ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПОЛИНОМАМИ ВОЛЬТЕРРА

Рассмотрены обобщенные решения полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, возникающих в одной задаче управления нелинейными динамическими процессами типа “вход выход”. Доказана теорема существования и предложен способ построения обобщенных решений. Установлено, что число решений равно количеству корней определенного полинома.

1. Введение

При математическом моделировании нелинейных динамических процессов типа “вход – выход” получили широкое распространение (см. библиографию в [1–6]) интегральные модели вида

$$F(x,t) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t K_m\,(t, s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^{m} x(s_i) ds_i - f\,(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где $f(t)$ – известный отклик, $x(t)$ – входной сигнал. Функции K_m в модели (1) называют ядрами Вольтерра, а соответствующий ряд – Вольтерровым.

В [2, 3] уравнения вида (1) используются для моделирования и управления нелинейными системами с памятью и обратной связью. При построении модели (1) возникает проблема идентификации ядер по известному выходу $f(t)$. Для решения этой задачи в ИСЭМ СО РАН разрабатываются численные методы и алгоритмы, предполагающие подачу “обучающих” тестовых сигналов $x(t)$ и измерение соответствующих откликов $f(t)$. Эти методы и обширная библиография изложены в монографии [7] и были использованы для оптимизации потребления энергоресурсов турбокомпрессором [8] в химической промышленности.

В процессе управления с использованием модели (1) (см., например, [3]) требуется по известному выходу $f(t)$ восстановить входной сигнал $x(t)$, т.е. решить нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода. Отметим, что в системах с обратной связью также возникает проблема решения уравнений первого рода вида (1) (см. обширную библиографию в [3]).

Таким образом, в предположении, что переходные характеристики и отклик динамической системы известны, естественным образом ставится задача управления, состоящая в поиске входных возмущений $x(t)$, являющихся решением полиномиального интегрального уравнения Вольтерра первого рода (1). В [3, 9] приведены результаты в области теории и приближенных методов построения непрерывных решений уравнений (1). Однако лишь при $f(0)=0$ уравнение (1) может иметь классическое решение.

Обобщенные решения представляют большой интерес в теории динамических систем [10]. Поэтому несомненный интерес представляет построение теории обобщенных решений уравнений первого рода. В настоящей работе доказана теорема существования обобщенного решения уравнения (1). Установлено, что число обобщенных решений равно числу корней определенного полинома. Решения состоят из сингулярной части с точечным носителем [11] и регулярной, удовлетворяющей определенному нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

В данной работе на основе результатов из [12, 13] показано, что уравнение (1) может иметь несколько обобщенных решений, и предложен метод их построения.

2. Теорема существования обобщенных решений

Чтобы не усложнять вопрос громоздкими техническими деталями, будем предполагать, что

$$F(x,t) \equiv \sum_{m=1}^{N} \int_0^t \ldots \int_0^t K_m\left(t, s_1, \ldots, s_m\right) \prod_{i=1}^{m} x(s_i) ds_i - f\left(t\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

(2) $$K_m\left(t, s_1, \ldots, s_m\right) = \prod_{i=1}^{m} Q_m\left(t - s_i\right), \quad m = \overline{1, N}.$$

С учетом условия (2) уравнение (1) примет вид

(3) $$\sum_{m=1}^{N} \left(\int_0^t Q_m\left(t-s\right) x\left(s\right) ds \right)^m = f\left(t\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Уравнения вида (3) назовем *полиномиальным* интегральным уравнением первого рода. Следуя [11], введем

Определение 1. *Множество бесконечно дифференцируемых финитных функций $s(t)$ с носителями в интервале $(0,T)$ обозначим через $D_{(0,T)}$. Множество линейных непрерывных функционалов $x \in L(D_{(0,T)} \rightarrow (-\infty, +\infty))$ назовем пространством обобщенных функций и обозначим через $D'_{(0,T)}$.*

Определение 2. *Элемент x из $D'_{(0,T)}$ назовем обобщенным решением уравнения $F\left(x,t\right)=0$, если для любого $s(t) \in D_{(0,T)}$ выполнено тождество*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\left(x,t\right) s\left(t\right) dt = 0.$$

Следуя [13], решение уравнения (3) будем искать в классе $D'_{(0,T)}$ в виде

(4) $$x\left(t\right) = c\delta\left(t\right) + v(t,c),$$

где постоянная c и непрерывная функция $v(t,c)$ подлежат определению.

Т е о р е м а 1. *Пусть c – простой корень полинома $L(c) - f(0)$, где*

$$L(c) = \sum_{m=1}^{N} (Q_m(0)c)^m,$$

пусть в уравнении (3) все ядра и функция $f(t)$ – дифференцируемые функции при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда уравнение (3) имеет в классе $D'_{(0,T)}$ решение вида $x(t) = c\delta(t) + v(t,c)$, где непрерывная функция $v(t,c)$ зависит от выбора корня c и определяется методом последовательных приближений единственным образом.

З а м е ч а н и е 1. Если полином $L(c) - f(0)$ имеет кратный корень, то соответствующее обобщенное решение уравнения (3) может содержать производные функции Дирака $\delta(t)$. Этот случай рассматривается аналогично.

З а м е ч а н и е 2. В силу нелинейности уравнения (3) регулярная часть v обобщенного решения (4) определяется, вообще говоря, лишь в малой окрестности $(0, \rho^*]$, где $\rho^* \leqslant T$. При продолжении регулярной части $v(t)$ решения уравнения в область $t > \rho^*$ даже в аналитическом случае может встретиться точка $t^* \in (\rho, T]$, для которой $\lim\limits_{t \to t^*-0} v(t, c^*) = \infty$ (явление *“blow-up”*, соответствующее потери управляемости системы).

Отметим, что если $f(0) = 0$, $Q_1(0) \neq 0$, то $c = 0$ является простым корнем полинома $L(c)$ и соответствующее решение уравнения (3) является классическим. Если при этом полином $L(c)$ имеет простые ненулевые корни, то наряду с классическим будут существовать и обобщенные решения (см. пример в [9]).

3. Аналитический случай

Если $f(t)$ и $K_m(t)$ – аналитические функции, то регулярную часть решения можно искать в виде ряда

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i t^i, \tag{5}$$

вычисляя его коэффициенты реккурентным образом методом неопределенных коэффициентов.

Методом выпуклых мажорант [14] легко оценить снизу радиус его сходимости.

П р и м е р 1. На основании [14] (см. с. 198–203) для уравнения

$$w(t) = \left(\int_0^t ts^2 w(s)ds \right)^2 + t, \quad t \geqslant 0$$

мажорантная система

$$\begin{cases} r = r^2 \dfrac{\rho^4}{3} + \rho \\ 1 = \dfrac{2}{3} r\rho^4 \end{cases}$$

имеет решение $\rho^* = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/5}$, $r^* = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{1/5}$. Следовательно, это интегральное уравнение при $|t| \leqslant \rho^*$ имеет аналитическое решение.

Пример 2. Для уравнения

$$\int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s + \left(\int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s\right)^2 = 2 + 2t - t^2, \quad t \geqslant 0$$

выполнены условия теоремы. Соответствующий полином $c^2+c-2=0$ имеет простые корни 1, -2, которым отвечают два обобщенных решения

$$x_1(t) = \delta(t) + \frac{2}{3} + \frac{10}{27}t + O\left(t^2\right),$$
$$x_2(t) = -2\delta(t) - \frac{2}{3} - \frac{10}{27}t + O\left(t^2\right).$$

4. Обобщение теоремы

Пусть в уравнении (3) при $t \to +0$

$$Q_m(t) \sim a_m t^n, \quad m = 1, \ldots, N, \quad n \geqslant 1.$$

Тогда коэффициенты полинома $L(c)$ равны нулю и теорему нельзя применить. Пусть при этом уравнение

$$\sum_{m=1}^{N} (n! a_m c)^m - f(0) = 0 \tag{6}$$

имеет простое вещественное решение c^*. Все функции в уравнении (3) $n+1$-раз дифференцируемы. Тогда в классе $D'_{(0,\rho)}$ уравнение (3) имеет обобщенное решение

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \delta^{(i)}(t) + c^* \delta^{(n)}(t) + v\left(t, c_0, \ldots, c_{n-1}, c^*\right),$$

где постоянные $c_0, \ldots, c_{n-1}$ определяются однозначно из линейных алгебраических уравнений, а регулярная функция v строится методом последовательных приближений единственным образом. При $n=0$ из этого результата вытекает теорема 1. Кратным корням алгебраического уравнения (6) могут соответствовать обобщенные решения с сингулярной частью с порядком, большим n.

5. Заключение

Нелинейные (полиномиальные) интегральные уравнения Вольтерра первого рода, возникающие в задаче управления нелинейными динамическими процессами типа “вход – выход”, могут иметь несколько обобщенных решений. Обобщенные решения таких уравнений можно построить в виде суммы сингулярной компоненты с точечным носителем и регулярной функции. Коэффициенты сингулярной части определяются из нелинейных алгебраических уравнений. Регулярная функция определяется единственным образом методом последовательных приближений. Установленное нарушение единственности решений необходимо учитывать в задаче управления нелинейными динамическими системами с памятью [3] на основе интегростепенных рядов Вольтерра.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Будем искать решение уравнения (3) в виде (4). Решение должно удовлетворять уравнению (3) в смысле определения 2. В этом случае правомерно равенство $Q_m * \delta = Q_m$ (обоснование см., например, в [15, с. 136]).

Подставляя (4) в (3), получим уравнение, содержащее неизвестную постоянную c и неизвестную регулярную функцию $v(t)$:

$$\text{(П.1)} \qquad \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{(m-k)!k!} \left(Q_m(t)c\right)^{m-k} \left(\int\limits_0^t Q_m(t-s)\, v(s) ds \right)^k = f(t).$$

Устремляя в (П.1) t к нулю, получим алгебраическое уравнение степени N

$$\text{(П.2)} \qquad L(c) = f(0)$$

для определения постоянной c. Если c удовлетворяет уравнению (П.2), то операция дифференцирования равенства (П.1) законна и приводит к эквивалентному уравнению относительно функции $v(t)$. Пусть далее c – простой вещественный корень уравнения (П.2). Введем пространство $C_{[0,\rho]}$ с нормой $\|v\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant \rho} |v(t)|$, где $0 < \rho \leqslant T$. Дифференцируя (П.1) по t и учитывая (П.2), получим для определения регулярной функции v искомое интегральное уравнение второго рода

$$\text{(П.3)} \qquad v(t) = \Phi(v,t).$$

Здесь

$$\Phi(v,t) = \int\limits_0^t Q(t,s)\, v(s)\, ds + R(v,t),$$

$$Q(t,s) = -\frac{1}{a(t,c)} \frac{d}{dt} \left[\sum_{m=1}^{N} m \left(Q_m(t)\, c\right)^{m-1} Q_m(t-s) \right],$$

$$a(t,c) = \sum_{m=1}^{N} m (Q_m(t)c)^{m-1} Q_m(0),$$

$$\lim_{t\to 0} a(t,c) = L^{'}(c) \neq 0, \quad |R(v,t) - R(v,0)| = O(|v|^2).$$

Нелинейное отображение $R(v,t)$ аналитическое (или точнее “полиномиальное”) по v и непрерывное по t. При всех v существует $\lim\limits_{t\to 0} R(v,t) = b$, где $b = -\dfrac{f'(0)}{L'(c)}$. В силу структуры отображения $R(v,t)$ существуют такие $r > 0$, $0 < \rho \leqslant T$, что уравнение (П.3) удовлетворяет в шаре $S(b,r)$ пространства $C_{[0,\rho]}$ условиям принципа сжимающих отображений. Поэтому последовательность $v_n = \Phi(v_{n-1},t)$, $v_0 = b$ сходится равномерно к решению v, единственному в шаре $S(b,r)$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что оценки r, ρ в теореме не приводятся. Тем ни менее использование метода выпуклых мажорант позволит в конкретных примерах оценить снизу допустимый радиус шара $S(b,r)$ в пространстве $C_{[0,\rho]}$ и допустимое ρ (см. пример 1 в разделе 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rugh W.J.* Nonlinear System Theory. The John Hopkins University Press. 1981.
2. *Corduneanu C.* Functional Equations with Causal Operators, Taylor and Francis, London, 2002.
3. *Belbas S.A., Bulka Yu.* Numerical solution of multiple nonlinear Volterra integral equations // Appl. Math. Comput. J., Elsevier Publ. 2011. V. 217. No. 9. P. 4791 4804.
4. *Щербаков М.А., Султанов Б.В.* Анализ цифровых систем фазовой синхронизации на основе функциональных разложений Вольтерра. Пенза: Изд-во Пензен. гос. ун-та, 2002.
5. *Belbas S.A., Schmidt W.H.* Optimal control of impulsive Volterra equations with variable impulse times // Appl. Math. Comput. J. 2009. V. 214. No. 2. P. 353 369.
6. *Doyle F.J., Pearson R.K., Ogunnaike B.A.* Identification and Control using Volterra Models. Springer Publ., 2002.
7. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра первого рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.
8. *Щербинин М.С.* Оптимизация потребления энергоресурсов турбокомпрессором М-1 ЭП-300 с использованием программно-вычислительного комплекса // Науч.-техн. вест. ОАО "НК Роснефть". 2010. № 3. С. 24 27.
9. *Апарцин А.С.* Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода: элементы теории и численные методы // Изв. ИГУ, сер. мат. 2007. Т. 1. № 1. С. 13 42.
10. *Zavalishin S.T., Sesekin A.N.* Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. 4-е издание. М.: Наука, 1988.
12. *Sidorov D.* Modelling of Non-linear Dynamic Systems by the Volterra Series Approach: Identification and Applications, in Attractors, Signals, and Synergetics, (Edt.) W. Klonowski, Pabst Science Publishers, USA-Germany, 2002. P. 276 281.
13. *Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н.* Об обобщенных решениях интегральных уравнений в задаче идентификации нелинейных динамических моделей // АиТ. 2009. № 4. С. 41 47.
14. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsin A., Falaleev M.* Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications, Dordrecht, Kluwer Publ., 2002.
15. *Schwartz L.* Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques, Hermann, Paris, 1961 (Пер.: *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.)