Название рубрики: Транспортная логистика
УДК 658.135.073

АНАЛИЗ ПЛОСКИХ КОНТУРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ ОБЪЕКТЫ С НАЛОЖЕНИЯМИ

В.И.Мартьянов, М.Д. Каташевцев
Иркутский национальный исследовательский технический университет,
664074, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83.

Рассмотрены вопросы анализа плоских контурных изображений, представляющих объекты с наложениями. Т.е. предполагается наличие объектов первого плана, отображенных на изображении без каких-либо искажений, а также объектов второго и других планов, которые в той или иной степени закрыты более близко стоящими к точке съемки объектами.В частности, эти результаты могут иметь большое практическое значение для автоматизации обработки видеорядов диагностических дорожных лабораторий, поскольку объекты дорожной инфраструктуры (разметка, дорожные знаки и др.) на видеорядах часто бывают (частично) закрыты другими объектами (проходящими автомобилями и др.).

Ключевые слова: контурное изображение; масштабные ряды; генерализация;дуга графа; связи дуг;алгоритмическая сложность;алгебраические системы;изоморфное вложение.

Мартьянов Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры автомобильных дорог, тел.:(3952)405139, e-mail: ad@istu.edu
Каташевцев Михаил Дмитриевич, программист 1-ой категории кафедры автомобильных дорог,тел.:(3952)405139, e-mail: ad@istu.edu

Scaling series of sketches images and applications

V.I.Martyanov, M.D. Katashevtsev
Irkutsk National Research Technical University,
83, Lermontova St., Irkutsk, 664074.

We describe the results of basicprinciples for the use of the scaled images analysis for optimization of template matching on the tree of source objects. Particularly the results can be find useful for automatization of the digitizing process of road video data taken by mobile laboratory. The automatization of the digitizing process has big practical meaning, as process of digitizing is high priced and time-consuming procedure.

Keywords:sketch image; scaling series; generalization; arc; graph; relations; computational complexity; algebraic systems; isometric embedding.

Martyanov Vladimir Ivanovich, doctor of physical and mathematical science, professor, e-mail: ad@istu.edu
Katashevtsev Mikhail, programmer of I category, e-mail: mmailm@mail.ru

1. Введение. В статье [1] рассмотрены вопросы анализа плоских связных контурных изображений (т.е. даны оценки сложности поиска образцов), представленных дугами и связями дуг с градусной мерой. В статье [2] даны оценки сложности поиска образцов для расширенной концепции представления плоских связных контурных изображений, где к градусной мере дуг добавлены также их относительные размеры (и более того, можно добавлять и другие количественные характеристики).

Ввод относительных размеров дуг ставит вопрос о масштабных рядах представления образцов и изображений (для использования результатов анализа сжатых изображений с целью повышения эффективности анализа исходных изображений), что и рассмотрено в статье [3] .

В настоящей статье рассмотрены вопросы анализа плоских контурных изображений, представляющих объекты с наложениями. Т.е. предполагается наличие объектов первого плана, отображенных на изображении без каких-либо искажений, а также объектов второго и других планов, которые в той или иной степени закрыты более близко стоящими к точке съемки объектами.

Более точно, будут даны оценки сложности поиска изоморфного вложения в анализируемое изображение объектов (образцов) первого плана, далее, второго и т.д. Отметим, что оценки сложности вложения для объектов (образцов) первого плана получены в статье [2], но здесь вложения будут строиться по более сложной технической схеме, что дает, соответственно, большую алгоритмическую сложность.

Схема поиска образцов второго плана состоит в проверке, что частично отображенные части каких-то образцов могут быть дополнены до *всего* образца дугами дерева решений (универсума), лежащими *внутри* совокупности (объединения) образцов первого плана.

Конечно, образцы третьего плана уже используют понятие: лежать *внутри* совокупности образцов первого и второго плана и т.д.

Вопрос о сложности проверки «лежать *внутри* объединения образцов» может быть решен на основе *геометрического* представления универсума на декартовой плоскости в полярной системе координат, где сложность проверки лежать *внутри* области будет иметь точное математическое решение.

Геометрическое представление универсума на декартовой плоскости в полярной системе координат в данной работе не будет доведено здесь до строгих математических формализаций, так как это приведет к значительному увеличению статьи, а громоздкие формулы затруднят понимание основных идей и результатов. Поэтому *геометрическая* интерпретация дуг, связей дуг и универсума на декартовой плоскости в полярной системе координат будет дана ниже только в замечаниях.

Результаты получены в предположении, что все объекты, отображенные на изображении, а также образцы, представлены в одинаковом масштабе. Кроме того, точка съемки объектов не дает искажений, связанных с объемом объектов (*3d*) и углом съемки, что с нашей точки зрения, не уменьшает значения результатов на данном этапе исследований.

2. Формализация. Математические модели образцов $S_1, S_2, ..., S_m$ и анализируемого изображения *P*будут представлены четырехосновными алгебраическими системами (*а.с.*) [4, 5] вида

$P =< A, R, V, M; Se, Ag, Me, \mathrm{Re} >$ *(1),*

где основное множество *A* – совокупность дуг; основное множество *R* – совокупность связей дуг; основное множество *V* – совокупность допустимых углов или секторов окружности (например, от 0 до 360 градусов или долей градусов, представленная начальным отрезком натуральных чисел от *0* до *D*); *M*– множество относительных мер длины дуг, представленное начальным отрезком натуральных чисел от *1* до *E,* одноместная функция $Se : A \to V$, которая определяет количество градусов (или долей градуса) дуги, как сектора окружности; одноместная функция $Ag : A \to M$, которая определяет количество градусов (или долей градуса в соответствии с заданием множества *V*) угла пересечения дуг; одноместная функция $Me : A \to M$, сопоставляющая каждой дуге ее относительную величину;трехместное отношение *Re*соединяет связь дуг *rel* с соответствующими дугами, т.е. *Re*- подмножество декартова произведения $R \times A \times A$, причем , если *Re(rel, a, b)* и *Re(rel, a_1, b_1)*, то $a = a_1$ и $b = b_1$.

Замечание 1.Дуги на декартовой плоскости будут представляться секторами окружностей, определенных радиусов, которые здесь не будут точно определяться, причем связи дуг соответствуют наличию двух дуг, имеющих общую точку для своих концов.

Пусть образцы представлены совокупностью *а.с.*

$$
\begin{aligned}
S_1 &=< A_1, R_1, V, M; Se, Ag, Me, \mathrm{Re} > \\
S_2 &=< A_2, R_2, V, M; Se, Ag, Me, \mathrm{Re} > \\
&\dots \\
S_m &=< A_m, R_m, V, M; Se, Ag, Me, \mathrm{Re} >
\end{aligned} \qquad (2)
$$

Анализируемое изображение *P* представлено *a.c. (1).* В дальнейшем будем считать, что *a.c.* $P, S_1, S_2, ..., S_m$ представляют*связные* изображения.

Следуя [2] построим универсум *Y*для изображений, имеющих не более *n*дуг и не более *k* связей дуг. Без ограничения общности можно считать, что *n* равно *k*, а также, что максимальное количество дуг и связей дуг в*a.c.(1), (2)* не превосходят *n*.

Определим универсум как *a.c.*

$$Y =< AA, RR, V, M; Se, Ag, Me, \mathrm{Re} > (3),$$

где совокупность дуг *AA = {* $aa_{a,k}$ | индексы дуг $\alpha \in U = U_o \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$, целочисленный параметр *k*принимает значения от *0* до *n*(причем, если $\alpha \in U_i$, то $i \le k$ *};* совокупность связей дуг $RR = \{rr_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in U\}$ ограничения на индексы дуг *α, β* будут даны ниже,определения функций *Se, Ag, Me,* и отношения *Re*будут также даны ниже.

<u>Основание индукции.</u> Множество

$U_0 = \{(v, m, r, d) \mid v \in V, m \in M, r \in V, d \in D\}$

причем *m = 1,* множество направлений обхода дуги $D = \{0,1\}$, где *0* соответствует обходу «по часовой стрелке», *1* соответствует обходу «против часовой стрелки».

Замечание 2.Дуги, имеющие индексы из множества U_0, будем обозначать $AA_{0,0} = \{aa_\alpha \mid \alpha \in U_0\}$ При геометрической интерпретации на декартовой плоскости дуг ранга 0 , все они связаны своим началом с центром полярной системы координат, причем параметр r для дуги $aa_{(v,\ m,\ r,\ d)}$ определяет угол между осью абсцисс и касательной к рассматриваемой дуги.

Параметр d для дуги $aa_{(v,\ m,\ r,\ d)}$ определяет ее вогнутость (при d = 0) или выпуклость (при d = 1). В частности, если ось абсцисс является касательной рассматриваемой дуг, (т.е. параметр r равен нулю) при d = 0 дуга $aa_{(v,\ m,\ r,\ d)}$ располагается ниже оси абсцисс, а при d = 1, соответственно, выше.

<u>Индукционный шаг.</u> Пусть *i > 0.*

$$U_i = \{(v_0, m_0, r_0, d_0) \ldots (v_i, m_i, r_i, d_i) \mid m_j = 1,$$
$$v_j \in V, m_j \in M, r_j \in V, d_j \in D\}$$

Тогда

$$U_{i+1} = \{(v_0, m_0, r_0, d_0) \ldots (v_{i+1}, m_{i+1}, r_{i+1}, d_{i+1}) \mid$$
$$m_j = 1, \qquad (4)$$
$$v_j \in V, m_j \in M, r_j \in V, d_j \in D\}$$

Замечание 3.Дуги, имеющие индексы из множества U_{i+1}, будем обозначать $AA_{i+1,i+1}$.

При геометрической интерпретации на декартовой плоскости дуги aa_α ранга i+1 , где α = β(v, m, r, d)она связана своим началом с концом некоторой дуги aa_β из $AA_{i,i}$, причем параметр r для дуги aa_α определяет угол между касательными этих рассматриваемых здесь дуг.

Все определенные выше дуги из совокупности

$BB = AA_{0,0} \cup AA_{1,1} \cup \ldots \cup AA_{n,n}$ имеют длину равную *1.* Дуги произвольной длины представлены в множествах $AA_{i,j}$, где *i<j*и *n ≥j* , которое определяется следующим образом

$$AA_{i,j} = \{aa_{\alpha,\beta} \mid \alpha \in U_i, \beta \in U_j,$$
$$\alpha = \alpha_1(v, m, r, d),$$
$$\beta = \alpha(\mathrm{v}_1, \mathrm{m}_1, \mathrm{r}_1, \mathrm{d}_1) \ldots (\mathrm{v}_s, \mathrm{m}_s, \mathrm{r}_s, \mathrm{d}_s) \quad (5)$$
$$s = j - i$$
$$v_1 = \ldots = v_s, r_1 = \ldots = r_s = 0$$
$$\mathrm{d}_1 = \ldots = \mathrm{d}_s = \mathrm{d}\}$$

Отметим, что так определенные дуги $aa_{\alpha,\beta}$ имеют длину *j – i + 1*, т.е. $Me(aa_{\alpha,\beta}) = j - i + 1$, сектор окружности дуги $aa_{\alpha,\beta}$ равен $v * (j - i + 1)$, т.е. $Se(aa_{\alpha,\beta}) = v * (j - i + 1)$.

Совокупность дуг *AA* универсума *Y(3)* в соответствии с *(4)* и *(5)* может быть определена следующей формулой $AA = \bigcup_{i,j} AA_{i,j}$, где $i \le j$ и $n \ge j$, одноместные функции *Se, Me* определены выше.

Для определения совокупностей связей дуг *RR* упростим способ обозначения дуг из множеств $AA_{i,j}$, а именно, для дуги длины *1* (случай $i = j$) вместо aa_{α} будем писать $aa_{\alpha,1}$; при $k> 1$ вместо $aa_{\alpha,\beta}$ будем использовать обозначение $aa_{\alpha, k}$.

Для уменьшения громоздкости обозначений и решения некоторых других технических задач введем совокупности дуг $AA_0, AA_1, ..., AA_n$, где

$$AA_i = \{aa_{\alpha,k} \mid \alpha \in U_i, k = \overline{1,n}\}.$$

Дуги из совокупности AA_iбудем называть ранга *i*. Очевидно, что совокупности дуг попарно не пересекаются и $AA = AA_0 \cup AA_1 \cup ... \cup AA_n$. Основная проблема из-за которой необходим ввод совокупностей AA_iсостоит в том, что иначе невозможно вложение дуг длины больше *1* в совокупность дуг 0-го ранга AA_0 при формировании основания индукции. Отметим также, что иногдабудем пользоваться и совокупностями дуг с обозначением $AA_{i,j}$.

Положим совокупность связей дуг

$$RR = \{rr_{\alpha_1,\alpha_2} \mid a_1 = aa_{\alpha_1,k_1}, a_2 = aa_{\alpha_2,k_2}\}$$

$$\alpha_1 = \beta(\mathrm{v}_1, \mathrm{m}_1, \mathrm{r}_1, \mathrm{d}_1), \qquad (6)$$

$$\alpha_2 = \beta(\mathrm{v}_2, \mathrm{m}_2, \mathrm{r}_2, \mathrm{d}_2)$$

Тогда $Re\ (rr_{a1,\,a2}, a_1, a_2), Ag\ (rr_{a1,\,a2}) = r_1 - r_2$.

Таким образом, универсум *Y(3)* полностью определен.

3. Основные результаты.

Теорема 1.Любая а.с. вида (1), имеющая не более n дуг и связей дуг может быть изоморфно вложена в универсум Y (3).

Доказательствоследует из построения универсума*Y(3)* по выше определенным формулам *(4)*, *(5)* и *(6)*.

Пусть отображения а.с.

$$\zeta_1 : S_1 \to Y, \zeta_2 : S_2 \to Y, ..., \zeta_m : S_m \to Y$$

являются изоморфными вложениями, существование которых обеспечивает теорема 1, причем образы каких-то дуг образцов S_1, S_2 , ..., S_mпринадлежат совокупности дуг *0*-го ранга AA_0, т.е.

$$\zeta_1(S_1) \cap AA_0 \ne \emptyset, \zeta_2(S_2) \cap AA_0 \ne \emptyset, \\ ..., \zeta_m(S_m) \cap AA_0 \ne \emptyset \qquad (7)$$

Положим, что совокупность дуг изображения *P(3)* имеет вид $A = \{a_1, a_2, ..., a_w\}$ и

$$\rho_1 : P \to Y, \rho_2 : P \to Y, ..., \rho_w : P \to Y$$

изоморфные вложения, где дуги $a_1, a_2, ..., a_w$отображаются в совокупность дуг *0*-го ранга AA_0, т.е.

$$\rho_1(a_1) \in AA_0, \rho_2(a_2) \in AA_0, ..., \rho_w(a_w) \in AA_0 \ (8)$$

Рассмотрим совокупность $\sum$ частичных инъективных отображений

$$\Sigma = \{\zeta_{\rho_{ij}} \mid \zeta_{\rho_{ij}} : S_i \to P, \\ \zeta_i : S_i \to Y, (\rho_j)^{-1} : Y \to P\} \qquad (9)$$

Теорема 2.Пусть ξ изоморфное вложение образца S_i в изображение P (1). Тогда в совокупности Σ существует отображение $\zeta_{\rho_{ij}}$ такое, что для любой дуги $a \in S_i$ выполнено $\xi(a) = \zeta_{\rho_{ij}}(a)$. Таким образом, <u>все</u> изоморфные вложения образцов S_i в изображение P (1) представлены в совокупности Σ.

Доказательствобудем вести в предположении, что любая дуга может быть единственным образом изоморфно вложена в AA_0. Пусть $\zeta_i : S_i \to Y$ изоморфное вложение, существование которого обеспечивает теорема 1, причем дуга $a \in S_i$ такая, что $\zeta_i(a) = b$ и $b \in AA_0$. Пусть $\xi(a) = c$, где $c \in P$ *(1).*

Положим (согласно формулам *(7)* и *(8)*) изоморфное вложение $p_j : P \to Y$ такое, что $\rho_j(c) = b$. Тогда композиция $\zeta_i : S_i \to Y$, $(\rho_j)^{-1} : Y \to P$ будет совпадать с изоморфным вложением ξ по правилам конструкции универсума *Y* (формулировки *(4), (5)* и *(6)*). Теорема доказана.

Непосредственным следствием теоремы 2 является

Теорема 3. *Сложность поиска образцов первого плана имеет верхнюю границу сложности не превышающую O((w + t) *w + m), где w — количество дуг (t — количество связей дуг) изображения P(1), m* – количество образцов.

Доказательство. Универсум (схема 2) статьи *[2]* ни чем не отличается от универсума *Y*, рассматриваемого здесь, который построен на гораздо более строгом математическом уровне. Поэтому данная теорема является полным аналогом теоремы 3 из статьи *[2]*. Теорема доказана.

Отметим, что по сформированным выше ограничениям параметры *t* и *w* меньше или равны *n*, поэтому ограничения на *верхнюю границу сложности можно переформулировать, как не превышающую*

$$O((n+ n) *n+ m).(10)$$

Перейдем к вопросу оценки сложности поиска в изображении *P(1)* образцов *2*-го и дальнейших планов, что, конечно, увеличивает оценку сложности *(10)*. Отметим, что при поиске изоморфных вложений совокупность Σ частичных инъективных отображений оказывается построенной полностью.

Пусть $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ где $\Sigma_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_h\}$ – состоит из всех изоморфных вложений, а $\Sigma_2 = \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r\}$ – состоит из частичных инъективных вложений, совокупность Σ определена формулой *(9)*.

Без ограничения общности можно считать, что уже построено изоморфное вложение $\chi : P \to Y$ и образы композиций частичных инъективных вложений $\{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r\}$ и изоморфного вложения χ дополнены до полных копий множества дуг $A_1, A_2, ..., A_m$ соответствующих образцов $S_1, S_2, ..., S_m$. Предположим, что частичное инъективное вложение $\theta_i : S_j \to P$ и множество дуг $A_{j_1} = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ образ композиции отображений θ_i и χ. Пусть далее, $A_j = A_{j_1} \cup A_{j_2}$, где $A_{j_2} = \{b_1, b_2, ..., b_e\}$ дуги не имеющие прообразов из-за частичности отображения θ_i.

Таким образом, сложность поиска образцов *2*-го плана зависит от:

а) построения совокупности дуг $A_{j_2} = \{b_1, b_2, ..., b_e\}$ *;*

б) проверки нахождения дуг из *<u>внутри</u>* образов отображений $\Sigma_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_h\}$.

Теорема 4. Сложность поиска образцов второго плана имеет верхнюю границу сложности не превышающую $O(n + \Psi \cdot n \cdot m)$, где Ψ - константа, соответствующая сложности проверки нахождения дуг из $A_{j_2} = \{b_1, b_2, ..., b_e\}$ <u>внутри</u> образов найденных образцов (построенных изоморфными вложениями

$\Sigma_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_h\}$, где n - верхняя граница на количество дуг и связей дуг у изображения и образцов, m – количество образцов $S_1, S_2, ..., S_m$.

Доказательство. Сложность построения совокупности дуг $A_{j_2} = \{b_1, b_2, ..., b_e\}$ пункта а), очевидно, не превышает *n*.

Общее количество дуг из объединения совокупностей $A_{j_2} = \{b_1, b_2, ..., b_e\}$ пункта б), очевидно, не превышает *n* m*.

Если Ψ - константа, соответствующая сложности проверки нахождения дуг из $A_{j_2} = \{b_1, b_2, ..., b_e\}$ *<u>внутри</u>* образов найденных образцов, то $O(n + \Psi \cdot n \cdot m)$ верхняя граница сложности для пункта б) и теорема доказана.

Замечание 3. Оценки теоремы 4 принципиально хуже других оценок работ [1, 2, 3], так как здесь появляется мультипликативная зависимость от количества образцов m (в оценках работ [1, 2, 3] количество образцов m увеличивало оценку сложности только аддитивно). В качестве позитивного момента отметим, что количество образцов m увеличивает сложность только линейно, что позволяет надеяться на эффективную реализацию при решении практически значимых задач большой размерности.

Результаты теоремы 4 позволяют получить в целом оценку сложности поиска в анализируемом изображении образцов первого, второго и произвольного i – го планов, если учитывать, что при переходе к произвольному $i+1$ – му плану, объединение совокупностей $A_{j_2} = \{b_1, b_2, ..., b_e\}$ только уменьшается, что

Теорема 5. Сложность поиска образцов первого, второго и любых других планов имеет верхнюю границу сложности не превышающую

$O((n+n)\cdot n + m + n + (\Psi \cdot n \cdot m)\cdot n)$ (11)

где Ψ - константа, соответствующая сложности проверки нахождения дуг из внутри образов найденных образцов (построенных изоморфными вложениями $\Sigma_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_h\}$, где n - верхняя граница на количество дуг и связей дуг у изображения и образцов, m – количество образцов $S_1, S_2, ..., S_m$.

Доказательство. Первая часть оценки $O((n+n)\cdot n + m)$ соответствует поиску образцов первого плана (теорема 1).

Вторая часть оценки $O(n)$ соответствует оценки сложности построения совокупностей дуг $A_{j_2} = \{b_1, b_2, ..., b_e\}$ (теорема 4), как отмечалось уже выше, этих совокупностей достаточно для поиска объектов произвольного $i+1$ – го плана.

Третья часть оценки $O((\Psi \cdot n \cdot m)\cdot n)$ соответствует итерациям проверок нахождения дуг из совокупностей $A_{j_2} = \{b_1, b_2, ..., b_e\}$ *внутри* образов отображений $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup ... \cup \Sigma_i$ (теорема 4), где Σ_i добавляются за счет найденных образцов дальнейших i – ых планов.

Отметим, что итераций не может быть больше n. Теорема доказана.

Замечание 4. Оценки основной Теоремы 5 нехуже оценок теоремы 4, что показывает отсутствие усложнения поиска образцов дальнейших i – ых планов после второго плана, что, вообще говоря, естественно, так как принципиальным является переход к рассмотрению частичных вложений образцов, которые все генерируются после построения изоморфных вложений образцов первого плана.

4. Заключение. 1. Результаты данной работы существенно развивают и уточняют подход, описанный в работах [1, 2, 3], предлагают методы способные решать задачи анализа изображений в реальных условиях, когда изображение может иметь какие-то искажения. Причем не надо думать, что эти искажения могут быть только от наложения искомых образцов друг на друга. Предложенные технические решения могут быть адаптированы для гораздо более сложных случаев, например, при аппаратных сбоях или искажениях при передаче видеорядов по линиям связи и пр.

2. Существенным пробелом в рассмотренных технических решениях является отсутствие разбора случая наложения на часть дуги, что будет предметом дальнейших исследований.

3. Геометрическая интерпретация универсума так же должна получить необходимые технические решения.

4. В замечании 3 указывается, что в отличии результатов работ [1, 2, 3], в т*еореме 4* (и в теореме 5, также, формула *(11)*)количество образцов *m*ухудшает оценку сложности мультипликативно относительно общего ограничения *n* на количество дуг и связей дуг. Кроме соображений, что это ухудшение только линейное, следует учитывать возможность применения методов оптимизаций переборов, предлагаемых в работах [6, 7], которые при специальной настройке на прикладные задачи конкретных прикладных задач способны эффективно решать и *NP*-трудные задачи [8, 9], (например, сетевого планирования).

Библиографический список

1. Мартьянов В. И. Комбинаторные задачи высокой сложности и анализ плоскихконтурных изображений / В. И. Мартьянов, М. Д. Каташевцев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2013. – №4. – С. 31–47.
2. Каташевцев М. Д. Анализ плоских контурных изображений с метрикой // Изв. Иркут.гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – №9. – С. 39–48.
3. Мартьянов В.И., Каташевцев М.Д. Масштабные ряды плоских контурных изображений и их применение. //Вестник ИрГТУ. 2016. №5(82).
4. Мальцев А.И. Алгебраические системы// М.: Наука. 1967. 324 с.
5. Кокорин А.И., Пинус А.Г. Вопросы разрешимости расширенных теорий// УМН. – 1978.- Т.33, вып.2.-С.49-84.
6. Мартьянов В.И., Архипов В.В., Каташевцев М.Д., Пахомов Д.В. Обзор приложений логико-эвристических методов решения комбинаторных задач высокой сложности// Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. ИрГУПС. – 2010. №4(28). С. 61-67.
7. Hentenrick van P. Constraint Satisfaction in Logic Programming// The MIT Press. Cambrige, 1989. 365p.
8. Лорьер Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта. — М.: Мир, 1991.
9. Гери М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.. — М.: Мир, 1982.