

x_4 — —количество продукта B, произведенное в квартале II.

Тогда

переменные издержки $= 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4,$

издержки хранения сырья $= 0,01(6000 - 10x_1 - 7x_3),$

издержки хранения продуктов $= 0,1x_1 + 0,2x_3.$

Совокупные издержки, таким образом, равны

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 0,01(6000 - 10x_1 - 7x_3) +$$
$$+ 0,1x_1 + 0,2x_3 = 60 + 3x_1 + 4x_2 + 6,13x_3 + 5x_4.$$

Ограничения задачи:

a) условия контракта:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 500\ , \\ x_3 & + & x_4 & = & 700\ ; \end{array}$$

b) технологические ограничения:

$$\begin{array}{rcrcl} 0,5x_1 & + & 0,8x_3 & \le & 350\ , \\ 0,5x_2 & + & 0,8x_4 & \le & 500\ , \\ 10x_1 & + & 7x_3 & \le & 6000\ , \\ 10x_2 & + & 7x_4 & \le & 4000 + (6000 - 10x_1 - 7x_3); \end{array}$$

c) условия неотрицательности переменных:

$$x_i \ge 0\ \ , i = 1, 2, 3, 4.$$

Эту задачу, очевидно, легко свести к задаче с двумя переменными.

Ответ: $x_1^* = 500,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 75,\ x_4^* = 625,\ f_* = 5144,75$ долл.

Задача 13. Математическая модель:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 250x_A & + & 260x_B & + & 225x_C & \to & \max\,; \\ 25\,000x_A & + & 30\,000x_B & + & 22\,000x_C & \le & 350\,000\ , \\ 200x_A & + & 250x_B & + & 175x_C & \le & 4000\ , \end{array}$$

$$x_A \ge 1,\ x_B \ge 1,\ x_C \ge 1, \text{ все переменные – целые.}$$

Здесь x_A, x_B и x_C – количество станков типов A, B и C, соответственно.

Прежде всего, попытаемся решить эту задачу как непрерывную (т. е. без условий целочисленности). Для этого сделаем замену переменных:

$$x_A = z_A + 1,\ x_B = z_B + 1,\ x_C = z_C + 1.$$

Тогда, после очевидных преобразований, рассматриваемая задача примет вид:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5(50z_A & + & 52z_B & + & 45z_C) & + & 735 \to \max\,; \\ 25z_A & + & 30z_B & + & 22z_C & \le & 273\ , \\ 8z_A & + & 10z_B & + & 7z_C & \le & 135\ , \end{array}$$

$$z_A \geq 0,\ z_B \geq 0,\ z_C \geq 0.$$

Ее решение легко получить с помощью перехода к двойственной задаче (также, например, как в задаче 8). Этим решением будет точка $z^* = (z_A^*,\ z_B^*,\ z_C^*)$, где $z_A^* = z_B^* = 0,\ z_C^* = 12\frac{9}{22}$. Следовательно,

$$x_A^* = x_B^* = 1,\ x_C^* = 13\frac{9}{22},\ \ f_* = 3527\frac{1}{22} \simeq 3527{,}045.$$

Округление этого решения до ближайшей допустимой целочисленной точки дает приближенное решение задачи: $\overline{x} = (1,\ 1,\ 13)$. Значение целевой функции в этой точке, $f(\overline{x}) = 3435$, относительное отклонение от непрерывного решения

$$\delta \simeq \frac{3527{,}045 - 3435}{3527{,}045} \simeq 2{,}61\%.$$

Точное целочисленное решение: $x^{**} = (4,\ 1,\ 10),\ f(x^{**}) = 3510$.

Задача 14. Для решения задачи об оптимальном раскрое нужно прежде всего составить всевозможные способы раскроя исходного материала на заготовки. В рассматриваемой задаче таких способов четыре:

1) 3 заготовки по 200 см и 0 заготовок по 90 см;

2) 2 заготовки по 200 см и 2 заготовки по 90 см;

3) 1 заготовка по 200 см и 5 заготовок по 90 см;

4) 0 заготовок по 200 см и 7 заготовок по 90 см.

Полученные способы раскроя удобно занести в следующую *раскройную таблицу*, каждый столбец которой соответствует своему способу раскроя:

l	1	2	3	4
200	3	2	1	0
90	0	2	5	7

Обозначим через $x_i,\ \ i = 1, 2, 3, 4,$ количество полос, планируемых к раскрою i-м способом. Тогда количество заготовок первого вида будет равно $3x_1 + 2x_2 + x_3$, количество заготовок второго вида – $2x_2 + 5x_3 + 7x_4$. Из этих заготовок можно набрать

$$\min\left\{\frac{1}{2}(3x_1 + 2x_2 + x_3),\ \frac{1}{3}(2x_2 + 5x_3 + 7x_4)\right\}$$

полных комплектов.

Таким образом, мы приходим к следующей задаче:

$$\min\left\{\frac{1}{2}(3x_1 + 2x_2 + x_3),\ \frac{1}{3}(2x_2 + 5x_3 + 7x_4)\right\} \to \max\,;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 800\,,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Полученная задача называется *задачей на минимакс*, и ее целевая функция не является линейной. Однако существует простой прием, позволяющий легко сводить такие задачи к задачам линейного программирования. А именно, введем новую, дополнительную, переменную

$$x_5 = \min\left\{\frac{1}{2}(3x_1 + 2x_2 + x_3),\ \frac{1}{3}(2x_2 + 5x_3 + 7x_4)\right\}.$$

Тогда, по определению минимума,

$$x_5 \leq \frac{1}{2}(3x_1 + 2x_2 + x_3) \quad \text{и} \quad x_5 \leq \frac{1}{3}(2x_2 + 5x_3 + 7x_4)\,.$$

В силу этого рассматриваемую задачу можно записать в следующем виде:

$$x_5 \to \max\,;$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & - & 2x_5 & \geq & 0, \\
 & & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & - & 3x_5 & \geq & 0, \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 800,
\end{array}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5.$$

Ее решение: $x_1^* = 350,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 450,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 750.$

Таким образом, оптимальный алгоритм раскроя состоит в том, чтобы 350 полос кроить 1-м способом и 450 полос – 2-м способом. При этом будет получено 750 комплектов заготовок.

Задача 15. Пусть x_i – часть площади (каждого гектара), занятая пшеницей соответствующего сорта, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда гарантированный урожай будет равен

$$\min\{25x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 15x_4, 15x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 40x_4\},$$

и мы приходим к задаче:

$$\min\{25x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 15x_4, 15x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 40x_4\} \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_i \geq 0\,, i = 1, 2, 3, 4.$$

Вводя, как и в задаче 14, новую переменную

$$x_5 = \min\{25x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 15x_4, 15x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 40x_4\},$$

получим задачу:

$$x_5 \to \max\,;$$

$$25x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 15x_4 - x_5 \geq 0\,,$$

$$15x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 40x_4 - x_5 \geq 0\,,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\,,$$

$$x_i \geq 0\,, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Решение: $x_1^* = x_2^* = 0, x_3^* = 5/9, x_4^* = 4/9, x_5^* = 70/3$. Таким образом, если сеять пшеницу только третьего и четвертого сортов в отношении 5:4, то гарантированный урожай будет равен $70/3 = 23\frac{1}{3}$ ц/га.

Задача 16. Введем переменные x_i, $i = 1, \ldots, 5$, каждая из которых может принимать только два значения – 0 или 1 (такие переменные называются *булевыми переменными*). Если переменная x_i принимает значение 1, то это будет означать, что i-й проект выбирается для инвестирования, если 0 – то отвергается. Тогда рассматриваемую задачу можно представить в следующей форме:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & + & 4x_5 & \to & \max; \\
3x_1 & & & + & x_3 & + & 10x_4 & + & 2x_5 & \leq & 12, \\
 & & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & & & \leq & 8, \\
 & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 8, \\
 & & & & 2x_3 & & & + & x_5 & \leq & 4,
\end{array}$$

$$x_i = 0 \vee 1,\ i = 1, \ldots, 5.$$

Поскольку число переменных в этой задаче мало и каждая из них может принимать лишь два значения, то задачу можно решить простым перебором. А именно, всего нужно рассмотреть $2^5 = 32$ точки $x^1 = (0,0,0,0,0)$, $x^2 = (0,0,0,0,1)$, $x^3 = (0,0,0,1,1)$, $\ldots$, $x^{32} = (1,1,1,1,1)$. Некоторые из них окажутся недопустимыми, а среди допустимых выберем ту, в которой значение целевой функции будет максимально. В результате получим следующее решение задачи: $x^* = (1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1)$. То есть фирме следует выбрать для реализации первый, второй, третий и пятый проекты. Ожидаемая прибыль при этом составит 1 000 000 долл.

Теперь допустим, что проекты 2 и 3 несовместимы, т. е. либо оба проекта отвергаются, либо выбирается один и только один из них. Это требование учитывается введением в условия задачи дополнительного ограничения

$$x_2 + x_3 \leq 1\,.$$

В этом случае задача имеет два альтернативных решения:

$$\overline{x} = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1) \ \text{ и } \ \overline{\overline{x}} = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Задача 17. Введем следующие переменные:

- x_1 – количество перерабатываемой руды вида A (тыс. т/сут.);
- x_2 – количество перерабатываемой руды вида B (тыс. т/сут.);
- x_3 – количество продукта II, проходящего через конвертор (тыс. т/сут.);
- x_4 – количество продукта I, идущего в запас (тыс. т/сут.);
- x_5 – излишек продукта I, продаваемый по пониженной цене (тыс. т/сут.);
- x_6 – количество докупленного продукта I (тыс. т/сут.);
- x_7 – количество докупленного продукта II (тыс. т/сут.).

Тогда выход продукта I будет равен $0,15x_1 + 0,25x_2 + 0,5x_3 + x_6$, выход продукта II – $0,85x_1 + 0,75x_2 - 0,5x_3 + x_7$. Доходы от реализации продуктов I и II равны, соответственно,

$$I_1(x) = 5,5(0,15x_1 + 0,25x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5 + x_6) + 5,2x_4 + 5x_5,$$

$$I_2(x) = 3,8(0,85x_1 + 0,75x_2 - 0,5x_3 + x_7).$$

Затраты на производство обоих продуктов

$$E(x) = 3,25x_1 + 3,4x_2 + 0,35(x_1 + x_2) + 0,1(0,15x_1 + 0,25x_2) +$$

$$+\,0,25x_3 + 5,75x_6 + 4x_7.$$

Таким образом, прибыль предприятия

$$P(x) = I_1(x) + I_2(x) - E(x) =$$

$$= 0,44x_1 + 0,45x_2 + 0,6x_3 - 0,3x_4 - 0,5x_5 - 0,25x_6 - 0,2x_7.$$

Ограничения задачи:

1. Ограничение сверху на количество продукта I, которое можно продать по обычной цене:

$$0,15x_1 + 0,25x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5 + x_6 \le 45.$$

2. Ограничение снизу на количество продукта I, которое должно быть продано по обычной цене:

$$0,15x_1 + 0,25x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5 + x_6 \ge 40.$$

3. Ограничение на количество продукта II, проходящее через конвертор:

$$x_3 \le 0,85x_1 + 0,75x_2 + x_7\ .$$

4. Ограничение на мощность основного процесса переработки:

$$x_1 + x_2 \le 100$$

(отсюда следует, что $x_1 \le 100$).

5. Ограничение на количество руды вида B:

$$x_2 \le 30.$$

6. Ограничение на мощность конвертора:

$$x_3 \le 50\ .$$

7. Ограничение на объем складируемого продукта I:

$$x_4 \le 4.$$

Наконец, все переменные – неотрицательные.

Решение: $x_1^* = 70,\ x_2^* = 30,\ x_3^* = 50,\ x_4^* = x_5^* = x_6^* = x_7^* = 0,$

$P(x^*) = 74{,}3$ тыс. долл./сут.

Задача 18. Обозначим через x_{ij} количество грузовиков i-го типа, работающих j смен в сутки $(i = A, B, C; j = 1, 2, 3)$. Тогда задача принимает вид:

$$2100x_{A1} + 4200x_{A2} + 6300x_{A3} + 3600x_{B1} + 7200x_{B2} + 10\,800x_{B3}+$$

$$+3780x_{C1} + 7560x_{C2} + 11\,340x_{C3} \to \max;$$

$$10\,000(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3}) + 20\,000(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3})+$$

$$+23\,000(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3}) \le 600\,000,$$

$$x_{A1} + 2x_{A2} + 3x_{A3} + 2x_{B1} + 4x_{B2} + 6x_{B3} + 2x_{C1} + 4x_{C2} + 6x_{C3} \le 145,$$

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} \le 30,$$

$$x_{ij} \ge 0, \text{ целые}; \ i = A,\ B,\ C;\ \ j = 1,\ 2,\ 3.$$

Максимальная суточная производительность, равная 280 980 тонно-миль, достигается при $x_{A1}^* = x_{A2}^* = x_{B1}^* = x_{B2}^* = x_{B3}^* = x_{C1}^* = 0,\ x_{A3}^* = 11,\ x_{C2}^* = 1,\ x_{C3}^* = 18$. Таким образом, фирме следует заказать 11 грузовиков типа A и 19 грузовиков типа C. Заметим, что при решении задачи мы попутно получили оптимальный график расстановки грузовиков по сменам.

Задача 19. Как и в задаче 14, прежде всего нужно составить всевозможные способы раскроя листа на заготовки. Имеет смысл рассматривать следующие пять способов раскроя (остальные способы либо эквивалентны этим, либо заведомо хуже):

1 2 3 4 5

Соответствующая раскройная таблица имеет вид:

	1	2	3	4	5
Деталь A	4	3	2	1	0
Деталь B	1	2	4	5	6
Отходы (м^2)	1	2	0	1	2

Обозначая через x_i количество листов, раскраиваемых i-м способом ($i = 1, \ldots, 5$), приходим к задаче

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & 2x_5 & \to & \min\,; \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 & - & 6x_5 & \geq & 0\,, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 5000\,, \end{array}$$

$$x_i \geq 0\,, i = 1, \ldots, 5\,.$$

Ее решение легко получить с помощью перехода к двойственной задаче.

Ответ: $x^* = (2000,\ 0,\ 3000,\ 0,\ 0)$.

Задача 20. Обозначим через x_{1j} и x_{2j} часть рабочего времени, в течение которого токарные станки и автомат, соответственно, заняты обработкой j-й детали ($j = 1, 2, 3$). Тогда количество деталей № 1, № 2 и № 3, произведенных за день, будет равно

$$3 \cdot 50x_{11} + 120x_{21}\,,$$

$$3 \cdot 40x_{12} + 90x_{22}\,,$$

$$3 \cdot 80x_{13} + 60x_{23}\,,$$

соответственно. Количество полных комплектов

$$z = \min\{150x_{11} + 120x_{21},\ \frac{1}{3}(120x_{12} + 90x_{22}),\ \frac{1}{2}(240x_{13} + 60x_{23})\} =$$

$$= \min\{150x_{11} + 120x_{21},\ 40x_{12} + 30x_{22},\ 120x_{13} + 30x_{23}\},$$

а задача максимизации числа комплектов может быть записана в следующем виде (см. задачу 14):

$$z \to \max\,;$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1\,,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1\,,$$
$$150x_{11} + 120x_{21} - z \geq 0\,,$$
$$40x_{12} + 30x_{22} - z \geq 0\,,$$
$$120x_{13} + 30x_{23} - z \geq 0\,,$$
$$x_{ij} \geq 0\,, i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3.$$

Ответ: $z^* = 840/19$,
$x_{11}^* = 0$, $x_{12}^* = 12/19$, $x_{13}^* = 7/19$,
$x_{21}^* = 7/19$, $x_{22}^* = 12/19$, $x_{23}^* = 0$.

Задача 21. Обозначим через x_1 и x_2 количество изделий I и II, соответственно, через t_1 и t_2 – время сверхурочной работы станков 1 и 2 (час.). Тогда должны выполняться условия

$$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{6} \leq 8 + t_1,\ t_1 \leq 4,$$
$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{8} \leq 8 + t_2,\ t_2 \leq 4.$$

После очевидных преобразований приходим к следующей задаче ЛП:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 180x_1 & + & 120x_2 & - & 450t_1 & - & 330t_2 & \to & \max\,; \\ 6x_1 & + & 5x_2 & - & 30t_1 & & & \leq & 240\,, \\ 8x_1 & + & 4x_2 & & & - & 32t_2 & \leq & 256\,, \end{array}$$
$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ 0 \leq t_1 \leq 4\ ,\ 0 \leq t_2 \leq 4\,.$$

Ответ: $x_1^* = 48$, $x_2^* = 0$, $t_1^* = 1{,}6$, $t_2^* = 4$, $f_* = 6600$.

З а м е ч а н и е. Если отказаться от сверхурочных работ, то оптимальный план производства будет равен: $x_1^* = 20$, $x_2^* = 24$, $f_* = 6480$.

Задача 22. Математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
45,1x_{11} & + & 32,4x_{12} & + & 45,1x_{21} & + & 32,4x_{22} & \to & \max\ ; \\
x_{11} & + & x_{12} & & & & & \le & 30\,000\ , \\
 & & & & x_{21} & + & x_{22} & \le & 70\,000\ , \\
x_{11} & & & + & x_{21} & & & \le & 20\,000\ , \\
-2x_{11} & & & + & 8x_{21} & & & \le & 0\ , \\
 & & -8x_{12} & & & + & 2x_{22} & \le & 0\ , \\
-x_{11} & & & + & 3x_{21} & & & \le & 0\ , \\
 & & -3x_{12} & & & + & x_{22} & \le & 0\ ,
\end{array}$$

$$x_{ij} \ge 0\ ,\ \ i, j = 1, 2.$$

Здесь x_{ij} – количество i-го полупродукта (баррелей) используемого для производства авиационного ($j = 1$) и автомобильного ($j = 2$) бензинов, соответственно.

Целевая функция задачи и первые три ограничения комментариев не требуют. Остальные ограничения получены из условий на качество конечных продуктов. Например, по правилу смешения, октановое число авиационного бензина равно $(104x_{11}+94x_{21})/(x_{11}++x_{21})$, откуда, в силу условий задачи, следует ограничение

$$\frac{104x_{11} + 94x_{21}}{x_{11} + x_{21}} \ge 102.$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает четвертое условие задачи. Остальные три условия получены аналогично.

Ответ: $x^*_{11} = 7273$ барреля , $x^*_{12} = 22\,727$ баррелей ,
$x^*_{21} = 1818$ баррелей , $x^*_{22} = 68\,182$ барреля ,
$f_* = 3\,355\,455$ долл.
(все значения округлены до целых чисел).

З а м е ч а н и е. Полученый в результате оптимального смешивания авиационный бензин имеет октановое число 102 и давление насыщенных паров, равное 5,8 фунта/кв. дюйм. Для автомобильного бензина эти показатели равны 96,5 и 8,0.

Задача 23. Пусть x_A, x_B и x_C (ед.) обозначают объем выпуска продукции видов А, В и С, соответственно. Кроме того, введем переменные

δ_A, δ_B и δ_C, которые могут принимать только два значения - 0 и 1 (булевы переменные). Если какая-то из этих переменных принимает значение, равное 0, то это означает, что соответствующая продукция (A, B или C) не производится, в противном случае (т. е. если переменная равна 1) – производится. Тогда прибыль от производства продукции видов A, B и C будет равна, соответственно,

$$\begin{array}{rclcl} P_A &=& 2500x_A - 1200x_A - 9000\delta_A &=& 1300x_A - 9000\delta_A, \\ P_B &=& 4000x_B - 2400x_B - 16\,000\delta_B &=& 1600x_B - 16\,000\delta_B, \\ P_C &=& 3000x_C - 1400x_C - 12\,000\delta_C &=& 1600x_C - 12\,000\delta_C. \end{array}$$

Ресурсные ограничения очевидны, а ограничения, связанные с прогнозируемым размером спроса, записываются следующим образом:

$$x_A \le 50\delta_A\,,\ x_B \le 100\delta_B\,,\ x_C \le 20\delta_C\,.$$

В результате получим следующую *частично-булевую* задачу ЛП:

$$P = 1300x_A + 1600x_B + 1600x_C -$$

$$- 9000\delta_A - 16\,000\delta_B - 12\,000\delta_C \to \max\,;$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_A &+& 2x_B &+& 4x_C &\le& 180, \\ 3x_A &+& x_B &+& 3x_C &\le& 200, \\ x_A &+& 2x_B &+& 5x_C &\le& 160, \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll} x_A & & & - & 50\delta_A & & & \le & 0, \\ & x_B & & & & - & 100\delta_B \quad & \le & 0, \\ & & x_C & & & & - \ 20\delta_C & \le & 0, \end{array}$$

$$x_i \ge 0\,,\ \ \delta_i \in \{0,1\}\,,\ i = A, B, C.$$

Ответ: $x_A^* = 20\,,\ \ x_B^* = 70\,,\ \ x_C^* = 0\,,$

$\delta_A^* = \delta_B^* = 1\,,\ \ \delta_C^* = 0\,,$

$P_* \ = 113\,000$ руб.

Задача 24. Введем следующие переменные: x_i – количество продукции, произведенной в i-м месяце, y_i – запас продукции на начало i-го месяца, δ_i – булева переменная, принимающая значение 0, если в i-м месяце продукция не производится, и значение 1, если производится. Через d_i обозначим количество продукции, которое должно быть поставлено в i-м месяце: $d_1 = 90$,

$d_2 = 125$, $d_3 = 140$, $d_4 = 100$, $d_5 = 45$, $d_6 = 60$, $d_7 = 130$. В результате приходим к следующей задаче:

$$I = 300\sum_{i=1}^{7}\delta_i + 2\sum_{i=2}^{7} y_i \to \min\,;$$

$$x_1 - y_2 = d_1\,,$$

$$x_i + y_i - y_{i+1} = d_i\,,\ i = 2,\dots,6\,,$$

$$x_7 + y_7 = d_7\,,$$

$$x_i \geq 0\,,\ ,i = 1,\dots,7\,,$$

$$y_i \geq 0\,,\ ,i = 2,\dots,7\,,$$

$$\delta_i \in \{0,1\}\,,\ i = 1,\dots,7\,.$$

Нетрудно видеть, однако, что данная модель построена некорректно – булевы переменные δ_i никак не связаны с переменными x_i и их оптимальные значения в этой модели равны нулю для всех $i = 1,\dots,7$. Более того, и оптимальные значения переменных y_i равны нулю и, следовательно, $x_i^* = d_i$ для всех $i = 1,\dots,7$. Но в этом случае все переменные δ_i должны быть равны единице. Получили полный абсурд. Таким образом, в построенной модели нужно еще учесть, что $\delta_i = 1$, если соответствующая ей переменная $x_i > 0$ и $\delta_i = 0$, если $x_i = 0$. Вообще говоря, сделать это не сложно - достаточно определить переменные δ_i следующим образом:

$$\delta_i = \delta_i(x_i) = \begin{cases} 1\,, & \text{если } x_i > 0\,, \\ 0\,, & \text{если } x_i = 0\,. \end{cases}$$

Однако в этом случае переменная δ_i становится нелинейной (и даже разрывной) функцией переменной x_i и, стало быть, рассматриваемая задача перестает быть задачей линейного программирования.

Другой, более простой, но менее очевидный способ, сохраняющий к тому же линейность задачи, вытекает из задачи 23. А именно, зададимся некоторым положительным числом D и введем дополнительные ограничения

$$x_i - D\delta_i \leq 0\,,\ i = 1,\dots,7\,.$$

Очевидно, что при наличии этих ограничений $\delta_i = 1$ если $x_i > 0$. Новые ограничения, естественно, сужают множество допустимых планов, отсекая от него все планы, не удовлетворяющие этим условиям. Поэтому, чтобы не потерять истинное решение задачи, число D нужно выбирать достаточно большим. Нетрудно видеть, что в нашем случае в качестве верхней границы для переменных x_i можно взять любое число $D \geq \sum\limits_{i=1}^{7} d_i = 690$.

Ответ: $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*) = (215, 0, 240, 0, 105, 0, 130)$,

$\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*, \delta_4^*, \delta_5^*, \delta_6^*, \delta_7^*) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$,

$y^* = (y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*) = (125, 0, 100, 0, 60, 0)$,

$I_* = 1770$.

З а м е ч а н и е. Вообще говоря, число переменных задачи можно существенно уменьшить, исключив из условий-равенств переменные y_i. Кроме того, очевидно, что $x_1^* > 0$ и, следовательно, $\delta_1^* = 1$, так что переменную δ_1 можно также исключить из условий задачи. В результате получим следующую задачу ЛП:

$$I = 300 \sum_{i=2}^{7} \delta_i + 2 \sum_{i=1}^{6} (7 - i)(x_i - d_i) + 300 \to \min\,;$$

$$x_i + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - d_j) \geq d_i\,,\ i = 1, \ldots, 7\,,$$

$$0 \leq x_i \leq 700\delta_i\,,\ i = 2, \ldots, 7\,,$$

$$\delta_i \in \{0,\ 1\}\,,\ i = 2, \ldots, 7\,.$$

Упражнения

Упр. 1: $f_* = 1040$ долл.

Упр. 2: $f_* = 17$ усл. ед.

Упр. 3: $f_* = 2300$ долл.

Упр. 4: Непрерывное решение: $f_* \simeq 245,45$.
Целочисленное решение: $f_* = 245$.

Упр. 5: $f_* = 26\,700$ долл.

Упр. 6: $f_* = 59$ коп. на одну корову

Упр. 7: $f_* = 554\,500$ руб.

Упр. 8: $f_* = 260$ долл. в день.

Упр. 9: $f_* = 2460/7 \simeq 351,43$ руб.

Упр. 10: $f_* = 450$ изделий в сутки.

Упр. 11: $f_* = 36\,480$ руб./сут.

Упр. 12: $f_* = 7722$ пассажира.

Упр. 13: $f_* = 240\,000$ руб.

Упр. 14: $f_* = 24$ долл.

Упр. 15: $f_* = 625$ долл./сут.

Упр. 16: $f_* = 67$ тыс. руб.

Упр. 17: $f_* = 64$ руб.

Упр. 18: $f_* = 1940$ руб.

Упр. 19: $f_* = 585\,000$ руб.

Упр. 20: $a)$ $f_* = 5\,300$ руб.,

$b)$ $f_* = 4\,950$ руб.

Упр. 21: $f_* = 630$ комплектов. Решение задачи не единственно.

Упр. 22: $f_* = 1350$ долл./сут.

Упр. 23: $f_* = 2050$ руб.

Упр. 24: 1. $f_* = 3\,400\,000$ долл./нед.,

2. $f_* = 9\,750\,000$ долл./нед.

Упр. 25: $f_* = 83,1$ коп./сут. на одну корову.

Упр. 26: $f_* = 38,75$ долл./т.

Упр. 27: $f_* = 5525$ долл./нед.

Упр. 28: $f_* = 200~000$ руб./мес. (решение задачи неединственно).

Упр. 29: $f_* = 113~200$ долл.

Упр. 30: $f_* = 306~860$ долл.

Упр. 31: $f_* = 3~300$ деталей за смену.

Упр. 32: а) $f_* = 123\,320$ руб.,

б) $f_* = 4\,414,5$ руб.

Упр. 33: $f_* = 28~000~000$ долл.

Литература

1. А к о ф Р. Основы исследования операций : пер. с англ. / Р. Акоф, М. Сасиени. – М. : Мир, 1971. – 534 с.

2. А к у л и ч И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – М. : Высш. шк., 1986. – 319 с.

3. А ш м а н о в С. А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С. А. Ашманов, А. В. Тимохов. – М. : Наука, 1991. – 448 с.

4. Б а н д и Б. Основы линейного программирования : пер. с англ. / Б. Банди. – М. : Радио и связь, 1989. – 176 с.

5. В а г н е р Г. Основы исследования операций : в 3 т. : пер. с англ. / Г. Вагнер. – М. : Мир, 1972. – Т.1. – 336 с.

6. К а л и х м а н И. Л. Сборник задач по математическому программированию / И. Л. Калихман. – М. : Высш. шк., 1975. – 270 с.

7. К а п у с т и н В. Ф. Практические занятия по курсу математического программирования / В. Ф. Капустин. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. – 192 с.

8. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / А. М. Гатаулин и др.; под ред. А. М. Гатаулина. – М. : Агропромиздат, 1990. – 432 с.

9. М у р т а ф Б. Современное линейное программирование : пер. с англ. / Б. Муртаф. – М. : Мир, 1984. – 224 с.

10. Р е к л е й т и с Г. Оптимизация в технике: в 2-х книгах : пер. с англ. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. – М. : Мир, 1986. – Кн. 1. – 349 с.

11. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения : учеб. пособ. / Э. А. Вуколов и др.; под ред. А. В. Ефимова. – 2–е изд., перераб. – М. : Наука, 1990. – 304 с.

12. Т а х а Х. Введение в исследование операций : в 2-х книгах : пер. с англ. / Х. Таха. – М. : Мир, 1985. – Кн. 1. – 479 с.

13. Х е д л и Дж. Нелинейное и динамическое программирование: пер. с англ. / Дж. Хедли. – М. : Мир, 1967. – 507 с.

14. Х и м м е л ь б л а у Д. Прикладное нелинейное программирование : пер. с англ. / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 536 с.

15. B u d n i c k F. S. Principles of Operations Research for Management / F. S. Budnick, D. S. McLeavey, R. S. Mojena. – Homewood, Illinois: Irwin, 1988. – 988 p.

16. B i e r m a n H., Jr. Quantitative Analysis for Business Decisions / H., Jr. Bierman, C. P. Bonini, W. H. Hausman. – Homewood, Boston : Irwin, 1991. – 732 p.