Кедрин В.С.
Кузьмин О.В.

Анализ периодической динамики дискретных последовательностей на базе алгоритмов сингулярного разложения

В докладе рассматриваются алгоритмы применения аппарата сингулярного разложения для идентификации параметров дискретных последовательностей гармонических функций. Приводятся экспериментальные зависимости численного ранга траекторной матрицы от количества тригонометрических биномов, входящих в исходную функцию, образующую дискретную последовательность. Предложен перспективный алгоритм определения частотных параметров дискретных последовательностей на базе характеристик изменения численного ранга. Рассмотрена модификация алгоритма определения частотных параметров зашумленных дискретных последовательностей с помощью исследования характеристики дисперсии квазинуль пространства траекторной матрицы.

Эффективное управление процессами требует оценки состояния параметров системы и точного прогнозирования динамики их развития. Если данная динамика выражена в виде одномерных временных рядов, то ставится задача анализа структуры ряда (в общем случае дискретной последовательности) и поиска скрытых регулярных составляющих, характеризующих закон поведения системы.

Применимость разработанных ранее традиционных методов исследования в этой области существенно ограничена, так как они ориентированы в основном на стационарный режим функционирования больших систем. При этом не всегда функционально можно описать строение системы в силу ее сложности и многосвязности. Также в настоящее время всязи с развитием информационных технологий на первый план выходят системы мониторинга процессов, формирующие в реальном времени огромные выборки данных. Здесь возникает большая задача. Как идентифицировать режим работы системы по имеющимся выборкам параметров и попытаться спрогнозировать поведение этих параметров через определенный временной отрезок.

Конечно это очень большая научная задача и данный доклад посвящен одному из частных подходов для ее решения, а именно разработки методологического аппарата для исследования дискретных выборок сложных процессов, наблюдаемых в динамических системах. В качестве центрального метода в данном аппарате выбран метод сингулярного разложения.

В связи с этим целью доклада стало исследование особенностей применения аппарата сингулярного разложения в информационных моделях анализа периодической составляющей в сложных дискретных последовательностях.

Данная цель диктует ряд задач:

1. Анализ существующих подходов к исследованию динамических процессов в сложных многосвязных системах.
2. Исследование аппарата сингулярного разложения, его возможностей и ограничений
3. Формирование алгоритма идентификации частотных параметров дискретных последовательностей с помощью аппарата сингулярного разложения.

4. Исследование особенностей применения сформированного аппарата идентификации частотных параметров применительно к процессам с шумовой характеристикой.

Для понимания природы сложного поведения процессов можно рассмотреть причины их возникновения. Их достаточно много, но к основным можно отнести:

- наличие в системе процессов, характерный временной масштаб которых больше длительности интервала наблюдения;
- влияние внешних факторов воздействия;
- дрейф параметров системы;
- выход из строя некоторых функциональных блоков, либо добавление новых.

Зачастую указанные причины могут приводить к нештатным режимам работы технических систем (сложного рода переходным процессам) и различным аварийным ситуациям. Поэтому необходима разработка алгоритмического аппарата, фиксирующего как сам факт нестационарного поведения, так и понимание механизма его осуществления.

В настоящий момент наметилось несколько направлений разработки такого аппарата. Одно из них основано на методах, заимствованных из нелинейной динамики. Однако данный аппарат является ограниченным, так как подразумевает постоянство оператора эволюции системы, генерирующей временной ряд (в общем случае пространственную дискретную последовательность). В силу этого с помощью данного аппарате достаточно сложно идентифицировать переходные поведения процессов, вызванные изменением структурного и количественного состава элементов системы и их связей.

Альтернативным подходом к анализу нестационарности временного ряда является разделение его на квазистационарные участки с последующей их классификацией. В этом случае целью анализа является отслеживание состояния выделенных участков. Само состояние квазистационарных участков может быть определено:

1) с помощью оценки спектрального состава на базе оконного преобразования Фурье. Однако данный аппарат является ограниченным в силу чувствительности Фурье-преобразования к "локальным" скачкам и пикам функции. Также возникает проблема с интерпретацией спектров, так как трудно заранее определить долю случайности в исследуемом процессе.
2) с помощью специальных статистических тестов, основанных на анализе характера распределений участков. Однако такой анализ может привести к неконтролируемой ошибке. Также существенным недостатком является то, что отдельные осциллирующие составляющие могут вносить неопределенность их взаимодействия и как следствие возникают затруднения при учете относительных фазовых сдвигов этих компонент.

В силу указанных ограничений, использование любого из вышеперечисленных подходов будет недостаточно эффективным для обоснованного анализа поведения процессов сложной многосвязной динамической системы. Поэтому, задачу идентификации сложного поведения процессов нельзя считать решенной и поиск новых эффективных методов в этой области продолжается.

В последнее время активно развиваются новые спектральные методы анализа, позволяющие получать большую аналитическую информацию о структуре сложной дискретной последовательности. К данным методам можно отнести вейвлет-анализ и взятый за основу в представляемой работе анализ, основанный на сингулярном разложении матрицы развертки (СРМР). Перспективность указанного аппарата и его развитие в нашей стране подчеркивается рядом работ, защищенных в последние годы.

Метод сингулярного разложения основан на фундаментальной теореме линейной алгебры, согласно которой для любой квадратной матрицы **A** существует две вещественные ортогональные матрицы, такие что выполняется, указанное соотношение:

$$\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D}.$$

Произведем следующие преобразования:

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T,$$

откуда в силу свойств ортогональности матриц $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ и $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$$

Суть метода СРМР проиллюстрирована на рис. 1.

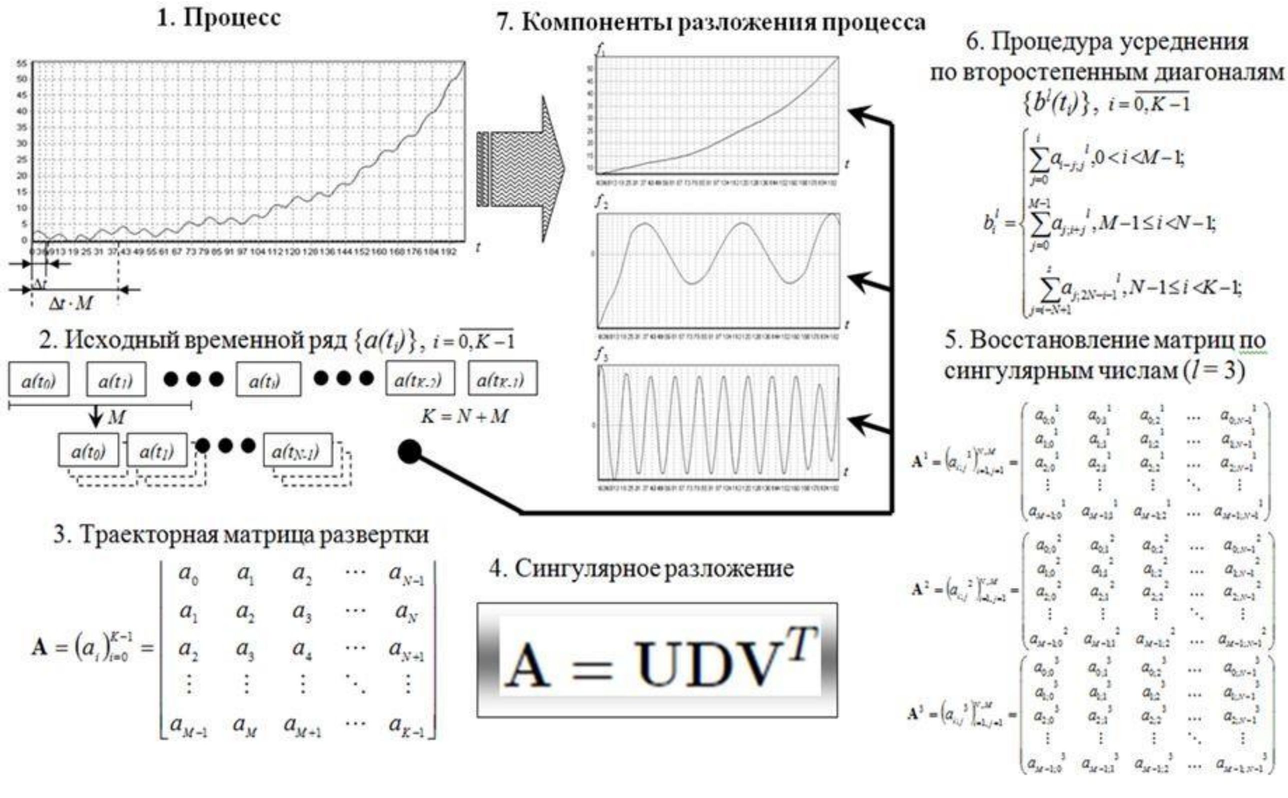

Рис. 1. Этапы реализации метода СМПР

Ключевым моментом здесь является создание траекторной матрицы развертки с помощью однопараметрической сдвиговой процедуры элементов временного ряда. Разложение матрицы по представленному фундаментальному соотношению позволяет исследовать отдельные траектории дискретной выборки данных. Причем эти траектории могут быть интерпретированы как простейшие составляющие движения, описывающие динамику элементарных подсистем. Необходимо заметить, что каждая траектория характеризуется собственным сингулярным числом, расположенным на главной диагонали матрицы D.

Предложенный метод имеет также ряд ограничений с позиции разделимости на элементарные подсистемы. Так в ранее проводившихся исследованиях было показано, что условия точной разделимости являются достаточно строгими (табл. 1).

Таблица 1

Условия точной разделимости

	$const$	cos	exp	exp× cos	$ak+b$
$const$	–	+	–	–	–
cos	+	+	–	–	–
exp	–	–	–	+	–
exp× cos	–	–	+	+	–
$ak+b$	–	–	–	–	–

Но в то же время с помощью метода сингулярного разложения можно достичь приближенной асимптотической разделимости, результаты которой являются искаженными, но при этом идентифицируются своими классами функций.

Таблица 2

Условия асимптотической разделимости

	$const$	cos	exp	exp× cos	$ak+b$
$const$	–	+	+	+	–
cos	+	+	+	+	+
exp	+	+	+	+	+
exp× cos	+	+	+	+	+
$ak+b$	–	+	+	+	–

Как видно из таблицы 2 асимптотическая разделимость имеет место для гораздо более широкого класса функций.

Таким образом, несмотря на ряд ограничений, результаты исследования в области разделимости позволяют говорить о возможности создания классификатора сложной динамки процессов на базе аппарата сингулярного разложения.

Сравнение метода сингулярного разложения с другими дискретными методами спектрального анализа выявило следующие преимущества:

1. Набор функций разложения порождается самой исследуемой функцией процесса $f(t)$ и длиной окна M.

2. Длина строки (окна) сингулярной матрицы развертки M позволяет легко варьировать качество и состав выделяемых составляющих.

3. Возможность управляемого восстановления исходного процесса по интерпретируемым компонентам.

4. Отсутствие для реальных временных рядов граничного эффекта по параметру сдвига.

5. Представление отдельной собственной сингулярной функции в виде линейного фильтра показывает, что он обладает не комплексной, как в случае Фурье-преобразования, а действительной частотной характеристикой, что снимает проблемы, связанные с моделированием фазовых сдвигов между составляющими.

Таким образом, несмотря на достаточную простоту реализации, аппарат СРМР имеет ряд важных свойств, позволяющих применять его для исследования сложной динамики.

Указанные свойства были положены в основу создания аппарата анализа.Как было сказано ранее, каждая выделяемая элементарная подсистема характеризуется своим диагональным сингулярным числом. Логично предположить, что если совокупность диагональных сингулярных чисел есть некоторый сингулярный спектр, который формирует образ разложения на элементарные подсистемы, то эволюция данного спектра должна отражать скрытую структуру взаимосвязи этих подсистем. И в свою очередь характеризовать режим или закон поведения системы в определенном нестационарном состоянии.

Таким образом, изучение изменения структуры сингулярного спектра при изменении оператора эволюции представляет интерес. С этой целью был предложен следующая концепция графической оценки относительного сингулярного спектра (далее ОСС), представленный на рис. 2.

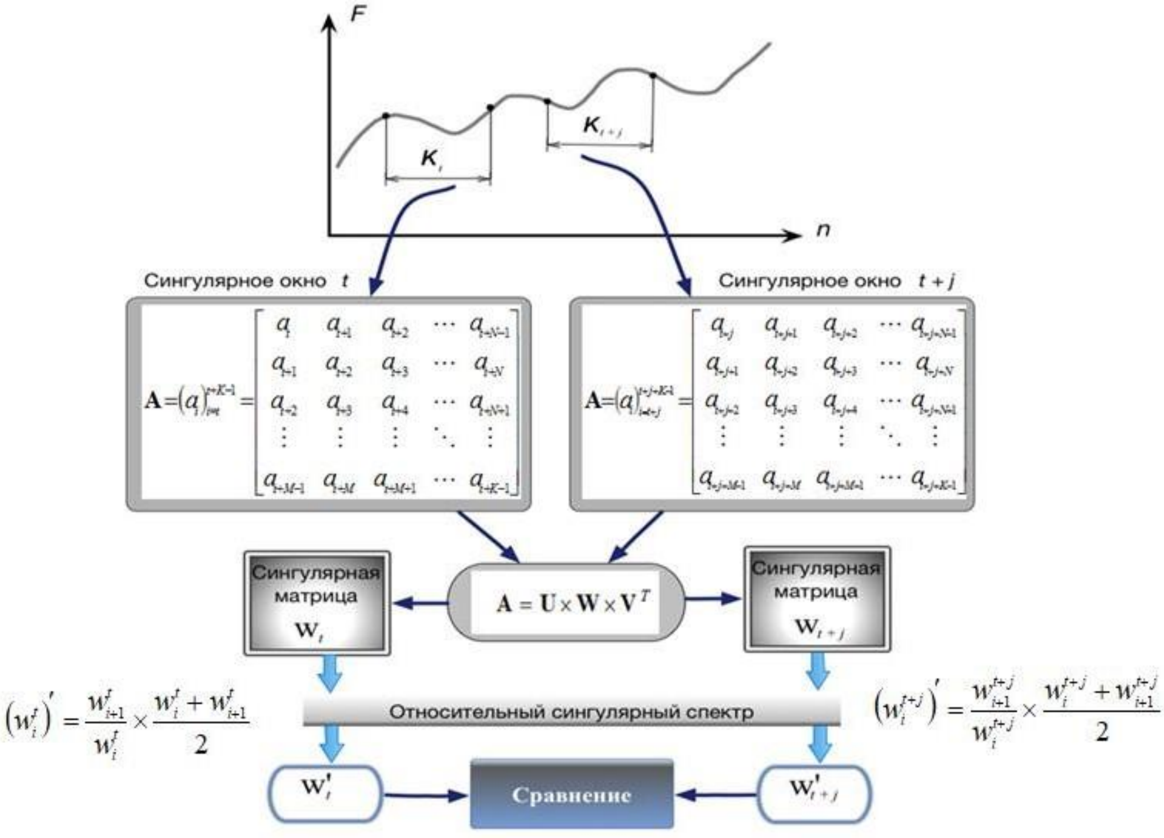

Рис. 2. Концепция сравнения относительных сингулярных спектров для разных участков временной выборки

В данном контексте под ОСС понимается расчет относительной меры для двух рядом стоящих сингулярных чисел с учетом их средней величины. Это свойство позволяет исследовать структурные изменения в матрице **W** при сравнении разных участков временного ряда, к которым применяется метод СРМР. Идея оценки ОСС состоит в том, чтобы рассмотреть особенности изменения в структуре совокупности ряда относительных сингулярных чисел (далее ОСЧ) $\mathbf{W}'$ при итерационном перемещении сингулярного окна заданной ширины K с параметром траекторной матрицы развертки M.

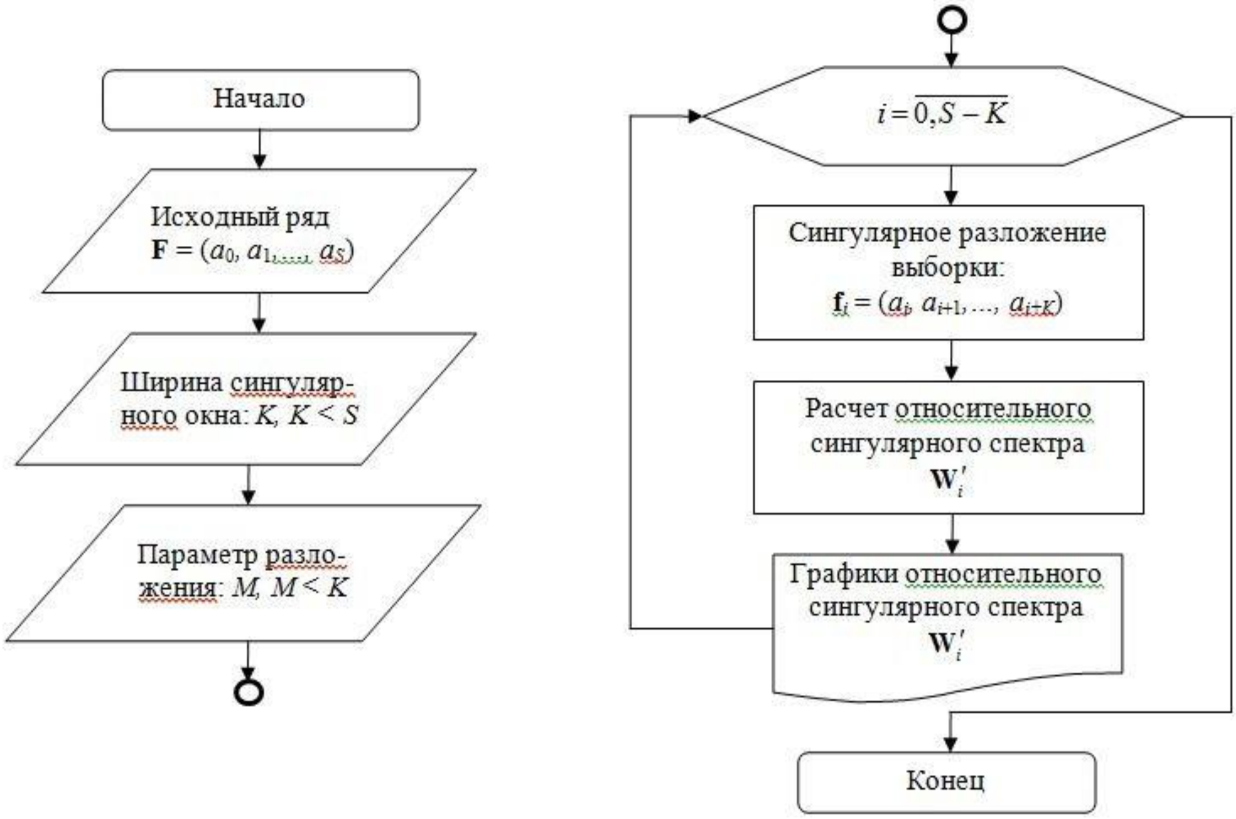

Рис. 3. Графическое сравнение относительных сингулярных спектров для разных участков временной выборки

Для реализации данной идеи был составлен алгоритм графического анализа изменения ОСС (рис. 3) при итерационном сдвиге окна выборки значений заданной динамической размерности K. Алгоритм был включен в экспериментальную версию программного комплекса визуального проектирования и моделирования алгоритмов, разрабатываемого в среде Qt с помощью объектно-ориентированного языка C++. Для реализации сингулярного разложения был применен алгоритм Голуба-Рейнша, который имеется в составе библиотеки численных вычислений в прикладной математике и науке GSL.

С помощью сформированного алгоритма графического анализа изменения ОСС была проведена серия экспериментов.

Эксперимент 1.

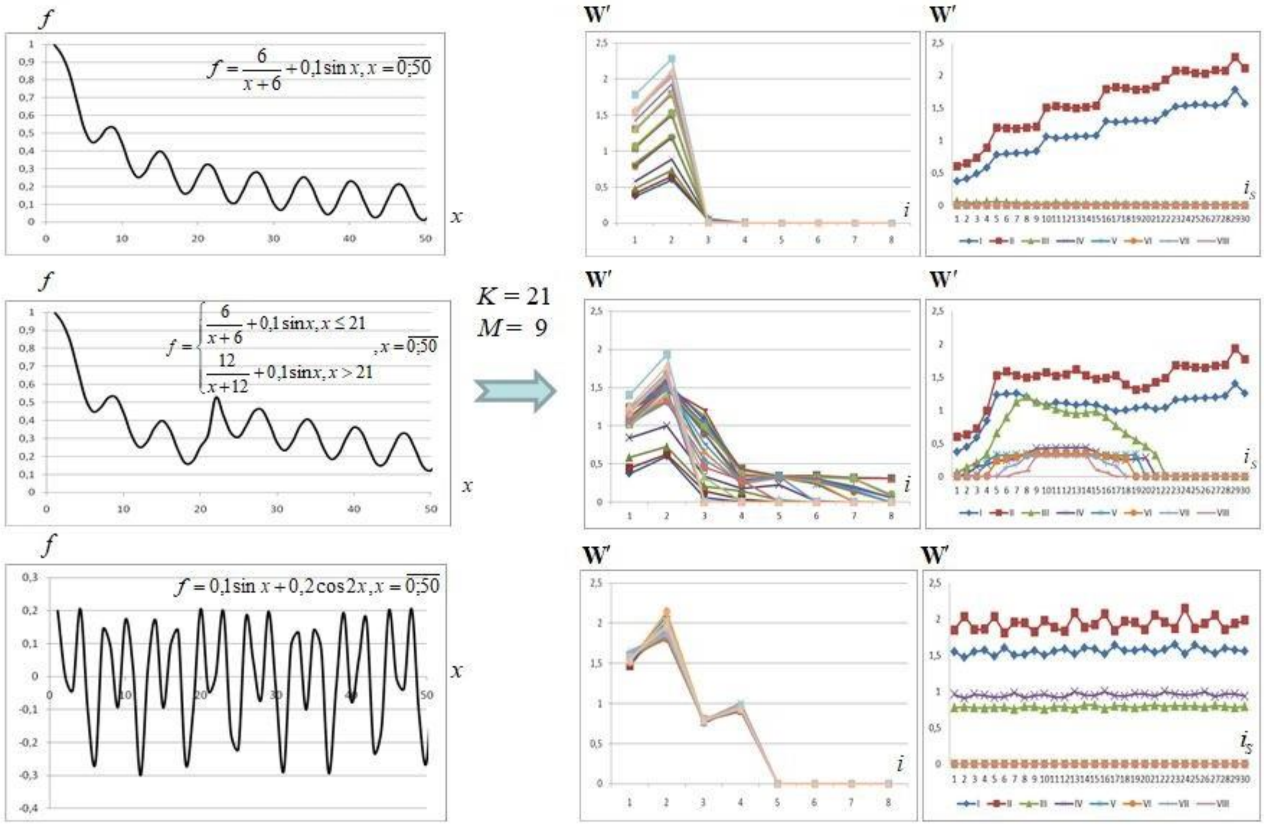

Рис. 4. Исследования особенностей формирования ОСС для аддитивных моделей функций состоящих их двух подсистем

Исследование особенностей формирования ОСС для аддитивных моделей функций, состоящих их двух подсистем (рис. 4). Эксперимент показал, что:

1) в структуре и зависимости изменения спектра проявляются локальные черты каждой подсистемы в отдельности, что позволяет идентифицировать их структуру;
2) так аддитивная модель равносторонней гиперболы и синуса с разрывом первого рода характеризуется всей совокупностью ОСЧ.
3) Аддитивная модель синуса и косинуса с разной частотой характеризуется четырьмя ОСЧ, которые формируют два пика на графике структуры и имеют постоянную зависимость изменения спектра.

Эксперимент 2.

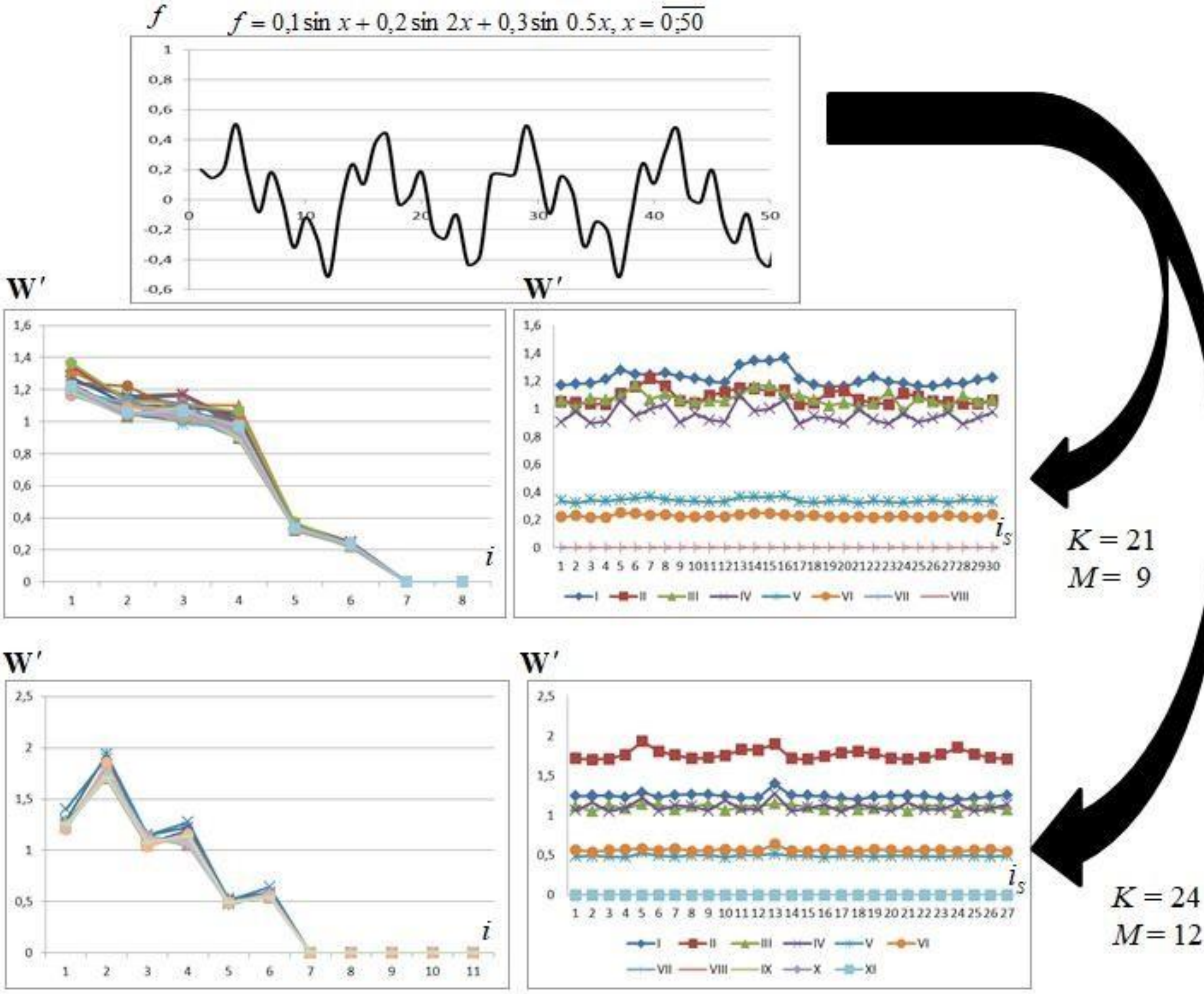

Рис. 5. Исследования особенностей формирования ОСС для аддитивных моделей функций состоящих их трех подсистем

Исследование особенностей формирования относительного сингулярного спектра для аддитивной модели функции (рис. 5), состоящей их трех подсистем. Эксперимент показал, что:

1) аддитивная модель функции состоящей их трех осциллирующих подсистем с разной частотой характеризуются шестью сингулярными числами, которые формируют три пика на графике структуры спектра и имеют постоянную зависимость изменения;
2) эта зависимость проявляется четче при увеличении параметра M и K соответственно, что подтверждает вывод о том, что параметр M согласуется с фрактальной размерностью системы (порядок системы дифференциальных уравнений, описывающий виртуальный объект), порождающей временной ряд, сделанный в научной литературе по исследуемой теме.

(пл 16) Эксперимент 3.

$$f = \begin{cases} 0{,}1\sin x, x \le 50; \\ 0.1\sin x + 0.2\cos 2x, 50 < x \le 100;, x = \overline{0;150} \\ 0.1\sin x * \cos 2x, x > 100 \end{cases} \qquad \begin{matrix} K = 21 \\ M = 9 \end{matrix}$$

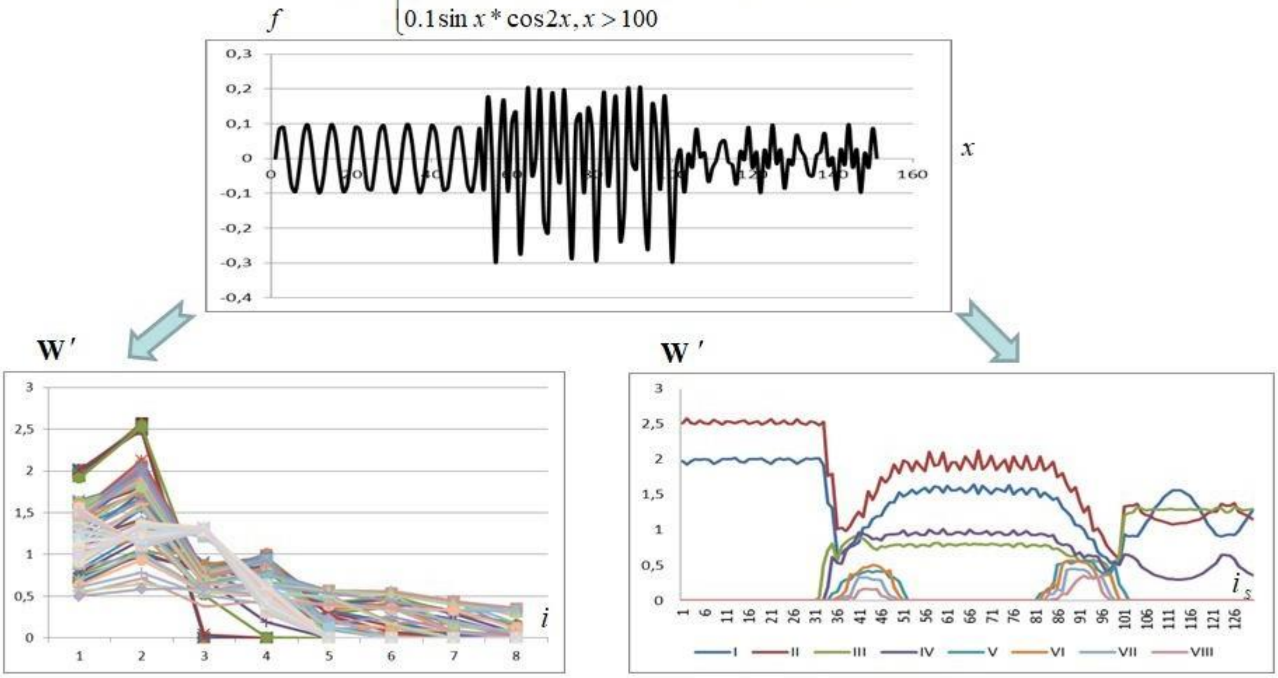

Рис. 6. Исследования особенностей формирования ОСС для аддитивных моделей функций состоящих их трех подсистем

В результате исследования особенностей формирования относительного сингулярного спектра для осциллирующей модели функции (рис. 6), меняющей свой структурный и функциональный режим, определено, что:

1) характер изменения спектра позволяет судить о моментах изменения режима состояния системы, порождающей дискретную последовательность, и наличии элементарных подсистем, характеризующих данное состояние;
2) моменты изменения режима состояния системы характеризуется трапецеидальной зависимостью изменения спектра для последних по индексу значений ОСЧ.

Таким образом, выделенные в ходе экспериментов ключевые особенности структуры и изменения ОСС могут стать основой для разработки новой методологии идентификации структурного состава системы, генерирующей исходную дискретную последовательность. Это особенно актуально для мониторинга параметров управления в режиме реального времени. К ключевым особенностям, которые, были выявлены в ходе эксперимента можно отнести:

1) количество осциллирующих подсистем прямо пропорционально совокупности наибольших по значению ОСЧ, при этом каждая осциллирующая подсистема характеризуется двумя числами;
2) Абстрактные изолинии зависимости изменения структуры ОСС имеют индивидуальный характер, зависящий от вида функций и вида модели (мультипликативная и аддитивная).

В заключении мне хотелось бы привести три основные задачи, сформулированные одним известным советским специалистом в области искусственного интеллекта Дмитрием Александровичем Поспеловым применительно к когнитивной компьютерной графике.

1. *«Создание таких моделей представления знаний, в которых была бы возможность однообразными средствами представлять как объекты, характерные для логического мышления, так и образы-картины, с которыми оперирует образное мышление.»*
2. *«Визуализация тех человеческих знаний, для которых пока невозможно подобрать текстовые описания.»*
3. *«Поиск путей перехода от наблюдаемых образов-картин к формулировке некоторой гипотезы о тех механизмах и процессах, которые скрыты за динамикой наблюдаемых картин.»*

Мне представляется возможным, что продолжение представленной в докладе научно-исследовательской работы может стать одним из путей решения указанных задач.

Литература

1. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 548 с., ил.

2. **Кузьмин**, О.**В.** Сингулярное разложение в моделях дискретных последовательностей / О. В. Кузьмин, В. С. Кедрин – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2014.− 214 с.

3. **Кузьмин, О.В.** Анализ структуры гармонических рядов динамики на базе алгоритма сингулярного разложения / О. В. Кузьмин, В. С. Кедрин // Проблемы управления. – 2013. – № 1. – С. 26–31 .

4. **Schreiber T.** Detecting and Analyzing Nonstationarity in a Time Series Using Nonlinear Cross Predictions // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 843.

5. **Schreiber T**. Interdisciplinary application of nonlinear time series methods // Phys. Rep. 1999. Vol. 308. P. 3082.

6. **Mallat, S. and Zhang, Z.** Matching pursuit with time-frequency dictionaries // IEEE Trans. Sign. Process. 1993. Vol. 41. P. 3397-3415.

7. **Жиров М.В.** Идентификация и адаптивное управление технологическими процессами с нестационарными параметрами / М.В. Жиров, В.В. Макаров, В.В. Солдатов – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 203, [5] с.: ил.