О корректной постановке смешанной краевой задачи для систем составного типа"

Н.М. Курбатова ЗабИЖТ Чита

В результате линеаризации системы, описывающей обтекание жидкостью или газом твёрдого тела [1], получили систему

$$\begin{aligned} &U_x + V_y + W_z = 0, \\ &W_x - U_z = 0, \\ &W_y - \omega V_z = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Рассмотрим систему с постоянными коэффициентами при условии, что $\omega > 0$

$$\begin{aligned} &U_x + V_y + W_z + a_{11}U + a_{12}V + a_{13}W = 0, \\ &W_x - U_z + a_{21}U + a_{22}V + a_{23}W = 0, \\ &W_y - \omega V_z + a_{31}U + a_{32}V + a_{33}W = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Эта система составного типа, т.к. её характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_3 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -\omega\lambda_3 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_3(\omega\lambda_3^2 + \omega\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0,$$

т.е. в каждой точке области определения система имеет действительные и комплексные характеристики. Следовательно, система (2) составного типа. Выразив из второго и третьего уравнений системы функции U и V, получим

$$\begin{aligned} &U = \int_0^z (W_x + a_{21}U + a_{22}V + a_{23}W)dz + \varphi(x, y), \\ &V = \frac{1}{\omega}\int_0^z (W_y + a_{31}U + a_{32}V + a_{33}W)dz + \psi(x, y) \end{aligned} \qquad (3)$$

заметим, что при $z = 0$ $U = \varphi(x, y)$, а $V = \psi(x, y)$.

Подставляя соотношения (8) в первое уравнение системы (7), получим

$$\int_0^z (W_{xx} + a_{21}U_x + a_{22}V_x + a_{23}W)dz +$$

$$+\frac{1}{\omega}\int_0^z (W_{yy} + a_{31}U_y + a_{32}V_y + a_{33}W)dz - \tag{4}$$

$$-\frac{\omega_y}{\omega^2}\int_0^z (W_y + a_{31}U + a_{32}V + a_{33}W)dz +$$

$$+\varphi_x + \psi_y + W_z + a_{11}U + a_{12}V + a_{13}W = 0,$$

Из соотношения (4) при $z = 0$ получаем

$$\varphi_x + \psi_y + (W_z + a_{11}U + a_{12}V + a_{13}W)\Big|_{z=0} = 0. \tag{5}$$

Продифференцируем уравнение (5) по переменной z, получим

$$W_{xx} + \frac{1}{\omega}W_{yy} + W_{zz} + a_{23}W_x + \left(\frac{a_{33}}{\omega} - \frac{\omega_y}{\omega^2}\right)W_y + a_{31}W_z -$$

$$-\frac{\omega_y}{\omega^2}a_{33}W - \frac{a_{31}\omega_y}{\omega^2}U + a_{21}U_x + \frac{a_{31}}{\omega}U_y + a_{11} + \tag{6}$$

$$a_{22}V_x + \frac{a_{32}}{\omega}V_y + a_{12}V_z - \frac{\omega_y}{\omega^2}a_{32}V = 0.$$

Совокупность уравнений (5) и (6) эквивалентна уравнению (4).

Для доказательства эквивалентности достаточно убедится в том, что из (5) и (6) следует уравнение (4). В самом деле: проинтегрируем уравнение (5) по переменной z, получим

$$\int_0^z \left(W_{xx} + \frac{1}{\omega}W_{yy} + a_{23}W_x + \left(\frac{a_{33}}{\omega} - \frac{\omega_y}{\omega^2}\right)W_y - \frac{\omega_y}{\omega^2}a_{33}W - \frac{a_{31}\omega_y}{\omega^2}U + \right.$$

$$\left. + a_{21}U_x + \frac{a_{31}}{\omega}U_y + a_{22}V_x + \frac{a_{32}}{\omega}V_y - \frac{\omega_y}{\omega^2}a_{32}V\right)dz +$$

$$+ W_z + a_{13}W + a_{11}U + a_{12}V + \chi(x,y) = 0,$$

при $z = 0$ отсюда следует, что

$$(W_z + a_{13}W + a_{11}U + a_{12}V)\Big|_{z=0} + \chi(x,y) = 0.$$

Учитывая соотношение (5) ,получим $\chi(x,y)=\varphi_x+\psi_y$. Таким образом, эквивалентность совокупности уравнений (5-6) уравнению (4) доказана.

Уравнение (6) преобразуем так, чтобы оно содержало только функцию W. Для этого предположим, что $a_{21}=\frac{a_{32}}{\omega}$, затем в уравнение (6) подставим значение суммы U_x+V_y из первого уравнения системы (2). В это же уравнение вместо U_x и V_y подставим их значения из второго и третьего уравнений системы (2). На коэффициенты системы введем дополнительные ограничения: $a_{31}=0, a_{22}=0$, при этих условиях система (2) сводится к эквивалентной системе

$$W_{xx}+\frac{1}{\omega}W_{yy}+W_{zz}+(a_{23}+a_{11})W_x+\left(\frac{a_{33}}{\omega}-\frac{\omega_y}{\omega^2}+\frac{a_{12}}{\omega}\right)W_y+a_{31}W_z+$$

$$+(a_{11}a_{23}+a_{12}a_{23}+\frac{a_{11}a_{33}}{\omega}-\frac{\omega_y}{\omega^2}a_{33})W=0,$$

$$\begin{aligned}U&=\int_0^z(W_x+a_{21}U+a_{22}V+a_{23}W)dz+\varphi(x,y),\\ V&=\frac{1}{\omega}\int_0^z(W_y+a_{31}U+a_{32}V+a_{33}W)dz+\psi(x,y),\end{aligned}\qquad(7)$$

$$\varphi_x+\psi_y+(W_z+a_{11}U+a_{12}V+a_{13}W)\Big|_{z=0}=0.$$

Первое уравнение системы (12) эллиптического типа, второе и третье уравнения Вольтера второго рода. В более ранних работах $1-3$ для систем подобной структуры краевая задача ставилась следующим образом: система рассматривалась в ограниченной области D, расположенной в полупространстве $z>0$, граница Г которой состоит из поверхности Ляпунова S, лежащей в полупространстве $z>0$, и куска E плоскости $z=0$. Поверхность S однозначно проектируется на E, и с плоскостью $z=0$ пересекается однозначно. Для эллиптического уравнения ставилась, например, задача Дирихле

$W\big|_{\Gamma} = f(x,y,z),$ как известно, она фредгольмова, а при условии, что коэффициент при W меньше или равен нулю, имеет единственное решение. Зная W функцию U можно однозначно найти из второго уравнения системы (12) , если задать условие $U\big|_E = g(x,y)$. При этом для функции V невозможно было задать граничное условие на множестве E, это объяснялось влиянием действительных характеристик и наличием четвёртого уравнения в системе (7). Поэтому V задавалось на части границы множества E.

Эту проблему удалось преодолеть следующим образом:

Зададим U и V на множестве E

$$U\big|_E = f(x,y), \qquad V\big|_E = g(x,y), \tag{8}$$

тогда $\varphi(x,y) = f(x,y), \qquad \psi(x,y) = g(x,y).$

Для функции W рассмотрим смешанную задачу:

$$W\big|_S = h(x,y,z), \qquad W_z\big|_E = -f_x - g_y - a_{11}f - a_{12}g, \tag{9}$$

где функции $f(x,y), \quad g(x,y), \quad h(x,y,z)$ дважды непрерывно дифференцируемы.

Известно, что при этих условиях W определяется однозначно, подставляя во второе и третье уравнения найденные значения W и учитывая соотношения (8), U и V находятся однозначно, как решения уравнения Вольтерра второго рода.

Таким образом, ограничениях при на коэффициенты системы (7) $a_{21} = \dfrac{a_{32}}{\omega}, \quad a_{31} = 0, a_{22} = 0,$ задача (7,8,9) имеет единственное решение.

Литература

1. Курбатова Н.М. О корректных задачах для систем дифференциальных уравнений первого порядка. // Интегро-дифференциальные уравнения и их приложения, Иркутск.: Ирк. гос. университет, 1988.-С.150-156

2. Курбатова Н.М. Граничная задача для системы уравнений первого порядка. // Дифференциальные уравнения и их применение. Вып. 45, Вильнюс: Институт математики и кибернетики ЛССР, 1990.-С.51-57
3. Курбатова Н.М. О граничной задаче для одной системы составного типа // Проблемы модернизации инфраструктуры транссибирской магистрали, Чита,: ЗабИЖТ,2005.- С.219-222.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.416 с.
5. Янушаускас А.И.Об одной системе первого порядка.//Сиб. мат. журн.1973.Т14, № 5.