Случайные блужданияна полупрямой с поглощающимэкраномс возможностью остановки

Е.И.Малахов

Частица, выходящая из точки x=1, совершает случайные блуждания на полупрямой $[0;\infty)$. Перемещение осуществляется скачками в дискретные моменты времени. В результате каждого скачка [шага], частица перемещается на единицу вправо с вероятностью p, на единицу влево с вероятностью $q = 1 - h - p$ или остается на месте с вероятностью h. При этом, остановка на месте приравнивается к шагу. В точке x=0 установлен поглощающий экран. Изучается случайная величина ξ_k-число шагов до поглощения. Положим J_k – вероятность поглощения заk шагов.

1. Случайные блуждания с постоянными вероятностями

Найдем формулу для J_k – вероятности поглощения заkшагов.
Если у частицы есть всего одно перемещение, то она потратитего только на шаг в сторону экрана. Этот шаг является первым и последним для частицы.
Формула подсчета вероятности поглощения для данного случая будет выглядеть следующим образом:

$$J_1 = q$$

Получив в распоряжение два шага, частица все еще не может шагнуть вправо, так как, вернувшись в обратную точку, использует второй шаг и не будет поглощена. Поэтому единственный для нее вариант – это один шаг простоять на месте и после шагнуть в сторону экрана.

$$J_2 = hq$$

Если же дать частице возможность сделать три шага, то у нее появятся две допустимые траектории движения. На первой она сделает один шаг от экрана и два в обратную сторону $[pqq]$, а на второйона два шага простоит на месте и после шагнет в сторону экрана $[hhq]$.Остальные траектории не приведут к нужному результату. Исходя из всего этого, формулу вероятности поглощенияполучимсуммированиемвероятностей этих двух траекторий.

$$J_3 = pqq + hhq$$

Далее число траекторий будет только увеличиваться. Подсчитаем их количество (КТ) для первых шести шагов:

$J_1 = q$ КТ = 1

$J_2 = hq$ КТ = 1

$J_3 = pqq + hhq$ КТ = 2

$J_4 = hpqq + phqq + pqhq + hhhq$ КТ = 4

$J_5 = ppqqq + pqpqq + hhpqq + hphqq + hpqhq + phhqq + phqhq + pqhhq + hhhhq$ КТ = 9

$$\begin{aligned} J_6 = {} & hppqqq + phpqqq + pphqqq + ppqhqq + ppqqhq + hpqpqq + phqpqq + pqhpqq \\ & + pqphqq + pqpqhq + hhhpqq + hhphqq + hhpqhq + hphhqq + hphqhq \\ & + hpqhhq + phhhqq + phhqhq + phqhhq + pqhhhq + hhhhhq \end{aligned}$$ КТ = 21

Число траекторий образует последовательность $\{1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, \dots\}$, которая эквивалентна последовательности чиселМоцкина. Комбинаторная интерпретация чиселМоцкина (M_n)для произвольного натурального n - число маршрутов из $(0,\ 0)$ в $(\,n\,,\ 0)$ за n шагов, если разрешено двигаться только вправо (вверх, вниз или прямо) на каждом шагу, при этом $y \geq 0$.
Рекуррентные соотношения для чисел Моцкина:

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} M_i M_{n-2-i} = \frac{2n+1}{n+2} M_{n-1} \frac{3n-3}{n-2} M_{n-2}.$$

Из выражений 1-6 вынесем h и приведем подобные. Получим

$$J_1 = q$$
$$J_2 = hq$$
$$J_3 = pqq + hhq$$
$$J_4 = 3hpqq + hhhq \qquad (1)$$
$$J_5 = ppqqq + pqpqq + 6hhpqq + hhhhq$$
$$J_6 = 5hppqqq + 5hpqpqq + 10hhhpqq + hhhhhq$$

Обозначим соответственно

$$S_1 = q$$
$$S_3 = pqq$$
$$S_5 = ppqqq + pqpqq$$

………………………

Тогдавероятность поглощения заkшагов без учета остановки на месте имеет вид:

$$S_k = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} * p^n * q^{n+1}, \quad k = 2n+1, \quad n = 1,2..,C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}. \quad (2)$$

С учетом формулы (2) выражения (1) примут вид.

$$J_1 = S_1 = S_1 * C_0^0 * h^0$$
$$J_2 = hS_1 = S_1 * C_1^1 * h^1$$
$$J_3 = S_3 + h^2 S_1 = S_3 * C_2^0 * h^0 + S_1 * C_2^2 * h^2$$
$$J_4 = 3hS_3 + h^3 S_1 = S_3 * C_3^1 * h^1 + S_1 * C_3^3 * h^3$$
$$J_5 = S_5 + 6h^2 S_3 + h^4 S_1 = S_5 * C_4^0 * h^0 + S_3 * C_4^2 * h^2 + S_1 * C_4^4 * h^4$$
$$J_6 = 5hS_5 + 10h^3 S_3 + h^5 S_1 = S_5 * C_5^1 * h^1 + S_3 * C_5^3 * h^3 + S_1 * C_5^5 * h^5$$

Выведем окончательные формулыдляJ_k отдельно для четного и нечетного количества шагов.
Для нечетного количества шагов имеем:

$$J_k = \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} S_{k-2i} * C_{k-1}^{0+2i} * h^{0+2i}, i = 0,1,2..$$

Для четного количества шагов

$$J_k = \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} S_{k-1-2i} * C_{k-1}^{1+2i} * h^{1+2i}, i = 0,1,2..,$$

где S_k находится по формуле (2).

2. Случайные блуждания с переменными вероятностями

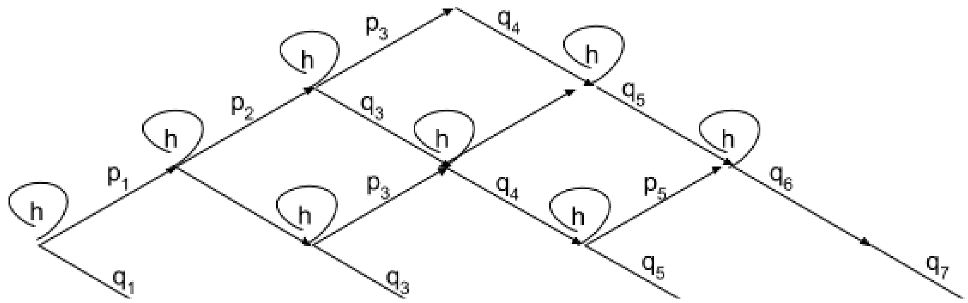
Рассмотрим теперь два случая с переменными вероятностями.

2.1. Случай, когда вероятности меняются при перемещении

Пусть вероятности перехода из состояния в состояние являются переменными, изменяясь только при перемещении: $p = p_i$ и $q = q_i, h = const,$ где $i -$ номер перемещения. Предположим, что вероятности p_iобразуют монотонную возрастающую последовательность. В этом случае «вес» отдельной траектории зависит от взаимного расположения вероятностейp_iи q_i (при остановке вероятности остаются неизменными).

Ниже приводится наглядное представление данного случая для допустимых траекторий в виде ориентированного графа. Тут шаг от экрана с вероятностью p_i обозначен ребром, направленным вправо вверх, шаг к экрану с вероятностью q_i –ребром, направленным вправо вниз, и шаг на месте с вероятностью h обозначен петлей.

Из рис. 1 видно, что неважно, сколько шагов частица стоит на месте, вероятность при этом не меняется.



Граф допустимых траекторий для k=7 (рис.1)

Пустьвероятности изменяются следующим образом:

$$p_1 = 0.01 * a, p_{i+1} = p_i + 0.01 * c,$$
$$q_1 = 0.01 * a, \qquad q_{i+1} = q_i - 0.01 * c,$$
$$h = 0.01 * b = const, i = 1,2..$$
$$0.01(2a + b) = 1, c = [1, a]$$

Данныйвариант подобен случаю с постоянными вероятностями, рассмотренному в пункте1.Ниже приведены формулы для подсчета вероятностей поглощения за kшагов:

Для нечетного количества шагов:

$$J_k = \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} S_{k-2i} * C_{k-1}^{0+2i} * h^{0+2i}, i = 1,2..$$

Для четного количества шагов:

$$J_k = \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} S_{k-1-2i} * C_{k-1}^{1+2i} h^{1+2i}, i = 1,2..$$

Отличие только в способе вычисления S_k – вероятности поглощения заkшагов без учета остановки на месте.

$$S_k = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} * \left(\frac{P_{min} + P_{flt}}{2} + P_{max}\right) * \frac{1}{2}, \qquad k = 2n + 1, \quad n = 1,2.., C_k^i = \frac{k!}{i!\,(k-i)!},$$

$$P_{max} = p_1 q_2 p_3 q_4 \dots p_{k-2} q_{k-1} q_k$$

Траектория, имеющая наибольший «вес»

$$P_{min} = p_1 p_2 \dots p_{\frac{k-1}{2}} q_{\frac{k+1}{2}} q_{\frac{k+3}{2}} \dots q_{k-1} q_k$$

Траектория, имеющая наименьший «вес»

$$P_{flt} = p_1 p_2 \dots q_{\frac{k-1}{2}} \dots p_{k-5} q_{k-4} q_{k-3} q_{k-2} q_{k-1} q_k$$

Траектория вводится, чтобы нивелировать погрешность вычислений. Она получается путем взаимного перемещения элементов $p_{\frac{k-1}{2}}$ и q_{k-5}. После перемещения их индексы изменятся соответственно на $q_{\frac{k-1}{2}}$ и p_{k-5}. Формула применима при $k \geq 11$. Все расчёты и выводы формул приведены в работе [3].

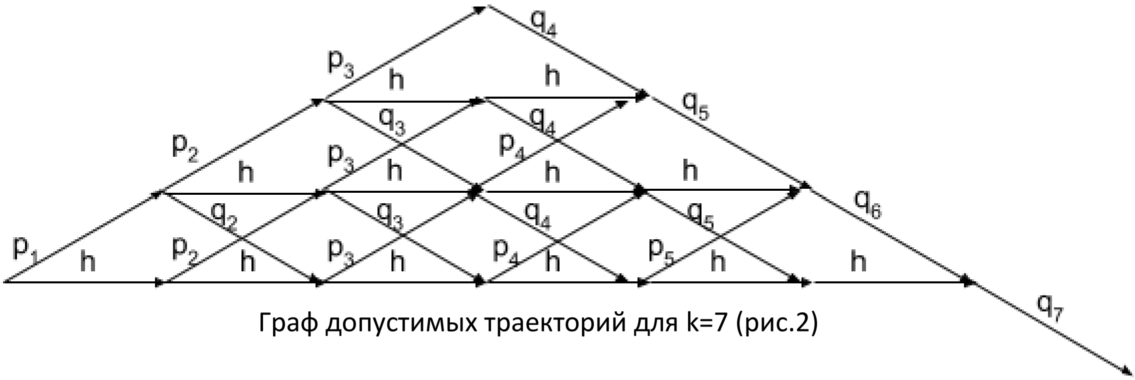
2.2 Случай, когда вероятности меняются со временем

Рассмотрим теперь второй случай переменных вероятностей.Пустьвероятности перехода $p = p_i$ и $q = q_i$, где i – номер шага. из состояния в состояние являются переменными,а $h = const$.Изменения вероятностей p_iи q_iпроисходят на каждом шаге (независимо от того, есть перемещение или нет).Предположим, что вероятности p_iобразуют монотонную возрастающую последовательность. В этом случае «вес» отдельной траектории зависит от взаимного расположения вероятностейp_i, q_i и h.

Вероятности изменяются следующим образом:

$$p_1 = 0.01 * a, p_{i+1} = p_i + 0.01 * c,$$
$$q_1 = 0.01 * a, \qquad q_{i+1} = q_i - 0.01 * c,$$
$$h = 0.01 * b = const, i = 1,2..$$
$$0.01(2a + b) = 1, c = [1, a]$$

Ниже дано наглядное представление этого случая для допустимых траекторий в виде ориентированного графа. Шаг от экрана с вероятностью p_i обозначен направленным вправо вверх ребром, шаг к экрану с вероятностью q_i ребром, направленным вправо вниз и шаг на месте с вероятностью h обозначен ребром, направленным вправо.



Граф допустимых траекторий для k=7 (рис.2)

Из рис. 2 видно, что при остановке на месте вероятность шага к экрану или от него продолжает изменяться. Формулы подсчета вероятности поглощения для первых шести шагов имеют вид:

$$J_1 = q_1$$
$$J_2 = hq_2$$
$$J_3 = p_1q_2q_3 + hhq_3$$
$$J_4 = hp_2q_3q_4 + p_1hq_3q_4 + p_1q_2hq_4 + hhhq_4$$
$$J_5 = p_1p_2q_3q_4q_5 + p_1q_2p_3q_4q_5 + hhp_3q_4q_5 + hp_2hq_4q_5 + hp_2q_3hq_5 + p_1hhq_4q_5 + p_1hq_3hq_5 + p_1q_2hhq_5 + hhhhq_5$$
$$J_6 = hp_2p_3q_4q_5q_6 + p_1hp_3q_4q_5q_6 + p_1p_2hq_4q_5q_6 + p_1p_2q_3hq_5q_6 + p_1p_2q_3q_4hq_6 + hp_2q_3p_4q_5q_6 + p_1hq_3p_4q_5q_6 + p_1q_2hp_4q_5q_6 + p_1q_2p_3hq_5q_6 + p_1q_2p_3q_4hq_6 + hhhp_4q_5q_5 + hhp_3hq_5q_6 + hhp_3q_4hq_6 + hp_2hhq_5q_6 + hp_2hq_4hq_6 + hp_2q_3hhq_6 + p_1hhhq_5q_6 + p_1hhq_4hq_6 + p_1hq_3hhq_6 + p_1q_2hhhq_6 + hhhhhq_6$$

Вынесение h за скобки не даст результата. В этом случае необходимо разделить траектории на группы по количеству h.

$$J_1 = q_1$$
$$J_2 = hq_2$$
$$J_3 = p_1q_2q_3 + hhq_3$$
$$J_4 = (hp_2q_3q_4 + p_1hq_3q_4 + p_1q_2hq_4) + hhhq_4$$
$$J_5 = (p_1p_2q_3q_4q_5 + p_1q_2p_3q_4q_5) + (hhp_3q_4q_5 + hp_2hq_4q_5 + hp_2q_3hq_5 + p_1hhq_4q_5 + p_1hq_3hq_5 + p_1q_2hhq_5) + hhhhq_5$$
$$J_6 = (hp_2p_3q_4q_5q_6 + p_1hp_3q_4q_5q_6 + p_1p_2hq_4q_5q_6 + p_1p_2q_3hq_5q_6 + p_1p_2q_3q_4hq_6 + hp_2q_3p_4q_5q_6 + p_1hq_3p_4q_5q_6 + p_1q_2hp_4q_5q_6 + p_1q_2p_3hq_5q_6 + p_1q_2p_3q_4hq_6) + (hhhp_4q_5q_5 + hhp_3hq_5q_6 + hhp_3q_4hq_6 + hp_2hhq_5q_6 + hp_2hq_4hq_6 + hp_2q_3hhq_6 + p_1hhhq_5q_6 + p_1hhq_4hq_6 + p_1hq_3hhq_6 + p_1q_2hhhq_6) + hhhhhq_6$$

Слагаемые в скобках не будут разительно отличаться друг от друга, поэтому можно найти среднее между ними путем выделения траектории с наибольшим «весом»P_{max}, траектории с наименьшим «весом» P_{min} и плавающей траектории для нивелирования погрешности вычислений P_{flt}.

Перейдем к реальным числам.

Положим $p_1 = 0.4, p_{i+1} = p_i + 0.01, q_1 = 0.4, q_{i+1} = q_i - 0.01, h = 0.2 = const, i = 1,2...$

Тогда

$$J_1 = 0,4$$
$$J_2 = 0,2 * 0,39 = 0,078$$
$$J_3 = 0,4 * 0,39 * 0,38 + 0,2 * 0,2 * 0,38 = 0,05928 + 0,0152 = 0,07448$$
$$J_4 = (0,2 * 0,41 * 0,38 * 0,37 + 0,4 * 0,2 * 0,38 * 0,37 + 0,4 * 0,39 * 0,2 * 0,37) + 0,2 * 0,2 * 0,2 * 0,37 = (0,0115292 + 0,011248 + 0,011544) + 0,00296 = 0,0372812.$$

Первые четыре пункта не требуют особых вычислений, так как их не трудно посчитать напрямую в силу малого количества траекторий.
Из пункта 4 видно, что значения в скобках мало отличаются друг от друга, что доказывает утверждение, приведенное выше.

5	0,008301024	0,008727264	0,00223776
	0,00218448	0,00224352	0,0021312
	0,0021888	0,0022464	0,000576

Для пяти шагов существует уже 9 траекторий и 3 группы по количеству h. Оттенками голубогоцветав каждой группевыделены траектории с наибольшим и наименьшим «весом». Вероятности этих траекторий выглядят следующим образом:

$$P_{max}(h^0) = pqpqq, P_{min}(h^0) = ppqqq$$

$$P_{max}(h^2) = pqhhq, P_{min}(h^2) = phhqq.$$

В последней группе всегда будет одна траектория с «весом» $h^{k-1}q_k$, т.е.

$$P(h^4) = hhhhq$$

Суммируя«веса» всех траекторий получим результат

$$J_{5_1} = 0.030836448.$$

С помощью $P_{max}P_{min}$ траекторий получено:

$$J_{5_2} = 0.30737088.$$

Погрешность: 0,32%.

6	0,001605593	0,001566432	0,00152914	0,001570464	0,001614088
	0,001688249	0,001647072	0,00169042	0,001651104	0,001696968
	0,00043344	0,00042336	0,00043512	0,00041328	0,00042476
	0,00043624	0,0004032	0,0004144	0,0004256	0,0004368
	0,000112				

Для шести шагов количество траекторий равно 21, групп все так же остается 3.

Maxиminвероятности в этих группах выглядят так:

$$P_{max}(h^1) = pqpqhq, P_{min}(h^1) = pphqqq$$
$$P_{max}(h^3) = pqhhhq, P_{min}(h^3) = phhhqq$$
$$P(h^5) = hhhhhq$$

Сумма «весов» всех траекторий:

$$J_{6_1} = 0.20617722.$$

Применение $P_{max}P_{min}$ траекторий приведет к приближенному значению

$$J_{6_2} = 0.2044552.$$

Погрешность: 0,85%.

Семь шагов – 51 траектория, 4 группы.

$$P_{max}(h^0) = pqpqpqq, P_{min}(h^0) = pppqqqq, P_{flt}(h^0) = ppqpqqq$$
$$P_{max}(h^2) = pqpqhhq, P_{min}(h^2) = pphhqqq$$
$$P_{max}(h^4) = pqhhhhq, P_{min}(h^4) = phhhhqq$$
$$P(h^6) = hhhhhhq$$

Сумма «весов» всех траекторий:

$$J_{7_1} = 0.016469694$$

Используя $P_{max}P_{min}$ траектории, получим:

$J_{7_2} = 0.01627142.$

Погрешность: 1,2%.

С использованием $P_{max}P_{min}$ и P_{flt} траекторий

$J_{7_3} = 0.016415842,$

а погрешность уменьшилась до 0,64%.

Восемь шагов – 127 траекторий, 4 группы.

$$P_{max}(h^1) = pqpqpqhq, P_{min}(h^1) = ppphqqqq, P_{flt}(h^1) = ppqpqhqq$$

$$P_{max}(h^3) = pqpqhhhq, P_{min}(h^3) = pphhhqqq$$

$$P_{max}(h^5) = pqhhhhhq, P_{min}(h^5) = phhhhhqq$$

$$P(h^7) = hhhhhhhq$$

Сумма по всем траекториям:

$$J_{8_1} = 0.01229101$$

С использованием $P_{max}P_{min}$траекторий:

$J_{8_2} = 0.01209146.$

Погрешность: 1,6%.

С использованием $P_{max}P_{min}$ и P_{flt} траекторий:

$J_{8_3} = 0.01228158.$

Погрешность снизилась до 0,07%.

Окончательные формулы подсчета вероятностиJ_k- поглощениязаkшагов выглядят следующим образом:
для нечетного числа шагов

$$J_k = \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{2}{k-2i+1} C_{k-2i-1}^{\frac{k-2i-1}{2}} * C_{k-1}^{0+2i} * \left(\frac{P_{min} + P_{flt}}{2} + P_{max}\right) * \frac{1}{2}, i, k = 1,2..$$

$$P_{max} = p_1 q_2 p_3 q_4 \dots q_{k-1-2i} h^{0+2i} q_k, i = \overline{0, \frac{k-1}{2}}$$

$$P_{min} = p_1 p_2 \dots p_{\frac{k-1-2i}{2}} h^{0+2i} q_{\frac{k+1+2i}{2}} \dots q_{k-1} q_{qk}, i = \overline{0, \frac{k-1}{2}}$$

$$P_{flt} = p_1 p_2 \dots q_{\frac{k-1}{2}} p_{\frac{k+1}{2}} q_{\frac{k+3}{2}} \dots q_{k-3-2i} h^{0+2i} q_{k-1} q_k, i = \overline{0, \frac{k-1}{2}},$$

для четного числа шагов

$$J_k = \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{2}{k-2i+1} C_{k-2i-1}^{\frac{k-2i-1}{2}} * C_{k-1}^{1+2i} * \left(\frac{P_{min} + P_{flt}}{2} + P_{max}\right) * \frac{1}{2}, i, k = 1,2..$$

$$P_{max} = p_1 q_2 p_3 q_4 \dots q_{k-2-2i} h^{1+2i} q_k, i = \overline{0, \frac{k-1}{2}}$$

$$P_{min} = p_1 p_2 \dots p_{\frac{k-2-2i}{2}} h^{1+2i} q_{\frac{k+2+2i}{2}} \dots q_{k-1} q_{qk}, i = \overline{0, \frac{k-1}{2}}$$

$$P_{flt} = p_1 p_2 \dots q_{\frac{k-1}{2}} p_{\frac{k+1}{2}} q_{\frac{k+3}{2}} \dots q_{k-4-2i} h^{1+2i} q_{k-1} q_k, i = \overline{0, \frac{k-1}{2}}.$$

Данный метод помогает существенно упростить решение задачи, путем вычисления, к примеру, 8 траекторий вместо 127 для случая случайных блужданий с переменными вероятностями, когда вероятности меняются со временем. Не стоит забывать о том, что количество траекторий растет с увеличением количества шагов, согласно последовательности чисел Моцкина.

Список литературы

1. БулинскийА.В.Теория случайных процессов/А.В.Булинский, А.Н. Ширяев - М.: Физматлит, 2005. -408 с
2. BernhartF.R.Catalan, Motzkin, andRiordannumbers// DiscreteMath,1999.– p. 74-112
3. Малахов Е.И. Случайные блуждания на прямой с поглощающим экраном/Е.И. Малахов // Вестник Иркутского университета – Иркутск: Издательство ИГУ, - Вып.19. с.117