ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И СВОЙСТВА РАСЩЕПЛЕННЫХ B-ПОЛИНОМОВ

А. А. Балагура

Рассматривается задача построения явного вида и перечислительной интерпретации обобщений полиномов Платонова. Рассмотрены некоторые вопросы перечисления деревьев.

Ключевые слова: комбинаторный полином разбиений, корневое дерево, четвертая задача Шредера.

1 Введение

Комбинаторные полиномы широко применяются при моделировании дискретных вероятностных распределений и описании некоторых структур и процессов техники и естествознания [1, 3]. Актуальной является задача нахождения перечислительных интерпретаций комбинаторных полиномов.

Во втором параграфе приводятся проиводящие функции и явный вид однородных полиномов Белла [4] и Платонова [3] и их обобщений. Вводятся основные определения.

В третьем параграфе рассматриваются интерпретации изучаемых объетов и вопросы перечисления деревьев.

2 Комбинаторные полиномы разбиений

Разбиением натурального числа n называется набор натуральных чисел в сумме составляющих n, при чем порядок слагаемых безразличен. Если $n=\sum\limits_{i=1}^{n} ir_i$, то последовательность $(r_1, r_2, ..., r_n)$ называется *типом разбиения.*

Разобьем n-множество по крайней мере на два блока. Затем разобьем каждый блок, состояший более чем из одного элемента на два блока. Продолжая разбивать блоки содержащие хотя бы два элемента на не менее чем два блока добьемся того чтобы каждый блок состоял из однго элемента. Эта процедура называется *полным разбиением* [5].

Пусть $g = (g_1, g_2, ...)$, $x = (x_1, x_2, ...)$, $y = (y_1, y_2, ...)$ — последовательности формальных переменных.

Используя члены поледовательности g, строим следующие разложения [1]:

$$e^{xg(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} A_{n\,k}(g) x^k \frac{t^n}{n!}, \tag{1}$$

$$e^{x\bar{g}(u)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} B_{n\,k}(g) x^k \frac{u^n}{n!}, \tag{2}$$

где $g(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{g_i t^i}{i!}$ и $\bar{g}(u) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{g}_i u^i}{i!}$ — взаимно-обратные функции.

Функции $A_{nk}(g)$ и $B_{nk}(g)$ в правой части выражений (1) и (2) называют однородными полиномами Белла (или A-полиномами) и однородными полиномами Платонова (или B-полиномами) соответственно.

Известен явный вид A- (см. например [4]) и B-полиномов [3]:

$$A_{nk}(g) = n! \sum_{n,\,k} \prod_{i=2}^{n-k+1} g_i^{r_i} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}, n \geq 1,\ 1 \leq k \leq n,$$

где суммирование ведется по всем разбиения натурального n на k натуральных слагаемых, т. е. по всем таким наборам $(r_1, r_2, ..., r_{n-k+1})$ целых неотрицательных чисел, что $\sum\limits_{i=1}^{n-k+1} r_i = k$, $\sum\limits_{i=1}^{n-k+1} i r_i = n$,

$$B_{nk}(g) = (-1)^{n-k} [(k-1)! g_1^{2n-k}]^{-1} \sum_{2n-2k,\, n-k} (-1)^{r_1} r_1! (2n-k-r_1-1)! \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-k+1} g_i^{r_i} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}, n \geq 2,\ 1 \leq k \leq n-1.$$

Дополнительно полагают $A_{n,\,n}(g) = g_1^n$, $B_{n,\,n}(g) = g_1^{-n}$, $n \geq 1$.

Рассморим важные обобщения А- и В-полиномов: полиномы построенные по композициям.

Пусть ${}^ig = ({}^ig_1,\ {}^ig_2,\ ...),\ 1 \leq i \leq k$.

$$\tilde{A}_{nk}({}^ig) = \frac{1}{k!}\sum_{n;\,k}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}\prod_{i=1}^{k}{}^ig_{n_i}, 1 \leq k \leq n,$$

где суммирование ведется по всем различным композициям n на k натуральных слагаемых, т. е. по всем таким различным наборам $(n_1, n_2, ..., n_k)$ натуральных чисел, что $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$.

Функции $\tilde{A}_{nk}({}^ig)$ называют k-расщепленными А-полиномами.

Пусть ${}^i\bar{g}(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}{}^i\bar{g}_n\frac{u^n}{n!}$ и ${}^i\bar{g}({}^ig(t)) = t$. С помощью определяющего соотношения $\tilde{B}_{nk}({}^i\bar{g}) = \tilde{A}_{nk}({}^ig)$ в [1] введены расщепленные В-полиномы, которые являются обобщением В-полиномов при ${}^ig(t) \equiv g(t),\ \tilde{B}_{nk}({}^ig) = B_{nk}(g)$. Актуальной является задача построения явного вида расщепленных В-полиномов.

3 Деревья

Нам понадобятся следующие определения.

Корневое дерево можно определить рекурсивно. Корневое дерево d есть такое множество вершин, что: одна специально выбранная вершина называется *корнем* дерева d, оставшиеся вершины (исключая корень) разбиты на $m \geq 0$ непересекающихся непустых множеств, каждое из которых является деревом. Вершины, не имеющие приемников, называются *концевыми вершинами.* Вершины, имеющие приемников, называют *внутренними вершинами.*

Присвоим каждой концевой вершине дерева метку, занумеровав вершины числами 1, 2, ..., n. Повторям следующую процедуру до тех пор, пока все вершины кроме корня не окажутся помеченными [5].

Пометим числом $n+1$ вершину v такую, что а) вершина v не помечена, а все ее приемники помечены и б) среди всех непомеченных вершин, все приемники которых помечены, v является вершиной, имеющей приемника с наименьшей меткой. Полученное дерево называется *помеченным.*

Стандартной формой корневого дерева назовем такое его изображение, при котором слева направо не убывают количество внутренних вершин от корня до каждой концевой вершины и количество концевых вершин каждой из внутренних вершин имеющих одного ближайшего предка. Далее будем предполагать, что рассматриваемые деревья записаны в стандартной форме.

Пусть $n \geq 2, \ 2 \leq k \leq n$. Обозначим $D(n)$ — множество помеченных корневых деревьев, имеющих в точности n концевых вершин, у которых из каждой внутренней вершины (и корня) исходит не менее двух вершин; $D(n, \ k)$ — множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k приемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин.

Pассмотрим структуры родственные деревьем, в которых важен порядок внутренних вершин в дереве. Чтобы его зафиксировать договоримся о способе обхода дерева: будем обходим дерево от корня слева, вверх, направо, вниз обратно к корню. Назовем типом дерева $d \in D(n, \ k)$ последовательность $(r_1, r_2, ..., r_{n-k})$ спеней внутренних вершин дерева, без учета корня при обходе дерева способом описанном выше. Обозначим $D(n, k, r_1, r_2, ..., r_{n-k})$ — множество деревьев $d \in D(n, \ k)$ типа $(r_1, r_2, ..., r_{n-k})$.

Четвертая задача Шредера (произвольные расстановки скобок в n-множестве) и ее обобщение, сформулированные в терминах деревьев, — подсчет мощности множеств $D(n)$, $D(n, \ k)$ и $D(n, k, r_1, r_2, ..., r_{n-k})$.

Обозначим π_n — множество всех n-перестановок, π_n^k — множество перестановок $\pi \in \pi_n$, имеющих в точности k циклов.

Сопоставим каждому дереву $d \in D(n, \ k)$ перестановку $\pi\,(d) \in \pi_n^k$ по следующему правилу.

Правило 1. *Пусть* $(p_1^i, \ ..., \ p_j^i)$, $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n-1$ — *последовательность всех концевых вершин дерева* d *(записанных в* *порядке появления), у которых первым предком после корня является i-й приемник корня* $(2 \leq j \leq n-1)$ *или эта вершина сама является i-м приемником корня* $(j = 1)$. *Тогда* $\pi(d) = (p_1^1, \, ..., \, p_{i_1}^1) \, ... \, (p_1^k, \, ..., \, p_{i_k}^k)$, *где* $\sum\limits_{m=1}^{k} i_m = n$.

Для $k \geq 2$ дерево d назовем *k-пререстановочным*, если сопоставленная ему по правилу 1 перестановка $\pi(d)$ имеет в точности k циклов.

Сопоставим каждому дереву $D \in D(n)$ перестановку $\pi\,(D) \in \pi_n$ по следующему правилу.

Правило 2. *Пусть* $(p_1, \, ..., \, p_n)$ *— последовательность всех концевых вершин дерева D (записанных в порядке появления). Тогда* $\pi(D) = (p_1, \, ..., \, p_n)$.

Перестановку $\pi(D) = (p_1, \, ..., \, p_n)$ назовем *перестановкой дерева D*.

Пусть $g_1 \neq 0, \ x_1 \neq 0, \ y_1 \neq 0$. На рассматриваемом множестве деревьев введем весовые функции по следующим правилам.

Правило 3. *Положим* $g_i g_1^{-1}$, $i \geq 2$ *— вес вершины дерева, имеющей i приемников;* g_1^{-1} *— вес вершины дерева, не имеющей приемников.*

Для $d \in D(n, \, k)$ считаем вес дерева d равным произведению весов всех его вершин кроме корня, для $D \in D(n)$ — произведению весов всех его вершин. Вес множества деревьев положим равным сумме весов всех составляющих его элементов.

Пусть весовая функция определяется правилом 3. В [2] найдена интерпретация B-полиномов, которую дает

Теорема 1. *Для* $n, \, k \in N$, $n \geq 2$ *суммарный вес всех различных k-перестановочных n-деревьев d равен* $(-1)^{n-k} B_{n,k}(g)$. *Суммарный вес всех n-деревьев D, имеющих различные перестановки, равен* $(-1)^{n-1} B_{n,1}(g)$.

Рассмотрим задачу подсчета мощности множества $D(n, k, r_1, r_2, ..., r_{n-k})$.

Кортежем длины n называется упорядоченный набор целых неотрицательных чисел $(i_1, ..., i_n)$.

Пусть $a_1, ..., a_n \in N, a_1 \leq ... \leq a_n$. Обозначим
$I(a_1, ..., a_n) = \{(i_1, ..., i_n) | \ i_j \leq a_j, \ i_j \leq i_{j+1}, \ 1 \leq j \leq n\}$,
$X(a_1, ..., a_n) = |I(a_1, ..., a_n)|$.

Существует взаимооднозначное соответствие между множествами $D(n,k,r_1,r_2,...,r_{n-k})$ и $I(a_1,...,a_n)$.

Список литературы

1.Кузьмин О.В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. — 294 с.
2. Балагура А.А. Перечислительные свойства комбинаторных полиномов разбиений / Балагура А.А., Кузьмин О.В.// Дискретн. анализ и исслед. опер., 18:1 (2011), 3Ц14.
3. Платонов М. Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. — М.: Наука, 1979. — 152 с.
4. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М.: Иностр. лит., 1963. — 287 с.
5. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, поизводящие функции и симметрические функции: Пер. с англ. — М.: Мир, 2005. — 767 с.