Посвящается 40-летию термина
«геометрическая модель функциональной зависимости»

Кузнецова Т.И.
Институт русского языка и культуры МГУ имени М.В. Ломоносова
профессор кафедры общеобразовательных предметов,
доктор педагогических наук, доцент

Номограммы — геометрические модели функциональных зависимостей

В статье рассказывается о специальных геометрических моделях функциональных зависимостей — номограммах, их использовании в практической деятельности, обосновывается их роль в укреплении межпредметных связей математики с различными разделами физики. Приводятся примеры номограмм, доступных учащимся средней школы. Даются некоторые сведения о развитии номографии —раздела вычислительной математики, посвящённого теории и практике построения и применения номограмм.

Ключевые слова: номография; номограмма; геометрия; геометрическая модель; вычисление с помощью номограмм.

По моему глубокому убеждению, многие номограммы по своей природе близки к разделу
элементарной математики, где рассматриваются геометрические методы
построения алгебраических формул.
А.А. Глаголев.

Более сорока лет назад в названии кандидатской диссертации по преподаванию математики в средней школе нами был использован термин «модель» в словосочетании «геометрические модели функциональных зависимостей» [6]. На фоне детального исследования всех предметных курсов средней школы на предмет присутствия в них геометрических моделей функциональных зависимостей, были предложены номограммы – специальные представители этого класса геометрических моделей. Построенная на листе бумаги для определенной функциональной зависимости номограмма очень просто используется для получения ответа: достаточно, например, приложить линейку или сделать засечку циркулем.

1. Построением таких моделей-чертежей занимается номография – наука о методах графического изображения функциональных зависимостей, которая является составной частью вычислительной математики. Номография как наука оформилась задолго до появления электронно-вычислительных машин. Первые попытки графического решения аналитических задач в форме, близкой к современным номографическим построениям, относятся к концу XVIII в. — в 1795 г. была опубликована «Линейная арифметика» французского математика Пуше, в которой давались графические приёмы выполнения арифметических действий. Пуше построил первую номограмму — модель умножения в форме семейства равносторонних гипербол, имеющих общие асимптоты.

Из Франции номография распространилась и в другие страны. В России начало развития номографии положила работа Н.М. Герсеванова «Основы номографии» (1906 г.). Дальнейшее развитие номографии в нашей стране связано также с именами П.В. Мелентьева, И.Н. Денисюка, Н.А. Глаголева, А.А. Глаголева, М.В. Пентковского, Б.А. Невского, И.А. Вильнера, Г.С. Хованского, С.Н. Борисова и других ученых (см. библиографию в [6], а также [7, с. 239–244]).

Явное народнохозяйственное значение номографии и доступность номограмм приводят к возможности ознакомления с номографией в процессе обучения математике в средней школе. В нашей стране специально для школьников выдающимися номографамиА.А. Глаголевым и М.В. Пентковским были разработаны и изданы учебные пособия[3; 8]. Создавались и факультативные курсы (П.А. Компанийц [5],С.П. Пулькин [9],П.В. Стратилатов [10]и др.). Вопросам номографии были посвящены лекции, прочитанные А.Н. Колмогоровым в Летней школе на Рубском озере, организованной для школьников, закончивших восемь классов [4]. Введение отдельных элементов номографии в среднее образование предлагалось в диссертационных исследованиях.

2.Обратим внимание на то, что в «Четырехзначных математических таблицах» В.М. Брадиса в явном виде помещены две номограммы из выравненных точек, по которым ответ находится одним приложением линейки [2, с. 82–84]. Приведём здесь одну из этих номограмм (см. рис. 1), построенную для решения уравнения

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}. \qquad (1)$$

Эта номограмма состоит из трёх шкал(переменных x, y, z), выходящих из одной точки. Рядом с номограммой пишется ключ (обычно это неотъемлемая часть номограммы, поскольку только зная ключ, можно ею воспользоваться). Обоснование номограммы можно прочитать на с. 84 [2].

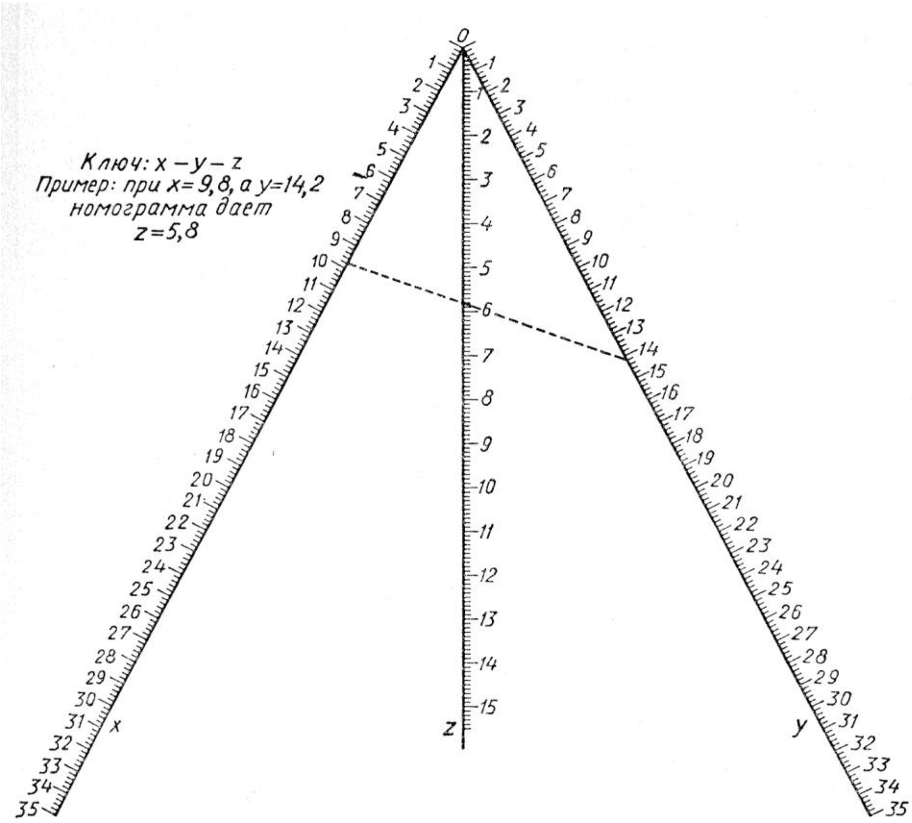

Рис. 1. Номограмма для решения уравнения $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$.

Номограмма позволяет находить значение одной из переменных x, y, z, связанных данным уравнением, если известны значения двух других. На номограмме рис.1 решается

Задача 1. Решить уравнение (1) при x = 9,8; y = 14,2.

Решение. Ясно, что надо найти значение переменнойz. Приложив край линейки к точке шкалы x с пометкой 9,8 и к точке шкалы y с пометкой 14,2, на шкале z читаем искомое значение 5,8.

Номограммы способствуют специфическому целенаправленному использованию методов прикладной математики. В соответствии с работой С.И. Шварцбурда, в которой он описал три этапа приложения математики к решению практических задач, формализация – переход от реальной ситуации, которую следует разрешить, к построению адекватной математической модели, решение задачи внутри построенной математической модели, интерпретация [13, с. 18–19].Как отмечает В.В. Фирсов, явное вовлечение в процесс обучения математике этапов формализации задачи и интерпретации полученного в результате её решения результата создаёт единственно возможные предпосылки для обучения применению математики к реальным проблемам [12, с. 17]. Номографическое решение практических задач отвечает этому требованию.

Номограммы способствуют сближению различных разделов школьного курса математики (геометрии, теории функций, методов вычислений), формированию и закреплению узловых математических понятий (функции, множества, системы координат, абсолютной и относительной погрешностей и т. д.).

3.Использование номограмм в смежных школьных дисциплинах осуществляет предметные связи. В связи с этим можно отметить то, что номограмма рис 1 может использоваться не только в математике, т. е. не только для решения «чисто» математического уравнения (1), но и в физике – в двух её разделах:

«Оптика» — для вычислений по формуле тонкой линзы: $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$, где F — фокусное расстояние, d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от изображения до линзы;

«Электричество» — 1) для вычислений по формуле общего сопротивления при параллельном соединении проводников: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$, где R — общее сопротивление, R_1и R_2 — сопротивления участков; 2) для вычисления по формуле общей индуктивности цепи, состоящей из двух катушек при параллельном их соединении: $\frac{1}{L_{\text{общ.}}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$, где $L_{\text{общ.}}$ — общая индуктивность цепи,L_1,L_2 — индуктивности отдельных катушек; 3) для вычисления общей электрической ёмкости цепи, состоящей из двух последовательно соединённых конденсаторов: $\frac{1}{C_{\text{общ.}}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$, где $C_{\text{общ}}$— общая ёмкость цепи, C_1, C_2 — ёмкости отдельных конденсаторов.

4. Обобщим уравнение (1), решаемое в [2] с помощью номограммы рис. 1, до четырёх переменных[3, с. 19]:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{x}. \qquad (2)$$

Номограмма для решения уравнения (2) изображена на рис. 2. Она является соединением-наложением двух номограмм типа рис. 1, в которых угол между шкалами равен не 30°, как на рис. 1, а 60°, и состоит из четырёх шкал: *OA*, *OB*, *OC* и *OD* с общим началом, изображающим число 0.

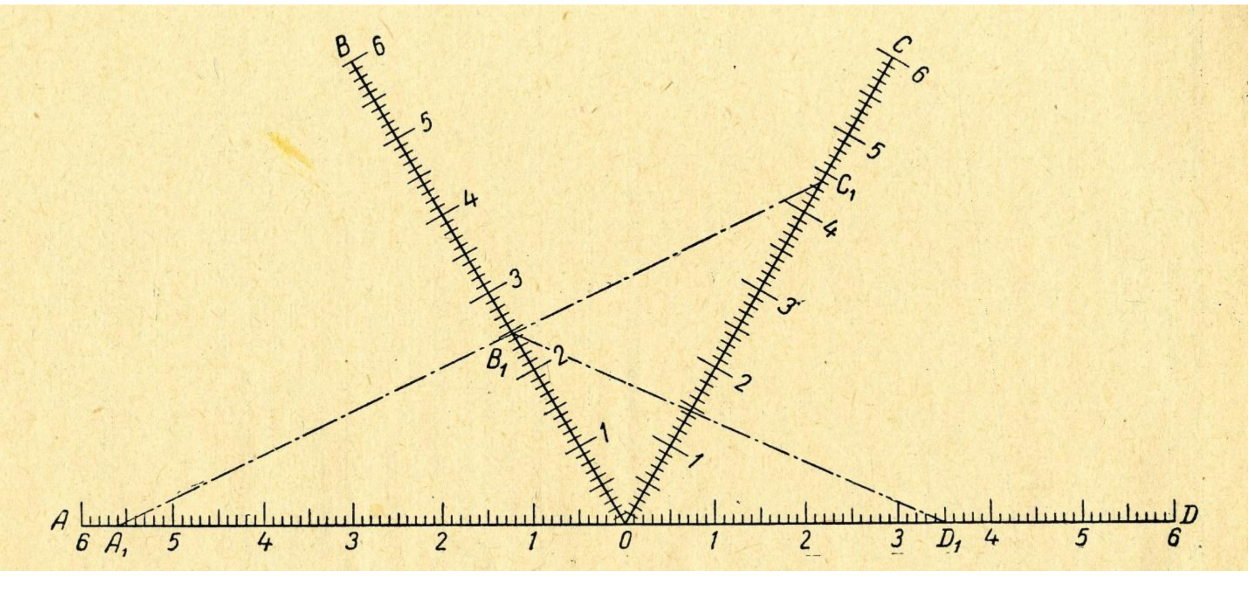

Рис. 2. Номограмма для решения уравнения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{x}$

Покажем, как пользоваться номограммой рис. 2 при решении уравнения (2), когда требуется по трём заданным значениям переменных *a*, *b* и *c* найти значение четвёртой переменной *x*.

Задача 2. Решить уравнение (2) при $a = 5{,}6$; $b = 4{,}4$; $c = 3{,}5$.

Решение. На шкале OA находим точку A_1 с пометкой 5,6, на шкале OC — точку C_1 с пометкой 4,4. Соединяем точки A_1 и C_1. Отрезок A_1C_1 пересекает шкалу OB в точке B_1, пометка которой d_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{d_1},$$

или, при заданных значениях *a* и *b*, уравнению

$$\frac{1}{5{,}6} + \frac{1}{4{,}4} = \frac{1}{d_1}.$$

Сделав соответствующую замену в уравнении (2), получаем уравнение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x}. \qquad (3)$$

Далее на шкале OD находим точку D_1 с пометкой 3,5, равной значению *c*. Соединяем точки B_1 и D_1. Отрезок B_1D_1 пересекает шкалу OC в точке C_1, пометка которой 1,45 является значением *x*, удовлетворяющим уравнению (3). Очевидно, что оно удовлетворяет и уравнению (2) при заданных значениях *a*, *b* и *c*.

5. Возвращаясь к п. 3, отметим, что все приведённые там уравнения из раздела физики «Электричество» расширяются до большего количества переменных. Например, при определении сопротивления в электрической цепи при параллельном соединении трёх проводников используется следующая формула:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3},$$

для которой номограмма рис. 2 является рабочей, т. е., задав значения сопротивлений R_1, R_2, R_3, по ней можно легко найти общее сопротивление *R*.

Задача 3. Три параллельно соединённых проводника имеют сопротивления R_1= 4 Ом, R_2 = 4 Ом, R_3 = 3 Ом. Найти общее сопротивление данной цепи.

По номограмме получаем R = 1,2 Ом. Вручную получается то же самое значение.

Замечательно то, что по этой же номограмме рис. 2 тем же самым способом можно решать и более сложные уравнения вида

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{x}. \qquad (4)$$

Попробуйте вычислить значение x при следующих значениях a, b, c, d:

$$a = 5{,}4;\ \ b = 4{,}3;\ \ c = 6{,}0;\ \ d = 3{,}7 \qquad (5)$$

сначала вручную, а затем — воспользовавшись номограммой рис. 2. Сравните время, затраченное на первый способ вычисления, с временем, затраченным на второй способ. Очевидно, что в выигрыше окажется второй способ: по номограмме ответ вычисляется гораздо быстрее — всего тремя приложениями края линейки к точкам шкал с соответствующими пометками (5), вручную же надо вычислить числовое выражение

$$\frac{1}{\frac{1}{5{,}4}+\frac{1}{4{,}3}+\frac{1}{6{,}0}+\frac{1}{3{,}7}}!$$

Во сколько раз!?! Между прочим, по номограмме получаем почти 1,2, а вручную – приблизительно 1,18 ≈ 1,2!

6. С помощью номограммы рис. 2 можно решать уравнения вида (4) с большим количеством слагаемых в левой части, например, для вычисления сопротивления электрической цепи в случае параллельного соединения любого числа проводников с использованием формулы

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_n}.$$

7. *Замечания*. 1. В случаях, когда значения данных переменных или значение искомой переменной выходят за пределы шкал, надо все числа — значения переменных умножить или разделить на одно и то же надлежаще выбранное число. Например, если в случае трёх переменных даны значения x=

75,y= 48, то после деления на 10 имеем: x= 7,5,y= 4,8 и по номограмме рис. 1 находим z= 2,9, а после умножения на 10 получаем искомое значение z= 29.

2. Разработчики номограмм рекомендуют в качестве рабочих использовать номограммы больших размеров, так как по ним можно получить более точный результат, чем по номограммам, расположенным на страницах пособия. Примером может служить книга «Номография для школьника» А.А. Глаголева, к которой прилагаются вкладки с несколькими, наиболее часто используемыми, рабочими номограммами увеличенных размеров [3].

8. Появление компьютеров значительно облегчило проведение численных расчетов при решении различных задач. Однако практика показывает, что номограммы обладают целым рядом преимуществ перед ними. Простота пользования номограммами, малая вероятность ошибки, их доступность, дешевизна и быстрота получения по ним ответа позволяют утверждать, что номографическое решение задачи, если точность номограмм достаточна, экономически выгоднее компьютерного. Естественны случаи синтезирования номографических и компьютерных методов решения задач. Целесообразным является использование методов приближенного номографирования таблиц с несколькими входами, полученных на компьютере.

Для получения номограмм можно применять компьютер и после этого рассматривать номограммы как одну из удобных форм компьютерного решения задач. Существуют работы по автоматизированию не только построения номограмм, но и по их конструированию [1]. Это означает, что создаются такие программы, которые дают возможность после ввода в компьютер формулы, пределов изменения переменных и размеров чертежа получить готовую рабочую номограмму.

9. Приведённые примеры иллюстрируют методику преподавания основ номографии в средней школе, показывают возможность демонстрации эффективности номографических методов не только в математике, но в других школьных дисциплинах, а также то, что использование и построение номограмм повышает математическую культуру учащихся, под которой понимается «…определенный запас знаний, навыков и умений учащихся, в том числе и умение применять накопленные знания и навыки в трудовой и учебной деятельности» [13, с. 20], что, говоря современным языком ФГОС ООО, отражает «формирование умений формализации и структурирования информации, умения выбирать способ представления данных в соответствии с поставленной задачей — таблицы, схемы, графики, диаграммы, …» [11, с. 15].

Многие номограммы (например, приведённые здесь) строятся учащимися средней школы — с помощью интерактивных геометрических систем: пакета «Живая геометрия», входящего в состав образовательного комплекса «1С:Математика, 5–11 классы. Практикум», разработанного в рамках проекта «Информатизация системы образования», или программы «1С:Математический конструктор».

Литература

1. Борисов С.Н. Алгоритмы конструирования номограмм. – М.: ВЦ РАН, 1999. – 164 с.
2. Брадис В.М. Чеиырехзначные математические таблицы. – М.: Дрофа, 2016. – 96 с.
3. Глаголев А.А. Номография для школьника. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Учпедгиз, 1959. – 120 с.
4.Колмогоров А.Н. и др. Летняя школа на Рубском озере. – М.: Просвещение, 1971.
5. Компанийц П.А. Простейшие графические расчеты в школьном курсе математики. – Л.: Учпедгиз, 1957. – 80 с.
6. Кузнецова Т.И. Геометрические модели функциональных зависимостей: Дисс. … кандидата педагогических наук. – М., 1976. – 185 с.
7. Кузнецова Т.И. Модель выпускника подготовительного факультета в пространстве предвузовского математического образования: Научное издание.– М.: КомКнига, 2005. – 480 с.; 2-е изд. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – (Серия «Психология, педагогика, технология обучения».
8.Пентковский М.В. Считающие чертежи (номограммы). – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1959. – 151 с.
9. Пулькин С.П. Вычислительная математика: Пособие для учащихся 9 – 10 кл. по факультативному курсу. – М.: Просвещение, 1974. – 239 с.
10. Стратилатов П.В., ред. Повышение вычислительной культуры учащихся средней школы. – М.: Просвещение, 1965.
11. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. – М.: Минобрнауки РФ, 2010. – 50 с.

12. Фирсов В.В. Некоторые проблемы обучения теории вероятностей как прикладной дисциплине: Автореферат дисс. … канд. пед. наук. – М., 1974. – 27 с.

13. Шварцбурд С.И. Проблемы повышенной математической подготовки учащихся: Авторский доклад об опубликованных работах, представленных на соискание ученой степени доктора педагогических наук. – М., 1972. – 105 с.

Kuznetsova T.I.

Lomonosov Moscow State University, Institute of Russian Language and Culture

Nomograms — geometricalmodelsoffunctionaldependences

Inarticleitistoldaboutspecialgeometricalmodelsoffunctionaldependences — nomograms, theiruseinpracticalactivities, theirroleisprovedinstrengtheningofintersubjectcommunicationsofmathematicswithvarioussectionsofphysics. Examplesofthenomogramsavailabletothepupilofhighschoolaregiven. Someinformationondevelopmentof a nomografiya — thesectionofcalculusmathematicsdevotedtothetheoryandpracticeofconstructionandapplicationofnomogramsissupplied.

Keywords: nomografiya; nomogram; geometry; geometricalmodel; calculationbymeansofnomograms.