НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ АРГУМЕНТА НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Строятся малые решения $x(t) \to 0$ при $t \to 0$ нелинейных операторных уравнений $F(x(t), x(\alpha(t)), t) = 0$ с функциональным возмущением аргумента $\alpha(t)$. Методом диаграммы Ньютона задача сводится к квазилинейным операторным уравнениям с функциональным возмущением аргумента. Показано, что решения таких уравнений могут иметь не только алгебраические, но и логарифмические точки ветвления, и содержат свободные параметры. Число свободных параметров и вид решения зависят от свойств жордановой структуры операторных коэффициентов уравнения.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$F(x(t), x(\alpha(t)), t) = 0, \tag{1}$$

где $F: E_1 \times E_1 \times R \to E_2$ – аналитическое нелинейное отображение в окрестности нуля, т.е.

$$F(x(t), x(\alpha(t)), t) = \sum_{i+j+k\geq 1}^{\infty} F_{ijk} x^i(t) x^j(\alpha(t)) t^k, \tag{2}$$

F_{ijk} – степенные операторы [1, с. 345] относительно $x(t)$ и $x(\alpha(t))$, $\alpha(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t^i$, $|\alpha_1| < 1$, – функциональное возмущение аргумента t нейтрального типа. В случае $E_1 = E_2 = R$ аналитические решения таких уравнений строились в работах [2–4].

Определение 1. Если в разложении (2) $F_{100} \neq 0$ и $F_{010} \neq 0$, то уравнение (1) будем называть квазилинейным.

В настоящей работе строятся малые разветвляющиеся решения $x(t) \to 0$ при $t \to 0$ уравнения (1). Применяются методы из [1, 5] и используются результаты работ [6–9]. Замена

$$x(t) = t^{\varepsilon}(u_0 + u(t)), \quad u_0 \neq 0, \tag{3}$$

где $\varepsilon = r/s$, положительное рациональное число определяется методом диаграммы Ньютона [5, с. 432], позволяет свести построение малых решений $x(t) \to 0$ при $t \to 0$ к квазилинейному уравнению с функциональным возмущением аргумента (ФВА) нейтрального типа относительно функции $u(t)$

$$Au(t) - Bu(\alpha(t)) + R(u(t), u(\alpha(t)), t^{1/s}) = 0. \tag{4}$$

Здесь A и B – зависящие от u_0 линейные ограниченные операторы, отвечающие соответствующим производным Фреше оператора (2),

$$R(u(t), u(\alpha(t)), t^{1/s}) = \sum_{i+j=2}^{\infty} R_{ij0} u^i(t) u^j(\alpha(t)) + \sum_{i+j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} R_{ijk} u^i(t) u^j(\alpha(t)) t^{k/s}. \tag{5}$$

Элемент u_0 определяется из уравнения укорочения

$$P(u_0) \triangleq \sum_{(i+j)\varepsilon+k=\theta} F_{ijk} u_0^{i+j} (\alpha'(0))^{\varepsilon j} = 0. \tag{6}$$

Таким образом, метод диаграммы Ньютона [5, с. 432] позволяет свести уравнение (1) к квазилинейному уравнению (4) с ФВА нейтрального типа и уравнению укорочения (6).

Теорема 1. *Пусть уравнение укорочения (6), соответствующее определенному отрезку диаграммы Ньютона оператора (2) при выбранном* $\varepsilon > 0$, *имеет решение* $u_0 \neq 0$, *оператор* A *непрерывно обратим и* $B \equiv 0$, *тогда уравнение (1) имеет решение*

$$x(t) = \sum_{i=r}^{\infty} x_i t^{i/s}, \quad x_r = u_0.$$

Доказательство. Так как оператор A непрерывно обратим, $B \equiv 0$, то коэффициенты x_i определяются единственным образом методом неопределенных коэффициентов. Сходимость ряда в окрестности точки $t = 0$ легко устанавливается с помощью принципа сжимающих отображений.

Замечание 1. Приведенные выше рассуждения можно применить и к исследованию уравнений Вольтерры

$$F(x(\alpha_1(t)), \ldots, x(\alpha_N(t)), t) + \int\limits_0^{\beta(t)} K(t,s) G(x(\alpha_1(t)), \ldots, x(\alpha_N(t)))\, ds = 0, \tag{7}$$

где $\alpha_i(t) = \sum_{j=\beta_i}^{\infty} \alpha_{ij} t^j$, $i = 1, \ldots, N$, имеющих важные приложения в энергетике [10, 11].

Отметим, что замена $t = \tau^s$ позволяет избавиться от дробных степеней в уравнении (4). Поэтому для упрощения изложения будем предполагать, что в уравнении (4) $s = 1$.

Далее уравнение (4) будет исследовано в общем случае, когда $B \neq 0$. При этом предполагается, что оператор A непрерывно обратим. Доказывается, что в общем случае уравнение (1) имеет разветвляющееся решение, представимое в виде логарифмо-степенных рядов.

Введем линейный ограниченный оператор $C \triangleq A - B$. Пусть оператор $C: E_1 \to E_2$ фредгольмов и имеет полный B-жорданов набор $\{\varphi_i^{(j)}\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$ [1, с. 427], т.е. выполняются условия

$$C\varphi_i^{(1)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$C\varphi_i^{(j+1)} = B\varphi_i^{(j)}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, p_i - 1,$$

$$\det \langle B\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j \rangle_{i,j=0}^{n} \neq 0,$$

где $C^* \psi_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим треугольную систему из N операторных уравнений вида

$$Lx = \beta, \tag{8}$$

где $L = [L_{ik}]_{i,k=\overline{1,N}}$, $L_{ik} = 0$, $k > i$, $i, k = 1, \ldots, N$,

$$L_{ik} = \begin{cases} -Ba_{ik}, & k \leq i - 1, \quad a_{i,i-1} \neq 0, \\ C, & k = i, \end{cases}$$

вектор β принадлежит $E_2 \times \ldots \times E_2$, $x \in E_1 \times \ldots \times E_1$, $N \geq \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{p_i\}$.

Лемма 1. *Оператор* L *действует из* E_1^N *в* E_2^N *и является фредгольмовым. При этом* $\dim N(L) = \dim N(L^*) = k$, *где* $k = p_1 + \ldots + p_n$ – B*-корневое число фредгольмова оператора* C.

Доказательство основано на применении обобщенной леммы Шмидта [5, с. 232] и свойств полных жордановых наборов (см. [1, гл. 9]).

Следствие 1. *Если вектор-столбец* β *имеет вид* $(0, \ldots, 0, \beta_{\max\{p_i\}+1}, \ldots, \beta_{\max\{p_i\}+m})'$, *где* $m = N - \max\{p_i\}$, *то система* $Lx = \beta$ *разрешима.*

При построении решений уравнений вида (4) приходится решать несколько операторно-разностных уравнений с полиномиальной правой частью вида

$$Ax(z) - Bx(z+a) = P(z), \tag{9}$$

где $z = \ln|t|$, $a \in \mathbb{R}$, $P(z) = \sum_{i=0}^{m} P_i z^i$ – определенный полином аргумента z степени m, коэффициенты P_i принадлежат E_2, $i = \overline{1,m}$. Решение $x(z)$ строится в виде полинома аргумента z.

Лемма 2. *Пусть оператор C непрерывно обратим, тогда уравнение (9) имеет единственное решение*

$$x(z) = \sum_{i=0}^{m} x_i z^i. \tag{10}$$

Для доказательства достаточно подставить предлагаемое решение в исходное уравнение. В результате для определения коэффициентов решения получим треугольную операторную систему с обратимым оператором на диагонали, из которой все коэффициенты решения определяются единственным образом.

Лемма 3. *Пусть $\dim N(C) = \dim N(C^*) = n$ и $\{\varphi_i^{(j)}\}$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,p_i$, – полный B-жорданов набор оператора C, тогда уравнение (9) имеет решение*

$$x(z) = \sum_{i=0}^{m+p} x_i z^i, \tag{11}$$

где $p = \max\limits_{i=1,\ldots,n}\{p_i\}$, зависящее от $k = p_1 + \ldots + p_n$ произвольных постоянных.

Доказательство леммы 3 вытекает из леммы 1. Для этого достаточно подставить предлагаемое решение в исходное уравнение. В результате для определения коэффициентов x_i решения (11) получим треугольную операторную систему с фредгольмовым оператором на диагонали вида (8), рассмотренную в лемме 1 и следствии 1. Поэтому разрешимость этой системы и справедливость леммы 3 вытекают из следствия 1. Коэффициенты x_i разложения (11) можно вычислить последовательно методом неопределенных коэффициентов. При этом первым вычисляется коэффициент при старшей степени z. Произвольные постоянные, появляющиеся при вычислениях, определяются из условий разрешимости последующих уравнений системы. Детали вычислений изложены в работах [6, 7] (см. также [9]).

Вернемся к задаче построения малого решения квазилинейного уравнения (4), в котором $s = 1$.

Лемма 4. *Пусть числа $q \in (0,1)$ и Q удовлетворяют неравенству*

$$q^Q \|A^{-1}B\| \le q \tag{12}$$

и существует функция $u_Q^*(t)$, для которой выполняется оценка

$$\|Au_Q^*(t) - Bu_Q^*(\alpha(t)) - R(u_Q^*(t), u_Q^*(\alpha(t)), t)\| = o(|t|^Q), \quad t \to 0, \tag{13}$$

тогда существуют числа $\rho > 0$, $r > 0$ такие, что в окрестности $|t| < \rho$ уравнение (4) имеет решение

$$x(t) = u_Q^*(t) + t^Q v(t), \tag{14}$$

где функция $v(t) \to 0$ при $t \to 0$ и

$$\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|t|\le\rho} \|v(t)\|_{E_1} \le r. \tag{15}$$

Доказательство вытекает из принципа сжимающих отображений, так как замена (14) приводит к уравнению относительно функции $v(t)$ со сжимающим оператором при достаточно большом Q.

Функцию $u_Q^*(t)$, используемую в замене (14), можно строить в виде полинома

$$u_Q^*(t) = \sum_{s=1}^{Q} u_s(\ln|t|)t^s, \tag{16}$$

где коэффициенты $u_s(\ln|t|)$ являются полиномами возрастающих порядков от $\ln|t|$ и могут быть вычислены из рекуррентных последовательностей разностных уравнений на основании лемм 1–3.

Таким образом, доказана основная теорема работы.

Теорема 2. *Пусть в уравнении (4) оператор A непрерывно обратим, $\alpha(0) = 0$, $|\alpha'(0)| < q < 1$, Q удовлетворяет неравенству*

$$|\alpha'(0)|^Q \|A^{-1}B\| < q < 1,$$

функции $\alpha(t)$, $R(u(t), u(\alpha(t)), t)$ аналитические или обладают гладкостью порядка Q в некоторой окрестности нуля и число $\lambda = 0$ является регулярной точкой или изолированной фредгольмовой точкой семейства операторов

$$\tilde{C}(i) \triangleq A + (\lambda - \alpha'(0)^i)B, \quad i = 1, 2, \ldots, Q. \tag{17}$$

Тогда уравнение (4) имеет решение вида

$$u(t) = \sum_{i=1}^{Q} u_i(\ln|t|)t^i + t^Q v(t). \tag{18}$$

Если $\lambda = 0$ является регулярной точкой всех операторов $\tilde{C}(i)$, $i = 1, \ldots, Q$, то коэффициенты u_i не зависят от $\ln|t|$ и определяются единственным образом. Если $\lambda = 0$ – регулярная точка операторов $\tilde{C}(i)$, $i = 1, \ldots, j-1$, $j \le Q$, и изолированная фредгольмова точка оператора $\tilde{C}(j)$, то коэффициенты $u_1, \ldots, u_{j-1}$ также определятся единственным образом, а последующие коэффициенты $u_j(\ln|t|), \ldots, u_Q(\ln|t|)$ будут полиномами аргумента $\ln|t|$, зависящими от свободных параметров. Функция $v(t)$, входящая в решение (18), может быть построена методом последовательных приближений и удовлетворяет оценке $\|v\| = o(1)$ при $t \to 0$.

Таким образом, метод, изложенный в работе, позволяет доказывать теоремы существования и строить параметрические семейства вещественных решений уравнения (1) в виде

$$x(t) = t^{r/s}\Big(u_0 + \sum_{i=1}^{Q} u_i(\ln|t|)t^{i/s} + o(|t|^{Q/s})\Big).$$

В основе метода лежат классические результаты В.А. Треногина (см. [1, гл. 7–9]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969.
2. *Smajdor W.* Local analytic solutions of functional equations // Annal Polon. math. 1967. V. 19. № 1. P. 37–45.
3. *Smajdor W.* Local analytic solutions of functional equations // Annal Polon. math. 1970. V. 24. P. 39–43.
4. *Baron K., Ger R., Matkowski J.* Analytic solutions of a system of functional equations // Publs. math. 1975. V. 22. № 3, 4. P. 189–194.
5. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1986.

6. *Сидоров Н.А., Труфанов А.В.* Структура решений линейных операторных уравнений с функциональным возмущением аргумента // Тр. Средневолжского мат. о-ва. 2006. Т. 1. № 8. С. 104–109.
7. *Sidorov N.A., Sidorov D.N., Trufanov A.V.* Generalized solutions of nonluinear integral-functional equations // Nonlinear boundary problems. 2006. V. 16. P. 96–106.
8. *Sidorov Nikolay, Loginov Boris and others.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht; Boston; London, 2002.
9. *Труфанов А.В.* Квазилинейные операторные уравнения с функциональными возмущениями нейтрального типа // Вестн. Самарского гос. тех. ун-та. 2007. № 2 (6). С. 104–109.
10. *Apartsyn A.S.* Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind. Zeist, 2003.
11. *Denisov A.M., Lorenzi A.* Existence results and regularisation techniques for severely iss-posed integro-functoinal equations // Universita degli studi di Milano, quardno. 1996. № 9.